East Asian Math. J.
Vol. 35 (2019), No. 2, pp. 141-161
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2019.016

# 원뿔곡선을 이용한 중세 이슬람의 일반각의 3등분문제의 재조명과 시각화

## The reinterpretation and visualization about trisecting general angle in Medieval Islam using conic sections

김 향 숙 · 김 미 연 · 박 재 현

ABSTRACT. The purpose of this paper is to reinterpret and visualize the trisection line construction of general angle in the Medieval Islam using conic sections. The geometry field in the current 2015 revised Mathematics curriculum deals mainly with the more contents of analytic geometry than logic geometry. This study investigated four trisecting problems shown by al-Haytham, Abu'l Jud, Al-Sijzī and Abū Sahl al-Kūhī in Medieval Islam as one of methods to achieve the harmony of analytic and logic geometry. In particular, we studied the above results by 3 steps(analysis, construction and proof) in order to reinterpret and visualize.

## Ⅰ. 연구의 필요성 및 목적

기하학의 작도문제인 '3대 난제[1)]'는 오랜 시간 동안 많은 사람들이 해결하고자 하였으나 성공하지 못했다. 그러나 일반각의 3등분 문제는 원뿔곡선을 이용하여 답을 얻을 수 있었다. 초기 그리스인들은 원뿔곡선을 이용하는 방법에 익숙하지 않았고, 기계적인 원리라고 배제하였다. 3대 작도 불가능 문제의 초기 증명으로 파푸스(c.290−c.350)의 저서 「Collection」에서 원뿔곡선을 활용한 일

Received December 19, 2018; Revised February 11, 2019; Accepted February 18, 2019.
2010 Mathematics Subject Classification : 97D40, 94B27.
Keywords: Medieval Islam, Trisection of general angle, Conic sections, Reinterpretation(analysis, construction and proof), Visualization

1)'3대 난제'란 유클리드 도구라고 일컫는 눈금없는 자와 컴퍼스만을 가지고
(1) 임의의 각을 3등분(삼등분)하는 문제(임의각의 3등분 문제)
(2) 원의 넓이와 같은 크기의 정사각형을 작도하는 문제(원적 문제)
(3) 어떤 정육면체 부피의 2배인 정육면체를 작도하는 문제(입방체의 배적 문제)
를 작도하는 것을 말한다.

반각의 3등분선 작도 방법 3가지가 보여진다. 그 중 2가지는 중세 이슬람으로 전해지지 못했고, 원뿔곡선의 준선[2]과 자취의 성질을 이용하는 방법은 현재까지 전해져서 활용되고 있다.

고대 그리스시대에는 기계적인 방법으로 무시당했던 원뿔곡선을 이용한 방법이 중세 이슬람 수학에서는 오히려 기하적인 연구로써 대수와 기하학의 연결을 확립하여 분석하는 방법으로 수학사를 화려하게 장식하고 있다([9]). 특히, 아폴로니우스(B.C.250?−200?)는 원뿔곡선을 논증기하학적으로 접근하여 원뿔곡선 연구에 지대한 영향을 끼쳤다. 이 시대에는 문자와 식을 사용할 수 없었지만, 현재의 이차곡선[3]에서 다루는 곡선을 원뿔의 절단을 통해 얻을 수 있는 원뿔곡선을 통해 대수와의 연결고리를 만들었다.

2015 개정 수학과 교육과정에서는 학습 부담 경감을 추구하여, 2009 개정 수학과 교육과정의 「기하와 벡터」과목에 포함된 내용 중에서 음함수의 미분법과 매개변수 미분법, 그리고 평면운동과 관련하여 다루던 속도와 가속도 및 속도와 거리 관련 내용은 「기하」과목에 포함하지 않고 「미적분」으로 이동하였다. 특히, 공간벡터를 삭제하게 됨에 따라 「기하」과목에서 공간에서의 직선, 평면, 공간도형 및 공간벡터에 대한 내용이 약화되었고 「기하」과목이 수학과의 진로선택과목으로 이동됨([2])에 따라 고대에서부터 중시해 온 기하가 수학교육에서 중요성이 줄어든 것은 타 교과와의 융합을 강조하는 세계적 동향과 멀어지고 있는 현상이다. 따라서, 4차 산업혁명 시대에 발맞추어 2015 개정 수학과 교육과정에서 기하 교육의 필요성과 중요성을 강조할 필요가 있을 것이다.

현행 중등 수학과 교육과정에서는 좌표를 이용해서 해석기하적으로 원뿔곡선(포물선, 타원, 쌍곡선)을 다루고 있다. 이전 연구([5])에서 Pappus가 일반각의 3등분문제에 관해 제시한 Nicomedes의 'conchoid'를 이용한 방법, Apollonius의 원뿔곡선에 관한 symptoms를 이용한 세 가지 방법(쌍곡선과 원을 이용한 방법, 원호의 3등분을 이용한 방법, 쌍곡선의 초점과 준선을 이용한 방법)을 재조명하고 시각화함으로써 원뿔곡선을 좌표평면을 이용하지 않고 평면위에 구현할 수 있음을 보이고 있다. 이런 맥락에서 본 논문에서도 중세이슬람의 일반각의 3등분문제를 원뿔곡선을 이용해서 논증기하적으로 다룸으로써 논증기하와 해석기하의 접목을 시도하고자 한다.

본 논문은 중세 이슬람의 네 명의 수학자 al−Haytham, Abu' l Jud, Al−Sijzī, Abū Sahl al−Kūhī가 원뿔곡선을 이용하여 일반각의 3등분선 작도문제를 해결한 내용을 고찰 및 분석하여 중등수학 입장에서 재조명하고, 특히 중등수학에서 다루고 있는 기하의 기본 성질만으로도 동적기하소프트웨어(GSP)를

2) Pappus의 저서 「Collection」의 Lemma p.313−318.
3) 이태규 편저 「인물중심으로 본 수학사이야기」의 원뿔곡선과 포물선 p.196−197.

활용하여 시각화한 결과를 제공하고자 한다. 결론적으로 원뿔곡선을 이용한 이슬람 수학자들의 기하적 해법의 재해석은 수학사적으로 교과내용지식을 보다 풍부하게 할 수 있으며, 학교 교육현장에서 동적기하소프트웨어를 통해 이슬람 수학자들의 연구 결과를 중등수학 입장에서 재조명하고 시각화한 자료를 활용한 탐구 활동이 이루어진다면 학생들이 수학 교과 역량을 기를 수 있는 한 장을 제공할 것이다.

## Ⅱ. 연구 내용

일반각의 3등분선 작도[4]문제에 대해서는 Pappus[5] 가 Nicomedes[6] 의 ‘conchoid[7]’를 이용한 ‘neusis construction[8]’을 선보인 이래, 여러 가지 곡선을 이용한 많은 연구결과가 보이고 있지만, 그 중에서도 특히 쌍곡선에 관한 Apollonius의 symptom을 이용한 Pappus의 방법은, 비록 당시에는 ‘기계적인 방법’으로 외면당했지만, 너무나 획기적이며, 더욱이 이심률에 의한 원뿔곡선의 재해석과 그를 활용한 제3의 작도방법[9]은 중등수학 교과내용과 연관 지어 다룰 수 있는 것으로 평가되고 있다.

그럼에도 불구하고 중세 이슬람의 기하학계로 이와 같은 Pappus의 아름다운 결과가 상당 부분 누락된 채 전달되었다고 추측되며, 따라서 각의 3등분문제는 중세 이슬람 기하학계의 연구문제 중 가장 기본적인 문제의 하나로 부각되었다([14,18,19]). 특히 10세기경의 이슬람 기하학자들은 ‘neusis construction’을 정당한 ‘기하적인 방법’으로 받아들이지 않았기 때문에, 쌍곡선을 이용한 Thābit[10]의 해법이, 비록 Pappus가 이미 보인 해석([5])과 거의 닮았지만, 기하적인 방법으로 해결한 첫 번째 결과로 평가하고 있다[11]. 그러나 일반각의 3등

---

4) 여기서의 작도는 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용하는 고전적 의미의 작도, 일명 Euclid작도를 말한다. 앞으로 특별한 단서가 없는 한, 곡선 등을 이용하는 작도와 구별하지 않고 양자를 모두 간단히 작도라 부르기로 한다.

5) Pappus of Alexandria (c.290- c.350). 저서 「Collection」에 원뿔곡선을 활용한 각의 3등분문제해결방법 3가지를 보였으나, 그 중 2가지는 중세 이슬람으로 전해지지 못했다([14]).

6) Nicomedes(c.280 B.C.- c.210 B.C.), 고대 그리스 수학자. 「On conchoid lines」을 저술하였다.

7) ‘conchoid’는 B.C. 3세기 후반에 Nicomedes가 입방배적문제를 해결하기 위해 찾아낸 곡선으로 알려져 있다.

8) marked ruler를 사용한 작도를 일컫는다.

9) Pappus의 대표적인 3가지 방법이 논문([5])에 소개되어 있다. 그 중 세 번째로 소개된 것을 뜻한다.

10) Thābit ibn Qurra (826-901). Archimedes의 「Book of Lemmas」를 아랍어로 번역하였다.

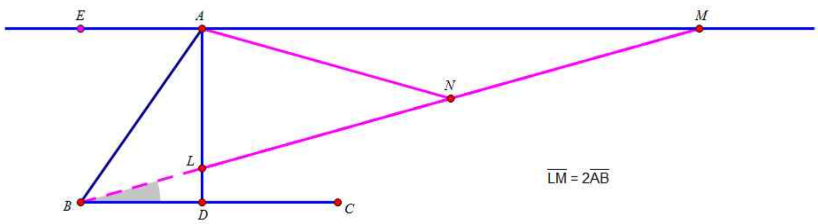
분문제 해결에 대한 중세 이슬람 기하학자들의 접근방법은 Pappus의 것과는 조금 다른 시각에서 접근한 것임을 아래와 같은 사항에서 엿볼 수 있다.

$\angle ABC$가 아래의 [그림2.1]과 같이 주어졌을 때, 점 $A$에서 변 $BC$에 내린 수선의 발을 $D$라 하고, 점 $A$를 지나는 변 $BC$의 평행선 $EA$를 긋는다. 여기서 만약 점 $B$를 지나는 반직선으로, 직선 $AD$, $EA$와 만나는 점을 각각 $L$, $M$이라 할 때

$$\overline{LM} = 2\overline{AB} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

를 만족하는 것을 그을 수 있다면, 등식 $\angle LBC = \dfrac{1}{3}\angle ABC$가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

Pappus는 '조건 (2.1)을 만족하는 점 $B$를 지나는 반직선을 긋는 방법'을 여러 가지 곡선, 즉 Nicomedes의 'conchoid' 또는 쌍곡선을 이용하여 찾았다.




[그림2.1]

한편 다음의 [그림2.2]에서 처럼 꼭짓점 $B$를 중심으로 하는 원과 $\angle ABC$와의 교점을 같은 문자 $A, C$로 나타내기로 한다. 여기서 만약 점 $A$를 지나는 반직선으로, 원 $B$와의 교점은 $D$, 변 $BC$의 연장선과의 교점은 $E$라 각각 할 때

$$\overline{DE} = \overline{AB} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.2)$$

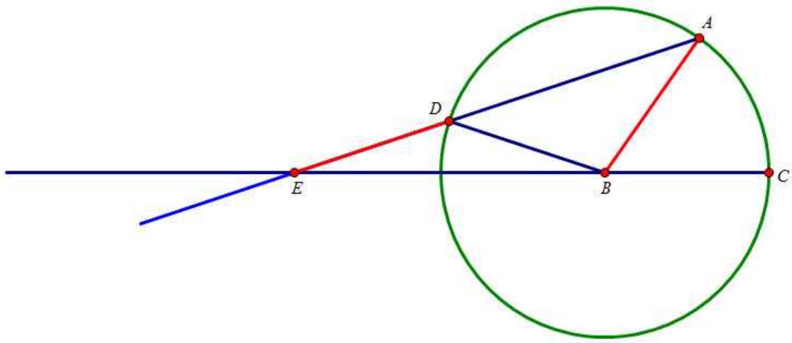
를 만족하는 것을 그을 수 있다면, 등식 $\angle DEB = \dfrac{1}{3}\angle ABC$가 성립함을 역시 쉽게 알 수 있다.

이 방법은 Archimedes의 저서 「Book of Lemmas, Proposition 8」[12] 로부터 얻을 수 있으며, 오늘날에는 Archimedean trisection이라고 불리고 있다([17, p.309-310]). 더욱이 'Alhazen's Billiard Problem'은 이 방법으로부터 기

11) 심지어는 Pappus의 저서 「Collection, Books 1-7」 마저도 아랍어로 번역된 적이 없는 것으로 전해지고 있다([19]).

12) 'Archimedes의 저서 「Book of Lemmas, Proposition 8」'을 본 논문에서는 'A-B-P-8'로 표기한다.

인된 것으로 알려져 있으며, 더욱이 후세 기하학자들에 의해 대수적인 형태로 다루어짐으로써 시대를 넘어 각광을 받은 방법이기도 하다([18]).




[그림2.2]

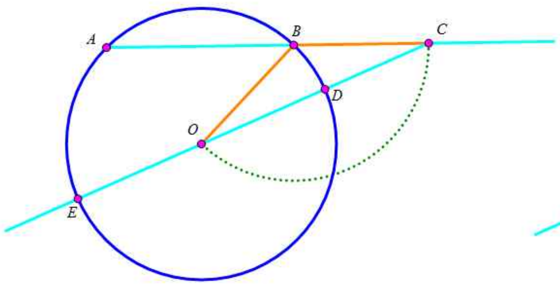
중세 이슬람에서 조건 (2.2)를 만족하는 반직선 $AE$의 작도에 대해서는 '쌍곡선과 원' 또는 '쌍곡선과 포물선'을 이용하여 얻은 결과들이 주류를 이루고 있다.

중세 이슬람 기하학자들 중에도 'neusis construction'으로 일반각의 3등분선 작도 문제 해결을 시도한 흔적이 많이 보이는데, 본 논문은 주로 [그림2.2]를 바탕으로 중세 이슬람 네 명의 수학자 al-Haytham의 쌍곡선과 원을 이용한 방법, Abu'l Jud의 쌍곡선과 포물선을 이용한 방법, Al-Sijzī의 쌍곡선과 원을 이용한 방법 및 Abū Sahl al-Kūhī의 쌍곡선과 원을 이용한 방법을 다루며 이 네 가지를 '해석', '작도', '증명'의 3단계로 고찰 및 분석하고, 가능한 한 중등수학 입장에서 재조명하고, 특히 중등수학에서 다루고 있는 기하의 기본 성질만으로 동적기하소프트웨어(GSP)를 활용하여 시각화한 자료를 제시한다.

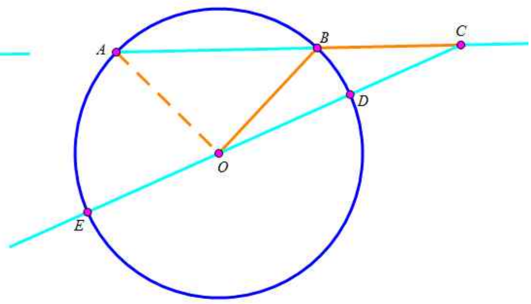
## Ⅲ. 연구 결과

A-B-P-8 에는 다음과 같은 내용이 실려 있다([17, p.309]).

"아래의 [그림3.1]처럼 $\overline{AB}$를 원 $O$의 한 현이라 할 때, $\overline{AB}$의 연장선위에 놓여있는 점 $C$로서 $\overline{BC} = \overline{OB}$를 만족하는 것을 잡으면 $\widehat{AE} = 3\widehat{BD}$가 성립한다. 단, 여기서 점 $D$는 원 $O$와 $\overline{OC}$와의 교점이며, 점 $E$는 $\overline{OC}$의 연장선과의 교점이다."




[그림3.1]




[그림3.2]

실제로 [그림3.2]처럼 반지름 $AO$를 그으면 $\angle AOE = 3\angle BOD$가 성립함으로 $\widehat{AE} = 3\widehat{BD}$임을 쉽게 알 수 있다.

Heath 는 “A−B−P−8은 각의 3등분선을 찾는 방법을 준다.” 고 말하고 있다 ([17, p.310]).

실제로 $\angle AOE$가 주어졌을 때, 지름 $ED$의 연장선위에 놓여있는 점으로 $\overline{BC} = \overline{OA}$를 만족하는 것을 $C$라 하면, $\widehat{AE} = 3\widehat{BD}$이므로 $\angle AOE = 3\angle BOD$이다.

그러나 “조건 $\overline{BC} = \overline{OA}$를 만족하는 점 $C$를 어떻게 찾을 수 있을까?” 라는 문제가 생겨나며, 그 같은 문제를 중세 이슬람 기하학자들은 여러 가지 곡선, 특히 원뿔곡선을 이용하여 다채롭게 해결한 것으로 볼 수 있다.

한편 A−B−P−8은 주어진 원호 $\widehat{AE}$에 대해서 $\widehat{BD} = \frac{1}{3}\widehat{AE}$인 원호 $\widehat{BD}$를 찾는 방법을 제시하고 있지만, Pappus는 주어진 원호 $\widehat{AE}$위에 놓여있는 점 $G$로서

$$\widehat{AG} = \frac{1}{3}\widehat{AE}$$

를 만족하는 것을 쌍곡선을 이용하여 찾음으로써 각의 3등분선을 작도하는, 미묘하지만 약간의 차이점을 엿볼 수 있다([5]).

지금부터 A−B−P−8을 근거로 한 중세 이슬람 네 수학자의 각의 3등분선 작도방법, 특히 원뿔곡선에 관한 Apollonius 의 symptoms 를 이용한 방법을 주축으로 하여 해석, 작도, 증명의 순으로 재조명하고, 아울러 이를 바탕으로 동적기하 소프트웨어[13]를 활용한 시각화 자료를 제시하고 그 작도방법을 설명한다.

13) 본 논문에서는 동적기하소프트웨어(GSP)를 사용하고 있으나, 제시된 작도방법은 다른 동적기하소프트웨어를 이용해도 무방할 것으로 생각한다.

## 1. al-Haytham[14] 의 쌍곡선과 원을 이용한 방법

쌍곡선과 원을 이용한 al-Haytham 의 방법을 중등수학의 입장에서 재조명하고 시각화하기로 한다[15].

### (1) 해석

[그림2.2]처럼 꼭짓점 $A$를 지나는 반직선으로

$$\overline{DE} = \overline{BA} = \overline{BD} \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3.1)$$

를 만족하는 것을 찾았다고 하자. 먼저 다음의 [그림3.3]처럼 점 $A$에서 변 $BC$에 내린 수선의 발을 같은 문자 $C$로 나타내어 $\overline{CA}$, $\overline{CB}$를 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형 $BCAF$를 만들고, $\overline{AE}$와 $\overline{FB}$의 교점을 $G$라 한다. 다음으로 점 $E$를 지나고 $\overline{FB}$에 평행인 직선상에 놓여있는 점 $H$로서

$$\overline{HE} = \overline{FG} \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3.2)$$

를 만족하는 것을 찾으면, 사각형 $HEGF$는 평행사변형이며, 더욱이 (3.1)로부터

$$\overline{FH} = \overline{EG} = 2\overline{BA} = 2\overline{BD} \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3.3)$$

임을 알 수 있다. 한편 점 $H$를 지나며 $\overline{EC}$에 평행인 직선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 $I$라 하면, 직사각형 $FBCA$와 $HECI$는 넓이가 같으므로

$$\overline{HE} \cdot \overline{HI} = \overline{FB} \cdot \overline{FA} \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3.4)$$

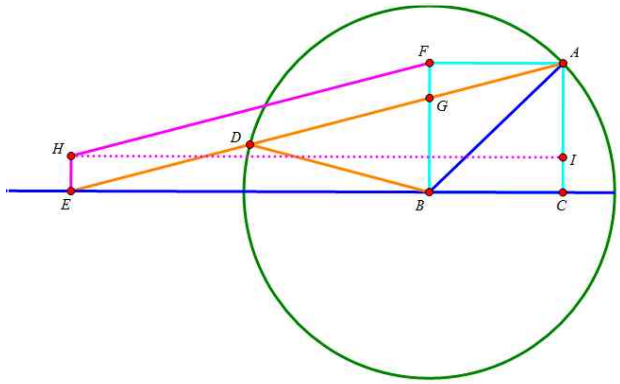
가 성립한다.

따라서 점 $H$는 점 $F$를 지나며 직선 $CE$와 $CA$를 점근선으로 하는 쌍곡선 $\Gamma$ 위에 놓여있다([16, Proposition 34, p.59]). 한편 점 $H$는 점 $F$를 중심으로 반지름의 길이가 $2\overline{BA}$인 원 $F$위에도 놓여있으므로, 결국 쌍곡선 $\Gamma$와 원 $F$의 교점으로 점 $H$의 위치가 결정된다. 이 점 $H$에서 변 $BC$에 수선의 발을 내려점 $E$의 위치도 찾을 수 있다.

---

14) Abū ʿAlī al-Ḥasan ibn al-Haytham(라틴어로 Alhazen) (아랍 또는 페르시아, 965-1040). 「광학의 서(Optica)」를 저술하였다.

15) al-Haytham은 각의 3등분선 작도를 쌍곡선과 원으로 해결했다고 Hogendijk([18, p. 21])는 말하고 있다. 여기에 제시한 작도 내지 증명방법이 al-Haytham의 것과 동일한지의 여부는 정보 부족으로 확인하지 못했음을 밝힌다.




[그림3.3]

(2) 작도

① [그림3.4]처럼 점 $F$를 지나고 반직선 $CA$, $CB$를 점근선으로 하는 쌍곡선 $\Gamma$를 다음과 같이 작도할 수 있다.
먼저 점 $C$를 중심으로 점 $F$를 180°회전시킨 점 $F'$을 잡는다. 다음으로 점 $F$를 지나고 대각선 $AB$에 평행인 직선이 반직선 $CA$, $CB$와 만나는 점을 차례로 $L$, $L'$이라 한다. 이때, $\overline{LL'}^2 = \delta \cdot \overline{FF'}$을 만족하는 상수 $\delta$를 찾는다[16]. 이 경우에는 $\delta = \overline{FF'}$임을 쉽게 알 수 있다.

② 점 $F$에서 세운 직선 $CF$의 수선위에서 $\delta = \overline{FJ}$를 만족하는 점 $J$를 잡은 후, 반직선 $F'J$위에 놓여있는 점 $P$를 임의로 택한다. 다시 점 $P$에서 반직선 $F'F$에 내린 수선의 발을 $Q$라 하여, 점 $Q$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$인 원과 반직선 $FQ$와의 교점을 $K$라 한다.

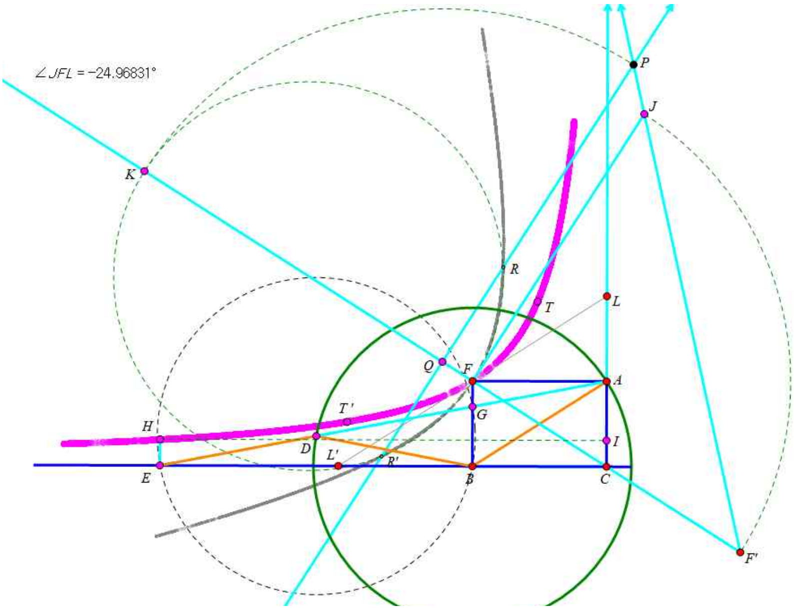
③ $\overline{FK}$를 지름으로 하는 원을 그려 수선 $PQ$와의 교점 $R$, $R'$을 잡는다[17]. 여기서 점 $Q$를 중심으로 점 $R$, $R'$을 $-\angle JFL$만큼 각각 회전시킨 점 $T$, $T'$에 『[보기(D)]↘흔적 남기기(R)』[18]를 명령하고, 점 $P$에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행하면, 우리가 찾는 쌍곡선 $\Gamma$를 얻을 수 있다([그림3.4]에서 굵게 표시된 쌍곡선).

④ 점 $F$를 중심으로 반지름의 길이가 $2\overline{AB}$인 원 $F$를 그려 쌍곡선 $\Gamma$와의 교점을 $H$라 하여, 점 $H$를 지나는 $\overline{FB}$의 평행선이 반직선 $CB$와 만나는 점을

---

16) 직각삼각형에 관한 Euclid의 정리를 활용하여 상수 $\delta$를 찾을 수 있다.
17) 점 $P$에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고, 점 $R$, $R'$에는 『[보기(D)]↘점의 흔적 남기기(R)』를 명령하여 실행하면 점 $F$를 지나는 쌍곡선을 얻을 수 있으나( [그림3.4]에서 가늘게 표시된 쌍곡선), 반직선 $CA$와 $CB$가 이 쌍곡선의 점근선은 아니다.
18) 『[보기(D)]↘흔적 남기기(R)』은 GSP5 메뉴 '보기(D)'의 '흔적 남기기(R)'을 뜻한다.

작도하면 이 점이 우리가 찾는 점 $E$이다.




[그림3.4]

(3) 증명

[그림3.4]처럼 선분 $EA$가 원 $B$와 만나는 점을 $D$, $\overline{FB}$와 만나는 점을 $G$라 한다. 또, 점 $H$를 지나고 직선 $EC$에 평행인 직선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 $I$라 한다. 이때 점 $F$, $H$는 둘 다 쌍곡선 $\Gamma$위에 놓여있으며 $\overline{FA} \,//\, \overline{EC}$, $\overline{HE} \,//\, \overline{FB}$ 이므로

$$\overline{HE} \cdot \overline{HI} = \overline{FB} \cdot \overline{FA}$$

가 성립한다([16, Proposition 34, p.59]). 그런데 직사각형 $FBCA$와 이웃하는 두 변을 $\overline{FG}$, $\overline{EC}$로 하는 직사각형의 넓이는 같으므로

$$\overline{FG} \cdot \overline{EC} = \overline{FB} \cdot \overline{FA}$$

이며, 더욱이 $\overline{HI} = \overline{EC}$이므로

$$\overline{HE} = \overline{FG} \;\&\; \overline{HE} \,//\, \overline{FG}$$

이다. 따라서 사각형 $HEGF$는 평행사변형이므로

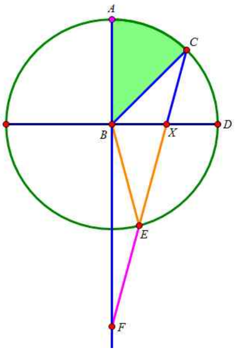
$$\overline{EG} = 2\overline{AB}$$

이다. 한편 $\angle EBG = 90°$이므로 세 점 $E$, $B$, $G$는 $\overline{EG}$를 지름으로 하는 원 위에 놓여있으며, 더욱이 $\overline{DB} = \overline{AB}$이므로 지름 $\overline{EG}$위에 놓여있는 점 $D$는 이 원의 중심이다.

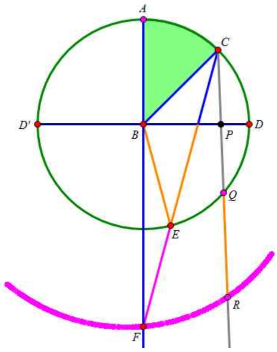
그러므로 $\overline{ED} = \overline{DB} = \overline{AB}$가 성립한다. 따라서, $\angle AEC = \frac{1}{3}\angle ABC$이다.

## 2. Abu'l Jud[19]의 쌍곡선과 포물선을 이용한 방법

Abu'l Jud 의 쌍곡선과 포물선을 이용한 작도방법은 Al−Bīrūnī[20]에 의해 제기된 한 문제를 해결하는 과정에서 얻은 것으로 알려져 있다([18,20]). 실제로 특이하게 아래의 등식 (3.5)를 만족하는 점 $X$([그림3.8] 참조)의 존재성을 보임으로써 $\angle ABC$의 3등분선을 찾고 있다(cf. [15, p.276, p.114-116 ; 19, p.44]). 여기서는 비교적 친절하게 기술하고 있는 Hankel([15])의 관련 논문내용을 참조하여 중등수학의 용어로 재조명하기로 한다[21].



[그림3.5]



[그림3.6]

### (1) 해석

$\angle ABC$의 꼭짓점 $B$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{AB}$인 원을 그려 $\overline{AB}$에 수직인 지름 $DD'$을 [그림3.5]처럼 긋는다. 이때 등식

$$\overline{BD}^2 = \overline{BX}^2 + \overline{BD}\cdot\overline{CX} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.5)$$

를 만족하는 점 $X$가 $\overline{BD}$ 위에 반드시 존재한다. 더욱이 반직선 $CX$가 반직선 $AB$와 만나는 점을 $F$라 하면

$$\angle XFB = \frac{1}{3}\angle ABC$$

가 성립함을 다음과 같이 보일 수 있다.

먼저 등식 (3.5)를 만족하는 점 $X$의 존재성은 나중에 보이기로 하고, 반직선

---

19) Abū al-Jūd, Muḥammad b. Aḥmad b. al-Layth(10세기경 이란 수학자).

20) Abū al-Rayhān Muhammad ibn Ahmad al-Bīrūnī(페르시아, 973-1048).

21) [그림3.6]처럼 지름 $DD'$ 위에 놓여있는 점 $P$를 임의로 잡아 'conchoid'를 그려 $\overline{EF} = \overline{BE}$인 반직선 $CF$를 쉽게 얻을 수도 있다.

$CX$와 원 $B$의 교점을 $E$라 한다. 이때

$$\overline{XD}\cdot\overline{XD'}=(\overline{BD}-\overline{BX})\cdot(\overline{BD}+\overline{BX})=\overline{BD}^2-\overline{BX}^2$$

이며, $\overline{XD}\cdot\overline{XD'}=\overline{CX}\cdot\overline{XE}$이므로 등식 (3.5)로부터

$$\overline{XE}=\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{EF}$$

임을 알 수 있다. 따라서 $\angle XFB=\frac{1}{3}\angle ABC$이다.

(2) 작도

① 점 $X$의 작도22)

[그림3.5]를 바탕으로 하여 [그림3.7]처럼 점 $C$에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 $H$, 점 $C$의 점 $H$에 관한 대칭점을 $C'$이라 한다. 이제

점 $A$를 꼭짓점, 직선 $AB$를 (대칭)축, $\overline{BC}$를 매개변수

로 하는 포물선을 $\Sigma$([6,7] 작도 참조)라 하고

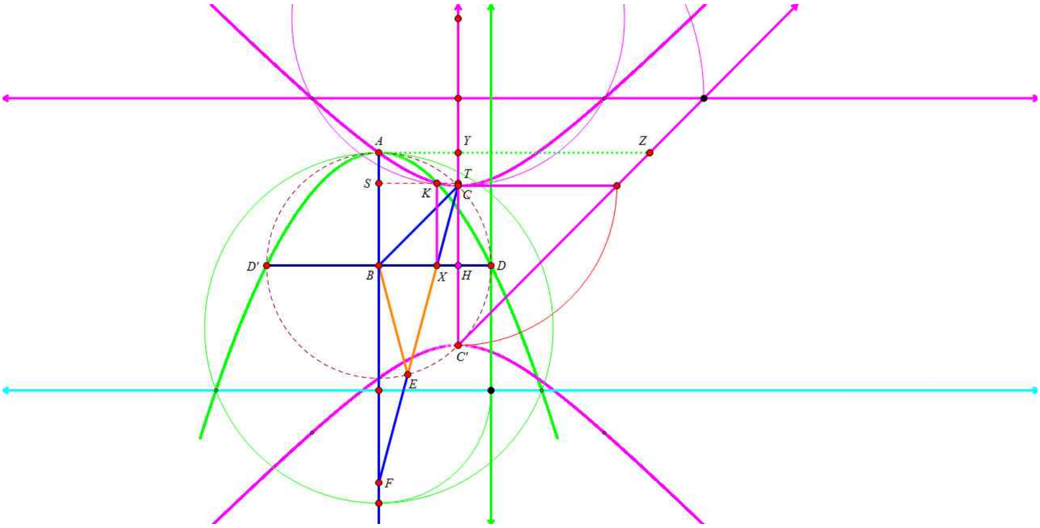
선분 $CC'$을 횡단변, 매개변수는 $\overline{CC'}$

이며, 직경 $CC'$에 대응되는 종선이 $\overline{BD}$에 평행인 쌍곡선을 $\Gamma$([6,7] 작도 참조)라 한다.

이때 포물선 $\Sigma$와 쌍곡선 $\Gamma$의 한 교점을 $K$23)라 하고, 점 $K$에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 $X$라 하면 등식 (3.5)가 성립한다.

22) 점 $X$의 위치를 결정하는데 필요한 포물선 $\Sigma$와 쌍곡선 $\Gamma$의 작도방법은 후술하기로 한다.

23) [그림3.7]에서 포물선의 꼭짓점 $A$도 쌍곡선 $\Gamma$위에 놓여있다. 실제로 점 $A$에서 직선 $CC'$에 내린 수선의 발을 $Y$라 하면 $\overline{AY}^2=\overline{YC}\cdot\overline{YC'}$ (점 $Y$의 원 $B$에 관한 멱(power)) & $\overline{YC'}=\overline{YZ}$이기 때문이고, 점 $A$도 곡선 $\Sigma$와 $\Gamma$의 교점이지만, 이 경우에 등식 (3.5)는 항등식에 지나지 않으며 더욱이 중세 아랍인은 쌍곡선으로 오늘날과는 달리 잎이 1개인 것만을 취급한 것으로 알려져 있고([19]) [그림3.7]의 포물선 $\Sigma$와 쌍곡선 $\Gamma$의 세 번째 교점에 대한 언급은 보이지 않는다.

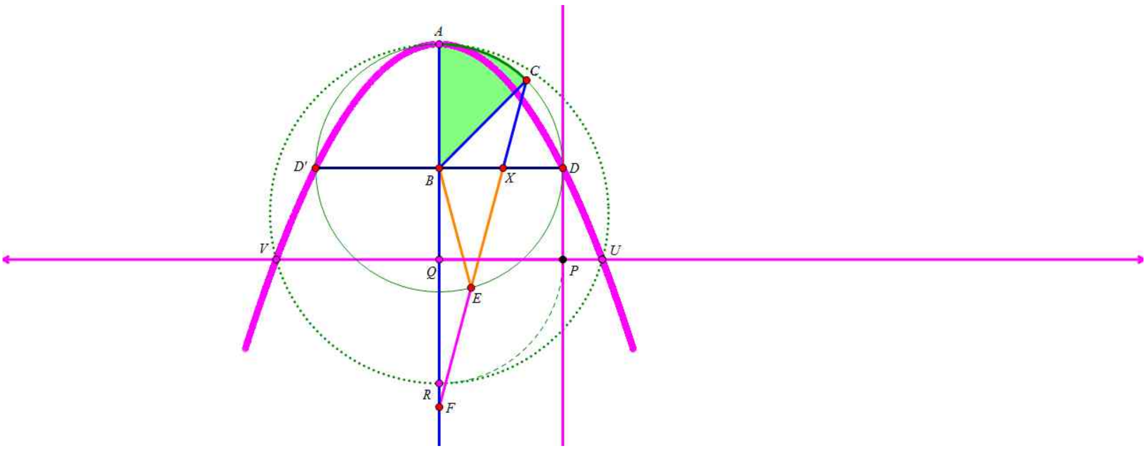



[그림3.7]

② 포물선 $\Sigma$의 작도

[그림3.8]처럼 점 $D$를 지나고 $\overline{AB}$에 평행인 직선위에 놓여있는 한 점 $P$를 임의로 잡아 $\overline{AB}$의 연장선위에 내린 수선의 발을 $Q$라 한다.

다시 점 $Q$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$인 원을 그려 반직선 $BQ$와 만나는 점을 $R$이라 하여, 지름이 $\overline{AR}$인 원과 직선 $PQ$와의 교점을 $U$, $V$라 한다. 이때 점 $U$, $V$에 『[보기(D)]↘흔적 남기기(R)』를 명령하고, 점 $P$에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행하면, 우리가 찾는 포물선 $\Sigma$를 얻을 수 있다.

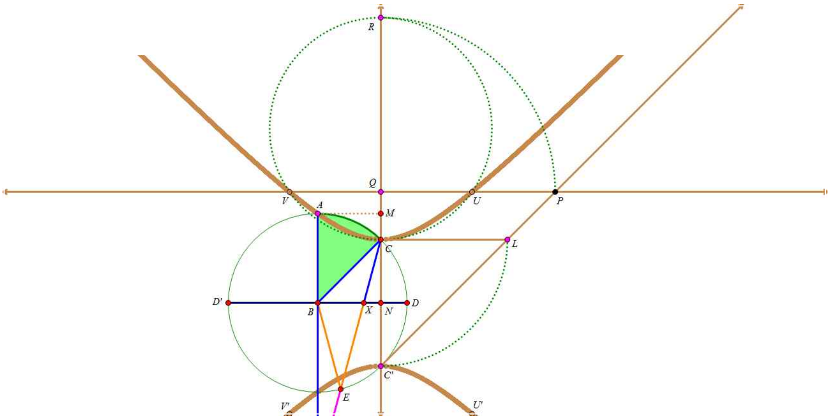



[그림3.8]

③ 쌍곡선 $\Gamma$의 작도

[그림3.9]처럼 점 $C$를 지나는 $\overline{DD'}$의 수선 $CN$을 그은 다음, 점 $C$에서 세운 $\overline{CN}$의 수선위에서 $\overline{CL} = \overline{CC'}$을 만족하는 점 $L$을 잡는다.

다음으로 반직선 $C'L$위에서 점 $P$를 임의로 잡아 직선 $NC$에 내린 수선의 발 $Q$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$인 원을 그려 반직선 $CQ$와의 교점을 $R$이라 한다. 여기서 다시 지름이 $\overline{CR}$인 원과 직선 $PQ$와의 교점을 $U$, $V$라 하여, 직선 $DD'$에 관한 점 $U$, $V$의 선대칭 점을 각각 $U'$, $V'$이라 한다. 이제 점 $U$, $V$, $U'$, $V'$에는 『[보기(D)]↘흔적 남기기(R)』를 명령하고, 점 $P$에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행하면, 우리가 찾는 쌍곡선 $\Gamma$를 얻을 수 있다.




[그림3.9]

### (3) 등식 (3.5)의 증명[24)]

[그림3.7]처럼 교점 $K$에서 직선 $AB$와 $CH$에 각각 내린 수선의 발을 차례로 $S$, $T$라 한다. 이때 점 $K$는 쌍곡선 $\Gamma$위에 놓여있으므로 쌍곡선에 관한 Apollonius의 symptom으로부터

$$\overline{KT}^2 : \overline{TC} \cdot \overline{TC'} = \delta : \overline{CC'}$$

을 얻을 수 있으며 매개변수 $\delta = \overline{CC'}$이므로

$$\overline{KT}^2 = \overline{TC} \cdot \overline{TC'}$$

이다. 그런데

$$\overline{TC} \cdot \overline{TC'} = (\overline{TH} - \overline{CH}) \cdot (\overline{TH} + \overline{CH}) = \overline{TH}^2 - \overline{CH}^2$$

24) 이 증명은 Hankel([15, p.276])의 논문에도 기술되어 있으나 쌍곡선과 포물선의 방정식을 사용하고 있다.

이며, 더욱이 Pythagoras 의 정리로부터

$$\overline{KT}^2 = \overline{XH}^2 = \overline{CX}^2 - \overline{CH}^2$$

이므로 $\overline{TH}^2 = \overline{CX}^2$,
즉

$$\overline{TH} = \overline{CX} = \overline{KX} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.6)$$

이다.

한편 점 $K$는 포물선위에도 놓여있으므로 포물선에 관한 Apollonius의 symptom으로부터

$$\overline{BX}^2 = \overline{SK}^2 = \overline{AS} \cdot \overline{BD} = \overline{BD} \cdot (\overline{AB} - \overline{SB})\overline{BD} \cdot (\overline{BD} - \overline{KX})$$
$$= \overline{BD}^2 - \overline{BD} \cdot \overline{KX},$$

$$\overline{BX}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{KX} = \overline{BD}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.7)$$

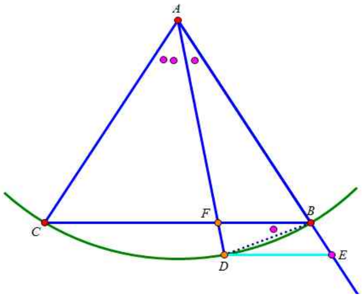
이다. 그러므로 (3.7)에 (3.6)을 대입함으로써 (3.5)를 쉽게 얻을 수 있다.

**3. Al-Sijzī[25]의 쌍곡선과 원을 이용한 방법**

각의 3등분문제와 동치인 문제로서 Al-Bīrunī가 제시한 것을 Al-Sijzī가 풀어 자신의 저서 「Treatise on the division of the angle into three equal parts」에 게재한 방법으로 둔각의 3등분선 작도에도 적용 가능한 다음과 같은 것이 알려져 있다([18]).

**(1) 해석**

$\angle BAC$가 주어졌을 때, 먼저 [그림 3.10]처럼 꼭짓점 $A$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 원 $A$를 준비한다.




[그림 3.10]

이때 [그림 3.10]처럼 반직선 $AF$가 $\angle BAC$의 3등분선이라 하고 원 $A$와의 교

25) Abū Sa'īd Ahmad ibn Mohammad ibn Abd Jalīl Sijzī (간단히 Sijistani, 페르시아, 945?-1020?).

점을 $D$라 한다. 또, 점 $D$를 지나는 $\overline{BC}$의 평행선이 $\overline{AB}$의 연장선과 만나는 점을 $E$라 하면 $\angle BDE = \angle CBD = \angle BAD$이다. 따라서

$$\triangle ADE \backsim \triangle DBE$$

이므로

$$\overline{DE} : \overline{BE} = \overline{EA} : \overline{DE}$$

즉

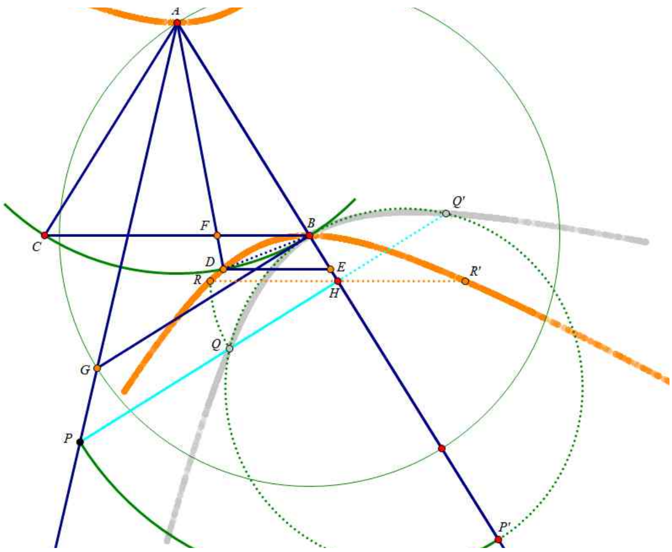
$$\overline{DE}^2 = \overline{EB} \cdot \overline{EA} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.8)$$

가 성립한다.

이는 점 $D$가

직선 $AB$를 직경 ; 선분 $AB$를 횡단변 ; $\overline{AB}$를 매개변수

로 하며, 더욱이 직경 $AB$에 대응되는 종선이 변 $BC$와 평행인 쌍곡선 $\Gamma$위에 놓여있음을 말하고 있다([16, Proposition 2, p.9]). 그러므로 점 $D$는 원 $A$와 쌍곡선 $\Gamma$의 교점임을 알 수 있다.




[그림 3.11]

(2) **작도**

[그림 3.11]처럼 점 $B$에서 세운 $\overline{AB}$의 수선위에서 $\overline{BG} = \overline{AB}$를 만족하는 점 $G$를 잡아 반직선 $AG$를 긋는다. 다시 반직선 $AG$위에서 점 $P$를 임의로 잡아 반직선 $AB$에 수선의 발 $H$를 내린 다음, 점 $H$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{PH}$인 원과 반직선 $BH$와의 교점을 $P'$이라 한다. 여기서 $\overline{BP'}$을 지름으로 하는 원을 그려 직선 $PH$와 만나는 점 $Q$, $Q'$을 점 $H$를 중심으로 $-\angle CBG$만큼

각각 회전한 점을 차례로 $R$, $R'$이라 한다.

이제 점 $R$, $R'$에는 『[보기(D)]↘흔적 남기기(R)』를 명령하고, 점 $P$에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하여 실행하면, 우리가 찾는 쌍곡선 $\Gamma$를 얻을 수 있다. 원 $A$와 쌍곡선 $\Gamma$와의 교점을 $D$라 할 때, 반직선 $AD$가 $\angle BAC$의 3등분선이다.

(3) 증명

[그림 3.11]처럼 교점 $D$를 $\overline{BC}$의 평행선이 직경 $AB$와 만나는 점을 $E$라 하면 쌍곡선에 관한 Apollonius의 symptom으로부터 등식 (3.8),
즉

$$\overline{DE} : \overline{BE} = \overline{EA} : \overline{DE}$$

가 성립한다([7,11,16]). 따라서 $\triangle ADE \backsim \triangle DBE$이며, $\angle CAD = 2\angle CBD$, $\angle EDB = \angle CBD = \angle BAD$이므로 $\angle BAD = \frac{1}{3}\angle BAC$임을 쉽게 알 수 있다.

## 4. Abū Sahl al-Kūhī[26]의 쌍곡선과 원을 이용한 방법

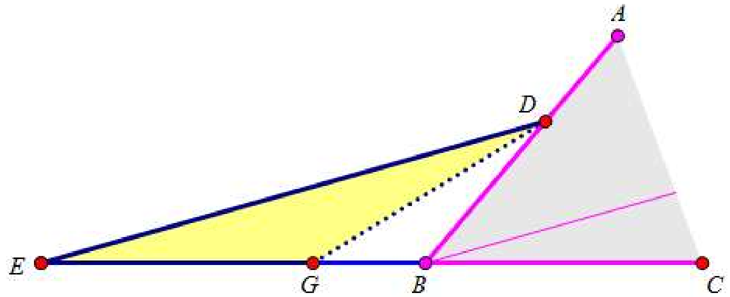
Hojendijk([18])가 가장 간명한 각의 3등분방법이라고 주장한 Abū Sahl al-Kūhī의 쌍곡선과 원을 이용한 방법을 중등수학의 입장에서 재조명하고 시각화하기로 한다.

(1) 해석

[그림 3.12]처럼 $\angle BDE = 2\angle DEB$인 $\triangle DEB$를, 편의상 정점 $E$는 $\overline{CB}$의 연장선위에, 그리고 정점 $D$는 $\overline{AB}$위에 각각 놓이도록 그릴 수 있으면

$$\angle DEB = \frac{1}{3}\angle ABC$$

이므로, 점 $B$를 지나는 $\overline{ED}$의 평행선으로 $\angle ABC$의 3등분선을 얻을 수 있다.




26) Abū Sahl Wayjan ibn Rustam al-Qūhī(al-Kuhī)(10세기경 페르시아 수학자).

[그림 3.12]

al-Kūhī 는 $\angle BDE = 2\angle DEB$를 만족하는 $\triangle DEB$를 쌍곡선과 원을 이용하여 다음과 같이 찾은 듯하다.

먼저 $\angle EDB$의 이등분선이 $\overline{EB}$와 만나는 점을 $G$라 하면 $\angle GDB = \angle DEB$이므로

$$\triangle BDG \backsim \triangle BED$$

이다. 그러므로 $\overline{DB} : \overline{BE} = \overline{BG} : \overline{DB}$, 즉

$$\overline{DB}^2 = \overline{BG} \cdot \overline{BE} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.9)$$

가 성립한다. 이는 점 $D$가

반직선 $EG$를 직경 ; 선분 $EG$를 횡단변 ; $\overline{EG}$를 매개변수

로 하며, 더욱이 직경 $EG$에 의해 이등분되는 종선이 이 직경과 이루는 각의 크기가 $\angle ABC$인 쌍곡선위에 놓여있음을 말하고 있다([16, Proposition 2, p.9]). 이때 이 쌍곡선과 점 $G$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{GE}$인 원과의 교점으로 점 $D$의 위치를 결정지을 수 있다.

## (2) 작도

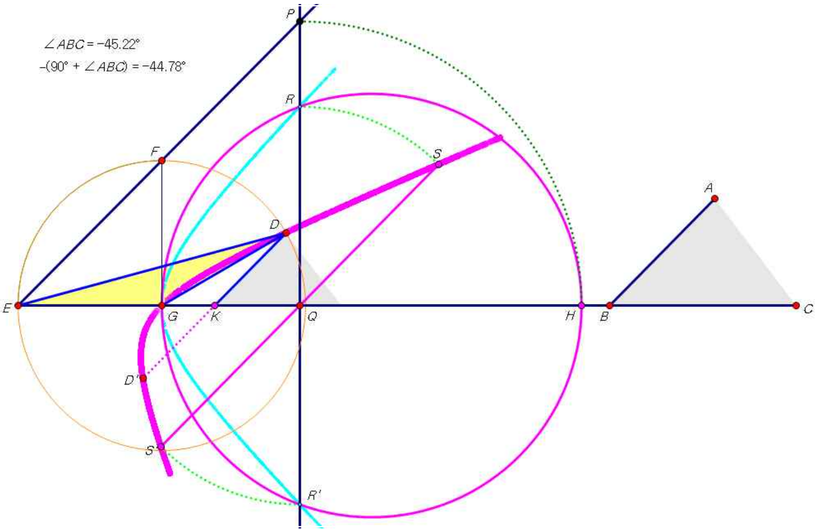
① [그림 3.13]처럼 $\overline{CB}$의 연장선상에서 선분 $EG$를 적절히 잡는다. $\overline{EG}$를 횡단변으로 하고 $\overline{EG}$를 매개변수로 하는 쌍곡선을 얻기 위해, 점 $G$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{EG}$인 원을 그려 점 $G$에서 세운 직선 $EG$의 수선과의 교점을 $F$라 한다. 이제 반직선 $EF$위에서 점 $P$를 임의로 택해, 점 $P$에서 선분 $EG$의 연장선위에 내린 수선의 발 $Q$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$인 원을 그려 선분 $EG$의 연장선과의 교점 $H$를 잡는다.

② 선분 $GH$를 지름으로 하는 원을 그려 수선 $PQ$와의 교점을 $R$, $R'$이라 하여, 점 $R$, $R'$을 점 $Q$를 중심으로 $-(90^\circ - \angle ABC)$만큼 각각 회전하여 얻어지는 점을 차례로 $S$, $S'$이라 한다.
여기서 점 $P$에는 『[보기(D)]↘점에 애니메이션 주기(A)』를 명령하고 점 $S$, $S'$에는 『[보기(D)]↘점의 흔적 남기기(R)』를 명령하여 실행하면 직경 $EG$와 그에 대응되는 종선 $SS'$이 이루는 각의 크기가 $\angle ABC$와 같은 쌍곡선이 얻어진다.

③ 다음으로 점 $G$를 중심으로 반지름의 길이가 $\overline{EG}$인 원과 이 쌍곡선과의 교점을 $D$라 하여, 점 $D$를 지나고 종선 $SS'$에 평행인 직선이 $\overline{EH}$와 만나는 점을 $K$라 하면

$$\angle DKQ = \angle ABC, \ \angle KDE = 2\angle DEK, \angle DEK = \frac{1}{3}\angle ABC$$

이다.




[그림 3.13]

(3) **증명**

[그림 3.13]처럼 반직선 $DK$가 쌍곡선과 만나는 또 다른 점을 $D'$이라 하면 $\overline{DD'}$은 직경 $EG$에 대응되는 한 종선이며, 더욱이 이 쌍곡선의 매개변수는 $\overline{EG}$이므로 쌍곡선에 관한 Apollonius 의 symptom 으로부터 $\overline{DK}^2 = \overline{KG} \cdot \overline{KE}$, 즉

$$\overline{DK} : \overline{KE} = \overline{KG} : \overline{DK}$$

가 성립한다([6,7,11,16]).

따라서 $\triangle KDG \backsim \triangle KED$이며, $\angle GDK = \angle DEK$이다.

한편 $\triangle DEG$는 $\overline{EG} = \overline{DG}$인 이등변삼각형이므로 $\angle KDE = 2\angle DEK$, $\angle DEK = \frac{1}{3}\angle DKQ = \frac{1}{3}\angle ABC$이다.

## Ⅳ. 결론

본 논문은 중세 이슬람 네 명의 수학자가 원뿔곡선을 이용하여 일반각의 3등분선 작도문제를 해결한 내용을 고찰, 분석하고 중등수학 입장에서 재조명하고 시각화한 자료를 제시함으로써 논증기하와 해석기하의 접목을 시도하였다.

즉, 중세 이슬람 수학자 al-Haytham, Abu'l Jud, Al-Sijzī 및 Abū Sahl al-Kūhī의 일반각의 3등분선 작도문제를 원뿔곡선을 이용하여 해결하기 위해서,

고대 그리스인들의 화려한 수학의 지식과 기능을 활용하여
첫째, '해석'이라는 단계로 해결전략을 탐색하였으며,
둘째, 그 과정에서 최적의 해결방안으로 '작도' 방법을 찾고,
셋째, 그 작도 방법이 옳음을 '증명'이라는 단계를 거침으로써
문제해결을 위한 추론의 정당성을 보였다.

본 논문에서 제시한 네 명의 이슬람 수학자의 연구결과를 중등수학 입장에서 재해석하고 그들의 생각을 동적기하소프트웨어(GSP)를 사용하여 시각화하는 과정의 탐구활동은 복잡하고 전문화되어 가는 미래 사회에서 학생들이 사회 구성원의 역할을 성공적으로 수행할 수 있고, 개인의 잠재력과 재능을 발현할 수 있으며, 수학의 필요성과 유용성을 이해하고, 수학 학습의 즐거움을 느끼며, 수학에 대한 흥미와 자신감을 기를 수 있는 수학교과 역량을 키울 수 있다는 점에서 의미가 있다. 실제로 동적기하소프트웨어를 사용하여 학생들이 교과서에서 배운 수학적 개념, 원리 및 내용을 그림으로 그려보고, 그려진 그림에서 조건을 바꾸어 다양한 장면을 구현해 보는 조작 및 탐구 활동은 학생들이 어려워하는 추상적인 수학내용을 구체화시켜서 이해하도록 하는데 도움을 줄 것이다([5]).

또한, 2015 개정 수학과 교육과정의 고등학교 「기하」 교과서 7종의 이차곡선 단원의 탐구활동 내용을 분석한 결과([1,3,4,8,10,12,13]), 대부분의 교과서는 종이접기를 이용한 이차곡선 만들기, 이차곡선의 정의를 이용하여 컴퓨터 프로그램으로 이차곡선 그리기, 원뿔과 평면에 접하는 구를 이용하여 이차곡선 구하기 등의 몇 가지의 중복된 소재들을 다루고 있었다. 따라서 소재의 빈약함을 극복할 수 있는 다양한 탐구활동 학습 자료의 개발이 요구됨을 확인할 수 있었다. 교수・학습 및 평가의 방향([2])에 "매체 및 도구 활용 학습은 학생의 수준과 학습 내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수・학습 방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다."와 같이 기술하고 있듯이, 본 논문에서 소개된 중세 이슬람의 일반각의 3등분문제의 원뿔곡선을 이용한 재조명과 시각화 자료는 고등학교 학생들의 탐구학습 자료로 활용됨은 물론 새로운 탐구학습 자료를 개발하고자 하는 교사 및 연구자들에게 충분히 활용될 수 있는 가치가 있을 것으로 기대한다.

## 참고문헌

[1] 고성은 외 5인, 고등학교 기하, 좋은책 신사고, 2018.
[2] 교육부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제 2015-74호[별책8호]
[3] 권오남 외 14인, 고등학교 기하, ㈜ 교학사, 2018.

[4] 김원경 외 14인, 고등학교 기하, 비상교육, 2018.
[5] 김향숙 · 김양 · 박진석, Pappus가 보인 일반각의 3등분문제 해결의 재조명과 시각화, East Asian Mathematical J. 34(2018), 219-238.
[6] 김향숙 · 박진석 · 하형수, 이차곡선을 활용한 정칠각형에 관한 Abū Sahl의 작도법의 GSP를 통한 재조명, 한국수학교육학회지 시리즈 A 제50권 제2호 (2011), 233-246.
[7] 김향숙 · 박진석 · 하형수, 원뿔곡선에 관한 Apollonius의 Symptoms 재조명과 시각화, 한국수학교육학회지 시리즈 A 제52권 제1호(2013), 83-95.
[8] 류희찬 외 9인, 고등학교 기하, 천재교과서, 2018.
[9] 박진석 · 김향숙, 수학사와 함께 떠나는 수학여행[제1판 2쇄], 경문사, 2017 (2015년 세종도서 우수학술도서).
[10] 이준열 외 7인, 고등학교 기하, 천재교육, 2018.
[11] 하형수, 원뿔曲線을 활용한 作圖不能問題의 再解析과 視覺化, 인제대학교, 2017.
[12] 홍성복 외 10인, 고등학교 기하, 지학사, 2018.
[13] 황선욱 외 8인, 고등학교 기하, 미래앤, 2018.
[14] Berggren, J. L., Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, Springer-Verlag, New York, 1986.
[15] Hankel, H., Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig, 1874.
[16] Heath, T. L., Apollonius of Perga : Treatise on conic sections-The conics of Apollonius, Cambridge : at the university press, 1896.
[17] Heath, T. L., The works of Archimedes : Book of Lemmas, Cambridge : at the university press, 1897.
[18] Hogendijk, J. P., On the trisection of an angle and the construction of a regular nonagon by means of conic sections in medieval Islamic geometry, the 2nd International Symposium of the History of Arabic Science, to be held in Aleppo, Syria, 1979.
[19] Sinclair, Nathalie M., Mathematical applications of conic sections in problem solving in ancient Greece and medieval Islam, Simon Fraser Univ. 1995.
[20] Woepcke, F., L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî, Paris: Duprat, 1851.
Publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits.
(Franz Woepcke)

Kim, Hyang Sook

Department of Computer Engineering
& Institute of Natural Science
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : mathkim@inje.ac.kr

Kim, Mi Yeoun
Department of Computer-Aided Sciences
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : mt-miyun@hanmail.net

Park, Jae Hyun
Department of Computer-Aided Sciences
Inje University
Gimhae, 621-749 Korea
E-mail : saekdon@hanmail.net