

# Comparison Analysis of Multivariate Process Capability Indices

Hye-Jin Moon · Young-Bae Chung<sup>†</sup>

Department of Industrial and Management Engineering, Incheon National University

## 다변량 공정능력지수들의 비교분석

문혜진 · 정영배<sup>†</sup>

인천대학교 산업경영공학과

Recently, the manufacturing process system in the industrial field has become more and more complex and has been influenced by many and various factors. Moreover, these factors have the dependent correlation rather than independent of each other. Therefore, the statistical analysis has been extended from the univariate method to the multivariate method. The process capability indices have been widely used as statistical tools to assess the manufacturing process performance. Especially, the multivariate process indices need to be enhanced with more useful information and extensive application in the recent industrial fields. The various multivariate process capability indices have been studying by many researchers in recent years. Hence, the purpose of the study is to compare the useful and various multivariate process capability indices through the simulation. Among them, we compare the useful models of several multivariate process capability indices such as  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$  and  $MC_{pl}$ . These multivariate process capability indices are incorporates both the process variation and the process deviation from target or consider the expected loss caused by the process deviation from target. Through the computational examples, we compare these process capability indices and discuss their usefulness and effectiveness.

**Keywords** : Multivariate Process Capability Index, Multivariate Analysis, Inverted Normal Loss Function

### 1. 서론

최근의 생산공정은 고도의 기술력으로 자동화되어 가면서 정교해지고 복잡해지고 있다. 또한 글로벌 시장 환경 속에서 다양한 고객 니즈에 대하여 신속하게 대응하기 위한 생산시스템은 유연성과 맞춤화를 기반으로 다양한 규격의 제품들을 생산하는 시스템으로 바뀌어 가고 있다. 그러기에 이러한 생산시스템의 변화에 따라 생산의 공정능력을 평가함에 있어서도 제품의 다양성, 규격의 다양성, 관리변수의 다양성 등의 여러 관리요소들을 반영할 수 있는 보다 현실적이면서 유용성 높은 평가척

도가 요구될 것이다. 그리고 이러한 다양성을 온전히 분석하기 위해서는 다변량 분석기법(Multivariate Analysis Method)이 더더욱 필요하다. 또한 품질에 영향을 미치는 다특성치들은 독립적이기 보다는 종속적으로 서로 영향을 미치기 때문에 이들 간의 상관관계를 고려한 분석이 요구된다. 따라서 이러한 다변량 분석 방법을 생산공정에 적용함에 있어 공정상태에 대한 정확한 정보를 제공하면서도 동시에 보다 많은 유용한 정보력을 제공할 수 있는 척도야말로 더욱 가치가 있을 것이다.

생산현장에서 공정능력을 나타내는 대표적인 척도로써 공정능력지수(Process Capability Index)를 많이 사용하고 있다. 공정능력지수는 공정이 관리 상태 하에 있을 때 생산되는 제품의 품질변동이 어느 정도인가를 나타내는 것으로써, 공정의 균일성(Uniformity)을 의미한다. 그리고

공정평가 방법은 공정의 변동과 제품의 규격한계를 정량적으로 비교하여 공정능력을 평가하게 된다.

전통적인 단변량 공정능력지수인  $C_p$ 와  $C_{pk}$ 는 공정산포와 공정평균의 치우침을 고려하여 평가 하는 방법으로 이들을 시작으로 목표치로부터 품질 특성치의 변동을 고려한  $C_{pm}$ ,  $C_{pm}^+$ 의 모형으로 발전하였다. 그리고 이러한 단변량 모형들은 다변량으로 확장되었고, 지속적으로 더 많은 유용한 정보들을 제공할 수 있는 다양한 다변량 공정능력지수의 모형들이 제안되고 있다.

본 연구에서는 목표치로부터 품질의 변동과 그에 따른 경제적 손실까지도 고려한 유용한 정보력을 지닌 다양한 다변량 공정능력지수들 가운데  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pI}$ 의 3가지 모형들을 중심으로 비교 분석하고자 한다. 즉, 이들 3가지 모형의 다변량 공정능력지수들이 가지는 특성들과 그들의 유용성을 중심으로 서로 비교 분석하고자 한다. 그리고 비교분석의 주요 초점은 다특성치들 간의 상관관계를 반영하여 평가하는가, 목표치에 대한 공정평균의 치우침에 따라 평가하는가, 품질변동에 따른 경제적 손실을 잘 반영하는가 그리고 목표치를 중심으로 최대손실에 대한 손실함수의 형태가 좌우 대칭뿐만 아니라 비대칭일 경우에도 평가 가능한가를 중심으로 공정관리상태에 대하여 얼마나 민감하게 평가하는가를 비교 분석하고자 한다.

## 2. 다변량 공정능력지수의 모델링

### 2.1 기호

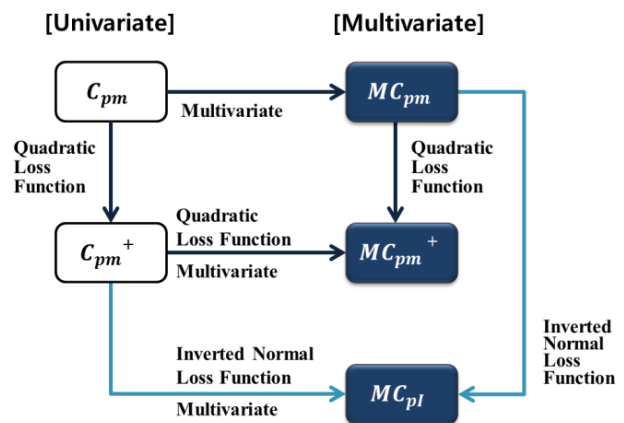
- $\mathbf{X}$  : 표본품질특성치 벡터 ( $\mathbf{X}' = x_i = x_1, x_2, \dots, x_n$ )
- $\boldsymbol{\mu}$  : 공정 평균벡터 ( $\boldsymbol{\mu}' = \mu_i = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ )
- $\mathbf{T}$  : 목표치 벡터 ( $\mathbf{T}' = T_i = T_1, T_2, \dots, T_n$ )
- $n$  : 품질특성치의 수
- $i$  : 품질특성치의 수 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
- $k_i$  : 특성치  $i$ 와 관련된 손실계수 ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
- $A_j$  : 목표치  $T_i$ 중심으로 특성치  $x_i$ 의 비대칭 구간에서 최대손실 ( $j = 1, 2, \dots, 2^n$ )
- $\Sigma$  : 분산-공분산 매트릭스
- $\Sigma^{-1}$  : 분산-공분산 매트릭스 역행렬
- $\Sigma_T$  : 평균제곱오차(MES) 매트릭스
- $D$  : 목표치로부터 공정평균의 편차
- $\Lambda$  : 척도모수(scaling parameter) 매트릭스
- $K(n)$  :  $\chi^2(n, 0.9973)$ 의 값
- $\Gamma(\alpha)$  : 감마함수

- $L_Q(X, T)$  : 목표치  $T$ 에 대한 표본벡터  $X_i$ 의 이차손실함수
- $E[L_Q(X, T)]$  :  $L_Q(X, T)$ 의 기대손실
- $L_I(X, T)$  : 목표치  $T$ 에 대한 표본벡터  $X_i$ 의 역정규 손실함수
- $E[L_I(X, T)]$  :  $L_I(X, T)$ 의 기대손실

### 2.2 모델링 방법론

<Figure 1>은 본 연구에서 비교 분석을 하고자 하는 다변량 공정능력지수들에 대한 모델링 방법론과 그들 간의 관계를 집약하여 나타낸 그림이다. <Figure 1>의 우측에 있는 3가지 모형의 다변량 공정능력 지수들은 좌측에 있는 전통적인 단변량 공정능력지수들을 벡터화하여 다변량의 모형으로 확장한 개념이라 할 수 있다. 그리고 각각의 다변량 모형들이 단변량 모형으로부터 어떻게 응용되었는지에 대한 관련성을 보여주고 있다.

따라서 본 연구에서는 다변량 공정능력지수의 3가지 모형인  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pI}$ 를 중심으로 비교 분석하여 각각의 특징들을 제시하고자 한다.



<Figure 1> Modeling Method of Multivariate Process Capability Indices

다변량 공정능력지수의 일반적인 척도 개념은 규격의 허용오차영역과 공정영역의 면적 또는 부피의 비율로써 공정능력을 측정한다.

상기 <Figure 1>에서 다변량 모형의  $MC_{pm}$ 은 공정영역에 대한 규격의 허용오차 영역을 수정한 영역의 비율로 측정한다. 이때의 공정영역은 99.73% 신뢰구간 내에서 측정된 공정분포의 영역으로  $[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma_T^{-1} (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \leq K(n)]$ 에 의해 타원형의 면적 또는 부피를 의미한다.  $MC_{pm}$ 은 단변량 공정능력 지수  $C_{pm}$ 을 벡터의 개념으로 확장한 모형으로 목표치로부터 공정평균이 얼마나 떨어져 있는가에 따라 공정능력을 평가하는 다변량 공정능력지수이다[10].

$$\begin{aligned}
 MC_{pm} &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{\text{공정영역의 면적 또는 부피}} \\
 &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma_T^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \leq K(n)] \text{의 면적 또는 부피}} \quad (1) \\
 &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \right]^{-1}}
 \end{aligned}$$

$MC_{pm}^+$ 는  $MC_{pm}$  모형으로부터 공정의 산포( $\Sigma_T$ ) 대신 이차손실함수의 기대손실( $E[L_Q(X, T)]$ )을 적용한 다변량 공정능력지수이다. 즉, 평균제곱 오차 매트릭스  $\Sigma_T$ 는 공정평균이 목표치로부터 얼마나 떨어져 있는가에 대한 편차로써 이는 손실함수가 가지는 특징과 동일하다는 점이다.

따라서 이러한 유사성을 근거로 산포인  $\Sigma_T$  대신 단변량의 Taguchi의 이차손실함수를 다변량으로 확장시킨 기대손실을 적용하여 공정능력을 평가하는 모형이다[2, 5].

$$\begin{aligned}
 MC_{pm}^+ &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{\text{공정영역의 면적 또는 부피}} \\
 &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|E[L_Q(\mathbf{X}, \mathbf{T})]|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \right]^{-1}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$MC_{pl}$ 는  $MC_{pm}$  모형에서 공정의 산포( $\Sigma_T$ ) 대신 역정규 손실함수의 기대손실( $E[L_I(\mathbf{X}, \mathbf{T})]$ )을 적용한 다변량 공정능력지수이다. 여기서 역정규 손실 함수(INLF : Inverted Normal Loss Function)는 Spiring에 의해 제안되었으며 정규분포의 확률밀도함수(p.d.f)의 역함수를 활용함으로써 Taguchi의 이차 손실함수의 대표적 특징과 동일한 특징들을 가지고 있는 대안적 손실함수라고 할 수 있다[8, 9]. 즉, 역정규 손실함수(INLF)에서 손실은 항상 양수의 값을 가지며  $(-\infty, T]$ 구간에서는 감소하고  $[T, \infty)$ 구간에서는 증가하는 성향을 나타내고, 목표치 T에서는 손실이 유일한 최소값을 가진다. 이러한 대표적 손실함수의 특징 외에도 품질변동에 따른 손실을 정규분포의 p.d.f의 역함수를 이용함으로써 손실에 대하여 보다 합리적으로 설명할 수 있다는 것이다. 그리고 목표치  $T_i$ 를 중심으로 최대손실  $A_j$ 에 대하여 손실함수의 형태가 대칭과 비대칭 모두일 때 제약 없이 적용이 가능하다는 장점을 가진 모형이다[4].

$$\begin{aligned}
 MC_{pl} &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{\text{공정영역의 면적 또는 부피}} \\
 &= \frac{\text{수정 규격허용오차영역의 면적 또는 부피}}{|E[L_I(\mathbf{X}, \mathbf{T})]|^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{n}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \right]^{-1}} \quad (3)
 \end{aligned}$$

### 3. 비교분석

다변량 공정능력지수  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pl}$ 의 3가지 모형을 중심으로 다음의 4가지 측면에서 이들의 특징들을 비교 분석하고자 한다. 그리고 시뮬레이션의 결과를 통하여 3가지 모형들의 특징들을 비교하고자 한다.

본 비교 연구에 이용된 시뮬레이션은 다음의 공통적 가정과 범위를 전제로 한다.

- (1) 품질특성치는 망목특성이며, 연속적인 값을 가진다.
- (2) 공정데이터는 다변량 정규분포(Multivariable Normal Distribution)을 따른다.
- (3) 척도 매트릭스(Scaling matrix)에서  $\lambda$ 는 공정 파라미터가 규격한계선에 있을 때 손실이 90%일 때를 기준으로 한다( $\lambda_i = 0.233 \times \text{규격공차}_i$ ).
- (4) 구간별 최대손실비용  $A_j$ 은 기업으로부터 정해진 상수 값이다.
- (5) 시뮬레이션 분석에 사용한 프로그램은 매트랩(MATLAB R2015b)이다.

#### 3.1 상관계수 변화에 따른 비교

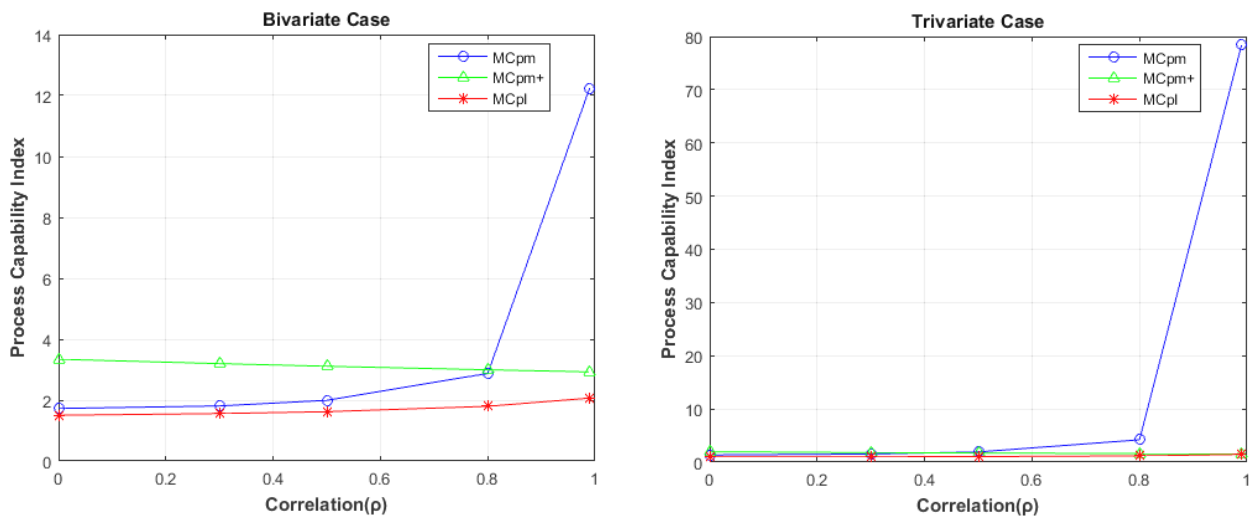
다특성치들간의 상관계수  $\rho$ 가 0, 0.3, 0.5, 0.8, 0.99와 같이 변화할 때 2변량( $\mathbf{X}' = [x_1, x_2]$ )과 3변량( $\mathbf{X}' = [x_1, x_2, x_3]$ ) 모형에서의 공정능력지수 결과값이 어떻게 변화하는지 비교해 보고자 한다. 이때 목표치와 공정평균의 치우침은 없고( $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{T}$ ) 손실함수가 목표치를 중심으로 서로 대칭일 때를 기준으로 한 시뮬레이션 결과값을 보면 다음과 같다.

상관계수의 변화에 따른 특징을 비교를 보면, <Figure 2>에서 확연하게 보여주듯이  $MC_{pm}$ 은 다른 2개의 공정능력지수들에 비하여 상관계수가 1에 가까워지게 되면 매우 급격하게 과대평가되고 있다는 것이다. 그에 반해  $MC_{pm}^+$ 와  $MC_{pl}$ 는 상관계수의 변화에 따른 결과값들이 전반적으로 크게 과대평가되지 않고 안정적으로 평가하고 있음을 큰 차이점으로 볼 수 있다.

<Table 1> Comparison According to Correlation Conditions

$T_1 = 10, T_2 = 20, T_3 = 15, x_1 \sim N(10, 1.0), x_2 \sim N(20, 1.5), x_3 \sim N(15, 2.0), LSL_1 = 5, USL_1 = 15, LSL_2 = 15, USL_2 = 25, LSL_3 = 10, USL_3 = 20, \mathbf{A}' = [4, 4, 4, 4], \mathbf{A} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$

No.	$\rho$	Bivariate			Trivariate		
		$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$	$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$
1	0	1.726	3.342	1.503	1.355	1.955	0.974
2	0.3	1.809	3.198	1.559	1.530	1.798	1.007
3	0.5	1.993	3.112	1.620	1.916	1.713	1.046
4	0.8	2.876	2.995	1.797	4.201	1.604	1.177
5	0.99	12.243	2.927	2.067	78.473	1.545	1.457



<Figure 2> Bivariate and Trivariate Cases According to Correlation Conditions

3.2 목표치로부터 치우침 정도에 따른 비교

목표치로부터 공정평균의 치우침이 없을 때( $\mu = T$ )와 있을 때( $\mu \neq T$ )를 중심으로 2변량과 3변량 공정능력지수의 결과값을 비교해 보고자 한다. 이때 손실함수가 목표치를 중심으로 서로 대칭일 때를 기준으로 상관계수의

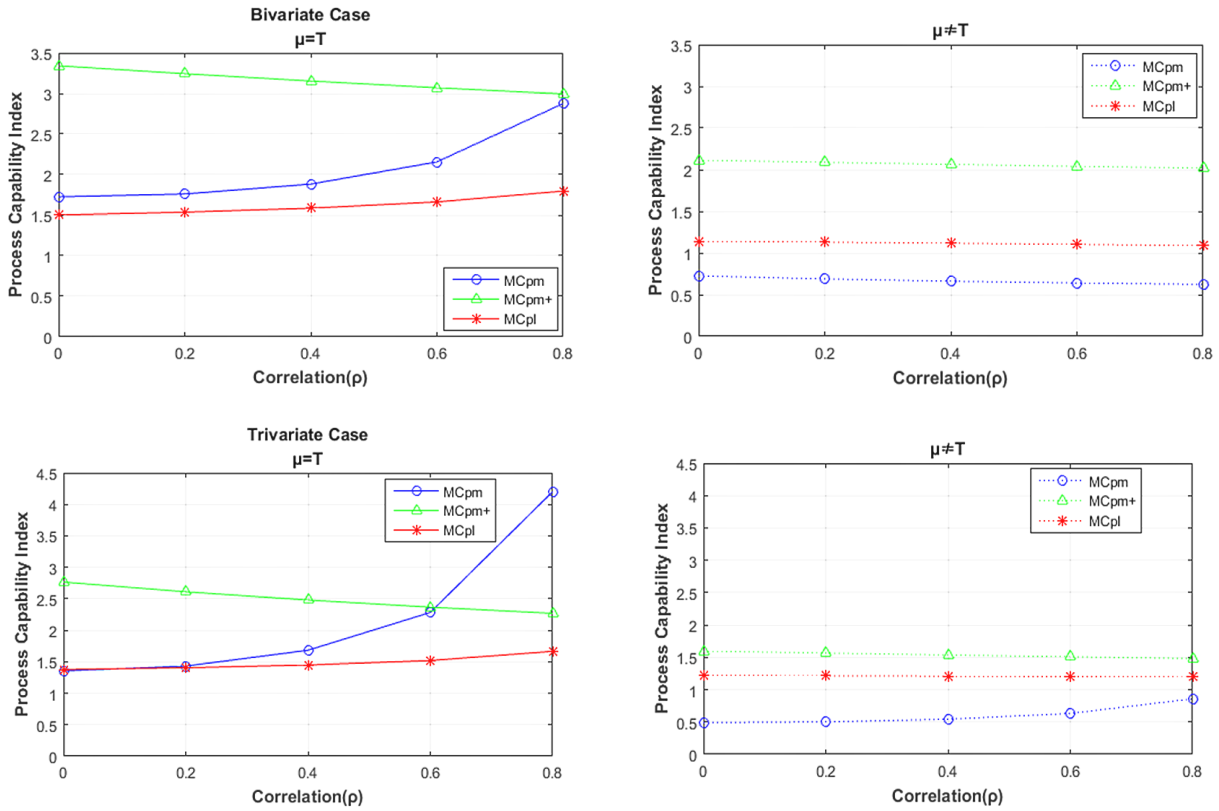
변화에 따른 결과값은 다음과 같다.

특히 목표치로부터 공정평균의 치우침이 있는 경우( $\mu \neq T$ ), 공정평균이 목표치로부터 얼마나 떨어져 있는가의 정도( $|\mu_i - T_i|$ )에 따른 차이를 살펴보면 다음과 같다. 이때 비교하기 쉽도록 각 변량에 대한 평균과 목표치의 거리인  $|\mu_i - T_i|$  값은 동일한 차이를 기준으로 변화를 주었다.

<Table 2> Comparison According to Deviation between Target and Process Mean

$T_1 = 10, T_2 = 20, T_3 = 15, LSL_1 = 5, USL_1 = 15, LSL_2 = 15, USL_2 = 25, LSL_3 = 10, USL_3 = 20, \mathbf{A}' = [4, 4, 4, 4], \mathbf{A} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$   
 $\mu = T : x_1 \sim N(10, 1.0), x_2 \sim N(20, 1.5), x_3 \sim N(15, 2.0), \mu \neq T : x_1 \sim N(8, 1.0), x_2 \sim N(21, 1.5), x_3 \sim N(13, 2.0)$

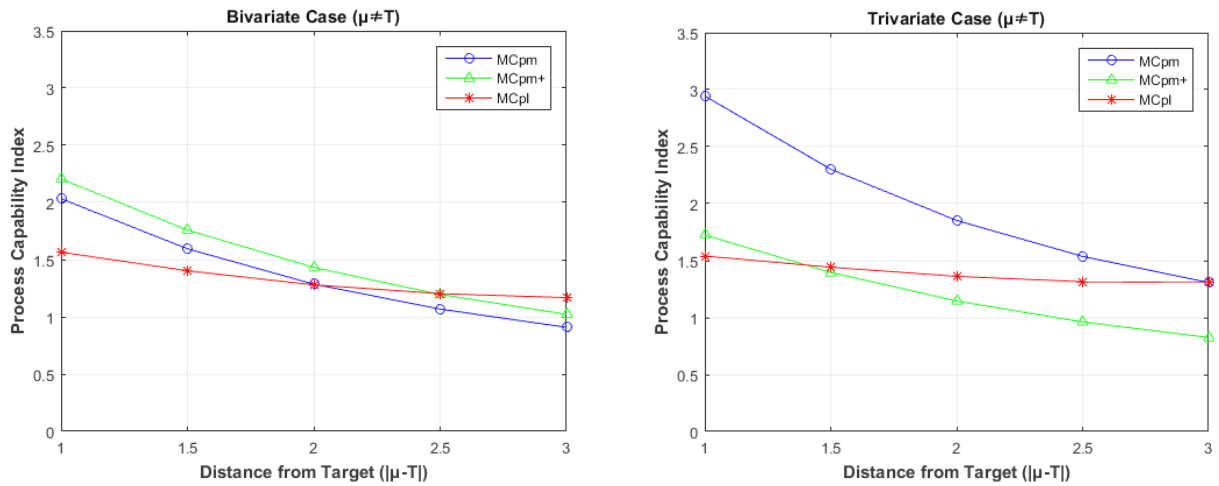
No.	Deviation	$\rho$	Bivariate			Trivariate			No.	Deviation	$\rho$	Bivariate			Trivariate		
			$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$	$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$				$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$	$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$
1	$\mu = T$	0	1.726	3.342	1.503	1.355	2.765	1.377	2	$\mu \neq T$	0	0.725	2.113	1.142	0.489	1.596	1.217
		0.2	1.761	3.244	1.537	1.431	2.611	1.405			0.689	2.088	1.130	0.502	1.565	1.213	
		0.4	1.883	3.154	1.586	1.683	2.480	1.448			0.661	2.063	1.117	0.543	1.536	1.209	
		0.6	2.157	3.071	1.663	2.283	2.367	1.520			0.640	2.040	1.103	0.632	1.508	1.203	
		0.8	2.876	2.995	1.797	4.201	2.269	1.665			0.624	2.017	1.087	0.858	1.481	1.195	



<Figure 3> Bivariate and Trivariate Cases According to Deviation between Target and Process Mean

<Table 3> Comparison According to Deviation between Target and Process Mean

No.	Deviation	$ \mu_i - T_i $	Bivariate			Trivariate		
			$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$	$MC_{pm}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$
1	$\mu \neq T$	1.0	2.033	2.206	1.565	2.944	1.725	1.540
2		1.5	1.595	1.759	1.403	2.302	1.396	1.442
3		2.0	1.286	1.432	1.280	1.852	1.146	1.362
4		2.5	1.068	1.196	1.203	1.537	0.962	1.315
5		3.0	0.909	1.022	1.168	1.308	0.825	1.307



<Figure 4> Bivariate and Trivariate Cases According to Distance from Target( $|\mu_i - T_i|$ )

목표치로부터 공정평균에 대한 치우침 여부에 따른 공정능력평가의 결과를 비교해 보면,  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pl}$  모두 전반적으로 치우침이 있을 때( $\mu \neq T$ )보다는 치우침이 없을 때( $\mu = T$ )의 결과값이 더 좋은 성향을 나타내고 있다. 그리고 2변량과 3변량 모두에서 공정평균을 제외한다면 공정조건 들이 같다는 가정하에서 이들 3가지 모형 간에 특징을 서로 비교해 보자면,  $MC_{pm}$ 과  $MC_{pm}^+$ 는 치우침 유무에 따라 결과값이 큰 폭으로 변동하고 있는 반면  $MC_{pl}$ 는 변동의 폭이 작게 안정적으로 평가하고 있는 것을 알 수 있다. 또한 공정평균이 목표치로부터 얼마나 떨어져 있는가의 정도( $\mu_i - T_i$ )에 따른 변화를 보면 3가지 모형 모두 목표치로부터 멀어질수록 공정능력을 좋지 않게 평가하고 있다. 그리고 모형들 간에 특징을 살펴보면  $MC_{pl}$ 는  $MC_{pm}$ 와  $MC_{pm}^+$ 에 비해 목표치로부터 멀어짐에 따른 결과값의 기울기가 완만하게 나타나는 차이를 보인다.

### 3.3 경제적 손실에 따른 비교

최대손실 A의 변화에 따른 2변량과 3변량의 공정능력지수 결과값의 변화를 비교해 보고자 한다. 목표치와 공정평균의 치우침이 없고( $\mu = T$ ) 손실함수가 목표치 중심으로 서로 대칭이며 특성치들간의 상관계수가  $\rho = 0.8$ 일 때를 기준으로 하였다. 최대손실 A는 2변량일 때  $A' = [A_1,$

$A_2, A_3, A_4]$ 이고 3변량일 때는  $A' = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8,]$ 의 값을 대입한 결과값을 보면 다음과 같다.

경제적 손실의 반영여부에 대하여 비교해 보면, <Figure 5>에서  $MC_{pm}$ 은 최대손실이 품질특성치에 따라 변할 때 그에 대한 경제적 손실을 반영하지 못하고 일률적인 같은 값으로 평가하고 있는 것을 볼 수 있다. 하지만  $MC_{pm}^+$ 와  $MC_{pl}$ 는 최대손실 A의 변화에 따른 경제적 손실을 잘 반영하여 손실비용이 증가할수록 공정능력을 좋지 않게 평가하고 있음을 확인할 수 있다.

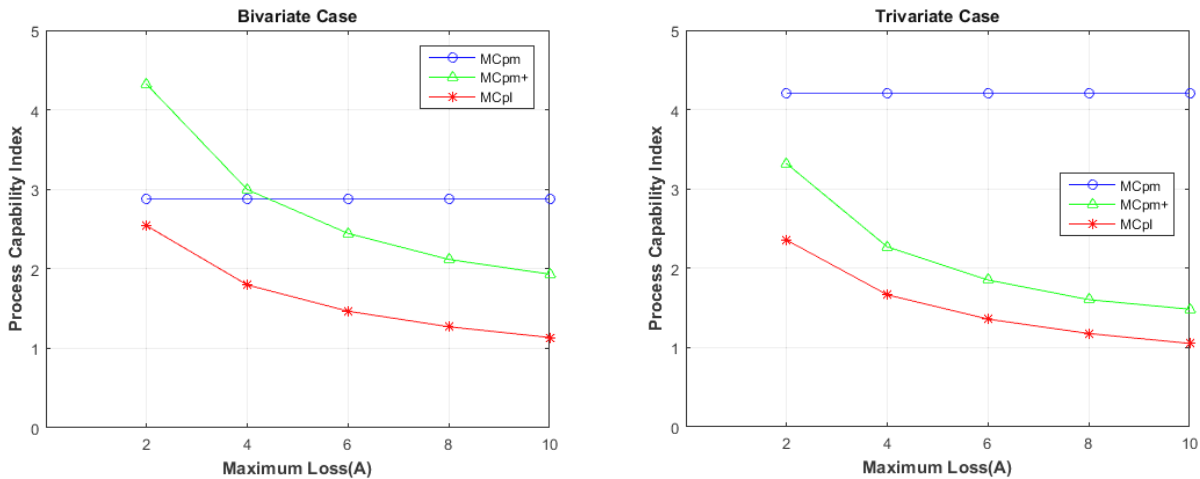
### 3.4 손실함수의 대칭과 비대칭에 따른 비교

공정산포 대신 손실함수의 기대손실을 적용하고 있는  $MC_{pm}^+$ 와  $MC_{pl}$ 의 2가지 모형을 중심으로 비교하고자 한다. 여기서 손실함수의 형상은 목표치  $T_i$ 를 중심으로 최대손실  $A_j$ 에 대하여 모두 같은 값을 가지는 경우의 좌우대칭일 때와 품질특성에 따라 해당 구간별로 서로 다르게 손실비용이 발생할 경우의 비대칭일 때로 나누어 비교한다. 그리고 이러한 손실함수의 대칭성과 비대칭성을 얼마나 잘 반영하여 공정능력을 평가 하는가를 비교하고자 한다. 이때 목표치와 공정평균의 치우침이 없고( $\mu = T$ ) 다특성치들간의 상관계수  $\rho$ 가 0, 0.3, 0.5, 0.8, 0.99로 변할 때를 기준으로 한 결과값은 다음과 같다.

<Table 4> Comparison According to Maximum Loss Conditions

$T_1 = 10, T_2 = 20, T_3 = 15, x_1 \sim N(10, 1.0), x_2 \sim N(20, 1.5), x_3 \sim N(15, 2.0), LSL_1 = 5, USL_1 = 15, LSL_2 = 15, USL_2 = 25, LSL_3 = 10, USL_3 = 20$

No.	A = [A <sub>i</sub> ]	Bivariate			Trivariate		
		MC <sub>pm</sub>	MC <sub>pm</sub> <sup>+</sup>	MC <sub>pl</sub>	MC <sub>pm</sub>	MC <sub>pm</sub> <sup>+</sup>	MC <sub>pl</sub>
1	2	2.876	4.321	2.542	4.201	3.319	2.355
2	4	2.876	2.995	1.797	4.201	2.269	1.665
3	6	2.876	2.445	1.467	4.201	1.852	1.359
4	8	2.876	2.118	1.271	4.201	1.604	1.177
5	10	2.876	1.933	1.137	4.201	1.484	1.053

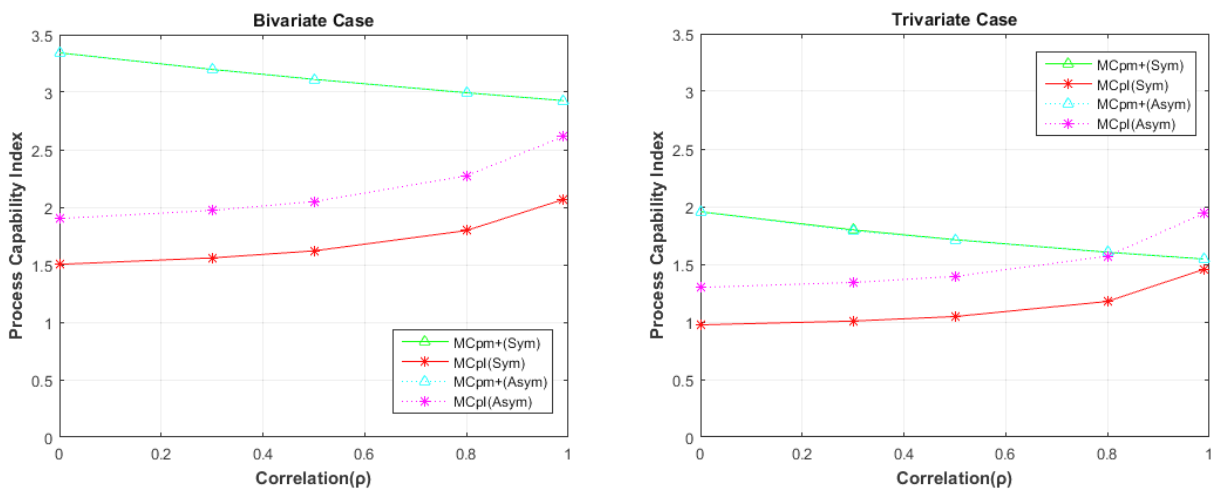


<Figure 5> Bivariate and Trivariate Cases According to Maximum Loss Conditions

<Table 5> Comparison between Symmetrical and Asymmetrical Conditions

$T_1 = 10, T_2 = 20, T_3 = 15, x_1 \sim N(10, 1.0), x_2 \sim N(20, 1.5), x_3 \sim N(15, 2.0), LSL_1 = 5, USL_1 = 15, LSL_2 = 15, USL_2 = 25, LSL_3 = 10, USL_3 = 20$   
 Symmetrical :  $\mathbf{A}' = [4, 4, 4, 4], \mathbf{A}'' = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ , Asymmetrical :  $\mathbf{A}' = [1, 2, 3, 4], \mathbf{A}'' = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

No.	Symmetry	$\rho$	Bivariate		Trivariate		No.	Symmetry	$\rho$	Bivariate		Trivariate	
			$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$	$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$				$MC_{pm}^+$	$MC_{pl}$		
1	Symmetrical	0	3.342	1.503	1.955	0.974	2	Asymmetrical	0	3.342	1.901	1.955	1.299
		0.3	3.198	1.559	1.789	1.007			0.3	3.198	1.972	1.789	1.342
		0.5	3.112	1.620	1.713	1.046			0.5	3.112	2.049	1.712	1.394
		0.8	2.995	1.797	1.604	1.177			0.8	2.995	2.273	1.604	1.570
		0.99	2.927	2.067	1.545	1.457			0.99	2.927	2.614	1.545	1.943



<Figure 6> Bivariate and Trivariate Cases between Symmetrical and Asymmetrical Conditions

<Figure 6>은 2변량과 3변량일 때 각각  $MC_{pm}^+$  와  $MC_{pl}$ 의 대칭(실선)과 비대칭(점선)을 모두 나타낸 그래프이다. 손실함수에 대한 대칭성과 비대칭성 측면에서 비교해보면,  $MC_{pm}^+$ 는 Taguchi의 이차손실함수를 다변량화한 기대손실을 적용함에 있어 손실계수  $k_i$ 는 대칭과 비대칭 모두 동일한 값의 최대손실비용 A에 의해 결정된다. 그렇기 때문에 상관관계수가 변화함에 따라  $MC_{pm}^+$  값은 변하지만 손실 함수에 대한 대칭성과 비대칭성에 따른  $MC_{pm}^+$  값은 양쪽 모두 동일한 값으로 나타내어 이를 반영하지 못하고 있음을 알 수 있다. 그리고 <Figure 6>에서 2변량과 3변량의  $MC_{pm}^+$  값이 대칭(Symmetrical)과 비대칭(Asymmetrical)일 때 실선과 점선이 겹쳐지면서 하나의 선으로 그려진 것을 볼 수 있는데 이는 그 이유에서이다. 반면  $MC_{pl}$ 는 각각의 특성치마다 목표치  $T_i$ 를 중심으로 서로 다른 최대손실  $A_j$ 값을 그대로 용이하게 식에 대입시켜 공정능력지수를 구할 수 있기 때문에 손실함수의 형태가 좌우 대칭일 때나 비대칭일 때 모두 제약없이 쉽게 반영하여 평가할 수 있다. 그리고 <Figure 6>을 보면 모든 구간에서 최대 손실 A의 값이 8로 동일하게 발생하는 대칭 구조의

$MC_{pl}(Sym)$ 보다는 품질특성치마다 손실이 1(작은 값)부터 8(큰 값)까지 다양한 값의 손실 정도를 민감하게 반영하고 있는  $MC_{pl}(Asym)$ 의 공정능력지수 결과값이 전반적으로 더 좋게 나타내고 있음을 알 수 있다.

### 4. 수치 예

본 수치 예는 Wang and Chen[12]의 논문에서 사용되었던 3변량의 Case Study로 실제 대만(Taiwan)에 있는 플라스틱 제품 제조사의 생산 공정으로부터 수집된 데이터를 사용하였다.

해당 플라스틱 제품의 생산공정에서 관리하고 있는 중요 품질관리 변수들은 깊이(D), 길이(L), 폭(W)의 3변량이다. 이들 D, L 및 W의 각각 규격은 (2.1, 2.3), (304.5, 305.1), (304.5, 305.1)이고 각 변수들의 목표치는  $\mathbf{T}' = [2.2, 304.8, 304.8]$ 이다. 공정에서 샘플링된 50개의 제품으로부터 측정된 D, L, W의 데이터들은 정규분포를 따르며, 이들 측정치로부터 구한 3변량의 평균벡터와 공분산 매트릭스는 다음과 같다.

$$\mu' = [2.16, 304.72, 304.77]$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0021 & 0.0008 & 0.0007 \\ 0.0008 & 0.0017 & 0.0012 \\ 0.0007 & 0.0012 & 0.0020 \end{bmatrix}$$

그리고 이들 3변량의 손실비용은 품질특성치마다 차이가 있으며 규격 허용오차 범위 내에서의 구간별 최대 손실비용(\$은  $A' = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ 라고 가정한다.

깊이(D), 길이(L), 폭(W)의 3변량에 대한 다변량 공정능력지수  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pl}$ 를 구해보면  $MC_{pm} = 1.2577$ ,  $MC_{pm}^+ = 0.00008$ ,  $MC_{pl} = 0.0020$ 의 다변량 공정능력지수 결과값을 구할 수 있다.

목표치로부터 공정평균의 치우침만을 고려하여 공정능력을 평가하고자 한다면  $MC_{pm} = 1.2577$ 의 값으로 평가될 수 있다. 그러나 기업에서 목표치로부터 멀어짐에 따른 손실의 정도가 품질평가에 중요한 요소라면 이러한 경제적 손실 정보가 반영된  $MC_{pm}^+ = 0.00008$ 과  $MC_{pl} = 0.0020$ 의 결과값을 고려하여 공정능력을 평가하는 것이 바람직할 것이다.

만약 경제적 손실에 있어 다특성치 간에 손실비용이 다르고 목표치로부터 멀어짐에 따라 손실비용에 차이가 있다면  $MC_{pm}^+$  보다는  $MC_{pl}$ 의 다변량 공정능력지수가 유용할 것이다.  $MC_{pm}^+$ 는 목표치로부터 멀어질수록 손실이 커지고 다특성치마다 그 손실 정도가 다름에도 불구하고 그 중에 가장 높게 발생된 최대손실비용에 의해 손실계수  $k_i$ 값을 결정하여 적용함으로써 손실함수에 대한 비대칭성을 제대로 반영하지 못하고 있기 때문이다. 반면  $MC_{pl}$ 는 다특성치가 가지는 다양한 손실비용과 목표치에 따른 손실의 차이를 보다 용이하고 명확하게 적용하여 공정능력을 구할 수 있다는 장점을 지니고 있다. 따라서  $MC_{pl}$  모형이 다른 2가지 모형  $MC_{pm}$ 과  $MC_{pm}^+$ 에 비해 가장 많은 정보력을 가지고 공정능력을 평가한다고 볼 수 있을 것이다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 3가지 모형인  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pl}$ 를 중심으로 한 다변량 공정능력지수들의 특징들을 비교해 보았다. 이들 모두는 공통적으로 목표치로부터 품질변동을 모두 잘 반영하고 있는 다변량 공정능력지수 모형들이다. 이러한 모형들에 대하여 상관계수의 변화, 목표치로부터의 치우침, 경제적 손실의 반영 그리고 손실함수에 대한 대칭성과 비대칭성의 적용 여부의 4가지 측면을 중심으로 다변량 공정능력지수들이 어떠한 특징들을 가지고 있는지를 비교 분석하였다. 그리고 그 가운데에서도 특히 경제적 손실의 정도를 반영하는 측면에서 손실함수의 형상이 대칭 또는

비대칭적 구조에 상관없이 품질특성치마다 서로 다른 가치에 따라 발생하는 다양한 손실비용을 공정평가에 반영할 수 있는가에 관한 비교분석에서는 3가지의 다변량 모형들 중에 분명한 차이점과 장점을 확인할 수 있었다.

상관계수의 변화에 따라 비교 결과를 정리하면,  $MC_{pm}$ 은 상관계수가 1에 가까워지게 되면 급격하게 과대평가하는 반면  $MC_{pm}^+$ 와  $MC_{pl}$ 는 상관계수의 변화에 따른 결과값들이 전반적으로 크게 과대평가되지 않고 안정적으로 평가한다는 점을 가장 큰 차이점으로 볼 수 있다. 목표치로부터의 치우침에 대한 반영 결과를 비교해 보면,  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pl}$  모두 전반적으로 치우침이 있을 때( $\mu \neq T$ )보다는 치우침이 없을 때( $\mu = T$ )에 더 좋은 결과값을 나타내고 있다. 그 중에 특히  $MC_{pl}$  다른 2가지의 모형들에 비해 치우침 유무에 따른 평가 결과값의 변동의 폭이 작아 안정적으로 평가한다는 차이점을 가지고 있다. 경제적 손실의 정도를 반영하는 측면에서의 특징들을 비교해 본 결과,  $MC_{pm}$ 은 경제적 손실(최대손실비용 A)을 전혀 반영하지 못하고 있는 반면  $MC_{pm}^+$ 와  $MC_{pl}$ 는 경제적 손실의 변화와 그 정도에 따라 잘 반영하여 평가하고 있음을 확인하였다. 그리고  $MC_{pm}^+$ 와  $MC_{pl}$ 의 두 모형을 중심으로 손실 함수에 대한 대칭성과 비대칭성 측면에서 비교한 결과,  $MC_{pm}^+$ 는 경제적 손실을 반영하고는 있으나 이차손실함수의 특성으로 인해 각각의 특성치와 관련된 최대손실이 같은 값을 가지는 좌우대칭일 때만 정확한 평가가 가능하다는 한계점을 가지고 있었다. 반면  $MC_{pl}$ 는 각각의 특성치마다 목표치를 중심으로 서로 다르게 발생할 수 있는 최대손실들을 그대로 수리적 모형에 용이하게 적용시킬 수 있으며 손실함수의 형상이 좌우대칭 또는 비대칭과 같은 조건에 제약 받지 않고 공정을 평가할 수 있다는 장점을 가진 다변량 공정능력지수라 할 수 있다.

본 연구에서 시뮬레이션을 통한  $MC_{pm}$ ,  $MC_{pm}^+$ ,  $MC_{pl}$ 에 대한 4가지 측면에서의 특징들을 비교 분석한 결과들을 모두 종합적으로 살펴본 결과  $MC_{pl}$ 가 다른 두 가지 유형의 공정능력지수들에 비하여 생산 현장에서 요구되는 다양한 관리 변수들과 시시때때로 변화할 수 있는 공정조건에 보다 민감하면서도 안정적으로 공정능력을 잘 평가하는 좋은 척도로서의 특징들을 갖추고 있다고 볼 수 있겠다. 그리고 무엇보다  $MC_{pl}$ 는 다특성치 마다 가지고 있는 가치에 따라 서로 다르게 발생하는 다양하고 복잡한 손실비용을 쉽게 잘 반영하면서 손실의 정도에도 민감하게 공정능력을 평가 가능하다는 장점을 가지고 있다. 그리고  $MC_{pl}$ 는 치우침이 있을 때( $\mu \neq T$ )보다는 치우침이 없을 때( $\mu = T$ ) 더 좋은 평가 결과를 나타내며 비대칭의 손실비용이 클 때 보다는 대칭의 손실비용이 작을수록 더 좋게 평가하고 있다. 또한  $MC_{pl}$ 은 산포 대신 역정규 손실함수의 기대손실을 적용함



으로써 대칭과 비대칭의 제약성을 받지 않으면서 유연성 있게 사용할 수 있다. 그리고 생산공정에서 관리해야 할 특성치가 많아지더라도 다변량 분석기법을 기반으로 하기 때문에 보다 다양하게 응용할 수 있어 필요에 따라 넓게 확장이 가능하다고 볼 수 있다. 따라서  $MC_{pL}$ 는 본 연구에서 비교한 3가지 모형들 가운데 가장 많은 강점을 가진 다변량 공정능력지수 모형으로 제안할 수 있다.

## References

- [1] Chung, Y.B. and Kim, Y.S., Comparison and Application of Process Capability indices, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2007, Vol. 30, No. 4, pp. 182-189.
- [2] Chung, Y.B., A Multivariate Process Capability Index using Expected Loss, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2005, Vol. 28, No. 4, pp. 116-123.
- [3] Drain, D. and Gough, A.M., Applications of the Upside-Down Normal Loss, *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 1996, Vol. 9, No. 1, pp. 143-145.
- [4] Moon, H.J. and Chung, Y.B., Multivariate Process Capability Index Using Inverted Normal Loss Function, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2018, Vol. 41, No. 2, pp. 174-183,
- [5] Mun, H.J. and Chung, Y.B., A Study on Multivariate Process Capability Index using Quality Loss Function, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2002, Vol. 25, No. 2, pp. 1-10.
- [6] Pan, J.-N. and Lee, C.-Y., New Capability Indices for Evaluating the Performance of Multivariate Manufacturing Processes, *Quality and Reliability Engineering International*, 2010, Vol. 26, No. 1, pp. 3-15.
- [7] Shahriari, H. and Abdollahzadeh, M., A New Multivariate Process Capability Vector, *Quality Engineering*, 2009, Vol. 21, No. 3, pp. 290-299.
- [8] Spiring, F.A. and Yeung, A.S., A General Class of Loss Functions with Industrial Applications, *Journal of Quality Technology*, 1998, Vol. 30, No. 2, pp. 152-162.
- [9] Spiring, F.A., The Reflected Normal Loss Function, *Canadian Journal of Statistics*, 1993, Vol. 21, pp. 321-330.
- [10] Taam, W., Subbaiah, P., and Liddy, J.W., A Note on Multivariate Capability Indices, *Journal of Applied Statistics*, 1993, Vol. 20, pp. 339-351.
- [11] Wang, F.K., Hubele, N.F., Lawrence, F.P., Miskulin, J.D., and Shahriari, H., Comparison of three multivariate process capability indices, *Journal of Quality Technology*, 2000, Vol. 32, No. 3, pp. 263-275.
- [12] Wang, F.K. and Chen, J.C., Capability index using principal component analysis, *Quality Engineering*, 1998, Vol. 11, No. 1, pp. 21-27.

## ORCID

Hye-Jin Moon | <http://orcid.org/0000-0002-2477-6669>

Young-Bae Chung | <http://orcid.org/0000-0003-4259-6677>