Journal for History of Mathematics
Vol. 32 No. 1 (Feb. 2019), 1–15

http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2019.32.1.001

On the History of Formation of Romanian School of Finsler Geometry

루마니아 핀슬러 기하학파 형성의 역사

Won Dae Yeon 원대연

We divide the timeline of the history of Finsler geometry, which dates back to Riemann's inaugural lecture in 1854, into three periods (hibernation, hiatus, rebirth) and we study formation of Romanian Finsler school around Iasi, Romania during the hiatus period. We look for the history centered around Radu Miron who is a third generation geometer of Iasi University and the mathematical heritage there through five generations. We also investigate mathematical impact of T. Levi-Civita, D. Hilbert, É Cartan who are considered as top mathematicians at their time.

Keywords: M. Haimovici, R. Miron, É. Cartan, S.S. Chern, M. Matsumoto, connection, parallel transport, non-linear connection, Finsler geometry; 하임모비치, 미론, 카르탕, 천, 마쭈모토, 접속, 평행이동, 비선형 접속, 핀슬러 기하학.

MSC: 01A55, 01A60 ZDM: A30

1 서론

필자는 수학을 연구함에 있어 어떤 업적이 나올 당시의 수학적 시대 상황과 영향을 주고 받았던 수학자들 사이의 관계를 잘 이해하고 왜 그런 아이디어가 나오게 되었는지와 한계를 알게 되면 실제 연구에도 매우 도움이 될 수 있을 것이라고 생각한 예를 들어, 한국수학사학회지(The Korean Journal for History of Mathematics)에 발표되었던 김영욱과 Yuzi Jin의 엘리 카르탕에 관한 연구 [16], 한길준의 리만에 관한 연구 [15], 박창균의 로바체프스키에 관한 연구 [23] 등 특정 인물에 관한 논문과 조민식의 구면정리의 역사에 관한 연구 [9] 등 특정 분야의 역사에 관한 논문을 들 수 있다.

저자는 본 논문에서 루마니아 동부의 중심 도시인 이아시(Iasi)를 중심으로 한 루마니아 핀슬러 기하학파의 탄생에 대하여 고찰한다. 루마니아는 오스트리아-헝가리 제국의 일원

본 연구는 덕성여자대학교 2017년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었습니다.
Won Dae Yeon: Dept. of Math. Duksung Women's Univ. E-mail: dywon@duksung.ac.kr
Received on Jan. 22, 2019, revised on Feb. 18, 2019, accepted on Feb. 27, 2019.

으로 유럽을 지배했던 헝가리와 달리 지리적으로나 역사적으로 유럽에서도 변방이라고 할 수 있다. 이아시는 루마니아 동부의 소도시이지만 1916–1918년 잠시 루마니아의 수도가 되는 등 루마니아 문화의 중심지라고 할 수 있다. §3에서 이아시를 중심으로 한 지리적 · 역사적 고찰도 학문(여기서는 핀슬러 기하학) 발전의 역사 연구에 필연적이기 때문에 이아시 대학과 도시와 대학의 형성에 큰 영향을 미쳤던 공국의 지배자였던 쿠자 공작 등에 대해서도 간단히 알아보았다. §4에서 1854년[1)] 리만의 취임강연 [24]에서 시작된 핀슬러 기하학의 역사를 1919년 핀슬러의 [10]까지를 동면기, 이후 천의 [8] 전까지를 단절기, 1992년 천의 [8]를 핀슬러 기하학의 재탄생이라고 구분하였다. §5에서 루마니아 핀슬러 기하학파 3세대에 해당하는 미론을 중심으로 이아시 대학 수학과 창설자들인 밀러와 메이어를 1세대, 이들의 학생인 하임모비치를 2세대로 구분하고 이들의 학문적 상관 관계를 밝혔다. 현재 5세대까지 배출되었으며 시각을 넓게하여 레비-치비타, 카르탕, 힐버트 등의 수학적 영향에 대해서도 논하였다.

본문에는 지명과 인명 등은 널리 통용되는 영어 표기법을 사용하였고 각주에는 학위를 받은 대학과 학위 논문의 제목 등을 편의상 해당 원어로 표기하였다. 지명과 인명 등 고유명사에는 적어도 한 번 괄호 안에 영어 표기와 원어(루마니아어) 표기를 덧붙였다. 이 논문에서는 식을 간단하게 표기하기 위하여 위 첨자와 아래 첨자가 동일할 때 이 첨자에 대해서 더하는 것으로 보는 아인슈타인의 약속을 사용하였다. 미국수학회(American Mathematical Society)와 제휴하여 미국 북 다코타 주립대학(North Dakota State University)에서 제공하는 수학 계보 프로젝트(Mathematics Genealogy Project) [21]를 이용하여 등장하는 수학자들의 계보를 확인하였고 인물에 관한 정보는 인터넷 백과사전인 위키피디아(Wikipedia) [28]를 참조하였다.

2 선행 연구

[29]에서 저자는 19세기 중반부터 20세기 초반까지 미분기하학 발전의 역사에 대해 연구하였다. 레비-치비타는 그의 스승인 크리스토펠이 고안한 크리스토펠의 기호를 이용하여 공변미분의 개념을 도입하였고, 리치와의 공동연구로 절대미분학을 완성하고 해석학적인 공변미분이 기하학적인 평행이동과 동치 개념임을 보였다. 이들의 연구는 괴팅겐 대학의 힐버트와 민코프스키를 통해 아인슈타인의 일반상대성이론의 수학적 기초가 되었다. 하임모비치는 박사학위 논문 지도 교수 레비-치비타의 연구를 이어받아 좀 더 일반적인 공간인 유사 리만 공간(pseudo-Riemannian space)이나 핀슬러 공간에서 평행이동의 개념을 정립하려고 노력하였다.

1) 리만의 취임강연은 1854년에 있었지만 이것이 리만 사후 논문 [24]로 출판 된 것은 그의 동료이었던 데데킨트 덕분이었다.

[30]에서는 1854년 리만의 취임강연 [24]에서 리만 기하학의 시발을 알리는 계량과 곡률의 개념을 도입하였는데 실제로는 리만 계량뿐만 아니라 핀슬러 계량도 언급하고 있음을 언급하고 괴팅겐 대학에서 리만의 후학들인 민코프스키와 힐버트 그리고 그 다음 세대인 카라테오도리와 그의 학생인 핀슬러까지 4세대에 걸쳐 아이디어들이 어떻게 이어져 내려 왔는지 살펴보고 어떻게 핀슬러 기하학이 구체화 되었는지에 알아보았다. 핀슬러는 그의 박사학위 논문 [10]에서 힐버트의 변분법에 영향을 받아 당시 변분법의 대가이던 카라테오도리의 지도로 계량

$$F^2 = g_{ij}(x,y)dx^i dx^j$$

이 주어졌을 때[2] 두 점을 잇는 곡선 $\alpha(t),\ a \le t \le b$의 길이를

$$L[\alpha] = \int_a^b F(\alpha(t), \alpha'(t))dt$$

로 정의할 수 있는데 이 적분을 최소화하는 곡선이 존재할 필요조건이 계량 $F(x,y)$의 볼록성 조건, 즉

$$\left[\frac{\partial F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x,y)\right]$$

이 양의 정부호인 것을 발견하였다. 그렇지만 핀슬러는 핀슬러 기하학을 변분학적인 관점에서 보았기 때문에 리만의 아이디어의 진정한 계승자라고는 할 수 없다.

베어왈트(L. Berwald)는 독일 뮌헨의 루드비히-막시밀리안 대학(Ludwig-Maximilians-Universität München)에서 1908년 포스(A. Voss)[3]의 지도로 박사학위를 받았다[4]. 건강상의 이유로 학위 논문의 결과와 후속 연구는 핀슬러의 [10]보다 후인 1926년이 되어서야 [3]로 발표되었다. 베어왈트도 핀슬러와 마찬가지로 힐버트의 영향으로 당시에 유행하고 있던 변분법을 이용하여 측지선에 관한 미분방정식

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = 0 \tag{1}$$

을 유도하였다. 여기서 G^i는 핀슬러 계량 F에 의해 정의되는 함수이다. 더 나아가 리만의 아이디어를 따라

$$D\xi^i = d\xi^i + C_{j\ k}^{\ i}(x,\dot{x})\xi^j d\dot{x}^k + \Gamma_{j\ k}^{\ i}(x,\dot{x})\xi^j dx^k \tag{2}$$

로 정의되는 베어왈트 접속 D을 제안하였다. 여기서 접속 계수 $C_{j\ k}^{\ i},\ \Gamma_{j\ k}^{\ i}$는 핀슬러 계량 F에 의해 정의된다. 이 접속을 이용하여 평행이동도 정의할 수 있었다. 이런 면에서 베어왈트가 실질적으로 핀슬러에 앞서 새로운 기하학 분야를 개척한 리만의 후계자라고 할 수 있다. [31]

2) 여기서 $g_{ij}(x,y) = g_{ij}(x)$이면 F가 리만 계량이다. 이런 의미에서 '핀슬러 기하학은 리만 기하학의 일반화'라고 할 수 있다.

3) 포스가 제안한 역학계의 기하화 문제를 외미분계 이론을 창안한 카르탕도 자신의 이론을 적용하여 해결하려고 노력하였는데 카르탕에게서 외미분계 이론을 배운 하임모비치와 그 의 학생인 미론에 의해서 이 문제가 완전히 해결되었다.

4) 그의 학위 논문의 제목은 Krümmungseigenschaften der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems und der in ihm enthaltenen Regelflächen이다.

에서는 이런 베어왈트의 노력을 시작으로 그가 정착하였던 헝가리 데브레첸에서 핀슬러 기하학파가 탄생하는 과정을 살펴 보았다.

지난 연구 [30, 31]를 고려할 때 핀슬러 기학학 발전의 단계를 시기적으로 구분할 필요도 있었기 때문에 §4에서 우선 리만의 취임강연부터 핀슬러까지(1854–1919년)를 동면기, 핀슬러부터 천까지(1919–1992년)를 단절기, 천(1992년) 이후를 재탄생이라고 하였다. 따라서 [30]은 동면기의 역사 전반을 다뤘고 [31]은 단절기의 역사 중 데브레첸을 중심으로한 헝가리 핀슬러 기하학의 역사를 다뤘다. 본 논문에서는 단절기에 해당하는 기간 중 이아시를 중심으로 한 루마니아 학파 형성의 역사를 고찰한다.

1990년대 미국을 비롯한 서유럽 학계에 동유럽 핀슬러 기하학파의 대부로 알려지기 시작한 미론과 그의 지도교수인 하임모비치가 발표한 논문의 참고 문헌들과 이 논문의 참고 문헌들의 상관 관계를 조사하여 어떻게 영향을 주고받았는지 살펴보았다. 이 과정에서 미국 수학회(Americal Mathematical Society)의 수리과학넷(MathSciNet)의 수학 리뷰(Math Review)를 사용하였지만 하임모비치의 논문은 독일어나 불어로 되어있거나 너무 오래돼 수학 리뷰에 기록되지 않은 것들도 있었고 미론의 논문은 주로 루마니아어로 되어 있고 루마니아 내에서 출판된 논문집에 실려 접근하기가 어려웠다. 이런 어려움 때문에 수학 리뷰 뿐만 아니라 가능한 모든 참고 문헌들을 세심히 살피고 필요한 경우 논문의 내용을 연구에 이용하였다.

3 지리적 · 역사적 배경

루마니아는 동유럽 중앙에 위치한 공화국으로 사회주의 루마니아 정권 붕괴 이후 현재 유럽연합(European Union)의 정식 회원국이다. 루마니아는 민주화 이후에도 유럽 민주 국가들 중 여전히 민주주의적 전통이 취약하지만 고대 로마 시대 로마인들의 점령지가 된 이후 주변의 슬라브 세계 속에서 언어와 문화의 독창성을 유지해 왔다.

이아시(Iasi, 루마니아어: Iaşi)는 루마니아 북동부와 몰다비아(Moldavia, 루마니아어로 Moldavia) 지방 중부에 위치한 도시로 루마니아 동부 지방에서 가장 큰 도시이며 루마니아의 수도인 부쿠레슈티 다음으로 루마니아에서 두 번째로 큰 도시이다. 1564–1859년 몰다비아(Moldavia) 공국의 수도이기도 했으며 이아시 주의 주도이기도 하다. 1859–1862년 몰다비아-왈라키아 연합공국의 몰다비아 공국의 수도이었다[5)]. 1859년 알렉산드루 이오안 쿠자가 몰다비아 공국과 왈라키아 공국을 동시에 다스리게 되었는데 이 두 공국은 1862년에 공식적으로 합병하여 루마니아 연합공국이 되었고[6)] 1865년에는 루마니아 공국으로 1881년에 루마니아 왕국으로 계승되었다.

5) 왈라키아 공국의 수도는 부쿠레슈티이었다. 역사적으로 오스만 제국과 러시아 사이에 낀 희생자였는데 두 공국은 오스만 제국의 약화와 크림 전쟁의 틈에서 1858년 자치권을 획득하게 되었다

6) 이 때부터 부쿠레슈티가 루마니아의 수도가 되었다.

브라소브(Brasov, 루마니아어로 Braşov)는 루마니아의 중부 트란실바니아 지방의 도시로 동·서 유럽의 교역의 상업 중심지이다. 제 1회 루마니아 핀슬러 기하학 세미나(First International Seminar of Finsler Geometry)가 1980년 브라소브 대학에서 개최되었다.

알렉산드루 이오안 쿠자(Alexander John Cuza, 루마니아어로 Alexandru Ioan Cuza)는 1820년 3월 20일 몰다비아 브를라드에서 탄생하여 1873년 5월 15일 망명지인 독일 하이델베르크에서 사망하였다. 몰다비아 지방의 귀족으로 1859년에는 몰다비아와 왈라키아의 두 공국의 공작으로 즉위하였다. 1862년 몰다비아 공국과 왈라키아 공국이 연합하여 몰다비아-왈라키아 연합공국(루마니아 연합공국)이 되면서 통일되었다. 이때 루마니아 연합공국의 초대 공작으로 즉위했다. 1866년에 공화정의 반동으로 유럽 전역에서 일어난 귀족들의 왕정복고 운동으로 퇴위하고 독일의 하이델베르크로 망명하였다.

이아시의 알렉산드루 이오안 쿠자 이아시의 대학(Alexandru Ioan Cuza University of Iasi)은 이 지역을 통치하던 알렉산드루 이오안 쿠자 공작의 칙령으로 1860년 이아시에 설립된 공립대학이며 루마니아에서 가장 오래된 대학으로 루마니아 최고 연구중심대학이다. 본 논문에서는 앞으로 이아시 대학이라고 칭한다. 이아시 대학에 1864년부터 수학 전공 교수들이 자연과학대학 소속으로 재직하기 시작하였고 1948년 수학과로 독립하였다.

4 핀슬러 기하학 발달 역사의 기간 분류

4.1 동면기

[24]에서 핀슬러 계량을 처음으로 인지하였던 리만 이후 당대의 최고 수학자들이 핀슬러 공간에 대해서 연구하였으나 이 일반화된 계량에 핀슬러의 이름이 붙은 것은 핀슬러의 박사 학위 논문인 [10]를 따라 테일러가 [27]에서 그렇게 이름을 짓고 난 후이다. 핀슬러의 [10]는 단편적인 논문이 아닌 체계적인 핀슬러 기하학에 관한 최초의 단행본이기 때문에 이후에 이 분야를 연구한 학자는 모두 이 책의 영향을 받았으나 핀슬러 자신은 이후 수학기초론에 몰두하여 핀슬러 집합론(Finsler Set Theory)이라는 집합론의 새로운 분야를 개척한 학자로 더 잘 알려져 있다. 리만의 취임강연 [24]부터 핀슬러의 [10]까지 1854–1919년을 핀슬러 기하학의 동면기(hibernation)라고 할 수 있다.

저자는 [30]에서 괴팅겐 대학에서 핀슬러 기하학이 탄생하게 된 배경에 대하여 연구하였다. 1854년 리만의 [24]에서 시작하여 당시 수학 연구 중심지이던 괴팅겐 대학에서 리만의 영향을 받은 당대 최고의 수학자라고 할 수 있었던 힐버트와 민코프스키 그리고 이들의 학생이었던 카라테오도리[7]와 그의 학생인 핀슬러에 의해 새로운 분야에 대한 아이디어가 이어져 내려왔

7) 카라테오도리는 민코프스키의 학생이었지만 학문적으로 힐버트의 영향이 더 컸음을 살펴보았다. [30]의 135쪽의 표 1과 148쪽의 표 2 참조.

다. 이때까지가 시대적으로 구분하였을 때의 동면기에 해당한다.

4.2 단절기

핀슬러의 [10] 이후 핀슬러 기하학의 발전은 20세기 중반을 거치며 혁명적인 발전을 이루었던 리만 기하학 분야와 비교하면 매우 초라한 수준이라고 할 수 있다. 리만 기하학이 해석학이나 위상수학과 접목되어 대역적인 결과들이 쏟아져 나왔고 한 동안 전체 수학 분야에서도 주류를 이루고 있었지만 계산의 복잡성으로 인하여[8] 1992년 천이 [8]에서 그의 [7]을 재해석하여 대역적 핀슬러 기하학 연구의 기반을 제공하기 전에는 지리적으로 제한된 지역의 학자들이 주로 핀슬러 기하학의 국소적인 문제 해결에 노력을 기울였다. 이 시기의 기하학 연구의 주류가 대역적인 문제의 해결이었음인 반면 핀슬러 기하학의 연구가 국소적인 계산 문제에 주력하였기 때문에 이 기간을 주류에서 단절되었다는 의미에서 단절기(hiatus)라고 하였다. 지리적으로는 주로 헝가리와 루마니아 등 구동구권 그리고 일본으로 제한되는데 저자는 [31]에서 헝가리 핀슬러 기하학파의 탄생에 대해서 연구한 바 있다.

핀슬러의 [10] 이후의 핀슬러 기하학의 발전은 지역적인 학파에 힘입은 바가 크다고 할 수 있다. 크게는 헝가리와 루마니아 중심의 구동구권 학파와 일본 학파로 구분할 수 있다. [31]에서 저자는 베어왈트에 의해 시작된 헝가리 데브레첸을 중심으로 한 핀슬러 기하학파의 형성에 대해서 연구하였다.

베어왈트는 괴팅겐의 힐버트의 영향을 받아 변분법을 리만 계량을 일반화한 계량(핀슬러 계량)이 주어진 공간(핀슬러 공간)에 적용하여 리만의 아이디어를 확장하였다. 베어왈트의 이 연구는 당대의 최고 수학자 중 한 사람인 카르탕의 핀슬러 기하학 연구와 쌍벽을 이루는 업적으로 카르탕의 학생인 에레스만에 의해 주다발속 위의 접속이론이 정립되기 전에 얻을 수 있었던 최첨단의 결과물이라고 할 수 있다[9]. 이 단절기에도 미국에서 발행되는 미국수학회의 트란섹션스(Transections of American Mathematical Society)에 싱(J. Synge)의 논문 [26]과 수학연보(Anals of Mathematics Studies)에 테일러(J. Taylor)의 논문 [27]이 실린 것을 보면 핀슬러 공간에 관한 연구도 매우 중요한 주제 중의 하나로 생각하고 있었음을 미루어 짐작할 수 있다. 단지 계산의 어려움 때문에 만족할 만한 결론에 도달하지 못 하였을 뿐 지속적으로 연구를 시도하였으리라 생각된다. 베어왈트는 [24]에서 리만이 언급한 곡률과 평행이동의 개념을 최초로 핀슬러 공간에 적용하였는데 곡률과 평행이동 또는 접속의 개념이 오늘날 주어진 공간의 기하학적인 문제를 연구하는 주 도구로 사용되고 있기 때문에 베어왈트와 이들의 후계자들인 헝가리 드브레첸 핀슬러 기하학파의 공헌을 간과해서는 안된다. 헝가리는 1867년부터 1918년까지 존속했던 합스부루크 가의 왕국인 오스트리아-헝가리 제국의

8) 일변수 미분적분학에서 다변수 미분적분학으로 건너 뛴 어려움 때문이라고 할 수 있다.
9) 카르탕 접속과 베어왈트 접속의 비교는 [31]의 Table 1을 참고.

일원으로 제 1차 세계대전에서 독일, 오스만 제국 등과 함께 참전하여 이탈리아 등의 연합군에 패배할 때까지 유럽의 중심이었다. 다만 유태인에 대한 박해를 피해 베어왈트가 헝가리의 작은 도시인 드브레첸에 정착한 것이 계기가 되어 드브레첸 학파가 탄생하게 되었다.

이 논문에서 고찰하는 루마니아 이아시 학파의 형성기도 단절기에 속한다. 그러나 미론의 연구가 무르익고 미론과 그의 학생에 의해 핀슬러 기하학을 전공한 박사학위자들이 대량으로 배출되기 시작한 1980년 후반의 연구는 재탄생기의 연구에 필적한다. 특히 1995년 미국 워싱턴 주 씨애틀의 워싱턴 대학(University of Washington)에서 열린 미국수학회의 여름공동연구회의(Joint Summer Research Conference)[10) 에서 미론을 중심으로 한 구 동구권의 수학자들과 천을 중심으로 한 미국의 수학자들이 만난 이후 활발한 교류를 통해 같은 현상을 다른 방법으로 이해하고 있음을 알게 되었다[11). 이런 의미에서 미론을 중심으로 한 루마니아 핀슬러 기하학파의 1980년대 중반의 연구는 핀슬러 기하학 재탄생의 여명기에 해당한다고 할 수 있다.

4.3 재탄생

1854년 리만이 취임강연 [24]에서 제안하였던 리만 계량을 일반화한 핀슬러 계량은 1919년 핀슬러의 박사학위 논문 [10]에서 비로소 구체화 되었으나 20세기 중반 이후 리만 기하학의 폭발적인 성장에도 불구하고 계산상의 어려움으로 인하여 그 가치를 인정받지 못하고 있었다. 1992년 천은 [8]에서 1948년의 [7]을 재해석하여[12) 핀슬러 기하학에 새로운 생명을 불어 넣었다. 그의 주다발공간과 벡터다발공간 위에 정의된 접속이론을 이용한 새로운 해석을 바탕으로 핀슬러 기하학 분야의 대역적 정리들이 도출되기 시작하였다. 따라서 1992년 천에 의해 핀슬러가 다시 태어났다(rebirth)고 하여도 지나친 말이 아니다. 이 논문에서는 핀슬러의 [10] 이후 천의 [8] 이전까지 1919–1992년을 주류 기하학에서 단절된 단절기(hiatus)라고 하였다. 그렇지만 이 기간에도 대역적 문제 해결에 대한 노력이 드물었던 것에 비하여 국소적인 문제에 관한 연구가 꾸준히 이어져왔기 때문에 이 당시에 어떤 역사적인 발전이 있었는지에 대해 연구해보는 것도 가치있는 작업이다.

---

10) 이 때 발표된 논문들이 미국수학회의 현대수학(Contemporary Mathematics) 시리즈의 [2]로 출간되었다. 여기에는 천의 [8]를 바탕으로 한 핀슬러 공간의 대역적인 문제를 해결하려고 한 논문과 그 이전의 국소적인 계산에 관한 논문들과 이를 바탕으로 핀슬러 기하학을 생명과학, 공학, 물리학에 응용한 논문들이 게재되었다.

11) 예를 들면 루마니아 학파의 아나스타시에이는 [1]에서 [8]의 천 접속과 1950년대에 룬트(Hano Rund)가 [25]에서 국소적으로 계산하였던 룬트의 접속이 같은 것임을 보였다.

12) 1948년부터 1992년 천 자신에 의해 천 접속이 재해석 되기까지 아무도 천의 업적을 현대적인 언어로 이해하지 못함은 신비롭기까지 하다.

5 루마니아 핀슬러 기하학파의 형성

알렉산드루 밀러(Alexandru Myller, 1879–1965년)는 이아시 대학 초기 수학자의 한 사람으로 1906년 독일 괴팅겐에서 힐버트의 지도로 박사학위를 받았고[13)] 1910년 이아시 대학의 교수가 되었다. 이아시 대학에서 1910년부터 밀러의 이름을 딴 밀러 수학 세미나가 계속 개최되어 2009년 100회 기념 학회가 열렸다. 밀러의 지도로 1920년 메이어(Octav Mayer, 1895–1966년)가 루마니아에서 순수 수학 분야 최초의 박사학위를 받았다[14)]. 루마니아 학술원의 수학 연구소는 메이어를 기념하여 메이어 수학 연구소라고 하였다.

비록 밀러가 메이어의 지도교수이지만 같은 학문 세대로 보고 하임모비치와 미론에 영향을 미친 것을 고려하여 루마니아 핀슬러 기하학파의 1세대로 간주한다. 그리고 이들에 대한 수학적 영향은 적어도 괴팅겐의 힐버트나 리만까지 거슬러 올라갈 수 있다.

5.1 제 2세대: 하임모비치

하임모비치(Mendel Haimovici)는 1906년 11월 30일 이아시에서 태어났다. 1930년 이아시 대학을 졸업하고 이 대학 수학과의 창설자인 밀러와 메이어의 조수로 일하다 장학금을 받아 1932–1933년 2년간 이태리 로마로 유학하여 레비-치비타의 지도 아래 박사학위를 받았다[15)]. 학위 후 1933년 이아시로 돌아와 연구하였으나, 1940년 당시 전 유럽을 휩쓸던 유태인에 대한 인종차별 정책으로 인하여 1940년 대학을 떠날 수밖에 없었다. 다행히 대학을 떠나서도 밀러와 메이어의 격려와 동료들의 지원으로 연구를 지속할 수 있었다. 1944년 대학으로 복귀하여 교수가 되고 학과장을 역임하였으며 1948년 루마니아 아카데미의 통신회원이 되었고 1963년 정회원이 되었다. 40여 년 동안 핀슬러 기하학 뿐만 아니라 수학 여러 분야에 많은 기여를 하였고 교육에도 깊은 관심을 가졌다. 1973년 사망할 때까지 창조적인 역할을 하였다.

하임모비치가 1932년 레비-치비타와 공부하기 위해 이태리를 방문했을 때는 볼테라(Vito Volterra), 카스텔누오보(Guido Castelnuovo), 사베리(Francesco Saveri)와 레비-치비타 등에 의해 이태리 수학이 꽃피던 시기였다. 레비-치비타는 1918년부터 은퇴한 1938년까지 로마 대학(University of Rome)에 재직하였는데 역학의 대가로 알려졌다. 크리스토펠, 리치, 레비-치비타에 의한 19세기 중반부터 20세기 초반까지 미분기하학의 발전에 관해서는 저자가 [29]에서 고찰한 바 있다. 후대 수학자들에 의해 이들의 연구가 핀슬러 기하학을 연구하는 도구의 역할을 하게 되었기 때문에 리만 기하학 분야에서 잘 알려진 것처럼 핀슬러 기하학에서도 이들의 공헌을 간과할 수 없다. 레비-치비타는 복소변수함수를 이용하여 유체역학의

13) 박사학위 논문 제목은 Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen이다.

14) 박사학위 논문 제목은 Contributions a la theorie des quartiques bicirculaires이다.

15) 박사학위 논문 제목은 Sur l'ecoulement des liquides pesants dans un plan vertical (On the Flow of Heavy Liquids in a Vertical Plane)이다.

적분방법론을 정립하였는데 하임모비치의 박사학위 논문은 이것을 응용한 것이다.

하임모비치는 이태리 유학 전 1931년 이아시에서 카르탕을 처음 만났다. 카르탕은 당시 외미분계(Exterior Differential System) 이론을 창조하여 역학 문제에 응용하고 있었다. 하임모비치는 [14]에서 카르탕의 외미분계 이론을 공부하고 기하학 문제의 해결에 적용하였는데 이 문제는 포스(A. Voss)에 의해 제기되었던 것으로 카르탕은 외미분계 이론을 응용하여 이 문제를 해결하려고 노력하였다. 1928년 볼로냐(Bologna)에서 열린 세계수학자대회(International Congress of Mathematicians)에서 카르탕은 상태가 경로에 영향을 받는 비홀로노믹 역학계의 문제 중 하나인 포스(A. Voss)의 기하화 문제를 어떤 역학계에서는 해결하였다고 주장하였는데 후에 카르탕의 증명 [5]이 완전하지 않다는 것이 알려졌다. 하임모비치가 이 문제를 해결했다. 카르탕의 외미분계 이론은 지금도 핀슬러 기하학의 연구 방법론 중의 하나로 이용되고 있다.

카르탕은 수학의 여러 분야에 새로운 이론을 창안하는 등 당대의 최고의 수학자라고 하여도 지나치지 않지만 아마도 한 분야에 집중할 수가 없었기 때문에 자신의 이론을 적용하여 문제를 해결하는 데는 미치지 못하였다. 반면 하임모비치는 카르탕에게서 배운 외미분계 이론을 핀슬러 기하학을 포함하여 기하학의 여러 분야의 문제를 해결하는 데 천착하였다. 이런 의미에서 하임모비치는 카르탕 외미분계 이론의 진정한 수행자라고 할 수 있다.

하임모비치는 카르탕의 업적에 영감을 받아 핀슬러 공간의 초평면이 적분가능할 조건에 대한 중요한 기여를 하였다. 특히 [11]에서 적분가능한 초평면을 국소적으로 특정짓는 불변량을 발견하였다. 하임모비치의 또 다른 중요한 업적 중 하나는 [12]에서 핀슬러 공간의 선형 접속이 공간의 점에만 의존하고 평행이동이 길이를 보존하는 경우를 특정짓는 방법을 발견한 것이다. 하임모비치는 [13]에서 변분학의 방법을 이용하여 카르탕의 평행이동 개념을 새롭게 서술하여 핀슬러 공간의 완전측지 부분공간(totally geodesic subspace)을 특정지을 수 있는 방법을 발견하였다.

하임모비치의 첫 박사학위 학생인 미론은 '하임모비치가 이아시 대학의 기하학분야를 창설하는 데 큰 역할을 하였다' 고 하였다. 본 논문에서는 하임모비치를 밀러와 메이어의 영향을 받은 루마니아 기하학파의 2세대로 보았다.

5.2 제 3세대: 미론

미론은 1927년 10월 3일 루마니아 동부 바슬루이(Vaslui) 주 코다에스티(Codaesti)에서 태어났다. 1948년 이아시 대학에 입학한 후 1997년 은퇴할 때까지 학자로서의 전 생애를 이 대학에서 보냈다. 1956년 이 대학의 조교수가 되었고, 1957년 하임모비치의 지도로 박사학위를 받았다. 1963년 부교수, 1965년 정교수가 되었고 1972–1976년 학과장을 역임하였다. 1991년에 학자로서 최고의 영예라고 할 수 있는 헝가리 학술원 회원이 되었다. 1997년 이 대학에서

은퇴 후 자문교수가 되었고 이아시의 사립 대학인 안드레이(P. Andrei) 대학에서 정교수로, 그리고 루마니아 학술원의 메이어 수학연구소에서 계속 연구하였다.

미론이 대학에 입학했을 때는 이 대학 수학과의 창립자인 밀러와 메이어가 현역으로 활동하고 있었고 훗날, 주로 핀슬러 기하학을 연구하게 되었을 때도 이들의 영향이 컸다. 미론을 루마니아 핀슬러 기하학파의 3세대 학자라고 할 수 있다. 미론이 박사학위 논문으로 처음으로 연구한 주제는 비홀로노믹 역학계의 기하화 문제이다. 이 문제는 포스(A. Voss)가 처음 제안하였고 카르탕이 [5]에서 해결의 실마리를 제공하였다. 카르탕에게서 그의 외미분계 이론을 배운 지도 교수인 하임모비치가 [14]에서 연구하였던 분야로 미론이 [18]에서 이 이론을 적용하여 포스의 기하화 문제를 완전히 해결하였다. 카르탕은 이 문제를 해결할 수 없거나 각 경우별로 접근해야 된다고 생각하고 관심을 돌려버렸다. 미론은 하임모비치의 방법을 일반화하여 이 문제를 해결하였다[16]. 미론은 후에 이 방법을 확장하여 정부호가 아닌 리만 계량을 갖는 리만 다양체로 이 이론을 확장하였다.

1961년에는 밀러의 영향으로 [19]에서 밀러 배열

$$\mathcal{M}(C, {\xi_1}^i, T^{n-1})$$

의 형태를 연구하였다. 여기서 C는 리만 공간 V_n의 곡선이고 T^{n-1}는 곡선 C 위의 모든 점에서 정의되는 $n-1$ 차원인 벡터 공간이고 ${\xi_1}^i$는 T^{n-1} 위의 방향의 집합이다.

베어왈트가 [4]에서 2차원 핀슬러 공간에

$$e_1 = \frac{F_{y^2}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{F_{y^1}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}$$
$$e_2 = \frac{y^1}{F}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{y^2}{F}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

로 정의되는 정규직교틀이 존재함을 발견하였고 3차원 핀슬러 공간에도 이런 정규직교틀이 존재함을 무어(Moór)가 [22]에서 보였다. 미론은 1974년에 일반적으로 n 차원 핀슬러 공간에 정규직교틀이 존재함을 보였는데 이 연구를 계기로 루마니아와 일본의 핀슬러 기하학자들의 교류가 활발해지기 시작하였고, 특히 하시구치(M. Hashiguchi)와 이치요(Y. Ichijio)가 여러 번 루마니아를 방문하여 미론과 공동연구를 하였다. 마쯔모토는 그의 단행본 [17]에서 43개의 절 중에 한 절(§27)을 할당하여 이 틀을 소개하고 미론 틀이라고 명명하였다. 이 정규직교틀은 리만 기하학에서 정규직교 좌표계를 이용하여 계산을 단순화시킬 수 있는 것처럼 더 복잡한 계산을 해야 하는 핀슬러 기하학에서 특히 국소적인 계산을 해야 되는 경우 매우 중요한 역할을 한다.

미론의 제안으로 1980년 루마니아 브라소프 대학에서 제 1회 루마니아 핀슬러 기하학 세미나(First International Seminar of Finsler Geometry)가 시작된 이후 격년으로 이 행사가

16) 이것이 그의 1956년 박사학위 논문으로 제목은 ‘The Problem of th Geometrization of the Nonholonomic Mechanical System’이다.

열리고 있다. 1986년 미론은 벡터에 대해 동차가 아닌[17] 핀슬러 계량에 대해 연구를 시작하였다. 이런 계량이 주어진 공간을 라그랑주 공간이라고 하였다. 미론은 루마니아 핀슬러 기하학 세미나에서 일반화된 핀슬러 계량, 라그랑주 공간, 핀슬러 기하학의 응용 등에 대해서 발표하였는데 후에 고계 핀슬러 공간, 고계 라그랑주 공간으로 확장하여 이에 관한 단행본 [20]을 저술하였다. 이 이론은 후에 상대성 이론에 적용되어 핀슬러 상대성 이론이 탄생하게 되는 계기가 되었다.

미론은 1994년 그리스 테살로니카의 아리스토텔레스 대학에서 발칸 기하학회(Balkan Society of Geometers)를 창립하였다. 이 학회와 여기서 발간하는 논문집(Balkan Journal of Geometry and Its Applications)이 발칸 반도 주변 국가의 기하학자들이 모이고 소통하는데 중요한 역할을 하고있다.

카르탕의 [6]와 카르탕의 영향으로 핀슬러 기하학에 대해서 연구한 학자들인 리크네로비츠(A. Lichnerowicz), 클라인(J. Klein), 다조드(P. Dazord), 그리폰(J. Grifone)의 연구를 습득하여 핀슬러 기하학의 비선형 접속을 알기 쉽게 서술하였다. 핀슬러 계량

$$F(x,y) = \sqrt{g_{ij}(x,y)y^i y^j}$$

가 주어졌을 때 크리스토펠 기호는

$$\Gamma_{j\ k}^{\ i}(x,y) = \frac{1}{2}g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j}\right)$$

로 정의된다. 이때

$$N^i_j = \Gamma_{j\ k}^{\ i} y^k - C_{j\ k}^{\ i}\Gamma_{r\ s}^{\ k} y^r y^s$$

로 정의되는 N^i_j를 접다발공간 TM 위의 비선형 접속이라고 한다. 이 비선형 접속은 지금도 핀슬러 기하학을 이해하는 주요한 도구 중의 하나이다.

미론은 더 나아가 핀슬러 기하학을 연구하는 데 벡터 다발(vector bundle) 이론을 적용할 수 있다는 것에 주목하였다. 이는 그의 연구가 주로 1992년 천의 [8] 전에 이루어졌다는 것을 고려할 때 매우 놀랄만한 사건이다. 주류 미분기하학자들이 핀슬러 기하학에 좀 더 관심을 가졌다면 1992년 전에 미론이 생각하였던 것처럼 대역적 핀슬러 기하학의 토대를 놓을 수 있었을 것이다.

5.3 제 4세대와 제 5세대

미론은 1972년부터 박사학위 과정의 학생을 지도하기 시작하였다. 이때부터 핀슬러 기하학을 전공한 많은 박사를 배출하여 실질적인 학파를 형성할 수 있게 되었다. 수학 계보 프로젝트에 의하면 미론은 1977년부터 2007년까지 박사학위 학생을 16명 배출하였다[18]. 미론의

17) 핀슬러 계량 F는 일반적으로 $F(x,\lambda y) = |\lambda|F(x,y)$를 만족한다.

18) 수학 계보 프로젝트에 등록된 미론의 학생은 M. Anastasiei(1977), D. Motreanu(1978), G. Pitis(1981), E. Stoica(1986), D. Hrimiuc(1988), T. Aikou(1991), V. Balan(1992), I. Bucataru(1998), S. Sabau(1998), M.

학생들은 루마니아 핀슬러 기하학파 4세대에 해당한다.

루마니아 핀슬러 기하학파 4세대의 중심 인물인 아나스타시에이(M. Anastasiei)는 1946년 6월 15일 루마니아의 보토산니(Botosani)에서 태어났다. 미론에게서 처음으로 박사학위를 받은 학생[19)]으로 수학 계보 프로젝트에 의하면 그 자신도 9명의 박사학위 학생을 배출하였다[20)]. 아나스타시에이의 학생들은 루마니아 핀슬러 기하학파 5세대에 해당한다.

6 결론

1854년 리만의 취임강연 [24]에서 시작된 핀슬러 기하학의 역사를 동면기(hibernation), 단절기(hiatus), 재탄생(rebirth) 등 세 개의 기간으로 분류하였다. 리만에서 시작되어 힐버트의 영향으로 변분법적 관점에서 연구한 1919년 핀슬러의 [10]까지를 동면기라고 하고, 1919년 핀슬러의 [10] 이후 현대적인 미분기하학의 도구를 사용하지 못했던 베어왈트와 카르탕 그리고 헝가리 핀슬러 기하학파와 루마니아 핀슬러 기하학파와 일본 핀슬러 기하학파의 활동기를 단절기라고 하고, 주다발공간의 접속 이론을 이용하여 현대적인 관점에서 핀슬러 기하학을 재해석한 1992년 천의 [8]에 의해 재탄생했다고 구분한다. 이 기간을 간단히 요약하면 다음 Table 1과 같다.

	년도	관련된 수학자	논문	주 방법론
동면기	1854–1919	리만–핀슬러	[24], [10]	변분법
단절기	1919 이후	베어왈트, 카르탕 등	[3],[6] 등	국소적 계산
재탄생	1992	천 이후	[8]	주다발공간의 접속 이론

Table 1. The timeline of development of Finsler geometry; 핀슬러 기하학 발달 기간 구분

일반적으로 이아시 대학의 미론 교수가 핀슬러 기하학의 루마니아 학파를 창설했다고 한다. 1977년부터 2007년까지 이아시 대학에서 16명의 박사학위 학생을 배출하였다. 이들 중 아나스타시에이는 같은 대학에서 재직하며 2000년부터 2013년까지 박사학위 학생 9명을 배출하였고, 피티스(Gheorghe Pitis)는 루마니아 중앙부에 있는 브라소프의 브라소프 대학(Transilvania University of Brasov)에서 박사학위 학생 6명을 배출하였다. 따라서 미론의 학생들의 분포가 비록 지리적으로 루마니아의 북동부 지방인 이아시와 중부 지방인 브라소프

Crasmareanu(1999), I. Hirica(1999), A-G, Mihai(2001), M. Roman(2001), O. Constantinescu(2005), C. Cretu(2006), I. Masca(2007) 등이고 이들의 국적은 루마니아 뿐 아니라 헝가리, 일본, 이태리, 베트남 등으로 다양하다. 괄호 안의 숫자는 학위년도이다.

19) 1977년 이아시 대학에서 미론을 지도교수로 하여 박사학위를 받았다. 박사학위 논문 제목은 Remarkable Geometric Structures on Infinite Dimension Manifolds이다.

20) 수학 계보 프로젝트에 등록된 아나스타시에이의 학생은 M. Kitayama(2000), V. Niminet(2005), C. Arcus(2006), C. Hretcanu(2006), M. Brailovschi(2008), O. Lungu(2009), A. Patriciu(2010), A-I. Nistor(2011), V-A. Vulcu(2013) 등이다. 괄호 안의 숫자는 학위년도이다.

정도로 제한 되지만 많은 박사학위 학생을 배출하였고 그 학생들이 또 박사학위 학생을 배출하는 선순환이 이루어져 핀슬러 기하학 분야에서는 국제적으로도 인정을 받는 연구 집단이 되었고 지금도 활발히 이 분양의 연구에 종사하고 있기 때문에 미론을 루마니아 핀슬러 기하학파의 창시자라고 하여도 모자람이 없다.

미론의 연구가 그의 지도교수인 하임모비치뿐 아니라 두 세대 전의 밀러의 영향을 받았음은 §5에서 살펴본 바와 같다. 미론의 수학 계보가 밀러를 매개로하면 괴팅겐의 힐버트나 리만까지 거슬러 올라갈 수 있다. 1933년 레비-치비타의 지도로 박사학위를 받은 미론의 지도교수인 하임모비치는 당시 핀슬러 기하학에도 많은 관심을 가졌던 당대 최고의 수학자 중의 한 사람이라고 할 수 있는 카르탕의 영향을 받았는데 그 당시에 정립되고 있던 카르탕의 외미분계 이론을 핀슬러 기하학에 적용할 수 있었던 최고 전문가 중의 한 사람이었다. 따라서 루마니아 핀슬러 기하학파는 적어도 한 세대 전인 하임모비치나 두 세대 전인 밀러와 메이어까지 거슬러 올라갈 수 있을뿐 아니라 넓게 보면 리만, 힐버트, 카르탕도 이 학파의 형성에 커다란 영향을 미쳤다고 할 수 있다.

미론의 주도로 1980년 브라소프에서 개최된 제 1회 루마니아 핀슬러 기하학 세미나는 이후 격년으로 열리고 있으며 여러 핀슬러 기하학파의 교류의 장이 되고있다. 미론은 1994년 발칸 기하학회(Balkan Society of Geometers)를 창립하고 1996년부터 이 학회의 논문집(Balkan Journal of Geometry and Its Applications)을 일년에 두 번씩 발간하고 있다.

미론을 중심으로한 루마니아 핀슬러 기하학파의 형성에서 보는 것처럼 학파가 형성되기까지는 3세대에 걸친 노력이 필요하다. 루마니아에서는 노력의 결실을 미론이 거두었을뿐 그전 세대인 밀러나 메이어 그리고 하임모비치의 역할을 간과해서는 안된다. 그리고 수학적 창조자들의 역할이 매우 중요함을 보았다. 여기서는 레비-치비타, 힐버트, 카르탕이 그 역할을 하였다. 수학적 창조자들이 보통 새로운 이론을 발견하면 다시 새로운 연구 분야로 관심을 돌리는 경향이 있는데 막 개발된 새로운 이론을 한 연구 분야에 적용하여 천착할 수 있는 수행자 역할을 하는 학자들의 역할도 매우 중요하다. 루마니아 핀슬러 기하학파의 하임모비치나 미론이 카르탕의 외미분계 이론의 진정한 수행자이었다.

감사의 글 저자는 이 논문의 초고를 읽고 논문의 구성에 도움을 주시고 미비한 점을 지적하여 주신 분들의 도움을 받았기에 그 분들에게 감사드립니다. 또한 보다 완전한 논문이 될 수 있도록 맞춤법이나 띄어쓰기 등 세세한 점까지 지적하여 주신 심사위원들께 감사드립니다.

References

1. M. Anastasiei, A Historical Remark on the Connections of Chern and Rund in In Finsler Geometry, Contemporary Mathematics, *Amer. Math. Soc.* 196 (1996), 171–176.

2. D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, *Finsler Geometry*, Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc. 196 (1996).
3. L. Berwald, Untersuchung der Krummung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Z.* 25(1) (1926), 40–73.
4. L. Berwald, Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume, *J. Reine Angew. Math.* 156 (1927), 191–222.
5. É. Cartan, Sur la represéntation géométrique des systèmes matériels non holonomes, *Proc. Int. Congr. Math.*, Bologna, 4 (1928), 253–261.
6. É. Cartan, Les espaces de Finsler, *Actual. Sci. Ind.* 79 (1934).
7. S. S. Chern, Local Equivalence and Euclidean Connections in Finsler Spaces, *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser. A* 5 (1948), 95–121.
8. S. S. Chern, On Finsler Geometry, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 314 (1992), 757–761.
9. M. Cho, History and Development of Sphere Theorems in Riemannian Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(3) (2011), 23–35. 조민식, 리만기하학에서 구면정리의 발전과 역사, 한국수학사학회지 24(3) (2011), 23–35.
10. P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Dissertation at the University of Göttingen, 1919.
11. M. Haimovici, Les formules fondamentales des la theorie des hypersurfaces d'un espace général, *Ann. Sci. Univ. Iaşi Ser. I.*, 20 (1935), 39–58.
12. M. Haimovici, Le parallélisme dans les espaces de Finsler et la différentialtion invariante de T. Levi-Civita, *Ann. Sci. Univ. Iaşi Ser. I.*, 24 (1938), 214–218.
13. M. Haimovici, Variètè totalment extèrmales et Variètè totalment géodésique dans les espaces de Finsler, *Ann. Sci. Univ. Iaşi Ser. I.*, 25 (1939), 559–644.
14. M. Haimovici, La géométrie des systèmes mécaniques non holonomes, *Acad. Repub. Pop. Romîne. Fil. Iaşi. Stud. Cerc. Şti. Ser. I.*, 5 (1954), 49–84.
15. G. Han, A Historical Note on Riemann's Life and Achievement, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(2) (2011), 61–70. 한길준, 리이만의 생애와 그의 업적에 대한 역사적 소고, 한국수학사학회지 24(2) (2011), 61–70.
16. Y.-W. Kim and Y. Jin, Élie Cartan and Riemannian Geometry of 20th Century, *The Korean Journal for History of Mathematics* 22(2) (2009), 13–26. 김영욱, Yuzi Jin, 엘리 카르탕과 20세기 리만기하학, 한국수학사학회지 22(2) (2009), 13–26.
17. M. Matsumoto, *Foundations of Finsler Geometry and Special Finsler Spaces*, Kasheisha Press, 1986.
18. R. Miron, Le problème de la géométrisation des systèmes mécaniques non holonomes, *Acad. R. P. Romîne. Fil. Iaşi. Stud. Cerc. Şti. Mat.*, 7 (1956), 15–49.
19. R. Miron, Les configurations Myller $\mathcal{M}(C, {\xi_1}^i, T^{n-1})$ dans les espaces de Riemann V_n. Applications à l'étude des hypersurfaces V_{n-1} de V_n, *Acad. R. P. Romîne Fil. Iasi Stud. Cerc. Sti. Mat*, 12 (1961), 315–346.
20. R. Miron, M. Anastasiei, *The Geometry of Lagrange Spaces*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
21. Mathematics Genealogy Project `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php`.
22. A. Moór, Über die Torsions und Krümmungsinvarianten der dreidimensionalen Finsler-

schen Räume, *Math. Nachr.* 16 (1957), 85–99.

23. C. K. Park, Lobachevsky's Philosophy of Mathematics and Non-Euclidean Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(4) (2011), 21–31. 박창균, 로바체프스키의 수리철학과 비유클리드기하, 한국수학사학회지 24(4) (2011), 21–31.
24. B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13 (1867), 1–15.
25. H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer-Verlag, 1959.
26. J. Synge, A generalization of the Riemannian line-element, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 27(2) (1925), 61–67.
27. J. Taylor, Parallelism and transversality in a sub-space of a general (Finsler) space, *Ann. of Math.* 28(2) (1927), 620–628.
28. Wikipedia `http://en.wikipedia.org/wiki`.
29. D. Y. Won, On the Development of Differential Geometry from mid 19C to early 20C by Christoffel, Ricci and Levi-Civita, *Journal for History of Mathematics* 28(2) (2015), 103–115. 원대연, 크리스토펠, 리치, 레비-치비타에 의한 19세기 중반부터 20세기 초반까지 미분기하학의 발전, *Journal for History of Mathematics* 28(2) (2015), 103–115.
30. D. Y. Won, On the History of the Birth of Finsler Geometry at Göttingen, *Journal for History of Mathematics* 28(3) (2015), 133–149. 원대연, 괴팅겐에서 핀슬러 기하가 탄생한 역사, *Journal for History of Mathematics* 28(3) (2015), 133–149.
31. D. Y. Won, On the History of the establishment of the Hungarian Debrecen School of Finsler Geometry after L. Berwald, *Journal for History of Mathematics* 31(1) (2018), 37–51. 원대연, 베어왈트에 의한 헝가리 데브레첸 핀슬러 기하학파의 형성의 역사, *Journal for History of Mathematics* 31(1) (2018), 37–51.