韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2019.58.1.79
2019. 2. 제 58권, 제 1호, 79-99.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
February. 2019, Vol. 58, No. 1, 79-99.

# 극한 문제의 풀이 과정에서 대수적 절차와 그래프를 이용한 방식의 연결에 대한 사례연구

이동근(문정고등학교 교사)

## Ⅰ. 서론

함수의 극한을 학습한 학생들에게 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구하는 문제는 어려운 문제가 아니다. 그러나 학생들이 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구할 수 있다고 해서 함수의 극한 개념을 이해하여 값을 구하였다고 할 수 있는 지에 대해서는 고민이 필요하다.

Zandieh(2000)는 극한 개념이 학생들의 연속과 미분계수 학습에도 연관되는 중요한 개념이라고 하였으며, 함수의 연속성이나 미적분 관련 개념과 연계하여 극한 개념의 중요성을 언급한 국내외 연구들을 찾아볼 수 있다. Hauger(1995)는 미분 학습의 어려움에 대한 원인으로 학습자의 극한 개념에 대한 이해의 어려움을 이야기하였고, 박임숙, 김홍기(2002)는 학교수학에서 함수의 극한을 학습하는 것이 함수의 연속성 개념에 근거하여 미분을 학습하는 근간이 된다고 하였다. 즉, $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$과 관련된 극한 문제는 연속 개념이나 미분계수 개념과도 밀접한 관련이 있기 때문에 더 관심을 가질 필요가 있다.

또한 학생들이 어떠한 방식으로 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구하고 있는지 혹은 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 의미를 어떻게 생각하고 있는지와 같은 다양한 정보를 수집하여 제공하는 것은 추후 함수의 극한 학습 관련 연구에 영향을 줄 수 있을 뿐만 아니라 현장 교사들의 교수학습 활동에도 도움이 될 수 있다.

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$에 대한 학생들의 이해를 조사한 국내외 연구들 중에서 본 연구와 관련된 연구들을 살펴보면, $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 동일하게 구하였다하더라도 그 값을 구하기 위한 절차와 그러한 절차를 선택한 이유가 다양하다는 것을 확인할 수 있다. 이동근, 양성현, 신재홍(2017)은 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구하기 위해서 학생들이 분모에 있는 인수 $(x-1)$을 약분한 다음 $x=1$을 대입하는 절차로 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구하는 장면을 드러내었다. 이때 이동근 외(2017)는 학생들이 분모에 있는 인수 $(x-1)$을 약분하려는 조작에 대하여 학생들이 $x=1$을 대입하려고 했을 때 분모가 0이 되기 때문에 이를 피하기 위한 행동으로 판단하였다. 즉, 학생들은 극한 개념에 근거하여 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$라고 답하는 것이 아니라 단순히 절차적인 지식에 의하여 값을 구하고 있음을 지적한 것으로 볼 수 있다. 또한 이동근, 김숙희(2017)는 이동근 외(2017)의 연구에 이어서 $\lim_{x\to1}\frac{2^x-2}{x-1}$와 같이 분모에 있는 $(x-1)$의 인수가 약분되지 않는 상황에서 극한을 구할 때 학생들의 반응과 표현을 조사하였는데, 이 과정에서 학생들이 극한을 구하기 위하여 분모에 있는 인수 $(x-1)$를 약분하려는 자신들의 행위에 대하여 반성하는 모습을 드러내었다.

한편 이경화, 신보미(2005)의 연구에서는 학생들은

* 접수일(2019년 1월 4일), 수정일(2019년 1월 24일), 게재확정일(2019년 2월 12일)
* ZDM분류 : C30
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 교수실험, 극한, 대수적 풀이, 그래프, 학습, 함수의 극한

'$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 함숫값이 없기 때문에 불연속'이라고 판정한다는 연구 결과를 제시하였으며, 이때 함수 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$의 그래프를 함께 제시하여 검사를 진행하였다. 학생들은 제시된 그래프에서 $x=1$에서 끊어져있기 때문에 불연속으로 판단하고 있음을 보여주었다. 이와 관련하여 이세형, 장현석, 이동원(2018)도 현직교사와 예비교사를 대상으로 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 정의역에 대한 인식을 조사하는 과정에서, 현직교사들과 예비교사들의 반응이 이경화, 신보미(2005)에서 학생들이 보여준 반응과 유사하게 나타나는 것을 언급하였다. 이러한 연구는 Orton(1983)과 Thompson(1994)의 연구와 연결하여 '학생들의 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$에 대한 어려움'을 생각해볼 수 있다.

학생들이 함수 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$의 그래프에서 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$을 생각할 때

'$x\to 1$로 변할 때, $\frac{x^2-1}{x-1}\to 2$'

와 같은 방식으로 생각하게 되는데, Orton(1983)과 Thompson(1994)의 연구 내용 중에는 이 과정에서 나타날 수 있는 학생들의 어려움에 대한 내용을 포함하고 있다. Orton(1983)은 미분계수에 관한 학생들의 이해를 조사하는 과정에서 할선의 극한에 대하여 학생들이 "할선이 점점 짧아지다가 없어진다."고 언급한 것을 드러내었다. 이를 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$와 연결 지어 살펴보면 학생들은 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구할 수 있었다 하더라도 과제의 형태를 바꾸어서 '함수 $f(x)=x^2$위의 점 $(1,1)$과 $(t,t^2)$을 이은 선분에 대하여 $t\to 1$로 변화해갈 때 기울기의 변화를 조사하시오.'라고 질문할 경우 "할선이 점점 짧아지다가 없어진다."와 같은 반응을 보일 수 있음을 알 수 있다. 이는 Thompson(1994)의 연구에서도 유사하게 나타나는데, Thompson(1994)의 연구에서는 시간-거리 함수에 해당하는 이차함수적 상황에서 그래프를 제시하고 평균변화율을 구할 수 있는 학생들이 순간변화율을 언급해야하는 상황에 직면하였을 때, 해당 순간에는 속력이 없어서(또는 구할 수 없어서) 답할 수 없다고 대답하는 장면을 제시하였다. 이러한 연구들은 그래프를 이용하여 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$와 같은 과제에 대하여 '연속적인 변화의 상황 속에서 순간의 변화에 대한 인식적 장애'를 드러낸 것으로 볼 수 있으며, 앞서 이동근 외(2017)과 이동근, 김숙희(2017)의 연구에서 학생들이 '대수적인 절차로 접근하는 과정에서 장애'를 경험하는 것과는 차이가 있다.

우리나라의 2009 개정 수학과 교육과정과 2015 개정 수학과 교육과정에서 함수의 극한을 포함한 교과서들은 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$와 같은 과제에 대하여 대수적으로 해결하는 방법과 그래프를 이용하여 해결하는 방법을 모두 소개하고 있다. 다만 교과서의 구성방식으로 학습한 학생들이 두 방식을 어떻게 연결하여 이해하고 있는지에 대한 정보는 부족한 편이다.

이동근(2018a)과 이동근(2018b)은 교사의 입장에서 동일한 과제라 하더라도 학생들은 전혀 별개의 과제로 인식할 수 있고, 이 경우 교사의 의도와 다른 방식으로 학생들의 지식이 구성될 수 있기 때문에 '학생들의 수학적 개념을 구성하는 과정에서의 표현과 이해 방식'을 살펴보는 것이 중요하다고 하였다.

이러한 점을 본 연구에 적용해보면, 학교수학에서 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$을 다루는 두 가지 방식(대수적인 절차와 그래프를 이용한 방식)에 대하여 학생들이 두 방식을 별개의 방식으로 생각하고 있는지 아니면 두 방식의 연결성을 고민하고 있는지 확인할 필요가 있다. 또한 만약 학생들이 두 방식의 연결성을 고려하지 않았다는 것이 확인 되었을 경우, 학생들은 두 방식을 서로 어떻게 연결하여 가는지 관찰하고자 한다.

특히 연구자는 서울 소재 일반계 고등학교 이과 계열 세 명의 학생들과 함께 극한과 급수 및 무한을 소재로 총 12차시의 교수실험을 진행하였는데, 연구에 참여한 세 명의 학생들은 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$을 대수적인 절차에 의하여 값을 구할 수 있는 학생들이었으나, 자신들의 절차에 대하여 왜 그러한 조작을 하는지에 대하여는 고민하지 않았던 학생들이었다. 이들 학생들을 대상으로 그래프를

이용하여 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구하는 방법에 대한 학생들의 생각을 살펴보는 과정에서 이들이 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$을 대수적인 절차로 구하였던 방식과 그래프를 이용하여 구하는 방식을 연결 지어 고민하고 있다는 것을 확인할 수 있었다. 또한 이러한 확인 과정 이후에 학생들이 자신들의 대수적 절차를 이용하는 방식과 그래프를 이용하여 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$의 값을 구하는 방식을 서로 어떻게 연결하여 가는지에 대하여도 관찰 결과를 중심으로 논의할 것이다. 세 명의 제한 된 학생들을 대상으로 12차시라는 한정된 교수실험을 통하여 논의를 진행하였다는 제약이 있기는 하지만, 앞서 언급한 연구의 필요성에 비추어볼 때 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$을 대수적 절차로 값을 구하는 학생들이 그래프를 이용한 풀이와의 연결 과정을 살펴보는 것은 추후 학생들의 함수의 극한 학습 관련 연구에 시사점을 제공할 수 있는 사례가 될 수 있을 것으로 보인다.

이상의 논의에 따라 본 연구에서는 총 12차시의 교수실험 중 본 연구에서의 연구주제와 관련된 2차시에서 6차시까지의 교수실험 자료를 중심으로 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

첫째, 학생들은 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$을 대수적 절차로 값을 구하는 방식과 그래프를 이용하여 구하는 방식을 상호 연결 지어 생각하고 있는가?

둘째, 학생들은 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$을 대수적 절차로 구하는 방식과 그래프를 이용하여 구하는 방식을 어떻게 연결 지어 구성하는가?

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 학교수학에서 함수의 극한

현재 학교 현장은 교육과정 전환기에 해당한다. 2018년을 기준으로 고등학교 1학년 학생들은 2015 개정 수학과 교육과정을 따르고 고등학교 2학년과 3학년 학생들은 2009 개정 수학과 교육과정을 적용받는다. 학교수학에서 '함수의 극한'을 다루는 과목은 2009 개정 수학과 교육과정에서의 미적분Ⅰ과 2015 개정 수학과 교육과정에서의 수학Ⅱ 과목이다. 두 교육과정에서 개발된 총 18종의 교과서들(미적분Ⅰ 9종, 수학Ⅱ 9종)은 모두 '함수의 극한'을 학습한 이후 '함수의 연속'과 '다항함수의 미적분'을 학습하는 구조로 되어있다. 다만 '수열의 극한'에 대한 구성은 두 교육과정(2009 개정 수학과 교육과정, 2015 개정 수학과 교육과정)에서 개발된 교과서들 사이에 차이가 있다. 2009 개정 수학과 교육과정에서 개발된 미적분Ⅰ 교과서 9종은 '함수의 극한' 이전에 '수열의 극한'을 먼저 학습하도록 되어있으나, 2015 개정 수학과 교육과정의 수학Ⅱ 교과서 9종은 '수열의 극한'에 대한 학습 없이 바로 '함수의 극한'을 학습하는 방식으로 구성되어있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 '수열의 극한'이 미적분 과목에서 학습하는 것으로 되어있는데, 교육과정 위계상 수학Ⅰ과 수학Ⅱ를 모두 학습한 이후에 미적분을 학습할 수 있게 되어있다.

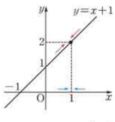
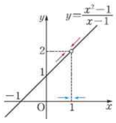
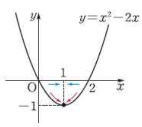
이러한 이유로 2009 개정 수학과 교육과정의 시기에 학생들은 극한을 학습할 때 '수열의 극한'을 먼저 학습하고 나서 '함수의 극한'을 학습하는 순서였다면, 2015 개정 수학과 교육과정의 시기에 학생들은 '함수의 극한'을 먼저 학습한 다음 '수열의 극한'을 학습하는 차이가 있다.

다만 두 교육과정에서 개발된 교과서 18종 모두 '함수의 극한'을 소개하는 방식에 있어서, '한 없이 가까이 간다.'와 같은 직관적인 표현으로 극한을 도입한 다음 그래프를 이용하여 이에 대한 이해를 돕고 나서 극한을 구하는 계산문제를 제시하는 구성 방식을 택하고 있다는 점은 동일하다. [표 1]은 2009 개정 수학과 교육과정에서 개발된 미적분Ⅰ 교과서 1종의 함수의 극한 내용 도입 순서를 제시한 것으로서, 해당 교과서는 본 연구에 참여한 세 명의 학생들이 학습한 교과서이다.

[표 1]과 같이 도입 초반에는 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$와 같은 대수식과 그래프가 함께 제시된 상태에서 극한을 구하는 과제가 제시된다. 대수식과 그래프가 함께 제시되어있다고는 하지만, [표 1]에서 제시되었듯이 '오른쪽 그림과 같이'라는 표현처럼 그래프를 이용한 직관적인 이해를 거쳐 대수식의 극한 값을 정당화하는 방식으로 이루어져있다. 이후에는 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$와 같은 대수식만 주어진 상태

에서 그래프를 학생이 그리도록 한 다음 극한을 구하는 형태로 변형되고, 마지막에는 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$와 같은 대수식에서 그래프를 떠올리지 않고 계산에 의하여 극한을 구하는 과제가 제시된다.

[표 1] 교수실험 참여 학생이 학습한 교과서에서 함수의 극한 도입 순서
[Table 1] Sequence of task introduction among extreme contents of function, in the textbooks taught by the participating students

| 내용 | 쪽 |
| --- | --- |
| 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=x+1$의 그래프에서 $x$의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.<br>한편 함수 $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않지만, $x \neq 1$인 모든 실수 $x$에서<br>$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$<br>이다. 따라서 오른쪽 그림에서 $x$의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.<br><br><br><br> | 54 |
| ⬇ | |
| 예제 1 다음 극한값을 구하여라.<br>(1) $\lim_{x \to 1}(x^2-2x)$<br>풀이<br>(1) $f(x)=x^2-2x$라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.<br><br><br>$x$의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 $-1$에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \to 1}(x^2-2x)=-1$ | 55 |
| ⬇ | |
| (1) 분자 또는 분모를 인수분해한다.<br>예제 1 다음 극한값을 구하여라.<br>(1) $\lim_{x \to -1}\frac{x^2-4x-5}{x+1}$<br>풀이<br>(1) $\lim_{x \to -1}\frac{x^2-4x-5}{x+1}$<br>$=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x-5)}{x+1}=-6$ | 61 |

그런데 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ 유형의 과제를 교과서에서 초반에 도입할 때, 대수식과 그래프를 함께 제시하는 부분에서 학생들이 대수식과 그래프의 관계를 어떻게 생각하고 있는지에 대하여 주목할 필요가 있다. 이에 대한 확인은 함수의 극한 문제를 해결할 때 학생들이 대수적인 방식과 그래프를 이용한 방식의 연결성을 어떻게 생각하고 있는지 살펴보고자 하는 본 연구주제와도 맥을 같이 한다.

이를 확인하기 위해서는 학생들에게 대수식을 주고 그래프를 그릴 수 있는지 확인하고 또 역으로 그래프를 주고 나서 대수식을 구성하는지 확인하는 과정이 필요하다. [표 1]에서 교과서의 구성을 살펴보면 학생들이 함수 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$에서 그래프를 떠올리는 것은 가능한 것으로 판단한 것 같다. 그러나 역에 해당하는 과정인 '그래프가 주어졌을 때 대수식을 구하는 과제'는 교과서에서 제시된 바 없다. 따라서 본 연구에서는 추후 학생들을 대상으로 확인할 때 이러한 점을 고려하여 그래프에서 학생들이 대수식을 구성하는 과정이 어떠한지에 대하여 확인할 수 있는 과제에 대하여 관심을 가지고 연구를 진행할 것이다.

2. 함수의 대수적 표현과 그래프적 표현의 연결성

Stacey & Turner(2014)는 수학적 표현에 대하여 수학적 개념 혹은 관계를 기술하는 식, 그래프, 표, 다이어그램, 이미지, 언어적 기술, 구체적 모델 등을 언급하였다. 이러한 다양한 표현들은 학생들에게 개념을 다른 각도에서 볼 수 있게 해준다. Lesh, Post, & Behr(1987)는 한 표현에서 다른 표현으로 변환하는 능력을 가진 것을 수학 개념의 이해로 언급하였는데, 비슷한 맥락에서 Vinner(1992)는 함수를 예로 들어서 대부분의 학생들이 함수를 학습할 때 함수식이라는 대수적 표현과 그래프 표현을 동일시한다고 하였다. 그러나 Knuth(2000)는 학생들이 다른 표현들보다도 대수적 표현을 더 선호한다고 하였고, Markovits, Eylon, & Bruckheimer(1986)는 학생들이 구간마다 다른 식으로 표현된 것에는 함수가 아닌 것으로 판단하고 그래프로 제시된 것에는 함수로 판단하는 것을 드러내었다. 이러한 선행연구들을 정리하여보면, 학생들이 함수를 표현할 때 대수적 표현과 그래프 표현

을 같은 것으로 볼 수도 있지만, 각 표현마다 담고 있는 정보가 다르므로 상황마다 적절한 표현이 있음에도 불구하고 학생들은 대수적 표현을 더 선호하는 경향이 있음을 알 수 있다. 그러나 함수를 표현함에 있어 대수적 표현만을 고집하는 것은 적절치 않으며, 표현 간에 변환이 적절하게 이루어질 수 있어야함을 확인할 수 있다. 다만 Adu-Gyamfi(2007)가 학생들이 함수에서 표현 간 변환에 어려움을 겪는다고 지적한 것을 고려할 때, 교수학습 상황에서 학생들이 '대수적 표현에서 그래프 표현으로의 변환'과 역으로 '그래프 표현에서 대수적 표현으로의 변환'이 자연스러운 것으로 간주해버리는 것은 조심할 필요가 있다.

Elia, Gagatsis, & Gras(2005)는 표현 간의 변환에서 일관성을 보이지 못하는 경우 학생들이 동일한 개념의 다른 표현을 한 개념의 다른 측면이 아닌 전혀 별개의 개념으로 인식하고 있는 것으로 보았다. Hiebert & Carpenter(1992)는 수학적 이해에 대하여 언급하면서 연결성을 강조하였는데, 이해의 정도를 연결된 정도로 설명하였다. 이동근(2018b)의 연구에서도 등비급수의 다양한 표현에 대하여 학생들이 표현 간 연결성이 부족함을 지적하면서 결과적으로 이러한 연결성의 부족에 근거하여 학생들이 교사와 달리 동일한 개념의 다양한 형태의 과제들을 서로 별개의 과제로 인식하고 있음을 드러내었다.

예를 들어 이동근(2018b)의 연구에서 학생들은 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right\}$의 값은 계산 절차에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right\}=1$이라고 하였다. 그러나 학생들은 $\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right\}$와 동일하지만 다른 표현인 $0.999\cdots$에 대하여는 그 값이 1보다 작다고 답을 하였다. 이러한 관찰을 통하여 이동근(2018b)는 학생들이 두 표현을 별개의 다른 표현으로 인식하고 있으며, 등비급수 학습에서 두 표현간의 연결성을 고려할 필요가 있음을 주장하였다. 한편 이동근(2018a)의 연구는 학생들이 서로 다른 표현간의 연결성을 통하여 수학적 개념에 대한 이해를 더해가는 것을 보여주었다. 이동근(2018a)의 연구에서 학생들은 평균 개념에 대하여 '자료의 값을 모두 더해서 자료의 개수로 나누어주는 것'으로 생각하고 있었으며, 이를 이용하여 세 수 $a, b, c$의 평균을 구하는 과제에 대하여 $\frac{a+b+c}{3}$와 같이 표현하였다. 그러나 학생들은 이러한 표현 방법으로는 기하평균이나 평균속도에서의 '평균'이라는 용어를 설명할 수 없었다. 이동근(2018a)의 연구에서는 학생들이 '자료를 동일하게 만들어주는 것'으로 평균에 대한 개념을 수정한 이후, 두 수 $a$와 $b$의 기하평균은 '넓이가 $ab$인 직사각형의 가로와 세로의 길이를 동일하게 해주는 것'으로 설명하고, 연속적인 변수를 다루는 평균속력에 대하여는 '일정시간 동안 순간순간 변하는 속도들의 변화의 결과에 해당하는 이동거리에 대하여 일정시간 동안 같은 거리를 동일한 속도로 이동한다고 하였을 때의 동일한 속도'로 설명하는 모습을 보여주었다. 이동근(2018a)은 학생들의 '평균'에 대한 표현의 변화가 산술평균, 기하평균, 평균속도와 같이 처음에는 학생들에게 별개였던 개념들을 서로 연결시켜 주었음을 지적하면서 이미 연결성을 경험한 교사가 개념간의 연결성을 당연시 하면서 학생들이 개념 혹은 표현의 연결성을 경험할 기회를 제거하는 실수를 하지 않도록 조심해야한다고 하였다.

이러한 선행연구들의 내용을 본 연구주제와 관련하여 정리하면, 학교수학에서 함수의 극한을 도입할 때 대수적 표현과 그래프를 함께 제시하는 과정에서 학생들이 대수적 표현과 그래프를 이용한 표현의 연결성을 고려하고 있는지 확인할 필요가 있음을 알 수 있다.

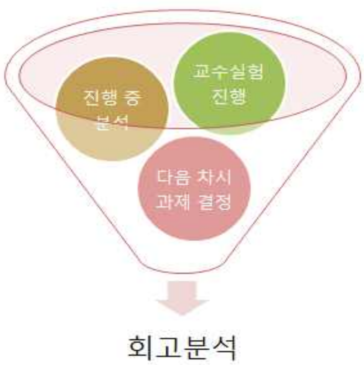
## Ⅲ. 연구방법

본 연구는 12차시의 교수실험을 거쳐 고등학교 2학년 학생 세 명을 대상으로 함수의 극한 문제의 과정에서 나타난 대수적 표현과 그래프 표현의 연결성에 대한 장면을 구성적 관점에서 살펴본 질적 사례연구(qualitative case study)이다.

교수실험은 급진적 구성주의에 근거하여, 학습자가 수학개념을 구성해가는 활동에 대한 지속가능한 모델을 확립하기 위한 연구 방법이다(Glasersfeld, 1999). 따라서 '극한 문제에 대하여 대수적 절차를 이용한 풀이와 그래프를 이용한 풀이의 연결 과정에서 학생들의 구성 과정'을 살펴보고자 하는 본 연구에 적절한 연구방법이 될 수

있다. 교수실험은 기존의 수업방식이나 교육과정에 의한 구속을 받지 않지만, 선행연구 자료를 중요한 자료로 참고하기 때문에 학습자에게 제시되는 상황 대부분은 기존 교육과정일 가능성이 높다. 이와 같이 선행연구 자료를 참고하여 최초 교수실험의 과제를 준비하면서 연구자는 과제에 대한 학생들의 반응을 예상하기는 하지만, 교수실험의 진행은 전반적으로 과제에 대한 학생의 반응에 따라 구성되기 때문에 학생들의 반응이 연구자의 예상과 다르게 나올 수 있다.

Glasersfeld(1999)는 교수실험이 피 실험자의 반응과 연구자들 간의 일치된 합의 과정에 따른 다음 과제의 투입이 반복적으로 이루어지면서 진행된다고 하였다. 즉, 매 차시 실험 종료 이후 ‘진행 중 분석’ 과정을 거쳐 연구자들 사이의 협의에 의하여 다음 실험을 진행하게 되며, [그림 1]과 같이 교수실험 진행→진행 중 분석→다음 차시 과제 결정이라는 순환과정의 반복을 거쳐 교수실험이 종료되면 연구자는 최종적으로 전체 교수실험에 대한 자료(학생 반응지, 연구자간 회의 일지, 교수실험 영상 및 전사자료)를 이용하여 종합적인 분석을 하게 된다. 이러한 과정을 회고분석이라 하는데, 이동근(2017)은 회고분석을 거쳐 연구자가 연구 주제와 관련된 의미 있는 시사점을 찾아내게 된다고 하면서, 교수실험의 일련의 과정을 [그림 1]과 같은 도식으로 표현하였다.




[그림 1] 교수실험의 도식
[Fig 1] Figure of teaching experiment

교수실험은 2018년 4월 중순부터 2018년 11월 말까지 교육과정 내의 동아리 활동 시간(연간 17시간)을 이용하여 총 7개월 동안 진행하였으며, 실제 학생들과의 마지막 차시 교수실험은 9월 초순에 진행되었다. 차시별 교시실험의 대략적 개요는 [표 2]와 같다.

[표 2] 교수실험 차시별 개요
[Table 2] Sequence of teaching experiment contents

| 차시 | 일자 (시간) | 활동 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 2018.04.13. (6,7교시) | 극한 계산 문제(2009 개정 수학과 교육과정에서의 미적분Ⅰ 교과서에 수록된 문제) Test 실시 |
| 2 | 2018.04.20. (7교시) | 극한 문제$\left(\lim_{x\to a}\frac{x^2+px+q}{x-a}\right)$ 및 등비급수 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right)$ 문제 해결 과정 관찰 |
| 3 | 2018.06.22. (6교시) | 극한 문제$\left(\lim_{x\to a}\frac{x^2+px+q}{x-a}\right)$의 대수적 풀이 및 그래프를 이용한 풀이 관찰 |
| 4 | 2018.06.22. (7교시) | 극한 문제$\left(\lim_{x\to a}\frac{x^2+px+q}{x-a}\right)$의 대수적 풀이 및 그래프를 이용한 풀이의 관계에 대한 대화 (1) |
| 5 | 2018.06.29. (6교시) | 극한 문제$\left(\lim_{x\to a}\frac{x^2+px+q}{x-a}\right)$의 대수적 풀이 및 그래프를 이용한 풀이의 관계에 대한 대화 (2) |
| 6 | 2018.06.29. (7교시) | 극한의 의미에 대한 대화 |
| 7 | 2018.07.20. (6교시) | 등비급수에 대한 다양한 형태의 과제에 대한 학생들의 표현 관찰(대수적 표현, 언어적 표현) |
| 8 | 2018.07.20. (7교시) | ‘도달가능성’ 대한 고민과 표현 관찰 |
| 9 | 2018.08.17. (6교시) | 등비급수에 대한 다양한 형태의 과제들 사이의 관계에 대한 고민 관찰(대수적 표현, 그림 표현, 언어적 표현) |
| 10 | 2018.08.17. (7교시) | 제논의 역설 관련 과제 중 화살문제를 소개하고 이에 대한 학생들의 생각을 자유롭게 발표 |
| 11 | 2018.09.07. (6교시) | 제논의 역설 관련 과제의 변형(아킬레스와 거북이 이야기) |
| 12 | 2018.09.07. (7교시) | 제논의 역설 관련 과제를 등비급수와 일차함수를 이용하여 설명하는 학생들의 모습 관찰 |

* 6교시(14:10~15:00), 7교시(15:10~16:00)

연구자는 교수실험 진행을 담당하였으며, 교수실험의 완성도를 높이고 진행자가 실수하는 부분에 대한 보완과 방향성을 제시하기 위하여 1명의 다른 연구보조교사가 관찰자로 참여하였다. 연구보조교사는 직접 매 교수실험에 관찰자로 참석하기 보다는 주로 촬영된 영상자료를 분석한 다음 연구자와의 회의를 통하여 다음 차시 교수실험 과제를 정하는데 기여하였다.

매 차시 종료 이후 연구자는 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 연구보조교사와 공동으로 분석하고 상호 합의에 근거하여 다음 교수실험을 설계하였다. 이와 같이 연구자들의 협의를 거쳐 다음 차시에 대한 교수실험이 설계되면, 연구자는 이를 반영하여 최종 투입과제를 선정하여 다음 차시 교수실험을 진행하는 과정을 반복하였다. 교수실험 진행은 학생들 간의 의사소통을 중심으로 진행하되 필요에 따라 연구자가 다른 학생들의 의견을 정리하여 전체 학생들에게 다시 확인시키거나 혹은 다음 단계로 넘어가기 위한 발문 또는 연구자가 궁금한 부분을 질문하는 정도의 수준에서 개입하기도 하였다.

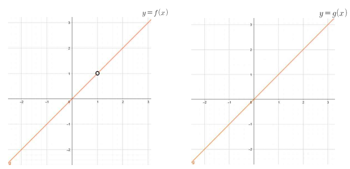
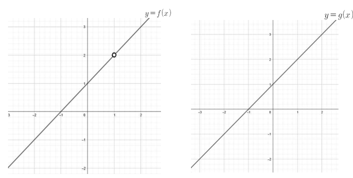
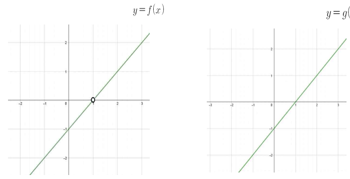
1. 교수실험에 적용된 과제

총 12차시의 교수실험 중 본 연구에서는 연구주제와 관련된 2차시에서 6차시까지의 자료를 중심으로 분석하였으며, 해당 교수실험에서 사용된 과제는 총 7개였다. [과제1], [과제2], [과제3], [과제4]는 2차시에 적용된 과제로서 주로 학생들의 함수의 극한 문제에 대한 대수적 풀이를 할 수 있는 지 확인하고, 그 과정에서 학생들의 풀이에 대한 절차를 연구자가 확인하는데 도움이 된 과제들이다. 또한 4개의 과제를 통하여 연구자는 학생들과의 의사소통을 통하여 학생들이 자신들의 조작 행위와 문제를 해결하는 절차에 대하여 어떻게 생각하는지에 대하여 학생들의 표현을 중심으로 관찰하였고, 이에 근거하여 후속 차시의 교수실험 과제들을 준비할 수 있었다. [과제5]는 3차시 교수실험에서 이용된 과제로서 그래프가 주어진 상황에서 극한을 구하는 과제이고, [과제6]과 [과제7]은 4차시에서 6차시까지 적용된 과제이며 그래프 표현을 대수적 표현으로 변환하는 과제이다.

교수실험에서 사용된 7개의 과제는 교수실험 진행 과정에서 교사와 학생들 사이에서 상호 합의된 과제 또는 각 차시 종료 후 교수실험 자료(영상분석, 전사록, 회의록)를 분석하는 과정에서 연구자와 연구보조교사가 상호 합의하에 결정한 과제들로서 다음 차시 과제 투입 여부는 교수실험을 진행하는 교사가 최종적으로 결정하였다. [표 3]은 교수실험에 사용된 과제를 제시한 표이다.

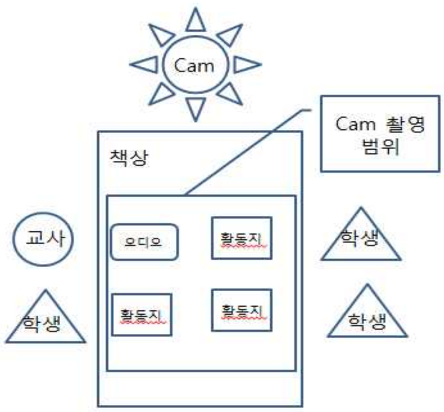
[표 3] 교수실험 과제

[Table 3] Tasks of teaching experiment

| 과제 | 내용 | |
|---|---|---|
| [과제1] | $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$의 값을 구하시오. | 분자를 인수분해해서 약분 후 대입 가능 |
| [과제2] | $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+2}{x+1}$의 값을 구하시오. | $\frac{0}{c}$꼴. 분자 인수분해 안 되나 인수분해 할 필요 없음 |
| [과제3] | $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+2}{x-1}$의 값을 구하시오. | $\frac{c}{0}$꼴. 분자 인수분해 안 되나 인수분해 할 필요 없음 |
| [과제4] | $\lim_{x\to4}\frac{x^2-5x+6}{x-1}$의 값을 구하시오. | 분자 인수분해 가능하나 인수분해 할 필요 없음 |
| [과제5] | 다음 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to1}f(x)$와 $\lim_{x\to1}g(x)$를 각각 구하시오.   | |
| [과제6] | 다음 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프에서 함수식을 찾아서 쓰시오.   | |
| [과제7] | 다음 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프에서 함수식을 찾아서 쓰시오.   | |

2. 자료 수집

본 연구에서 교수실험은 차시 당 40분 내외로 진행되었다. 차시 당 실험 시간은 사전에 정하고 시작하는 것은 아니었으나, 일반계 고등학교의 교육과정에서 할당된 동아리 활동 시간을 이용하여 진행을 한 관계로 1차시 당 50분이라는 제한된 시간 안에 진행하였으며, 이중에서 학생들이 학급 교실에서 동아리 교실로 이동해서 오는 시간과 다시 학급 교실로 돌아가는데 소요되는 시간을 제외하면 1차시 당 교수실험 시간은 40분 이내로 제한이 되었다. 교수실험이 진행된 공간은 연구대상들의 반응을 기록으로 남길 수 있는 카메라와 오디오 녹음기가 설치되어있는 곳이었으며, 평상시에는 학급 교실로 이용되는 공간이다. [그림 2]는 교수실험을 진행한 공간을 나타낸 그림이다.




[그림 2] 교수실험 공간에 대한 그림
[Fig 2] Figure about spot of teaching experiment

사례연구를 포함한 질적 연구들은 범주로 분류하거나 수치화하는 것에 치중하기 보다는 특별한 현상의 변수들을 그것의 맥락으로부터 분리할 수 없는 상황에서 그 자체의 맥락에서 현상을 조사하기에 적합한 연구이다(곽영순, 2014; Yin, 2009). 이러한 이유에서 Hatch(2008)는 사례연구가 상황을 총체적으로 분석하여 본질에 대한 왜곡 없이 세부적으로 묘사하는 것을 가능하게 해 준다고 하였다. 또한 이광원(2012)은 교사와 학생의 수업에서의 활동을 분석할 때 수업의 복합적인 맥락과 의미를 총체적으로 분석할 필요가 있다고 하였는데, 이러한 점을 고려하면 교수실험을 통하여 지속적으로 학생들의 활동에 대한 영상 및 음성자료, 활동지, 회의록 등을 수합하는 사례연구는 교사와 학생의 수업 활동을 분석할 때 적합한 연구로 볼 수 있다. Hatch(2008)는 사례연구가 다른 질적 연구들과 유사하지만, 특정 사례 혹은 전형적인 사례 등에 주목한다는 특징이 있다고 하였는데, 본 연구는 함수의 극한을 대수적으로 해결할 수 있는 학생들이 자신들의 조작 행위에 대한 절차를 그래프를 이용한 풀이와 연결하여 설명하는 과정을 담고 있으며, 특히 이러한 구성 과정에서 학생들의 '그래프를 이용한 표현에서 대수적 표현으로의 변환 과정'에 대한 정보를 제시하였다는 점에서 사례연구로서의 의미를 갖는다. 또한 양쪽 표현의 차이를 드러낼 때 학생들이 그러한 차이점에 주목하게 되면서 대수적 표현과 그래프를 이용한 표현 사이의 연결성을 구성하는 장면을 제시한 것은 추후 함수의 극한 학습과 관련된 연구들에 의미 있는 시사점을 제공할 수 있을 것으로 보인다.

Yin(2009)는 사례연구에서 자료 수집은 문서, 기록물, 인터뷰, 참여관찰 등과 같이 다양한 유형의 정보를 활용한다고 하였는데, 본 연구에서는 교수실험을 진행하고 여기서 발생하는 자료(영상 및 음성 자료, 전사록, 학생 활동지, 회의일지)를 주로 수집하였다. 본 연구는 총 12차시의 교수실험 결과물 중에서 연구주제와 관련된 2차시에서 6차시까지의 교수실험 자료를 집중적으로 분석한 것으로서, 비디오카메라 1대로 연구대상 학생 세 명에 대한 수학적 활동을 촬영하였으며, 이 외에도 별도로 녹음된 오디오자료의 전사과정을 통하여 분석에 활용하였다.

또한 교수실험 과정에서 학생들이 작성한 활동지와 연구자들이 작성한 현장노트 및 다음 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지를 수합하여 교수실험 진행 중 일어나는 교수학적 결정 과정과 변화의 양상을 살펴보고, 이러한 자료들을 기초로 교수실험 진행과 분석 과정에서 발생했던 수정과 재구성의 이유를 'Ⅳ. 결과 분석 및 논의' 부분에 함께 기술하였다.

3. 연구 참여 학생들의 특성

Creswell(2018)은 사례연구에서 표본은 연구 목적에 맞게 의도적으로 추출할 수 있다고 하였는데, 본 연구에

서는 2018년 교육과정 내의 동아리 활동에 자원한 학생들 중에서 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$과 같은 함수의 극한 문제를 대수적으로 풀 수 있는 학생들 중에서 선정하였다. 특히 이들 자원자들 중에서 '자신들이 문제 해결 과정에서 보여주는 절차의 의미에 대한 고민은 하지 않은 학생들'로 선정하였으며, 이는 그러한 고민이 시작되었을 때 학생들이 다른 수학적 개념과의 연결을 시도할 것이라 판단한 연구자의 의도가 반영된 것으로 볼 수 있다. 연구자는 이 과정에서 학생들의 함수의 극한 문제의 대수적 표현 방법의 변화를 살펴볼 수 있기를 기대하였다. 앞서 언급한 바와 같이 본 연구에 참여한 학생들은 서울 소재 일반계 고등학교 이과 계열 여학생 3명이다. 최초 자원하였던 16명의 학생들 중에서 '함수의 극한 문제를 대수적으로 해결할 수 있으나 그러한 절차로 해결해야하는 이유에 대한 고민이 없는 학생들 중'에서 학생 상호간의 친밀도를 고려하여 선정하였다. 학생들 상호간의 친밀도를 고려한 점은 교수실험에서 자신들의 의견을 자유롭게 표현할 수 있을 것이라는 연구자의 주관적 판단에 따른 것이다. 선정된 3명의 학업 성취 수준은 2018년 4월에 실시한 전국연합학력평가의 수학 성적 등급을 기준으로 학생1은 4등급, 학생2는 3등급, 학생3는 2등급[1)]으로 서로 상이한 학생들이다. 학생들의 수학학습 수준이 상이하지만, 본 연구에서 연구에 참여한 학생들의 수학 성적은 참고자료일 뿐이며, 교수실험에서 학생들에 의하여 구성되는 수학 개념의 질적 차이와는 관련이 없다. 즉, 본 연구에서의 교수실험에서는 학생 반응에 대하여 어느 반응이 우수하다는 식의 평가를 하지 않았다.

또한 Merriam(1994)은 질적 연구에서 서로 상이한 수준의 대상자를 선정하는 것이 면담에서 연구자가 더 많은 정보를 얻을 수 있다는 장점을 가지고 있다고 하였는데, 본 연구에서는 의도적으로 성취도를 고려하여 선정한 것은 아니었지만, 학생들의 다양한 표현을 분석하여 학생들의 생각을 분석할 때, 다양한 학습 수준의 학생들과 교수실험을 진행한 것이 도움이 된 것으로 보였다.

연구에 참여한 학생들은 교수실험을 진행하기 이전에 학교 수업에서 2009 개정 수학과 교육과정에 기반한 미적분Ⅰ 과목의 함수의 극한 단원을 학습한 학생들이다. 또한 2018년 4월에 처음 교수실험을 진행한 이후 2018년 9월 마지막 12차시 교수실험을 진행하는 기간 동안 학생들은 학교에서 다항함수의 부정적분까지 학습하였다. 사전에 연구자가 3명의 학생들과의 면담과정을 거쳐 파악한 바에 의하면, 3명의 학생들은 극한, 미분, 부정적분 관련 문제들에 대하여 계산 절차에 의하여 결과를 구할 수는 있으나, 그러한 계산을 왜 그렇게 해야 하는 지에 대하여는 별다른 답변을 해주지 않았고 "그렇게 해야 시험문제에 답을 제시할 수 있다."와 같은 반응을 일관되게 보여주었다. 연구자가 선행학습 정도를 확인하였을 때 3명의 학생 모두 학원에서 일주일에 2회 정도의 수업을 하고 진도는 학원에서 학교 수업을 참고하여 소단원 두 개 정도 앞서 배우는 빠르기로 학습한다고 하였다. 다만, 학원에서 하는 수업은 주로 문제를 제시해주고 답을 제공한 다음, 그러한 답이 나오는 과정을 학원에서 강의식으로 설명하는 수업이었으며, 연구에 참여한 3명의 학생들은 자신들이 학원 수업에서 질문을 많이 하지는 않는다고 하였다.

## Ⅳ. 결과 분석 및 논의

### 1. $\lim_{x\to p}\frac{x^2-ax+b}{x-c}$의 대수적인 풀이에서 학생들의 특징

연구자와 연구보조자는 최초 과제 설정을 위한 논의를 통하여, 함수의 극한 계산에서 학생들의 절차적 지식을 확인하는 것에서부터 시작하기로 하였다. 이에 연구자들은 $\lim_{x\to p}\frac{x^2-ax+b}{x-c}$ 형태의 극한 문제를 구성하여 학생들에게 제시하였으며, [과제1]은 학생들에게 제시된 첫 과제이다. [과제1]은 대수적인 절차로 풀었을 때는 분자에 있는 다항식이 인수분해가 가능하며 인수분해 이후 분모에 있는 인수와 약분을 거쳐서 해결할 수 있는 문제이다. 그래프를 이용하여 풀 경우에는 실수 전체 집합에서 한 점을 제외한 집합을 정의역으로 하는 직선 형태의 그래프를 이용하여 해결할 수 있다.

3명의 학생 모두는 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$을 구하기 위해서

1) 전국연합학력평가의 성적은 구간척도(Stanine)에 따라 1등급부터 9등급으로 구분되며 작은 값의 등급일수록 상위권 학생에 해당한다.

분자에 있는 $x^2-4x+3$을 인수분해하고 분모에 있는 인수 $(x-1)$을 약분한 다음 $x=1$을 대입하여 값을 구하였다. 그래프를 이용하여 해결을 시도한 학생들은 없었으며, 학생들이 문제 해결을 위하여 가장 먼저 보인 조작은 분자에 있는 식을 인수분해 하는 것이었다. 그런데 이어서 제시된 [과제2], [과제3], [과제4]에서 학생들이 보여준 모습을 보면, 인수분해를 하는 조작에 대한 고민이 관찰되지 않고 기계적인 절차에 의하여 우선적으로 분자에 있는 식을 약분하려는 모습을 보여주었다. 2차시 교수실험에서 연구자가 [과제1]에 대한 학생들의 최초 반응을 관찰하였을 때는 학생들이 분자에 있는 식을 인수분해 하는 이유가 분모에 있는 인수와 함께 약분을 하려는 의도를 가지고 있을 것이라 생각하였다. 그러나 학생들은 분자에 있는 식의 인수분해가 쉽지 않은 [과제2]와 [과제3]에서 인수분해가 되지 않아서 극한을 구하는 것에 어려움을 겪는 모습을 보여주었을 뿐만 아니라, 굳이 분자에 있는 식을 인수분해 할 필요가 없는 [과제4]에 대하여도 인수분해를 한 다음 극한을 구하는 모습을 보여주었다. 이후 교사와 학생들 사이의 의사소통을 통하여 '과제들을 해결하는 과정'에 대하여 학생들이 설명하는 장면에서 표현의 변화가 관찰되었다. 특히 [과제3]을 거치면서 학생들은 분모를 인수분해 하는 이유에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+2}{x-1}$에서 $\lim_{x\to1}$이라는 표현을 '$x=1$을 대입하는 것'이고 이때 분모가 0이 되어 $x=1$을 대입할 수 없기 때문에 분자에 있는 식을 인수분해해서 약분할 필요가 있다는 것으로 자신들의 행위에 대해서 설명하는 모습을 보여주었다. 이러한 대화를 거치며 학생들은 '선 인수분해, 후 대입'이라는 절차적 지식에서 '선 대입, 후 인수분해'로 변화된 절차를 말하기는 하였으나, 이후에도 $\lim_{x\to p}\frac{x^2-ax+b}{x-c}$와 같은 유형의 문제를 해결할 때는 인수분해부터 먼저 시도하는 모습이 지속적으로 관찰되었었다. 이러한 점을 종합하여 보면 본 연구에 참여한 학생들은 $\lim_{x\to p}\frac{x^2-ax+b}{x-c}$ 형태의 과제에서 극한을 구하기 위하여 대수적인 절차를 거쳐서 극한을 구하는 것으로 보이며, 대수적인 절차 중에서는 특히 분자에 있는 식을 인수분해 하는 것에 우선을 두고 있지만 그러한 행위에 대한 별다른 고민은 없었던 것으로 보였다. 다만, 적절한 과제 제시 여부에 따라 학생들이 자신들의 행위에 대하여 고민할 수 있는 기회를 제공할 수 있다는 가능성을 보여주었다.

한편 [과제1]을 해결하는 과정에서 연구자는 학생들이 대수적으로 구한 결과를 답으로 생각하는 것이 아니라고 표현한 것에 주목하였다. 특히 학생2의 [과제1]에 대한 풀이 과정에서 시작된 대화를 통하여 학생들은 자신들이 대수적으로 구한 답에 대하여 그렇게 답을 하는 것이 학교 수업에서 선생님이나 교과서가 원하는 답이라 생각한다는 의견을 나타내었다.

학생2의 [과제1]에 대한 풀이와 대화과정을 살펴보면, 처음에 학생2는 $\frac{x^2-4x+3}{x-1}$에다가 $x=1$을 대입하였으며 그렇게 할 경우 값이 0이 된다고 하였는데, 그 이유에 대하여 학생2는 분모도 0이고 분자도 0이면 분수 전체의 결과도 0이라고 생각한다고 표현하였다. 교사의 입장에서는 학생2가 '$\frac{x^2-4x+3}{x-1}$에서 $x=1$을 대입하면 0이 된다.'라고 한 수학적 표현에 오류가 있는 것으로 보였지만, 다른 두 학생(학생1, 학생3)은 학생2의 표현에 공감하는 모습을 보여주었다. [대화1]은 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$를 계산하는 과정에 대한 학생2의 의견에 다른 학생들이 동의하는 장면이 제시된 대화이다.

[대화1]

교사 : 약분은 왜 해요?

학생2 : 1을 대입하면 0이 나오니까 해봤자 0나오니까 약분해서 구했어요.

교사 : 1을 대입하면 0이 나온다는 건 뭐가 0이 된다는 거죠? 분모가 아니면 분수 전체가?

학생2 : 분수 전체요.

교사 : 그러면 답을 0이라고 해야지?

학생2 : (고민하는 모습을 보여줌) 사실 그렇게 생각해요.

교사 : 극한값은 0이 나오면 안 되나요? 너희들의 의견은 어때? 일단 궁금한 것은 분모에 있는 $x$에 1을 넣으면 0이 되었고, 그래서 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$의 값이 0이라서 안된다고 했

는데, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$의 값을 0이라고 하면 안 되나?

학생1 : 나도 이상한데... 공감이 되는데.

교사 : 그러면 솔직하게 이전에도 이것의 값을 0이라고 생각한 적이 있었던 것이에요? 아니면 지금 문득 든 생각이에요?

학생1, 학생2 : 지금이요

교사 : (학생3에게) 어때요?

학생3 : 저도 예전에 그렇게 생각했는데 약분해서 대입하면 값이 달라져서...

교사는 학생들이 학생2의 의견에 공감하는 것을 확인한 다음, 그렇다면 본인이 생각한 답을 답으로 제시하지 않고 약분해서 대입하여 얻어진 값을 답으로 제시한 이유에 대하여 물어보았다. 이에 3명의 학생들은 0과 $-2$ 중에서 하나를 답해야하는데, 학교 혹은 교과서 등에서 $-2$를 답으로 제시하도록 설명하고 있어서 그렇게 답을 하게 되었다고 하였다.

해당 차시 종료 이후, 다음 차시 과제 준비를 위한 연구자간 협의과정에서 연구자와 연구보조교사는, 2차시 교수실험에서 관찰된 학생들의 반응을 종합해볼 때 학생들이 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$의 값을 절차적 지식에 의하여 $-2$로 답하기는 하였지만, 이러한 절차에 의하여 값을 구하는 과정이 학생들에게 자연스러운 절차가 아닐 수 있다는 것과 그렇게 얻어진 결과 역시 학생들에게 자연스러운 결과가 아닐 수 있다고 판단하였다. 즉, 학생들이 대수적 절차에 의하여 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=-2$라고 답을 구하였다고 해서, 학생들이 함수의 극한 개념을 이해하여 답을 구한 것이라고 볼 수 없다고 판단하였다. 오히려 학생들은 교사가 원하는 답을 제시하기 위한 절차적 지식을 구성한 것으로 보였다.

이러한 논의를 거쳐 연구자와 연구보조교사는 학생들이 학습한 미적분Ⅰ 교과서에서 함수의 극한을 소개할 때 그래프를 도입하여 설명하는 것에 착안하여 학생들이 그래프를 이용한 극한 문제 풀이를 어떻게 생각하는지 확인하고자 하였다. 그래프를 이용하여 접근하는 것은 이전 선행연구들에서 살펴본 바와 같이 함수를 다루는 또 다른 표현 방식이다. 대수적으로 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 자신들이 이해한 방식으로 지식을 구성하였다기 보다는 교사가 원하는 답을 제시하기 위한 방식으로 지식을 구성하였다는 점을 확인하였기 때문에 연구자와 연구보조교사는 이를 통하여 또 다른 표현 방법으로 접근할 수 있는 기회를 제공하여 대수적 접근 방식과의 연결성을 살펴볼 수 있을 것이라 기대하였다.

한편 미적분Ⅰ 교과서에서 그래프를 이용하여 함수의 극한을 구하는 과정은 '함수의 극한의 성질'을 학습하기 이전에 다루어지는 내용이므로 학생들이 인수분해나 약분 혹은 대입과 같은 대수적 조작 이전에 극한을 구하는 방법으로 도입된 내용이다. 연구자와 연구보조교사는 함수의 극한을 대수적인 절차로 구하는 지식을 구성한 학생들에게 대수적 절차가 아닌 다른 방식으로 함수의 극한을 구하는 과정을 제공함으로써 학생들이 어떠한 방식으로 함수의 극한 개념을 이해하고 있는지 확인할 수 있을 것이라 예상하였다.

2. 그래프를 이용한 함수의 극한 풀이에서 학생들의 특징

2차시 교수실험의 영상자료와 전사록 및 학생 활동지를 분석한 것에 근거하여 연구자와 연구보조교사는 3차시 교수실험에서 [과제5]와 같이 '그래프에서 함수의 극한을 구하는 과제'에 대한 학생들의 반응을 살펴보기로 하였다.

3차시 교수실험에서는 2차시 교수실험에서 다루었던 과제들을 다시 학생들과 다루어보면서 학생들의 반응을 확인하였으며, 확인 결과 학생들은 $\lim_{x\to p}\frac{x^2-ax+b}{x-c}$과 같은 유형의 과제에 대하여 여전히 분자를 인수분해 하여 분모에 있는 인수와 약분해서 대입하는 절차로 값을 구하였고 그러한 답에 대하여 자신들이 생각하는 답과 교과서에서 원하는 답이 차이가 있기 때문에 교과서가 원하는 답을 제시하였다는 반응을 보여주었다. [과제5]는 이러한 내용들이 확인 된 이후 3차시 후반부 교수실험에서 교사에 의하여 제시되었다.

[과제5]에서 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=1$에서 불연속인 함수이고, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서도 연속인 함수의 그래프라는 차이가 있다. 학생들도 두 그래프의 차이점을 인지하고 있었으며, 학생들은 그래프에서 불연속인

부분을 ‘구멍’이라는 용어로 표현하였다. 학생들 표현에 의하면 불연속인 함수는 ‘구멍’이 있는 그래프이고 연속인 함수는 ‘구멍’이 없는 그래프가 된다. 그리고 학생들은 ‘구멍’을 함숫값과 연결 지어 설명하기도 하였는데, ‘구멍’이 있는 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 함숫값 $f(1)$이 없다고 설명하였고, ‘구멍’이 없는 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 함숫값 $g(1)$이 있다고 설명하였다. 3명의 학생들은 [과제5]에서 두 함수의 차이점을 ‘구멍’이라는 용어로 설명하였다는 공통점이 있었지만, [과제5]에서 극한을 구하는 과정에 대한 설명과 그 값에 대한 생각에서는 학생별로 차이가 있었다. 우선 극한을 구한 결과에서의 차이를 살펴보면, 학생2와 학생3은 $x$가 1로 가까이 가기 때문이라고 설명하면서

$$\lim_{x\to1}f(x)=1,\ \lim_{x\to1}g(x)=1$$

라고 답을 한 반면에 학생1은 $\lim_{x\to1}f(x)$에 대하여 값이 존재하지 않기 때문에

$$\lim_{x\to1}f(x)=0,\ \lim_{x\to1}g(x)=1$$

로 생각했다고 답을 하였다. 2차시 교수실험에서는 [과제1]에 대하여 학생2를 중심으로 $x=1$을 대입하였을 때 분모가 0이 되므로 [과제1]에서의 극한 값이 없다고 설명하였고, 다른 학생들이 학생2의 견해에 동의하는 모습이 관찰된바 있었다. 그런데 [과제5]에서는 학생2에게서는 그러한 고민이 관찰되지 않았던 반면, 학생1에게서는 [과제1]에서와 마찬가지로 값이 존재하지 않기 때문에 그 값을 ‘0’으로 답하는 현상이 관찰되었다. 제한된 자료에 근거하여 학생들의 반응에서 일관된 판단 기준을 찾아낼 수는 없지만, 한 점에서 함숫값이 정의되지 않은 불연속 함수의 극한을 구할 때 대수적 방식으로 값을 구하는 경우와 그래프를 이용하여 값을 구하는 경우 모두에서 학생들이 해당 값을 ‘없다.’로 판단할 가능성이 있으며 ‘없다.’라는 판단의 근거를 ‘0’으로 표현할 가능성이 있음을 확인할 수 있었다.

다음으로 극한을 구하는 과정에서의 차이점에 대하여 살펴보면, 3명의 학생 모두 그래프에서 함수의 극한을 구할 때 ‘가까이 간다.’라는 표현을 이용하여 설명하는 공통점이 있었지만 어떠한 방식으로 ‘가까이 가는 지’에 대한 설명에서는 차이가 있었다. 학생1과 학생2는 함수의 그래프에서 직선을 따라서 점이 ‘구멍’으로 이동하는 것으로 설명한 반면, 학생3은 $x$축과 $y$축을 분리하여 $x$축에서 이동할 때, $y$축에서의 변화를 살펴보는 차이가 있었다.

세부적인 방식에서의 차이가 관찰되기는 하였지만, 3명의 학생들 모두는 그래프를 이용하여 함수의 극한을 구할 때 ‘가까이 간다.’라는 표현과 같이 그래프를 이용하여 동적인 변화의 종착점으로 극한을 생각하는 모습이 공통적으로 관찰되었으며, 이 과정에서 해당 그래프를 대수적인 식 혹은 학생들이 이전 차시에서 보여주었던 ‘대수적 절차’와 연결 지어 고민하는 모습이나 표현은 관찰되지 않았다. 3차시 교수실험 종료 이후 다음 차시 교수실험 과제 결정을 위한 연구자와 연구보조교사의 회의에서도 이러한 부분이 논의되었는데, 연구자와 연구보조교사는 [과제1]과 [과제5]에서 학생들의 표현과 접근 방식을 고려하였을 때, 조심스럽기는 하지만 학생들이 두 과제를 연결 지어 생각하지 않는 것으로 판단하였다. 또한 이에 근거하여 연구자와 연구보조교사는 다음 차시 교수실험을 진행할 때 학생들이 두 과제를 별개의 과제로 생각하는 것으로 전제하여 진행하기로 하였으며, 두 과제 사이의 연결성에 대한 고민을 할 수 있는 경험을 제공하기로 합의하였다.

3. [과제6]과 [과제7]에서 학생들의 대수적 풀이와 그래프를 이용한 풀이의 연결과정

1) 그래프로 주어진 함수에서 대수적 표현으로 변환 과정

연구자들은 3차시 교수실험이 종료된 이후 4차시 과제 선정을 위한 분석과정에서, 학생들이 [과제1]과 같은 형태에서 극한을 구할 때의 방식과 [과제5]와 같이 그래프로 주어진 형태에서 극한을 구할 때의 방식에서 차이가 있다는 것에 주목하였다.

이에 연구자와 연구보조교사는 [과제6]과 같이 그래프로 표현된 함수를 대수적인 표현으로 변환하는 과제를 사전에 준비하였다. 4차시 교수실험에 적용할 과제를 위한 사전 ‘연구자와 연구보조교사의 회의’에서는 대수식으로 표현된 함수를 그래프로 구성하는 과제도 고려하였으나, 해당 방식은 [표 1]에서와 같이 학생들이 이전에 학습한 미적분Ⅰ 교과서에서 소개된 방식이라는 점을 고려하여 그래프로 표현된 함수를 대수적 표현으로 변환하는

과제를 살펴보기로 하였다.

[과제6]은 교사의 질문 이후 학생들의 답변을 듣고 나서 4차시 교수실험 초반에 투입되었다. 교사는 학생들에게 '그래프로 주어진 과제에서 극한을 구할 때는 이전에 대수식으로 표현된 극한을 구할 때처럼 약분을 하거나 대입하는 과정으로 하지 않고 '가까이 간다.'와 같은 설명으로 해결한 이유'를 물어보았고, 학생들은 교사의 질문에 대하여 '그래프로 주어진 과제에서는 식이 주어지지 않았기 때문에 약분을 할 필요가 없다'고 답하였다. 교사는 학생들의 대답 이후 [과제6]을 제시하여 그래프에서의 풀이와 대수적 풀이 사이의 연결 과정을 어떻게 구성하는지에 대하여 살펴보았다.

[과제6]은 주어진 그래프에서 함수식을 찾아보는 과제이다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 이전 3차시의 [과제5]에서와 마찬가지로 $x=1$에서 함숫값의 정의 유무에 따른 차이가 있었다. [과제6]에 대한 학생들의 최초 반응은 다음과 같다.

학생1 : $y=x+1$
학생2 : $f(x)=x+1,\ g(x)=x+1$
학생3 : $f(x)=x+1\,(x\neq 1),\ g(x)=x+1$

학생1은 두 그래프의 식이 동일하기 때문에 $y=x+1$라는 식 하나만을 제시하였다고 하였으며, 학생2도 학생1과 마찬가지로 두 그래프의 식을 동일하게 표현하였다. 두 학생은 교사와의 대화를 통하여, 두 그래프가 $x=1$에서 정의 유무에 따른 차이가 있다는 것을 인지하고 있었으나, 그 부분을 제외하고는 모두 같기 때문에 동일한 함수식으로 표현하였다고 설명하였다. 반면, 학생3은 해당 부분의 차이를 $x\neq 1$이라는 표현을 통하여 드러내었는데, 학생3의 표현에 대하여 다른 학생들이 자신들의 표현을 수정하여 학생3의 표현과 같이 수정하려는 모습을 보이지는 않았었다. 오히려 학생1은 학생3의 표현을 보고나서 $x=1$일 때를 제외하고는 규칙이 다 같은 것이니까 동일한 식으로 표현해야하는 것 아니냐고 반문하면서 학생3의 표현 보다는 자신의 표현이 맞는 것 같다고 주장하기도 하였다.

학생3은 다른 학생들을 설득하기 위하여 자신의 표현을 수정하여 제시하였는데, 수정한 표현은 다음과 같다.

$$g(x)=x+1,\ f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

학생3의 수정된 표현에서 주목할 부분은 함수 $f(x)$에서 정의되지 않은 정의역의 원소 $x=1$을 처리한 방식의 변화이다. 이전과 달리 대수식 자체에서 분모에 $(x-1)$을 포함시켜서 표현하였다는 차이가 있었으며, 학생3 역시 자신이 수정하여 제시한 식의 특징을 설명할 때 이 부분을 분명하게 생각하고 표현하였다. 즉, 교사가 학생3에게 표현을 바꾼 것에 대하여 설명을 해달라고 요구하였을 때, 학생3은

"1을 집어넣었을 때 값이 없어야하는데, $\frac{x^2-1}{x-1}$로 나타내면 $\frac{0}{0}$꼴이 되어서 값이 안 나오니까 분모를 $x-1$로 하고, 약분해서 다른 거하고 같게 되도록 하려고 이렇게 했어요."

라고 설명하였다. 학생3의 설명을 듣고 난 이후 학생1과 학생2도 학생3의 방식에 동의하는 모습을 보여주었으며, 학생1은 이전 학생3의 최초 표현에는 동의하지 않았지만 학생3이 수정하여 제시한 표현은 받아들이는 모습을 보여주었다.

4차시 교수실험 분석 및 5차시 교수실험 과제를 위한 협의에서 연구자와 연구보조교사는, 4차시 교수실험에서 나타난 학생3의 표현방법이 학생3에게서 반복적으로 제기될 수 있는 표현인지와 다른 학생들이 학생3의 방식에 동의한다고 표현한 것에서 그들도 학생3의 표현대로 표현할 수 있는 것인지 확인할 필요가 있다고 판단하였다. 이에 [과제6]에서 함수식만을 조정한 [과제7]을 5차시 초기 과제로 제시하였다.

5차시 교수실험에서는 교사에 의하여 바로 [과제7]이 제시되었으며, [과제7]에 대한 학생들의 초반 반응은 다음과 같았다.

학생1 : 제시하지 못함
학생2 : $f(x)=x-1\ (x\neq 1),\ g(x)=x-1$
학생3 : $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-1},\ g(x)=x-1$

학생들의 반응을 살펴보면, 학생3은 이전 [과제6]에서 수정된 방식(분수 형태로 나타낸 것)으로 보여준 반응과

동일하게 표현을 하였으나, 학생1과 학생2는 학생3과 다르게 표현을 하거나 제시하지 못하였다. 학생2는 이전 [과제6]에서 학생3이 보여주었던 초기 표현과 동일하게 함숫값이 정의되지 않은 부분을 정의역에서 제거하는 방식으로 표현을 하였고, 학생1은 결과를 제시하지 못하고 계속 고민하는 모습을 보여주었다. 그러나 학생3의 표현을 본 다음에는 학생1과 학생2도 [과제6]에서 보여준 반응과 마찬가지로 학생3의 표현에 동의한다고 답을 하였다.

2) 그래프를 대수적 표현으로 변환한 이후 극한 값에 대한 학생들의 표현

학생들이 그래프에서 대수적 표현으로 변환하는 과정이 마무리된 직후 교사는 학생들에게 [과제7]에서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값을 물어보았다. 교사의 질문에 대하여 학생들의 표현은 다음과 같다.

학생1 : $x$에 $1$을 대입하면 $f(x)$가 $0$이 되기 때문에 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이다.
학생2 : $x$가 $1$로 가면 $f(x)$가 $0$에 가까워진다.
학생3 : $x$가 $1$로 가까이 가면 $f(x)$의 값이 $0$이 된다.

이러한 반응은 [과제7]에서 학생들이 대수적인 식을 구한 직후에 $\lim_{x\to1}f(x)=0$을 구하는 과정에서 보인 반응이며, 학생1은 그래프에서 대수식을 직접 구성하지는 못하였었지만 다른 학생이 제시한 대수적 표현에 $x=1$을 대입하여 극한을 구하였고, 다른 두 학생들(학생2, 학생3)은 그래프에서 극한을 구하는 방식으로 답을 하였다는 차이가 있다. 또한 학생2와 학생3의 표현에서도 주목할 만한 차이가 있는데, 학생2는 함숫값이 $0$으로 가까이 가는 과정으로 표현하였고 학생3은 함숫값이 $0$이라고 답하는 차이가 있었다.

5차시 교수실험 이후 6차시 교수실험 과제를 준비하는 과정에서 연구자와 연구보조교사는 회의 과정에서 학생들의 반응 중에서 함숫값을 언급한 경우를 확인할 필요가 있다고 의견을 모았다. 예를 들어 학생1은 $x=1$을 대입해서 $f(1)$의 값을 극한 값으로 제시하였고, 학생3도 $f(x)$의 값을 $0$으로 제시한 것은 $f(1)$의 값을 극한 값으로 제시한 것으로 볼 수 있는데, 이전 2차시 교수실험에서 [과제1]을 해결하는 과정에서 학생들은 극한 값을 대수적 계산을 통하여 구하기는 하였지만 그 값은 교사가 원하는 답이라고 하였으며 자신들은 값이 존재하지 않는다고 본다는 반응과 비교하여 현재의 반응을 살펴볼 필요가 있다고 판단하였기 때문이다. 즉, 연구자들은 학생들이 그래프로 표현된 함수에서 대수적 표현으로 변환한 이후 극한 값을 언급한 것은 학생들 생각에 존재하는 값으로 답을 한 것인지, 아니면 여전히 자신들은 그렇게 생각하지 않지만 다른 사람들과의 의사소통을 위해서 그러한 답을 하고 있는 것인지 확인하고 싶었다. 이러한 궁금증을 확인하기 위해서 연구자들은 6차시 교수실험에서 학생들에게 함수 $f(x)$가 $x=1$이 정의되어 있지 않은 상태에서 $f(1)$의 값을 구할 수 있는지를 학생들에게 물어보기로 하였다.

3) $x=1$에서 정의되지 않은 함수 $f(x)$에서 $f(1)$이라는 값의 의미에 대한 학생들의 생각

교사는 6차시 교수실험 초반에 5차시에서 [과제7]에 대하여 학생들이 작성하였던 활동지를 보여주면서 5차시 학생들의 반응을 상기시켜주었다. 이후 교사는 학생들에게 직접적으로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 값이 없는데 어떻게 있지도 않는 $f(1)$라는 값을 극한 값으로 이야기 할 수 있는지 물어보았다. 교사의 질문에 대하여 학생들이 바로 반응을 보이지는 않았는데, 교사의 이 질문이 학생들로 하여금 곤란함을 느끼게 만든 것으로 보였다.

교사의 질문에 대하여 답을 고민하던 중 학생3은 종이에 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$을 쓰고 나서 $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x-1}$를 적은 다음 분모에 있는 인수 $(x-1)$을 약분하는 과정을 수행하였다. 교사는 이에 대하여, 약분하는 행동은 왜 하는지에 대하여 물어보았는데, 학생3은 $\lim_{x\to1}f(x)$을 $\lim_{x\to1}g(x)$로 보고 풀겠다는 의도라고 답을 하였다. 학생3의 답에 대하여 다른 두 학생들(학생1, 학생2)은 고개를 끄덕거리며 동의하는 반응을 보여주었으며, 학생2의 경우는 자신들이 푸는 문제가 $\lim_{x\to1}f(x)$이 아니라 결과적으로 $\lim_{x\to1}g(x)$를 푸는 것이라고 답하였다.

학생2의 답변에 이어서 학생3은 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$을 계산할 때 $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-1)=0$와 같이 인수분해하여 인수 $(x-1)$를 약분하여 $x=1$을 대입하는 과정이, 그래프에서 극한을 구하는 과정과 동일하다고 설명하였다. 학생3은 그래프에서도 $x$가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$가 0으로 가까이 가는 것인데 함숫값 $f(1)$이 존재하지 않는 것은 교사의 지적과 같이 문제가 된다고 하였다. 그래서 학생3은 '$x=1$에서의 함숫값이 존재하고 다른 부분에서는 함수 $f(x)$와 동일한' 함수 $g(x)$로 문제 상황을 바꾸어주어서 생각하였다고 답하였다. 이렇게 할 경우 함수 $g(x)$에서는 $g(1)$이 존재하기 때문에 $g(1)$을 답으로 한 것이라고 이유를 설명하였다. 즉, 학생3의 표현은 구멍이 있는 함수 $f(x)$의 그래프에 대하여 구멍을 채워서 함수 $g(x)$의 그래프로 만들어준 다음, 함수 $g(x)$에서는 $g(1)$을 구할 수 있으니까 $\lim_{x\to1}f(x)=g(1)$로 볼 수 있다고 설명한 것이며, 특히 학생3은 이러한 자신의 설명이 대수적인 식으로 푸는 것과 다르지 않다고 표현한 것으로 볼 수 있다.

학생들이 극한 문제에 해결 과정에서 대수적 풀이와 그래프를 이용한 풀이를 연결 지어 설명하는 것을 다 듣고 난 이후 교사는 학생들에게 $\lim_{x\to1}f(x)$의 의미를 물어보았다. 이는 학생들의 설명을 들으면서 교사 입장에서는 앞서 학생들의 보여준 반응과 비교하였을 때 학생3의 설명에서 이해가 안가는 부분이 있었기 때문이었다. 교사가 6차시 교수실험에서 $f(1)$의 값이 정의되지 않았는데 그 값을 극한 값으로 답한 것에 대하여 학생들에게 질문을 한 배경은 2차시 교수실험의 [과제1]에서 학생들은 '극한 값이 존재하지 않는데 교과서에서 원하는 답을 해주기 위해서 계산에 의한 결과를 답한 것'이라고 보여주었던 반응에 변화가 있는지를 확인하는데 있었다. 그런데 학생3은 5차시 후반 교수실험에서 [과제7]의 극한값을 함숫값 $f(1)$로 답을 하였었기 때문에 교사는 학생3의 표현이 [과제1]에서의 반응과 달리 이제는 교과서에서 원하는 답으로 제시한 것이 아니라 본인도 인정하는 답으로 제시한 것이라는 추측을 했었다. 그러나 6차시 교수실험에서 학생3의 설명을 들어보면 여전히 학생3은 [과제7]의 극한은 존재하지 않지만 함숫값 $f(1)$이 답이기 때문에 존재하지 않는 함숫값 $f(1)$을 구하기 위하여 함수 $g(x)$를 이용하여 구하였다는 논리가 되기 때문에 교사의 관점에서는 학생3의 설명을 이해하는 것에 어려움이 있었다. 한편 6차시 교수실험을 진행하면서 교사는 학생3의 설명을 이해하기 힘들었던 반면 다른 학생들은 학생3의 설명을 이해하는 모습을 보여주었을 뿐만 아니라 학생2는 종종 학생3의 의견을 받아서 자신의 견해를 이야기 하는 모습을 보여주었는데 이 역시 교사로서는 이해하기 힘든 상황이었다. 교사의 입장에서는 교수실험 진행을 위해서라도 교사가 느끼고 있는 이해의 어려움을 정리할 필요가 있었고, 그러한 배경에서 나온 질문이 학생들에게 $\lim_{x\to1}f(x)$의 의미를 물어보는 것이었다.

교사의 질문에 대하여 의외로 학생들은 교사의 질문을 예상한 듯 자신들의 견해를 활발하게 표현하였는데 학생1, 학생2 및 학생3의 순으로 답을 하면서 점차적으로 표현이 바뀌어가는 것이 관찰되었다.

최초 6차시 교수실험 초반에 학생3은

'$x$가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$의 값'

이라고 했었다. 이후 6차시 교수실험 후반에는 학생1은 학생3의 표현을 언급한 것을 이야기하면서 학생3의 표현을

'$x$가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$의 극한값'

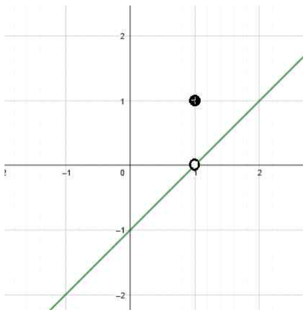
이라고 바꾸어서 표현을 하였다. 또한 학생2는 학생1의 표현에 동의하면서

'$x$가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$는 0으로 가까이 간다.'

로 표현을 수정하였으며, 학생3과 학생1도 학생2의 수정된 표현에 동의하였다. 사실 이러한 표현은 학생2가 5차시 교수실험에서도 표현하였던 것이지만 당시에는 학생2의 표현에 다른 학생들이 동의하지는 않았었다. 그러나 학생3의 표현을 학생1이 수정하고 다시 학생2가 수정을 해서 다시 표현하는 일련의 변화과정을 거치면서 학생1, 학생2와 학생3이 모두 동의하는 표현으로 재표현된 것으로 보였다.

또한 이러한 표현 이후 학생들은 $\lim_{x\to1}f(x)$를 구하는 것에 대하여, '$\lim_{x\to1}f(x)$는 $x$가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$가 어디로 가까이 가느냐?'라는 질문으로 받아들인다고 답하였다. 특히 학생3은 $\lim_{x\to1}f(x)$에 대하여 '함숫값'으

로 표현하였던 것에서 학생1과 학생2의 표현을 보면서 자신의 표현을 바꾸었는데, 이 과정에서 학생3은 [그림 3]과 같은 예를 스스로 만들어서 다른 상황을 가정하여 설명하는 모습을 보여주기도 하였다. [그림 3]은 함숫값은 정의되어있지만 $f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$에 해당하는 상황이다.



[그림 3] 학생3이 $\lim_{x \to 1} f(x)$에서 구성한 예

[Fig 3] Examples of students composed of $\lim_{x \to 1} f(x)$

학생3은 [그림 3]을 통하여 이런 상황에서도 학생2의 표현이 적용된다고 하면서 [그림 3]에서 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값도 0이라고 답하였다. 그 이유에 대하여는

"$x$가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$가 어디로 가느냐가 질문이니까 되네요. $x=1$에서의 값이 아니니까."

라고 답하였다.

이상의 과정을 통하여 연구자는 학생들의 $\lim_{x \to 1} f(x)$에 대한 표현의 변화를 관찰할 수 있었고, [과제7]에 대한 논의를 통하여 학생들이 분모를 약분하여 대입하는 대수적 절차가 $\lim_{x \to 1} f(x)$을 $\lim_{x \to 1} g(x)$로 보고 푼 것이라고 해석하는 과정을 통하여 학생들이 그래프를 이용한 풀이에서 대수적 풀이를 연결지어가는 과정을 관찰할 수 있었다.

## V. 결론 및 제언

### 1. 학생들의 '$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$을 대수적 절차로 값을 구하는 방식'과 '그래프를 이용하여 구하는 방식'의 연결성에 대한 생각

학생들의 대수적 절차로 값을 구하는 방식과 그래프를 이용하여 구하는 방식의 특징에 대하여 각각 살펴본 다음 두 방식의 연결성에 대한 학생들의 생각을 정리하고자 한다. 우선 학생들에게 제시된 [과제1]은 실수전체에서 연속성을 조사한다고 하였을 때, 제 1종 불연속 함수 중에서 정의역의 원소가 아닌 특정 점에서 함숫값이 정의되지 않은 함수에 해당한다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 제 1종 불연속 함수라 함은, 좌극한과 우극한이 각각 존재하면서 불연속인 함수이다. 따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 제 1종 불연속 함수라고 하면, 다음과 같은 두 가지 경우 중 한 가지 경우에 해당한다.

- $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$
- $\lim_{x \to a+} f(x) \neq \lim_{x \to a-} f(x)$

[과제1]은 전자의 경우에 해당하는 과제이며, 학생들은 [과제1]에 대하여 분자를 약분한 다음 분모에 있는 인수를 약분하여 $x=1$을 대입하는 방식으로 극한 값 2를 구하였다. 이를 학생들이 표현한 수식으로 제시하면,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

가 된다. 학생들이 이렇게 대수적인 절차로 해결한 것에는 두 가지 특징이 있다. 우선 학생들이 대수적인 절차로 값을 구하였을 때 등호로 연결된 값을 표현하였다는 특징이 있다. 다른 특징은 학생들은 이러한 절차로 값을 계산하여 구하였지만, 얻어진 답에 대하여 '교사와 교과서가 원하는 답' 혹은 '시험 문제에서 점수를 얻기 위한 답'이라고 표현하였으며, 자신들은 [과제1]의 답이 존재하지 않기 때문에 굳이 값으로 표현한다면 '0'으로 표현해야한다고 설명하는 것과 같이 이중적인 답을 제시하였다는 특징이다.

학생들이 함수의 극한을 이해하는 것에 어려움을 경험할 수 있다는 여러 선행연구들(Orton, 1983; Thompson, 1994)들이 있지만, 학생들이 교사가 원하는 답과 자신이 생각하는 답을 이중적으로 제시하고 있다는 것은 선행연구들에서의 지적과는 또 다른 종류의 문제점을 드러낸 것이라 할 수 있다. 특히 이러한 이중적인 함

수의 극한 개념은 학생들이 함수의 극한 개념을 확장하여 연속 개념 혹은 미분 개념을 구성하게 되는데 영향을 줄 수 있으므로 추후 더 심화된 연구가 필요할 것으로 보인다.

다음으로 [과제1]을 그래프로 제시한 경우에 학생들이 함수의 극한을 해결하는 과정에서의 특징을 살펴보면, 학생들은 '가까이 간다.'라는 표현을 이용하여 극한 값을 구하는 모습을 보여주었다. 이러한 접근 방식에서도 일부 학생들에게서는 $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$인 제 1종 불연속 함수에 대하여 극한이 존재하지 않기 때문에 '0'이라고 표현하는 경우가 관찰되기는 하였지만, 대수적인 절차로 해결할 때와 같이 이중적인 답을 제시하는 모습은 관찰되지 않았었다. 연구자들은 학생들이 이중적인 답을 제시하지 않는 현상이 학생들이 그래프에서 극한을 구할 때 '$\lim_{x \to 1} f(x)$'를 구하는 것은 $x$가 1로 가까이 갈 때 $f(x)$가 어디로 가까이 가는지를 묻는 것으로 받아들이기 때문인 것으로 판단하였다. 반면, 대수적인 절차에서 '$\lim_{x \to 1} f(x)$'를 구하는 것은 $x=1$을 대입하였을 때의 값을 구하는 과제로 받아들이는데 $x=1$을 대입하면 분모가 0이 되는 인식적 장애가 발생하기 때문에 이중적인 답을 제시하게 되는 것으로 판단하였다.

이는 [과제1]에 대하여 '대수적으로 제시된 것'과 '그래프로 제시된 것'이 학생들에게 전혀 별개의 두 과제로 받아들여지고 있을 수 있다는 의심을 연구자들이 하게 된 근거가 된다. 또한 그래프로 함수의 극한을 구하는 과정에서 학생들이 이전에 대수적인 절차와 연결 지어 고민하는 모습이나 표현은 관찰되지 않았다는 점도 연구자들이 [과제1]의 두 가지 표현 형태가 별개의 과제로 학생들에게 받아들여지고 있다는 판단을 하게 된 근거이다.

선행연구들 중 이동근(2018b)에서도 학생들이 등비급수 $\lim_{n \to \infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right\}$의 값을 구하는 과제에 대하여는 $\lim_{n \to \infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\right\}=1$이라고 표현하고, 이와 동일하지만 다른 표현인 $0.\dot{9}$에 대하여는 1보다 작다고 표현한 것을 제시하면서 학생들이 두 과제를 별개의 과제로 인식하고 있다고 지적한 바 있는데, 비슷한 맥락에서 본 연구에서도 [과제1]의 두 가지 형태에서 학생들이 보여준 모습에 근거하여 학생들이 두 가지 형태의 과제를 별개의 과제로 생각하고 있다는 판단이 가능할 것으로 보인다.

2. '학생들의 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$을 대수적 절차로 구하는 방식'과 '그래프를 이용하여 구하는 방식'의 연결 과정

학생들이 $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$인 제 1종 불연속함수의 과제를 대수적인 절차로 해결하는 방식과 그래프를 이용하여 해결하는 방식의 연결 과정의 고리는 [과제6]에 대한 활동이 해준 것으로 판단된다. 학생들은 [과제6]에서의 그래프를 대수적 표현으로 변환할 때 $x=1$에서 불연속인 것을 분모에 $(x-1)$이라는 인수를 이용한 분수함수로 표현하여 처리하는 것으로 합의를 하였다. 이때 주목할 부분은 대수식으로 표현된 함수에서 그래프를 구성하는 것은 한 가지 방식으로 결정되지만, 그래프로 표현된 함수를 대수적으로 변환하는 것은 학생들의 입장에서 다양하게 표현될 수 있다는 점이 확인되었다는 점이다. 예를 들어 학생들은 [과제6]을 대수적인 표현으로 변환할 때 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$라는 표현뿐만 아니라 $f(x) = x-1 \ (x \neq 1)$로도 표현하였으며, 오히려 처음에 구성한 대수적 표현은 $f(x) = x-1 \ (x \neq 1)$이었다.

선행연구들에서도 함수를 표현할 때 대수적 표현과 그래프로 표현하는 방식 사이의 변환이 자연스럽지 않음을 지적한 바 있는데, 본 연구에서의 결과 역시 둘 사이의 표현의 변환이 자연스럽지 않다는 것을 학생들을 대상으로 하여 실제적인 증거를 확인한 것으로 볼 수 있다. 이러한 증거들은 추후 다른 교수실험들을 통하여 검증과정을 거칠 필요가 있으며, 그 결과의 축적 여부에 따라 현재와 같이 학교수학에서 함수의 극한을 제시하는 과제에서 대수적 표현과 그래프를 함께 제시하여 설명하는 방식에 대하여 좀 더 심도 있게 고민할 수 있는 기회를 제공할 것으로 기대된다.

본 연구에서는 [과제6]과 [과제7]에서 학생들이 그래프로 표현된 함수를 대수적 표현으로 전환하는 과정을 경험한 이후, 함수의 극한을 구하는 '대수적인 절차'를 '그래프를 이용한 풀이'와 연결하여 설명하는 장면을 드

러내었다.

학생들이 함수의 극한을 대수적인 절차로 해결할 때, '약분'과 '대입'이라는 두 가지 절차를 거치게 되는데, [과제7] 이전에는 그러한 절차들이 그래프를 이용한 풀이와 연결되어 설명되지 않았었다면, [과제7]에서는 두 가지 절차를 각각 그래프를 이용한 풀이와 연결하여 설명하는 모습을 보여주었다. 예를 들어 학생들은 [과제7]에서 분모에 있는 인수 $(x-1)$을 약분하는 것은 $x=1$에서 불연속인 함수 $f(x)$를 $x=1$에서도 연속인 함수 $g(x)$로 바꾸어주는 과정이며, 이후 $x=1$을 대입하는 것은 $g(1)$을 구하는 과정으로 연결 지어 설명하였다. 물론 이러한 설명에서 $\lim_{x\to1}f(x)$를 구한 것이 아니라 $\lim_{x\to1}g(x)$를 구한 것이라는 문제가 발생하는데, 이러한 부분은 학생들도 인식하고 있던 문제였다. 그러나 [과제6]을 거치면서 학생들이 그래프를 이용하여 극한을 구하는 경험을 통하여 학생들의 함수의 극한을 구하는 과제에 대한 생각이 바뀌게 된 것이 이러한 문제를 학생들 관점에서 해결해 준 것으로 보인다. 즉, 학생들은 대수적으로 함수의 극한 문제를 풀 때는 $x=1$을 대입하는 것으로 생각하였으나, 그래프에서 대수적 표현으로 변환하는 경험 이후 그래프에서 극한을 해결할 때 이용하였던 '가까이 간다.'라는 표현을 사용하는 것으로 변하게 되면서 대수적 절차와 그래프를 연결하는 것이 가능했던 것으로 볼 수 있다. 학생들의 이러한 연결 과정에 대하여 수학적으로 오류가 있을 수 있다. 그러나 본 연구에서의 초점은 그럼에도 불구하고 학생들이 '대수적 절차에서 그래프를 이용한 풀이와의 연결'을 통하여 더 이상 교사가 원하는 답을 하는 것이 아니라 자신들이 구성한 답을 제시하게 되었다는 점에 있다. 이는 대수적인 절차만으로 극한 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 보여준 이중적으로 답한 것과는 다른 모습이다. 물론 이와 같은 연결은 소수의 학생들에게서 제한된 교수실험에 의하여 드러난 장면이므로 일반화에는 어려움이 있지만, 추가적인 연구의 필요성을 제시하였다는 점과 관련 연구들에 시사점을 제공하는 역할을 해준다는 점에서 의미를 찾을 수 있다.

3. 제언

앞서 언급한 바와 같이, 본 연구는 소수의 학생들과의 교수실험에서 나타난 결과를 분석하였다는 제한점이 있기 때문에, 연구에서 소개한 자료를 교수학습 상황에 바로 적용한다거나 일반화하는 것에는 어려움이 있으며, 학생들이 구성한 방식에서 수학적으로 오류가 있는 부분도 일정부문 존재한다. 그럼에도 불구하고 본 연구에서의 결과는 일정부분 학교수학에서 '함수의 극한'을 도입할 때, 그래프를 이용하여 극한의 개념을 도입한 다음 식으로 주어진 계산문제를 풀도록 하는 수업 방식에 대하여 주의할 필요가 있음을 드러내었다는 점에서 의미가 있다.

학교 현장에서는 함수의 극한을 구할 수 있으면 학생이 함수의 극한에 대하여 이해한 것으로 오해할 소지가 있다. 그러나 그렇게 함수의 극한 값을 구한 학생들이 정작 자신들이 구한 값의 의미를 고민하지 않고, 단지 주어진 문제에 그러한 방식으로 답하는 것으로 길들여지고 있는 것이라면(혹은 교사가 원하는 답 따로 자신이 생각하는 답을 따로 생각하면서 교사가 묻는 질문에는 교사가 원하는 답을 하는 것이 수학이라고 생각한다면), 이는 수학교육을 담당하는 이들이 함께 진지하게 고민해야할 부분이라 생각한다.

교사가 수업을 통하여 지식을 어떻게 잘 전달할 것인지 고민하는 것도 중요한 의미를 갖지만, 이를 위해서는 먼저 학생들이 어떻게 개념을 구성하고 있는지에 대한 정보를 얻기 위해 노력하는 것도 중요하다. 본 연구는 학생들이 함수의 극한 개념을 어떻게 구성하고 있는지에 대하여 대수적인 절차와 그래프를 이용한 풀이의 연결을 구성적 관점에서 살펴본 연구이다. 본 연구와 같이 학생들의 함수의 극한 개념 구성에 대한 실질적인 정보를 축적하는 것은, 앞으로 함수의 극한 학습 경험이 없는 학생들을 대상으로 극한 개념 발달 과정에 대한 연구를 진행하는 것에 도움이 될 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌


곽영순 (2014). 교사 그리고 질적연구. 서울: 교육과학사.

Kwak, Y.S. (2014). *Teacher and qualitative research*. Seoul: Kyoyookbook.

박임숙, 김홍기 (2002). 高等學校에서의 極限概念 教授・學習에 관한 硏究. 수학교육학연구 12(4), 557-582.

Park, I.S. & Kim, H.K. (2002). A Study on Teaching and Learning of the Limit Concept in High School. *The Journal of Educational Research in Mathematics. 12*(4), 557-582.

이광원 (2012). 경제 원리의 재인식을 통한 초등교사의 사회과교육과정 전문성 실천사례연구. 사회과교육연구 19(4), 45-60.

Lee, K.W. (2012). Elementary Social Studies Teacher? Curriculum Expertise in the Practice of Reorganizing Curriculim Materials on Economic Eduation. *Research in Social Studies Education. 19*(4), 45-60.

이경화, 신보미 (2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해. 수학교육학연구 15(1), 39-56.

Lee, K.H. & Shin, B.M. (2005). High Achieving Students' Understanding of Continuity of Function. *The Journal of Educational Research in Mathematics. 15*(1), 39-56.

이세형, 장현석, 이동원 (2018). 함수의 연속을 판단하는 문제에서 현직교사와 예비교사의 정의역 인식 조사. 수학교육 57(4), 477-491.

Lee, S.H., Jang, H.S., & Lee, D.W. (2018). A study of the in-service teachers' and pre-service teachers' recognition the domain in the problem of the continuity of a function. *The Mathematical Education. 57*(4), 477-499.

이동근 (2017). 고등학교 1학년 학생들의 시간, 속력, 거리의 관계에서 평균속력에 대한 인식과 평균속력 함수 구성에 대한 연구. 박사학위 논문, 한국교원대학교.

Lee, D.G. (2017). *A Study on 1st Year High School Students' Construction of Average Speed Concept and Average Speed Functions in Relation to Time, Speed, and Distance*. Unpublished doctoral dissertaion. Korea National University of Education.

이동근 (2018a). 수학적 지식으로서의 평균 개념 구성 과정에서 나타난 학생들의 표현에 관한 연구. 수학교육 57(3), 311-328.

Lee, D.G. (2018a). A Study on Expression of Students in the Prosess of Constructing Average Concept as Mathematical Knowledge. *The Mathematical Education. 57*(3), 311-328.

이동근 (2018b). 다양한 형태의 등비급수 과제들에 대한 학생들의 생각과 표현에 관한 사례연구. 수학교육. 57(4), 353-369.

Lee, D.G. (2018b). A Case Study on Student's Thoughts and Expressions on various Types of Geometric Seies Tasks. *The Mathematical Education. 57*(4), 353-369.

이동근, 김숙희 (2017). 지수함수 형태의 거리함수에서 미분계수의 절차적 지식 구성과 표현의 변화에 대한 사례연구. 학교수학 19(4), 639-661.

Lee, D.G. & Kim, S.H. (2017). A Case Study on the Change of Procedural Knowledge Composition and Expression of Derivative Coefficient in Exponential Function Type Distance. *School Mathematics 19*(4). 639-661.

이동근, 양성현, 신재홍 (2017). 자연상수 $e$ 에 대한 이해를 기반으로 지수함수 $y=2^x$ 의 $x=0$ 에서의 순간변화율 구성에 관한 연구. 학교수학 19(1), 95-116.

Lee, D.G., Yang, S.H., & Shin, J.H. (2017). A Study on the Process of Constructing the Instantaneous Rate of Change of Exponential Function y=2^x at x=0 Based on Understanding of the Natural Constant $e$ . *School Mathematics 19*(1). 95-116.

Adu-Gyamfi, K. (2007). *Connections among representations: The nature of students' coordinations on a linear function task*. Unpublished doctoral dissertation, North Carolina State University.

Creswell, J. W. (2018). 연구방법, (정종진, 김영숙, 성용구, 성장환, 류성림, 박판우, 유승희, 임남숙, 임청환, 허재복 역), 서울: 시그마프레스. (원저 2014년 출판)

Elia, I., Gagatsis, A., & Gras, R. (2005). Can we "trace" the phenomenon of compartmentalization by using the implicative statistical method of analysis? An application for the concept of function. In R. Gras, F. Spagnolo, J. David (eds.), *Proceedings of the third international conference I.S.A. Implicative Statistic Analysis*, pp. 175-185, Palermo, Italy.

Glasersfeld, E. (1999). 급진적 구성주의 (김판수, 박수자, 심성보, 유병길, 이형철, 임채성, 허승희 역). 서울 : 원미사. (원저 1995년 출판)

Hatch, J. A. (2008). 교육 상황에서 질적 연구 수행하기

(진영은 역). 서울: 학지사. (원저 2002년 출판)

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education 31*(4), 500-507.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics 6*(2), 18-28.

Merriam, S. B. (1994). 질적 사례연구법 (허미화 역). 서울: 양서원. (원저 1988년 출판)

Stacey, K. & Turner, R. (2014). *Assessing mathematical literacy: The PISA experience*. Heidelberg: Springer.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. Educational Studies in Mathematics 26(2-3), 229-274.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.

Yin, R. K. (2009). *Case Study Research: Design and Methods*(4th ed). Thousand Oaks, CA: Sage.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education 8*, 103-127.

# A case study on students′ expressions in solving the limitations of functions problems

Lee, Dong Gun
MunJeong High School, Republic of Korea
E-mail : jakin7@hanmail.net

This study is a study to collect information about 'Limitations of functions' related learning. Especially, this study was conducted on three students who can find answers by algebraic procedure in the process of extreme problem solving. Students have had the experience of converting from their algebraic procedures to graphical expressions. This shows how they reflect on their algebraic procedures. This study is a study that observes these parts. To accomplish this, twelfth were teaching experiment in three high school students. And we analyzed the contents related to the research topic of this study. Through this, students showed the difference of expressions in the method of finding limits by using algebraic interpretation methods and graphs. In addition, we examined the connectivity of the limitations of functions problem solving process of functions using algebraic procedures and graphs in the process of converting algebraic expressions to graph expressions.

This study is a study of how students construct limit concepts. As in this study, it is meaningful to accumulate practical information about students′ limit conceptual composition. We hope that this study will help students to study limit concept development process for students who have no limit learning experience in the future.

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : teaching experiment, limit, algebraic solution, graph, lesson, limit of function