韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2019.22.1.29
2019. 1. 제 22권, 제 1호, 29-48

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
January. 2019, Vol. 22, No. 1, 29-48

일본 교과서에 제시된 이중 척도 모델에 관한 분석

서 은 미 (한국교원대학교 대학원 학생)
조 선 미 (한국교원대학교 대학원 학생)
방 정 숙 (한국교원대학교 교수)†

이중 척도 모델은 서로 다른 두 척도를 이용하는 시각적 모델로(정영옥, 2015), 그동안 이중 척도 모델에 관한 국내 연구는 주로 이중수직선에 한정되어 이루어졌으며, 우리나라 교과서에 이중 척도 모델을 어떻게 활용할 수 있는지에 대한 연구는 제한적으로 이루어졌다. 이에 본 연구에서는 이중 척도 모델을 적극적으로 활용하고 있는 일본 교과서를 분석하였는데, 구체적으로 이중 척도 모델이 제시된 단원의 학습 내용, 제시 목적, 형태의 변화 과정 및 문제 맥락의 특징을 중심으로 살펴보았다. 분석 결과, 이중 척도 모델은 곱셈과 관련된 학습 내용을 연결하여 지도하는 데 유용한 시각적 모델이며 특히 비율 맥락에서 사용하기에 적합하다는 것을 확인하였다. 또한 학년에 따라 이중 척도 모델의 제시 목적을 점진적으로 확대하고, 형태를 단계적으로 도식화함으로써 학생들의 이해를 돕고 있음을 알 수 있었다. 이와 같은 결과를 토대로 본 연구는 이중 척도 모델의 체계적인 활용 방안에 관해 시사점을 제시한다.

I. 서론

수학을 학습하는 데 있어 여러 가지 상황을 수학적으로 표현하고 이를 활용하는 능력은 중요하다. 학생들은 문제를 해결하기 위해 여러 수학적 표현 중에 적합한 것을 선택하고 적용하며 해석할 줄 알아야 한다(CCSSI, 2010; NCTM, 2000). 우리나라 2015 개정 수학과 교육과정에서도 의사소통 능력을 함양하기 위해 수학 용어, 기호, 표, 그래프 등의 수학적 표현을 이해하고 정확하게 사용하는 능력을 강조하고 있다(교육부, 2015). 이러한 중요성으로 인해, 시각적 표현과 관련하여 국내외에서 다양한 연구가 진행되어 왔다(예, 정영옥, 2013, 2015; Küchemann, Hodgen, & Brown, 2011; Orrill & Brown, 2012). 이러한 연구의 공통점은 시각적 표현을 효과적으로 사용한다면 학생들이 수학적 개념이나 원리를 이해하는 데 도움을 줄 수 있다는 것이다.

최근 시각적 표현과 관련된 국내 연구를 살펴보면, 이중 척도 모델의 한 형태인 이중수직선(double number line)에 대한 연구가 활발히 진행되었다(예, 김가영, 2018; 김양권, 홍진곤, 2016; 서은미, 방정숙, 이지영, 2017; 임재훈, 이형숙, 2015; 장혜원, 임미인, 유미경, 박혜민, 김주숙, 이화영, 2018). 이중 척도 모델은 시각적 모델의 위, 아래에 서로 다른 두 척도를 사용하는 것으로 비표(ratio table), 막대 모델(bar model), 이중수직선 등이 있다(정영옥, 2015). 이중수직선은 학생들이 덧셈적 접근에서 벗어나 곱셈적으로 사고하도록 돕는 장점이 있고(Küchemann et al., 2011), 두 양을 포함하는 두 수직선을 같은 비율로 줄이거나 늘이는 방식으로 만들어지므로 양들 사이의 비례적인 관계가 유지된다(Orrill & Brown, 2012). 이런 아이디어를 활용하여 최근 이중수직선을 활용한 연구는 주로 비례 추론을 다루고 있다. 그러나 김양권과 홍진곤(2016)의 연구에서는 비례 추론뿐만 아니라 나눗셈의 포함제와 등분제를 나타내는 데에도 이중수직선이 유용함을 밝혔고, 장혜원 외(2018)는 이중수직선을 분수와 소수의 곱셈 및 나눗셈, 백분율과 비례식의 성질을 학습하는 데 활용할 수 있음을 제안하는 등 이중수직선의 적용 범위가 확대되고 있다.

특히 장혜원 외(2018)의 연구에서는 일본, 대만, 싱가포르 수학 교과서에 제시된 이중수직선을 포함한 다양한 형태의 이중 척도 모델을 분석하였다. 그 결과 이중 척도 모델이 계산 결과의 어림, 개념 및 원리 이

* 접수일(2018년 12월 31일), 심사(수정)일(2019년 1월 21일), 게재확정일(2019년 1월 22일)
* ZDM분류 : U22
* MSC2000분류 : 97U20
* 주제어 : 시각적 모델, 이중 척도 모델, 이중수직선, 교과서 분석
† 교신저자 : jeongsuk@knue.ac.kr

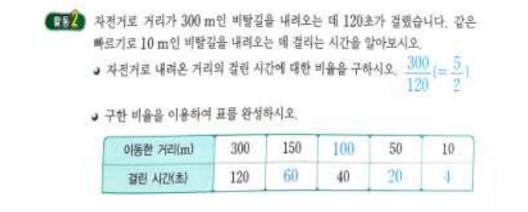
해, 문제 상황을 파악하기 위한 도구로 활용할 수 있음을 밝혔다. Murata(2008)의 연구에서도 일본 교과서에서 띠(tape diagram)를 다양한 주제에서 지도하고 있는데, 이것이 학생들의 개념 이해와 문제 해결에 도움이 됨을 주장하였다. 이 연구에서 띠는 다양한 형태로 제시되고 결국 이중 척도 모델로 변화된다. 이를 통해 이중 척도 모델이 여러 주제를 학습하는 데 효과적으로 활용될 수 있음을 알 수 있다. 그러나 국내에서 이중 척도 모델에 대한 연구는 주로 이중수직선에 한정되어 있고, 이중수직선을 활용하는 방안에 대해서는 연구가 다소 이루어졌으나 이중수직선을 체계적으로 도입하기 위해서 어떤 활동이 필요하거나 이루어질 수 있는지에 대한 연구는 별반 이루어지지 않았다. 특히 Murata(2008)의 연구에서 볼 수 있듯이 이중수직선이 점진적인 변화 과정을 통해 도입되고 저학년부터 이런 시각적 표현에 대한 다양한 경험이 이루어질 수 있음을 고려할 때, 이중수직선을 수학 수업에서 효과적으로 활용하기 위해서는 이에 대한 좀 더 구체적인 도입 및 활용 방안에 대한 고찰이 필요하다.

이에 본 연구에서는 이중 척도 모델을 체계적으로 활용하고 있는 일본 교과서에서 어떻게 이중 척도 모델을 단계적으로 도입하고 효과적으로 활용하는지에 관해 분석함으로써, 이중 척도 모델이 제시된 학습 내용 및 순서를 알아보고 어떠한 점에 중점을 두어 지도하고 있는지를 면밀하게 파악하였다. 이를 통해 초등학교에서 수학 학습 내용에 이중 척도 모델을 어떻게 도입하고 활용할 수 있는지에 대한 시사점을 얻고, 이중 척도 모델의 체계적인 활용 방안에 관한 기틀을 마련하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 이중 척도 모델에 대한 예시 및 선행 연구 분석

이중 척도 모델 중 우리나라 교과서에도 제시하고 있는 비표와 막대 모델부터 살펴보면 다음과 같다. 비표는 주로 비와 비례 문제에서 학생들의 이해를 돕기 위해 고안된 것으로 각 행에서는 수가 무엇을 의미하는지 나타나고, 각 열은 동치 관계를 갖는 비의 순서쌍으로 이루어진다(Broekman, van der Valk, & Wijers, 2000). 우리나라 교과서에 제시된 비표의 예는 [그림 1]과 같다. 교과서에 제시된 비표는 두 비의 전항과 후항에 같은 수를 곱하거나 나누어도 비율이 변하지 않음을 확인하기 위해 사용되고 있으나 이를 학생이 탐색하여 찾아내기 보다는 교과서에 제시된 발문에 의존하여 비의 성질을 확인하는 수단으로 제한적으로 활용하고 있는 것은 아닌지 생각해볼 필요가 있다(서은미 외 2017). 비표는 수를 이용하여 두 양의 관계를 탐색하고 문제를 해결할 수 있으며 비와 비례식의 성질을 발견하는 데 유용한 모델이므로(정영옥, 2015), 학생들에게 이를 탐색하는 기회가 주어지는 것이 필요하다.


활동2 자전거로 거리가 300 m인 비탈길을 내려오는 데 120초가 걸렸습니다. 같은 빠르기로 10 m인 비탈길을 내려오는 데 걸리는 시간을 알아보시오.

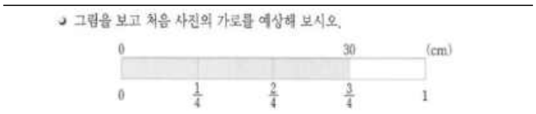
자전거로 내려온 거리의 걸린 시간에 대한 비율을 구하시오. $\frac{300}{120}\left(=\frac{5}{2}\right)$

구한 비율을 이용하여 표를 완성하시오.

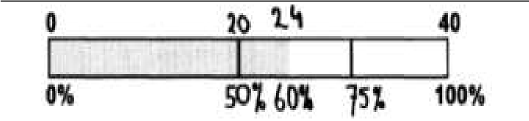
이동한 거리(m)	300	150	100	50	10
걸린 시간(초)	120	60	40	20	4

[그림 1] 비표의 예(교육부, 2018b, p. 43)
[Fig. 1] An example of ratio table

막대 모델은 서로 다른 두 양의 척도를 막대 모양의 띠에 동시에 나타낸 것이다(정영옥, 2009). 막대 모델은 [그림 2]와 같이 분할하여 학생들에게 제시할 수도 있지만 [그림 3]처럼 학생들이 서로 같은 위치에 있는 두 양이 같은 값을 나타낸다는 것을 이용하여 분할하도록 사용할 수도 있다. 또한 [그림 2]에서와 같이 막대 모델을 단순히 값을 어림해 보는 용도로만 사용할 수도 있고, [그림 3]의 경우처럼 비례 추론을 사용하여 40대의 차 중 24대의 백분율을 구하는 것과 같이 문제를 해결하는 데 적극적으로 이용할 수도 있다. 임재훈과 이형숙(2015)은 교과서에서 막대 모델을 활용하여 문제를 해결할 수 있음에도 불구하고 이를 어림의 용도로만 사용하는 것의 제한점을 언급하였다.

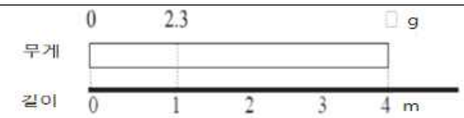


[그림 2] 막대 모델의 예(교육부, 2018a, p. 114)
[Fig. 2] An example of bar model



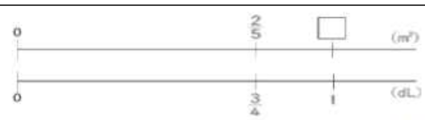
[그림 3] 막대 모델의 다른 예(van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 22)
[Fig. 3] Another example of bar model

한편 [그림 4]와 같이 띠와 수직선을 합성한 형태의 이중 척도 모델도 있다. 이는 Murata(2008)가 분석한 일본 교과서에 제시된 형태로, 띠 1개에 수직선을 구성하기도 하지만 띠 2개와 수직선을 함께 구성하기도 한다. 띠 2개와 수직선이 함께 구성된 형태에서는 각각의 띠가 같은 척도를 가진다는 특징이 있다.



[그림 4] 띠와 수직선을 합성한 형태의 예(Murata, 2008, p. 381)
[Fig. 4] An example of forms synthesizing tape diagram and number line

이중수직선의 형태는 다양하지만 장혜원 외(2018)에서는 [그림 5]와 같이 이중수직선의 특성으로 고유의 단위를 갖는 두 수직선을 위, 아래에 배치하고, 시작점은 0이 되며 끝은 열려 있는 것으로 제시하기도 하였다. 이중수직선은 각 수직선의 같은 위치에 있는 두 양을 같은 비율로 늘이거나 줄이는 활동을 통해 만들어지고, 하나의 값으로 다른 값을 알아낼 수 있으므로 비례 추론을 촉진할 수 있다(Orrill & Brown, 2012).



[그림 5] 이중수직선의 예(장혜원 외, 2018, p. 237)
[Fig. 5] An example of double number line

이중수직선에 관한 연구를 좀 더 살펴보면, 먼저 Beckmann과 Izsák(2015)은 비와 비례 관계에 대한 두 가지의 양적 관점을 제안하였는데 그 중 다중 묶음 관점(multiple-batches perspective)을 이중수직선을 활용하여 설명하였다. 다중 묶음 관점은 비 A:B를 하나의 묶음으로 보고 두 양이 공변하는 관계를 묶음의 수로 변화시키는 관점으로, Beckmann과 Izsák(2015)은 이중수직선을 이용하여 두 양의 측정 단위에 관계없이 공변 관계를 시각적인 길이를 통해 인식할 수 있기 때문에 비례 추론에 유용하다고 밝혔다.

Beckmann과 Izsák(2015)의 연구를 기반으로 한 국내 연구에서는 이중수직선이 비례 추론 문제를 해결하는 데 도움이 된다는 것을 뒷받침하고 있다. 구체적으로 임재훈과 이형숙(2015)은 초등학교 교과서의 비례식과 비례배분 단원에 제시된 실생활 문제의 각 유형이 Beckmann과 Izsák(2015)의 양적 관점에 어떻게 연결될 수 있는지를 분석하였는데 그 결과, 우리나라 교과서의 비례 추론 문제를 해결하는 데 이중수직선 모델을 활용할 수 있음을 제안하였다. 김가영(2018)과 서은미 외(2017)의 연구에서는 이중수직선을 활용하여 비례식과 비례배분 단원을 재구성하여 구현하였는데, 그 결과 이중수직선이 비례 추론과 관련된 개념을 이해하고 문제를 해결하는 데 도움이 된다는 것을 확인하였다.

비례 추론을 포함한 다양한 학습 내용에서도 이중수직선을 활용한 연구가 이루어졌는데, Küchemann 외(2011)는 8학년 학생들을 대상으로 이중수직선을 이용하여 동치분수와 백분율 등에 관한 과제를 해결하도록 하였다. 그 결과 학생들이 곱셈적으로 사고하는 데 이중수직선이 도움이 됨을 확인하였다. 하지만 문제 맥락의 곱셈적 구조를 인식하지 못한 학생들도 있었으며, 이중수직선의 분할에 어려움을 보이기도 하였다. 또한 김양권과 홍진곤(2016)은 비율과 비례배분 외에도 초등학교 3학년 학생들에게 등분제와 포함제를 지도하면서 이중수직선을 활용한 결과를 분석하였고, 이중수직선이 나눗셈의 각 맥락을 시각적으로 이해하는 데 도움이 됨을 밝혔다. 장혜원 외(2018)는 선행연구 및 외국 교과서 분석을 토대로 우리나라 초등학교 수학에서 이중수직선을 활용할 수 있는 방안을 탐색하고 이를 분수와 소수의 곱셈과 나눗셈, 비와 비율, 비례식과 비례배분에 적용한 사례를 제시하였다. 이를 바탕으로 학생들에게 이중수직선을 제시할 때는 일관된 형태를 유지할 것, 이중수직선을 적절히 활용할 수 있는 학습 내용을 추출할 것, 이중수직선에서 아래 수직선 1의 의미를 고려한 문제 맥락을 제시할 것 등을 제안하였다.

이처럼 막대 모델, 띠와 수직선을 합성한 형태, 이중 수직선은 양의 곱셈적 관계를 시각적인 길이를 통해 탐색하지만 비표는 수를 중심으로 곱셈적 관계를 살펴본다는 점에서 차이가 있으며, 우리나라 교과서에 제시된 이중 척도 모델이 제한적으로 사용되고 있다는 것을 알 수 있다. 이를 바탕으로 본 연구에서는 일본 교과서에 제시된 이중 척도 모델 중 양감을 바탕으로 곱셈적 관계를 탐구하는 띠와 수직선을 합성한 형태 및 이중수직선에 초점을 두고 이중 척도 모델의 형태와 그 변화 과정 및 활용 방법을 자세히 살펴보았다.

2. 곱셈의 배 개념 및 내포량

이중 척도 모델은 서로 다른 두 척도를 같은 곳에 배치하고, 같은 비율로 변화하므로 기본적으로 곱셈적 아이디어를 바탕으로 구성되고 변화한다(Orrill & Brown, 2012). 이에 곱셈에서 중요하게 다루어지는 배 개념과 곱셈적 관계를 탐색하는 데 핵심이 되는 내포량을 지도하기에 용이하다.

곱셈의 개념에 대한 여러 연구를 종합하면, 곱셈은 개념적으로 동수누가(반복 덧셈), 배, 순서쌍으로 구분할 수 있다(강흥규, 2009; 정영옥, 2013). 이 중 배 개념은 5×3을 5의 3배로 인식하는 것으로, 피승수가 이산량이거나 연속량이면 5×3의 결과 값도 이산량이거나 연속량이 된다(정영옥, 2013). 그러나 3은 이산량도 연속량도 아닌 피승수와 결과 값 사이의 배 관계를 나타낸다(강흥규, 2009). 강흥규(2009)는 곱셈을 동수누가로 도입하는 것이 계산 기능을 중시한 교육과정의 영향으로 강조되었지만, 배 개념이 덧셈과 구별할 수 있는 곱셈의 본질임을 강조하였다. 그는 배 개념이 곱셈에서뿐만 아니라 이후에 학습하게 되는 나눗셈, 분수, 비와 비율로 확장되는 기반이 됨을 언급하면서 배 개념을 중심으로 한 곱셈의 지도 방안을 제안하였다.

한편, 외연량(extensive quantity)은 보통 세거나 측정을 통해 얻을 수 있는 양이지만, 내포량(intensive quantity)은 두 외연량으로 만들어지고, 두 외연양 사이의 관계를 나타낸다(Schwartz, 1988). Schwartz (1988)에 따르면, 모든 양은 지시체(referent)를 가지는데, 곱셈에서 피승수, 승수, 결과 값의 지시체가 서로 다른 경우를 제시하였다. 예를 들어, 한 상자 당 구슬 5개가 있을 때 3상자에 담긴 구슬의 수를 알아보는 문제에 대해 5×3=15라는 식을 세울 수 있다. 이때, 피승수의 양의 지시체는 ‘상자 1개 당 구슬의 수’이고, 승수의 양의 지시체는 ‘상자의 수’이며, 결과 값의 양의 지시체는 ‘구슬의 수’이다. 여기서 피승수의 양의 지시체인 ‘상자 1개 당 구슬의 수’는 ‘구슬의 수’와 ‘상자의 수’라는 두 외연량 사이의 관계로 표현되므로 내포량이 된다. 이처럼 곱셈에서는 피승수, 승수, 결과 값에 대한 양의 지시체가 각각 다르지만 결국 연결되어 있고, 피승수나 승수에는 두 개의 외연량의 사이의 관계를 의미하는 내포량이 포함되므로 이를 강조할 필요가 있다(Schwartz, 1988). 이에 이지영(2018)은 곱셈을 학습하는 데 중요한 개념인 내포량이 초등학교 수학 교과서에서 어떻게 제시되어 있는지 분석하였고 그 결과 곱셈과 관련된 단원에서 내포량을 명시적이고 체계적으로 제시할 것을 제안하였다.

이와 같이 곱셈과 관련된 내용을 지도하는 데 있어 배 개념과 내포량은 중요한 역할을 한다. 이를 토대로 본 연구에서는 일본 교과서의 이중 척도 모델을 활용하는 문제 맥락에서 곱셈의 배 개념과 내포량을 어떻게 다루고 있는지도 함께 살펴보았다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구의 목적은 일본의 초등학교 수학 교과서에 이중 척도 모델이 어떻게 제시되어 있는지에 관해 분석하여 이중 척도 모델의 체계적인 활용 방안을 탐색하는 것이다. 이를 위해 일본의 6종 교과서 중에서 가장 점유율이 높아 교과서 국제 비교 연구에 많이 활용되며(이재춘, 김선유, 강홍재, 2008), 이중 척도 모델을 적극적으로 활용하고 있는 東京書籍의 新しい算數(이하 일본 교과서)를 선택하여 분석하였다(藤井齊亮 외, 2013a, b, c, d, e, f, g). 일본 교과서에 이중 척도 모델이 3학년부터 제시되므로 3학년부터 6학년까지의 모든 단원을 살펴보았으며, 주요 학습 내용을 다루는 본 차시만을 분석 대상으로 하였다.

2. 분석 방법

장혜원 외(2018)의 연구에서 동일한 일본 교과서에 대해 이중 척도 모델이 도입되는 시기, 제시 형태, 학습 내용에 대해서 간략하게 분석을 했으므로 본 연구에서는 이중 척도 모델이 일본 교과서의 어떤 학습 내용에서, 어떠한 측면을 강조하여 지도하고 있는지를 더욱 구체적으로 파악하기 위해 [표 1]과 같이 분석의 내용과 초점을 설정하였다. 먼저 이중 척도 모델이 각 학년의 어떤 단원에서 제시되며 관련된 학습 내용은 무엇인지 살펴보고, 이중 척도 모델을 제시한 목적을 도출하였다. 이중 척도 모델의 제시 형태에 관해 살펴볼 때는 '곱셈 및 나눗셈', '배'와 관련된 내용으로 구분하여 분석하는 것이 효과적일 것이라고 판단하였다. 그 이유는 곱셈과 나눗셈의 거의 모든 단원에서 '배'의 개념을 강조하여 다루고 있는데, 이 때 제시되는 이중 척도 모델의 형태가 '곱셈 및 나눗셈'에 제시되는 것과 차이가 있었기 때문이다. 또한 제시 형태와 그 변화를 구체적으로 살펴보기 위해서 띠가 어떻게 분할되고 있는지, 문제에서 주어진 양과 구하고자 하는 양(□)을 띠나 수직선에 어떻게 표시하는지, 눈금과 화살표를 어떻게 활용하는지 등을 중심으로 분석하였다.

[표 1] 일본 교과서에 제시된 이중 척도 모델에 관한 분석의 초점
[Table 1] Focus of analyzing double scale models presented in Japanese mathematics textbooks

분석 내용	분석의 초점
학습 내용	・이중 척도 모델이 제시된 단원의 학습 내용은 무엇인가?
제시 목적	・이중 척도 모델의 제시 목적은 무엇인가?
제시 형태	・이중 척도 모델의 형태 변화 과정은 어떠한가?
문제 맥락	・이중 척도 모델이 제시된 문제 맥락의 특징은 어떠한가?

이중 척도 모델이 제시된 문제의 맥락을 살펴보기 위해 Carpenter, Fennema, Franke, Levi와 Empson (1999, pp. 66-67)이 제시한 분석틀을 참고하였다([표 2] 참조). Carpenter 외(1999)는 먼저 문제에서 구하고자 하는 양이 무엇인가에 따라 곱셈 맥락, 측정 나눗셈(포함제) 맥락, 분할 나눗셈(등분제) 맥락으로 구분하고, 각각에 대해 묶기 및 분할, 비율, 가격, 곱셈적

[표 2] Carpenter 외(1999, pp. 66-67)가 제시한 문제 맥락의 분류 예시
[Table 2] Examples of problem contexts by Carpenter et al. (1999, pp. 66-67)

유형	곱셈	측정 나눗셈	분할 나눗셈
묶기 및 분할	사과나무 4그루가 있다. 각 나무에 6개의 사과가 달려있다. 사과는 모두 몇 개인가?	사과나무가 몇 그루 있다. 각 나무에 사과가 6개 달려있는데 사과의 총 개수는 24개이다. 사과나무는 몇 그루인가	사과나무가 4그루 있다. 각 나무에 같은 수의 사과가 달려 있다. 사과의 총 개수가 24개라면 각 나무에 달린 사과는 몇 개인가?
비율	1시간에 3km를 걷는다. 5시간 동안 몇 km를 걷겠는가?	1시간에 3km를 걷는다. 15km를 걸었다면 몇 시간 걸렸을까?	15km를 걷는데 5시간이 걸렸다. 1시간 동안 걸은 거리는 몇 km인가?
가격	과자 1개의 가격이 400원이라면 과자 5개의 가격은 얼마인가?	과자 1개의 가격은 400원이다. 2800원으로 사과 몇 개를 살 수 있는가?	과자 7개를 2800원에 샀다. 과자의 가격이 모두 같다면 과자 1개의 가격은 얼마인가?
곱셈적 비교	기린의 키는 캥거루 키보다 3배 더 크다. 캥거루의 키가 1m라면 기린의 키는 몇 m인가?	기린의 키는 3m이고 캥거루의 키는 1m이다. 기린의 키는 캥거루의 키의 몇 배인가?	기린의 키는 3m이고 기린의 키는 캥거루의 키보다 3배 더 크다. 캥거루의 키는 몇 m인가?

비교 맥락으로 더욱 세분화하여 분류하였다. 묶기 및 분할은 몇 개씩 몇 묶음과 같이 똑같은 집합으로 묶거나 분할하여 해결할 수 있는 문제와 관련이 있다. 비율과 가격은 1시간에 몇 km, 1개에 얼마와 같이 1의 단위에 해당하는 양(단위량)이 문제에 제시되어 이를 이용하거나, 문제의 다른 조건을 이용하여 단위량을 구해야 하는 경우이다. 곱셈적 비교는 한 양이 다른 양의 배수가 되는 상황에서 두 양을 비교하고, 한 양이 다른 양보다 몇 배나 더 큰지에 관한 조건이 문제에 제시되는 것이 특징이다. 본 연구는 이를 바탕으로 하되, 가격의 경우는 비율적인 내용을 포함하고 있으므로 비율과 가격을 같이 묶어 비율 맥락으로 분류하였다. 문제 맥락을 분류할 때는 각 단원의 본 차시에 제시된 모든 문제 맥락(총 58개)을 대상으로 하여 각각 살펴보았다. 예를 들어, '1장에 20엔인 도화지를 3장 샀습니다. 내야 할 금액은 얼마입니까?'(藤井齊亮 외, 2013a, p. 91)와 같은 문제 맥락은 곱셈이면서 비율 맥락으로 분류하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 이중 척도 모델이 제시된 학습 내용

일본 교과서 3~6학년에서 이중 척도 모델이 제시된 단원의 학습 내용을 정리하면 [표 3]과 같다. [표 3]에서 알 수 있듯이 주로 곱셈과 나눗셈 관련 단원, 또는 비율과 관련된 단원에서 이중 척도 모델을 활용하고 있었다. 학년별로 살펴보면 3학년 上권부터 4학년 上권까지는 자연수의 곱셈과 나눗셈 단원에서 이중 척도 모델을 사용하였고, 4학년 下권부터 6학년 上권까지는 소수와 분수의 곱셈과 나눗셈 단원 및 비율의 개념을 학습하는 단원에서 이중 척도 모델을 활용하였다.

이중 척도 모델이 처음으로 제시되는 단원은 3학년

[표 3] 이중 척도 모델이 제시된 단원의 학습 내용
[Table 3] Learning contents of units dealing with double scale models

학년	단원명	학습 내용
3학년 上	9. 곱셈의 필산(1)	· 몇 십, 몇 백을 곱하는 계산 문제 · (두 자리 수)×(한 자리 수), (세 자리 수)×(한 자리 수)
	10. 큰 수의 나눗셈	· (몇 십)÷(몇), (두 자리 수)÷(한 자리 수)
3학년 下	15. □를 사용한 식	· 모르는 수를 □로 두고 곱셈식 만들기
	16. 곱셈의 필산(2)	· 몇 십을 곱하는 계산 문제, 두 자리 수를 곱하는 문제
4학년 上	3. 나눗셈의 필산(1)	· 몇 십, 몇 백을 나누는 계산 문제 · (두 자리 수)÷(한 자리 수), (세 자리 수)÷(한 자리 수) · 배의 계산
4학년 下	15. 소수의 곱셈과 나눗셈	· (소수 한 자리 수)×(한 자리 자연수), (소수 두 자리 수)×(한 자리 자연수) · (소수 한 자리 수)÷(한 자리 자연수), (소수 두 자리 수)÷(한 자리 자연수) · 소수 배
5학년 上	3. 소수의 곱셈	· (몇 십)×(소수 한 자리 수), (소수 두 자리 수)×(소수 한 자리 수) · 소수 배
	4. 소수의 나눗셈	· (몇 백)÷(소수 한 자리 수), (소수 두 자리 수)÷(소수 한 자리 수) · 소수의 곱셈과 나눗셈의 관계 · 소수 배와 나눗셈
	7. 비교하는 방법(1)	· 평균, 단위량 당 크기
	8. 분수와 소수	· 분수 배
5학년 下	12. 비교하는 방법(2)	· 비율과 백분율
	14. 분수의 곱셈과 나눗셈	· (분수)×(자연수), (분수)÷(자연수)
6학년 上	3. 분수의 곱셈	· (분수)×(분수)
	4. 분수의 나눗셈	· (분수)÷(분수) · 분수 배
	8. 속력	· 속력

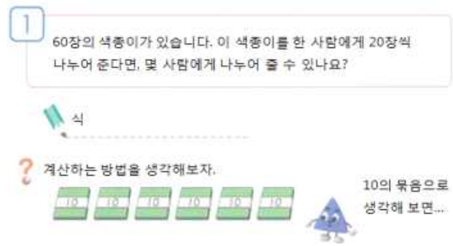
上권의 9단원 <곱셈의 필산(1)>이다. 구체적으로 살펴보면, 몇 십, 몇 백을 곱하는 계산 문제를 해결하기 위해 '1장에 20엔인 도화지를 3장 샀습니다. 내야 할 금액은 얼마입니까?'와 같은 문제 맥락을 제시한다([그림 6] 참조). 그런 다음 이중 척도 모델과 말로 된 식을 제시하고, 이 둘을 연결하여 학생들이 20×3=60의 식을 세우도록 지도한다. 식을 세운 것을 바탕으로 20×3의 값을 구하는 원리를 지도하는데 20+20+20=60이 되는 동수누가의 방법이 아닌, 2×3=6을 이용하여 6의 10배인 60을 구하는 방법을 제시한다. 즉 곱해지는 수가 10배가 되면 답도 10배가 된다는 점을 강조하면서 곱셈의 의미를 배의 개념으로 지도하고 있다. 이처럼 이중 척도 모델이 제시된 단원의 학습 내용은 문제 맥락의 제시, 이중 척도 모델과 말로 된 식을 이용하여 식 세우기, 계산 원리 탐색의 순서로 구성되어 있다.

[그림 6] 이중 척도 모델을 처음으로 활용한 내용(藤井齊亮 외, 2013a, pp. 91-92)
[Fig. 6] The first content using a double scale model

한편 경우에 따라 유사한 학습 내용임에도 불구하고, 이중 척도 모델을 반복하여 사용하기도 하고 전혀 제시하지 않기도 하였다. 예를 들어, 4학년 上권의 3단원 <나눗셈의 필산(1)>에서는 몇 십, 몇 백을 나누는 계산 문제와 (두 자리 수)÷(한 자리 수)의 문제가 제시되는데, 이는 3학년 上권의 10단원 <큰 수의 나눗셈>에서 이미 학습한 내용이다. 3학년에서 이중 척도 모델을 사용하여 간단히 학습했던 내용을 4학년에서도 동일하게 이중 척도 모델을 이용하여 반복해서 지도하고 있는 것이다. 이는 1년이 지난 시점에서 다시 나눗셈을 학습하는 학생들에게 관련 개념을 상기할 수 있는 기회를 제공하기 위한 목적으로 생각된다. 이를 통해 학생들은 나눗셈 문제에서 식을 세우는 방법을 다시 한 번 파악하고 4학년에서 본격적으로 다루는 나눗셈의 원리를 학습하는 데 도움을 받을 수 있다.

반면, 4학년 上권의 8단원에서는 <나눗셈의 필산(2)>가 제시되는데 3단원 <나눗셈의 필산(1)>과 유사한 학습 내용을 다루지만 이중 척도 모델을 사용하지 않았다. 구체적으로 살펴보면 3단원 <나눗셈의 필산(1)>에서는 앞서 언급한 바와 같이, 몇 십, 몇 백을 나누는 계산 문제, (두 자리 수)÷(한 자리 수), (세 자리 수)÷(한 자리 수)의 학습 내용을 다루는데 띠와 수직선을 합성한 형태의 이중 척도 모델과 묶음 모델을 함께 제시하였다. 8단원 <나눗셈의 필산(2)>에서는 (몇 십)÷(몇 십), (두 자리 수)÷(두 자리 수), (세 자리 수)÷(두 자리 수)의 학습 내용이 제시되는데 이중 척도 모델은 사용하지 않고 묶음 모델만을 활용하였다.

[그림 7] 분할 나눗셈 맥락에서 이중 척도 모델과 묶음 모델을 사용한 예(藤井齊亮 외, 2013c, p. 31)
[Fig. 7] An example using a double scale model and a bundle model in the context of partitive division

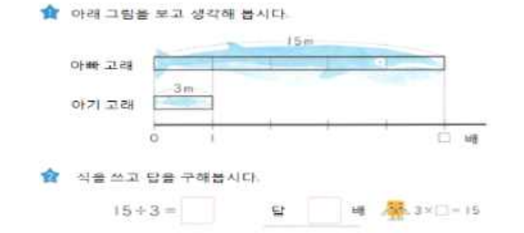


[그림 8] 측정 나눗셈 맥락에서 묶음 모델을 사용한 예(藤井齊亮 외, 2013c, p. 103)
[Fig. 8] An example using a bundle model in the context of measurement division

이는 문제 맥락의 차이에서 그 원인을 찾을 수 있었다. 예를 들어, 4학년 上권의 3단원에서는 [그림 7]과 같이 '80장의 색종이를 4명의 사람에게 똑같이 나누어 줄 때, 한 사람이 가질 수 있는 색종이의 양'을 구해야 하는 문제를 제시하였고, 8단원에서는 '60장의 색종이를 20장씩 나누어 줄 때, 나누어 줄 수 있는 사람의 수'에 관한 문제가 제시되었다([그림 8] 참조). Carpenter 외(1999)의 분석틀에 의하면 두 문제 모두 묶기 및 분할 맥락이라는 점에서는 동일하지만 전자는 분할 나눗셈 맥락이고 후자는 측정 나눗셈 맥락이라는 점에서 차이가 있다. 즉 3단원에서는 분할 나눗셈 맥락을, 8단원에서는 측정 나눗셈 맥락을 주로 다루고 있는데 8단원에서는 이중 척도 모델을 전혀 사용하지 않았다는 것이다. 이를 통해 일본 교과서에서는 이중 척도 모델을 주로 분할 나눗셈 맥락에서 사용한 것을 확인할 수 있다. 문제 맥락에 관한 내용은 관련 절에서 좀 더 상세히 살펴본다.

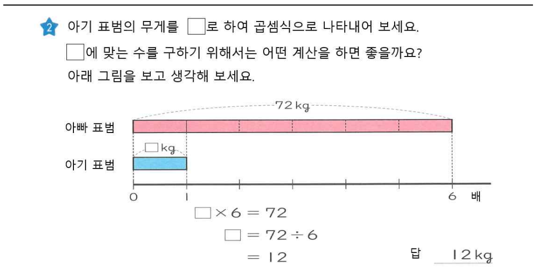
곱셈과 나눗셈을 다루는 단원은 자연수의 곱셈과 나눗셈, 소수의 곱셈과 나눗셈, 분수의 곱셈과 나눗셈의 순서로 제시되고 있다. 주요 학습 내용을 살펴보면, 동일한 수의 범위로 곱셈과 나눗셈의 학습 내용을 제시하고 있는 것을 알 수 있다([표 3] 참조). 예를 들어, 5학년 上권의 3단원 <소수의 곱셈>에서는 (몇 십)×(소수 한 자리 수), (소수 두 자리 수)×(소수 한 자리 수), (몇 십)×(소수 한 자리 수)의 순서로 학습한다. 이와 유사하게 5학년 上권의 4단원 <소수의 나눗셈>에서는 (몇 백)÷(소수 한 자리 수), (소수 두 자리 수)÷(소수 한 자리 수), (몇 백)÷(소수 한 자리 수)의 순서로 학습 내용을 제시하고 있다. 이와 같은 특징은 자연수의 곱셈과 나눗셈, 분수의 곱셈과 나눗셈에서도 살펴볼 수 있다. 이처럼 동일한 시각적 모델을 사용하여 유사한 패턴으로 학습 내용을 제시하는 것은 학생들에게 일관성 있는 경험을 제공하여, 이중 척도 모델이 필요한 문제 상황을 파악할 수 있으며, 관련 학습 내용을 좀 더 깊이 있게 숙지하도록 도울 것이다.

한 가지 더 주목할 점은 곱셈과 나눗셈을 다루는 거의 모든 단원에서 배의 개념에 관한 내용을 제시하고 있다는 것이다. 4학년 上권의 3단원 <나눗셈의 필산 (1)>에서 처음으로 관련 내용이 제시되는데 다음과 같은 세 가지 유형을 다룬다([그림 9], [그림 10], [그림 11] 참조).



[그림 9] 유형 ①: 문제에 제시된 두 양을 이용하는 경우(藤井齊亮 외, 2013c, p. 44)
[Fig. 9] The first type: Using two quantities presented in the problem

[그림 10] 유형 ②: 문제에 제시된 단위량을 이용하여 다른 양을 구하는 경우(藤井齊亮 외, 2013c, p. 45)
[Fig. 10] The second type: Finding the other quantity using the unit quantity presented in the problem



[그림 11] 유형 ③: 문제에 제시된 양을 이용하여 단위량을 구하는 경우(藤井齊亮 외, 2013c, p. 46)
[Fig. 11] The third type: Finding the unit quantity using a quantity presented in the problem

첫 번째 유형은 '아빠 고래의 길이는 15m이고 아기 고래의 길이는 3m이다. 아빠 고래의 길이는 아기 고래 길이의 몇 배인가?'처럼 두 양을 제시하고 한 양(아빠 고래의 길이)이 단위량(단위 1에 해당하는 양, 아기 고래의 길이)의 몇 배가 되는지를 묻는 문제이다. 두 번째 유형은 '아기 기린의 키는 180cm이고 아빠 기린의

키는 아기 기린의 키의 3배이다. 아빠 기린의 키는 몇 cm인가?'와 같이 단위량(아기 기린의 키)을 알 때 다른 양(아빠 기린의 키)이 얼마인지 구하는 것이다. 세 번째 유형은 '아빠 표범의 무게는 아기 표범 무게의 6배인데 72kg이다. 아기 표범의 무게는 몇 kg인가?'처럼 주어진 양(아빠 표범의 무게)을 이용하여 단위량(아기 표범의 무게)을 찾는 문제이다. 여기서는 다른 양이 단위량의 몇 배가 되는지를 파악하도록 지도하고 있으며, 수직선의 단위를 배로 제시하였다. 이 세 가지 유형은 소수와 분수의 나눗셈 단원에서도 동일하게 제시되며 몇 배에 해당하는 양이 소수이면 소수 배, 분수이면 분수 배로 범위를 확장하였다. 이처럼 배의 개념과 관련된 학습 내용을 강조한 것은 앞서 언급한 바와 같이 곱셈과 나눗셈을 배의 개념으로 지도하겠다는 의미로 판단된다. 이를 통해 학생들은 '아빠 고래의 길이는 아기 고래 길이의 3배이다.'와 같이 두 양을 곱셈적으로 비교할 수 있으며 소수와 분수를 학습한 이후에는 '아기 고래의 길이는 아빠 고래 길이의 0.2배 또는 $\frac{1}{5}$배이다.'와 같이 표현할 수도 있다. 두 양을 곱셈적으로 비교하는 것 외에도 학생들은 이중 척도 모델을 사용하여 15÷3=□, 3×□=15와 같이 곱셈과 나눗셈의 관계를 나타내는 식을 쉽게 만들 수 있다. 또한 '15(아빠 고래의 길이)에 3(아기 고래의 길이)이 5개 있다'와 같이 학습함으로써 측정 나눗셈 맥락을 이해하는데도 활용할 수 있을 것이다.

비율과 관련된 단원에서는 '배의 개념'에서 학습했던 단위량에 관해 보다 심도 깊게 다룬다. 먼저 5학년 上권의 7단원 <비교하는 방법(1)>에서는 평균을 이용하여 전체의 양을 구하며, 단위량의 크기를 비교하거나 단위량을 이용하여 전체의 양을 구하는 문제를 제시한다. 이를 통해, 학생들은 단위량 즉 단위 1에 해당하는 양(기준량)을 구하거나 이를 이용하여 전체에 해당하는 양(비교하는 양)을 구하는 것을 구체적으로 학습한다. 그런 다음 5학년 下권의 12단원 <비교하는 방법(2)>에서 처음으로 비율, 기준량, 비교하는 양이라는 용어를 명시적으로 제시한다. 눈에 띄는 점은 배의 개념을 이용하여 비교하는 양, 기준량을 학습할 때는 아래 수직선의 단위를 배로 제시하고, 비율의 개념을 정의한 다음에는 아래 수직선의 단위를 비율로 제시한 것이다. 그리고 이를 이용하여 백분율을 도입할 때는 다시 한 번 비율과 백분율의 관계를 이중 척도 모델로 확인하면서 수직선의 단위를 %와 비율로 제시하였다. 이처럼 이중 척도 모델을 이용하면 척도(단위)가 다른 두 양의 관계를 파악하는 데 용이하기 때문에 학생들이 새로운 개념을 좀 더 쉽게 이해하는 데 도움을 줄 수 있다.

2. 이중 척도 모델의 제시 목적

본 절에서는 곱셈과 나눗셈 및 비와 비율 관련 단원에서 이중 척도 모델을 어떤 목적으로 사용하는지에 관해 구체적으로 살펴본다. 장혜원 외(2018)에서 이중 척도 모델의 활용 가능성에 관해 계산 결과의 어림, 개념 및 연산 원리의 이해, 문제 상황 파악을 위한 도구로 제시한 것을 토대로 일본 교과서를 분석한 결과, [표 4]와 같이 제시 목적을 도출할 수 있었다. 학년별로 살펴보면 3~6학년 전체에서 문제 상황의 이해, 식을 세우기 위한 참조 모델로 이중 척도 모델을 활용하고 있음을 알 수 있다. 다만 3~4학년에서는 구하고자 하는 양이 얼마 정도일지 직관적으로 파악하는 정도에서 이중 척도 모델을 활용한다면, 5~6학년에서는 계산한 결과 값에 관해 보다 구체적으로 어림하는 점이 다르다. 또한 5~6학년에서는 계산 원리를 탐색하는 도구로도 이중 척도 모델을 활용하였다는 점에서 차이가 있다. 이를 통해 학년이 올라감에 따라 이중 척도 모델을 보다 적극적으로 활용하고 있다는 사실을 확인할 수 있다.

[표 4] 학년별 이중 척도 모델의 제시 목적
[Table 4] Purposes using double scale models according to the grade levels

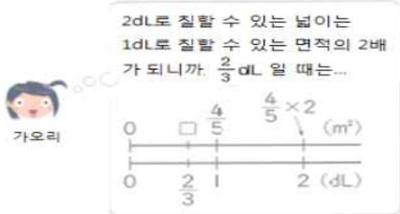
학년	제시 목적
3~4 학년	· 문제 상황의 이해, 식을 세우기 위한 참조 모델, 결과 값에 대한 직관적인 어림
5~6 학년	· 문제 상황의 이해, 식을 세우기 위한 참조 모델, 결과 값에 대한 구체적인 어림, 조작을 통한 계산 원리 탐색

이중 척도 모델의 제시 목적을 보다 자세히 살펴보면 다음과 같다. 우선 학생들이 문제 상황을 이해하고 이를 바탕으로 정확한 식을 세우기 위한 참조 모델로 제시하였다. 이중 척도 모델은 문제의 구조를 시각화

하여 보여줌으로써 학생들이 곱셈을 기반으로 한 문제 상황을 이해하는 데 도움을 준다. 예를 들어, 앞서 살펴본 [그림 7]에서는 이중 척도 모델을 제시하여 80장의 색종이를 4명의 사람에게 똑같이 나누어 줄 때, 한 사람이 가질 수 있는 색종이의 양이 얼마인지 구해야 하는 상황을 표현하였다. 이처럼 학생들은 이중 척도 모델을 통해 문제에서 주어진 양과 구해야 하는 양이 무엇인지를 정확하게 파악할 수 있다. 또한 곱셈의 문제 맥락에서는 1에 해당하는 양이 주어지고([그림 6] 참조), 나눗셈의 문제 맥락에서는 1에 해당하는 양을 구해야 하는 경우와 같이([그림 7] 참조) 학생들은 이중 척도 모델에 제시된 문제의 구조를 참조하여 어떤 연산을 사용해야 할 지 결정하고 식을 세우는 데 도움을 받는다. 이 때 학생들이 식을 세우는 데 참조할 수 있도록 이중 척도 모델과 말로 된 식을 함께 제시하기도 하였는데([그림 6], [그림 7] 참조), 이 때 말로 된 식에 표현된 '1장 당 금액' 또는 '한 사람의 색종이 수'와 같은 용어를 통해 학생들은 내포량에 대한 개념을 생각해 볼 수 있을 것이다. 경우에 따라 식을 세운 근거를 물어 학생들이 식을 올바르게 세웠는지 다시 한 번 확인할 수 있도록 한 경우도 있었다.

이중 척도 모델을 참조하여 식을 세우는 활동은 문제 만들기를 통해 다시 한 번 강조되고 있다. 문제 만들기는 5학년 上권의 4단원 <소수의 나눗셈>과 6학년 上권의 4단원 <분수의 나눗셈>에서 두 차례 제시되었다. 학생들이 직접 문제를 만드는 것은 아니고, 똑같은 문제 맥락을 이용하여 만들어진 두 가지 문제의 의미를 비교하고, 각 문제에 맞는 식을 세워보는 것으로 구성된다. 예를 들어, 5학년 上권의 4단원 <소수의 나눗셈>에서는 길이 4.5m, 무게 0.9kg의 호스를 이용하여 두 친구가 만든 문제가 제시되는데(藤井齊亮 외, 2013e, p. 53), 하나는 '호스 1m의 무게'를 구하는 것이고 다른 하나는 '호스 1kg의 길이'를 구하는 것이다. 여기에서 학생들은 이중 척도 모델을 이용하여 각 문제에서 단위량이 어느 쪽에 위치하는지를 확인하고, '0.9÷4.5'와 '4.5÷0.9'의 식을 세우는 활동을 하게 된다. 이처럼 이중 척도 모델은 학생들이 문제의 구조를 시각적으로 파악하여 정확한 식을 세울 수 있도록 돕는다.

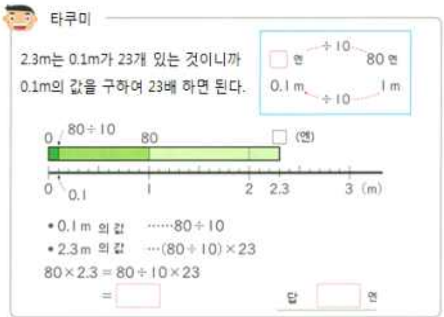
다음으로 이중 척도 모델은 양에 대한 어림을 돕는 도구, 즉 식을 계산하기 전에 결과 값이 얼마 정도 되는지 예상하는 목적으로 사용된다. 이를 좀 더 상세히 살펴본 결과, 3~4학년과 5~6학년에서 제시되는 양상에 조금 차이가 있었다. 3~4학년에서는 계산한 값이 대략 얼마 정도 될 지를 직관적으로 생각해 보는 것에 그친다면, 5~6학년에서는 좀 더 구체적으로 결과 값을 어림해 보도록 유도하였다([그림 12] 참조). 그 이유는 다음과 같이 설명될 수 있다. 3~4학년에서는 주로 자연수의 곱셈과 나눗셈을 다루기 때문에 곱셈의 경우에는 값이 커지고 나눗셈의 경우에는 값이 작아졌다. 그러나 5~6학년에서는 소수와 분수까지 수의 범위가 확장됨에 따라 곱셈을 한 값이 더 작아지는 경우도 있고, 나눗셈을 할 때에 값이 더 커지기도 하므로 학생들에게 보다 구체적으로 양에 관해 어림해 볼 수 있도록 지도할 필요가 있는 것이다(장혜원 외, 2018).



[그림 12] 결과 값을 구체적으로 어림하기 위하여 이중 척도 모델을 제시한 예(藤井齊亮 외, 2013g, p. 23)
[Fig. 12] An example of using a double scale model to estimate the result

마지막으로 계산 원리를 탐색하는 도구로 이중 척도 모델을 활용한다. 앞서 언급한 대로 이 목적은 5~6학년에서만 나타나는 특징이다. 3~4학년에서는 이중 척도 모델을 문제 상황의 이해와 식을 세우기 위한 참조 모델로 활용하고, 계산 원리를 확인할 때는 다른 시각적 모델인 배열 모델이나 묶음 모델을 사용하였다([그림 6] 참조). 반면 5~6학년에서는 문제 상황을 이해하고 식을 세우는 활동 뿐 아니라 계산 원리를 탐색할 때에도 이중 척도 모델을 활용하였다. 이에 5~6학년에서는 이중 척도 모델을 사용한 단원에서 별도의 시각적 모델을 제시하지 않았다. 이와 같은 특징은 5학년 上권의 3단원 <소수의 곱셈>에서 처음으로 발견할 수 있다. 예를 들어, '1m의 가격이 80엔인 리본을 2.3m 샀다. 얼마를 내야 할까?'의 문제에 관해 80×2.3의 식을 세운 다음, [그림 13]과 같이 이중 척도 모델을 이용하여 계산 원리를 탐색하고 있다. 여기서는 계

산하는 방법을 설명한 학생의 예를 제시하면서 말로 된 설명이 띠와 수직선의 어디에 해당하는지를 파악할 수 있도록 돕고 있다. 즉 학생의 설명과 이중 척도 모델에 제시된 표현을 비교하여 (몇 십)×(소수 한 자리 수)의 계산 원리를 이해하도록 지도하고 있는 것이다. 이는 이중 척도 모델을 문제 상황의 이해와 식을 세우기 위한 참조 모델로 활용한 것에서 나아가 계산 원리를 도출하는 데에도 사용하였다는 점에서 의미가 있다. 이처럼 학년이 올라감에 따라 이중 척도 모델을 제시하는 목적이 점진적이고 체계적으로 확대되고 있음을 확인할 수 있었다.



[그림 13] 계산 원리를 탐색하기 위해 이중 척도 모델을 제시한 예(藤井齊亮 외, 2013e, p. 33)
[Fig. 13] An example of using a double scale model to investigate a principle of computation

3. 이중 척도 모델의 제시 형태 변화

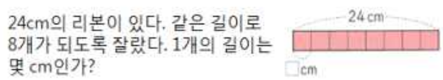
본 절에서는 이중 척도 모델의 제시 형태가 어떻게 변화하는지에 관해 면밀히 분석하였다. 이중 척도 모델의 형태는 크게 띠와 수직선을 합성한 형태, 이중수직선, 영역 모델과 수직선을 합성한 형태로 구분하여 살펴볼 수 있다. [표 5]에서 알 수 있듯이 3~4학년에서는 띠와 수직선을 합성한 형태만 제시되고, 5학년에서는 세 가지 형태가 모두 나타나며, 6학년에서는 이중수직선, 영역 모델과 수직선을 합성한 형태가 제시된다. 이처럼 학년에 따라 단계적으로 이중 척도 모델을 소개함으로써 학생들이 해당 시각적 모델을 충분히 이해할 수 있도록 돕고 있다. 여기서는 앞서 언급한 대로 '곱셈 및 나눗셈'과 '배'로 나누어 이중 척도 모델의 형태 변화 과정을 탐색하였다.

[표 5] 학년별 이중 척도 모델의 제시 형태
[Table 5] Type of double scale models presented in each grade

유형	3학년	4학년	5학년	6학년
띠와 수직선을 합성한 형태	√	√	√	-
이중수직선	-	-	√	√
영역 모델과 수직선을 합성한 형태	-	-	√	√

1) 곱셈 및 나눗셈

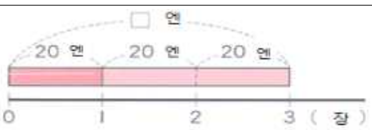
곱셈 및 나눗셈에서는 이중 척도 모델을 도입하기 전에 띠를 사용하였다. 예를 들어, 3학년 上권의 3단원 <나눗셈>에서는 곱셈구구를 활용하여 해결할 수 있는 간단한 나눗셈 문제를 [그림 14]와 같이 띠와 함께 제시하여 해결하도록 하고 있다.



[그림 14] 분할 나눗셈 맥락에서 띠를 사용한 예(藤井齊亮 외, 2013a, p. 28)
[Fig. 14] An example using tape diagram in the context of partitive division

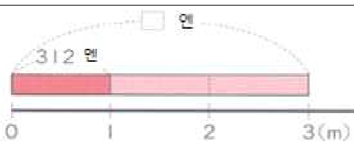
곱셈 및 나눗셈에서 제시되는 이중 척도 모델의 형태는 유사하기 때문에 나눗셈의 경우는 따로 언급하지 않고 곱셈을 중심으로 분석 결과를 제시하면 다음과 같다. 이중 척도 모델은 띠와 수직선을 합성한 형태에서 이중수직선의 형태로 변화하는데 띠와 수직선을 합성한 형태에서는 [그림 15], [그림 16], [그림 17]의 단계를 거친다. 좀 더 세부적으로 살펴보면 [그림 15]에서는 띠가 단위량으로 똑같이 분할되며 분할된 양이 얼마인지 전부 표시해준다. 이처럼 이중 척도 모델을 처음 도입하는 단계에서는 학생들의 이해를 돕기 위해서 상세하게 정보를 제공하고 있었다. [그림 16]에서는 [그림 15]에서와 달리 분할된 각 양이 얼마인지 전부 표시하지는 않고 단위량만 얼마인지 제시한 점이 다르다. 또한 [그림 16]에서 [그림 17]로 이동하면서 많은 변화가 일어나는데 호 모양의 점선이 사라지고 띠의 정확한 위치에 각 양을 표시하기 시작하였다. 이는 띠

에서 좀 더 도식화된 표현인 길이 모델로 변화하는 과정을 보여준다. 또한 단위량을 중심으로 띠를 전부 분할하지 않았다. 하지만 [그림 15], [그림 16]과 마찬가지로 단위량을 진하게 색칠하여 강조하면서 학생들이 단위 1에 해당하는 양이 얼마인지 알 수 있도록 돕고 있다. 또한 [그림 17]의 형태가 제시된 후에도 [그림 16]의 형태가 혼재해서 나타나는데 이는 형태의 변화로 인해 학생들이 겪을 수 있는 어려움을 최소화하기 위한 것으로 생각된다. 이와 같이 띠와 수직선을 합성한 형태에서 순차적으로 띠보다 기호적인 형태로 도식화되고 점차 이중수직선의 형태로 변화하는 과정을 살펴볼 수 있었다. [그림 18]의 이중수직선은 2개의 수직선을 합성한 형태로 단위량을 중심으로 분할되며 구하고자 하는 양의 정확한 위치에 □를 표시한다. 띠와 수직선을 합성한 형태와 이중수직선의 형태에서 모두 제시 목적에 따라 세부 눈금을 사용하거나 화살표를 이용하여 좀 더 명확하게 나타내고자 하는 바를 표현할 수 있다([그림 12], [그림 13] 참조). 나눗셈의 경우에도 이와 유사한 형태의 변화 과정을 거치게 되는데, 곱셈에서는 단위량을 이용하여 문제에서 요구하는 값을 구해야 하는 것과 달리 나눗셈에서는 단위 1에 해당하는 양을 구해야 하는 경우가 많기 때문에 단위량에 □가 위치한다는 점에서 차이가 있다([그림 7] 참조).



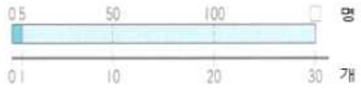
[그림 15] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ①: 곱셈(藤井齊亮 외, 2013a, p. 93)

[Fig. 15] The first type of double scale models: Multiplication



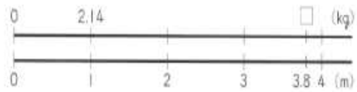
[그림 16] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ② 곱셈(藤井齊亮 외, 2013a, p. 99)

[Fig. 16] The second type of double scale models Multiplication



[그림 17] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ③: 곱셈(藤井齊亮 외, 2013b, p. 63)

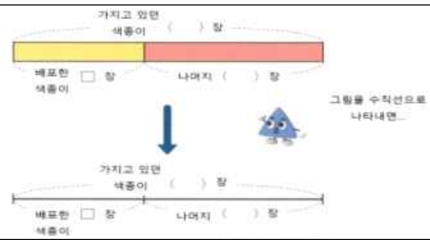
[Fig. 17] The third type of double scale models: Multiplication



[그림 18] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ④: 곱셈(藤井齊亮 외, 2013e, p. 32)

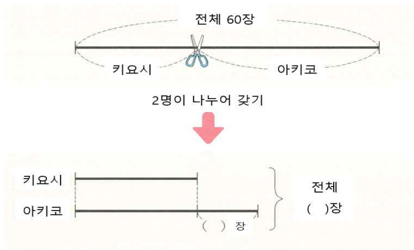
[Fig. 18] The fourth type of double scale models: Multiplication

주목할 점은 이러한 도식화 과정이 3학년 下권에서도 이미 한 차례 이루어졌다는 것이다. [그림 19]에서는 띠를 수직선의 형태로 변화하는 과정을 보여주는데, 이는 앞서 언급한 띠와 수직선을 합성한 형태가 이중수직선으로 도식화되는 과정과 연결하여 생각해 볼 수 있다. 또한 4학년 上권에서는 [그림 20]과 같이 수직선을 위, 아래로 배치하는 형태를 보여주는데 이러한 과정을 통해 학생들은 5학년에서 만나게 되는 이중수직선을 좀 더 자연스럽게 받아들일 수 있을 것이다. 이처럼 시각적 표현이 도식화되는 과정을 명시적으로 제시하는 것은 학생들이 이중 척도 모델의 형태 변화 과정을 이해하는 데 도움을 줄 수 있으리라 판단된다.



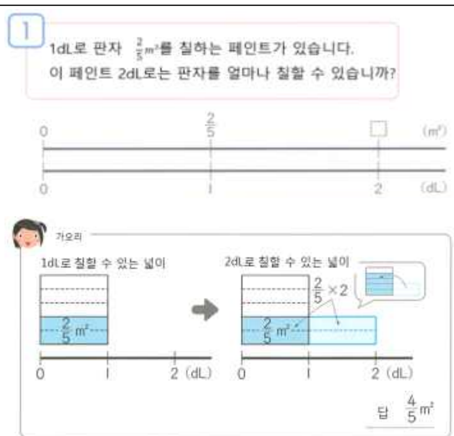
[그림 19] 시각적 표현이 도식화되는 예(藤井齊亮 외, 2013b, p. 60)

[Fig. 19] An example of changing a visual representation into a schematic diagram



[그림 20] 시각적 표현이 도식화되는 다른 예(藤井齊亮 외, 2013c, p. 74)
[Fig. 20] Another example of changing a visual representation into a schematic diagram

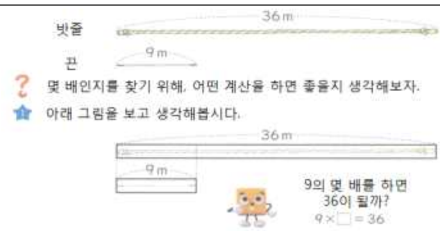
한편 영역 모델과 수직선을 합성한 형태는 분수 연산의 계산 원리를 탐색하기 위한 목적으로 사용된다. 분수의 곱셈이나 나눗셈 연산의 원리를 이해하기 위해서는 분할의 과정이 필요한데 영역 모델과 수직선을 합성한 형태를 사용하는 것이 다른 형태에 비해 보다 효과적이기 때문인 것으로 유추할 수 있다. [그림 21]과 같이 먼저 문제 상황을 파악하고 식을 세우기 위한 참조 모델로 이중수직선의 형태가 제시된 다음, 계산 원리를 탐색할 때는 영역 모델과 수직선이 합성된 형태를 사용하는 것을 볼 수 있다. 이에 따라 분수의 연산과 관련된 전 단원의 학습 내용이 이와 유사한 흐름으로 구성된 것을 살펴볼 수 있었다.



[그림 21] 영역 모델과 수직선을 합성한 형태의 예(藤井齊亮 외, 2013f, pp. 89-90)
[Fig. 21] An example of type synthesizing an area model and a number line

2) 배

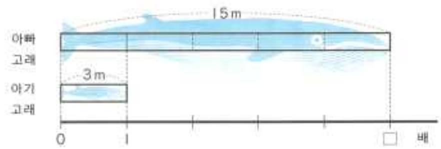
배의 개념과 관련해서는 이중 척도 모델을 도입하기 전에 [그림 22]와 같이 두 양을 비교하는 상황을 먼저 학습한다. 이 때 비교하는 두 양을 2개의 띠로 나타내는데 아래에 위치한 띠가 단위량이 된다. 이처럼 배의 개념을 학습할 때는 두 양의 관계를 보다 효과적으로 파악하기 위해 띠 2개를 위, 아래로 배치한 형태를 사용한다. 또한 띠에 구체물의 그림을 배경으로 사용하여 구체물을 띠로 도식화하는 단계를 거친다는 점이 주목할 만하다.



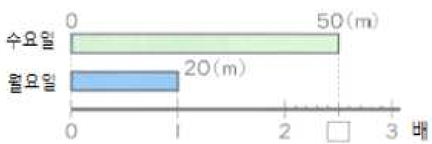
[그림 22] 띠를 2개 사용한 예(藤井齊亮 외, 2013b, p. 60)
[Fig. 22] An example of using two tape diagrams

‘곱셈 및 나눗셈’과 마찬가지로 ‘배’에서도 이중 척도 모델은 띠와 수직선을 합성한 형태에서 이중수직선의 형태로 변화되며 띠와 수직선이 합성된 형태에서는 [그림 23]부터 [그림 25]까지의 단계를 거친다. 다만 ‘곱셈 및 나눗셈’과 다른 점은 배의 관계를 더 잘 파악하도록 돕기 위해 띠를 2개 이상 사용한다는 것이다. 또한 한 양이 다른 양의 몇 배가 되는지를 구하는 문제가 대부분이기 때문에 □가 아래 수직선에 위치하는 경우가 많았다. [그림 23]에서는 [그림 22]와 마찬가지로 구체물에서 띠로 도식화하는 단계를 한 번 더 보여준 다음, 띠에 호 모양의 점선을 사용하여 양을 표시하고 단위량과 동일한 크기로 띠를 분할하였다. 특히 수직선의 단위를 배로 제시하여 [그림 22]에 비해 좀 더 명확하게 두 양의 관계를 파악할 수 있도록 하였다. [그림 24]에서는 호 모양의 점선을 사용하지 않고 띠의 정확한 위치에 양을 표시하였으며 단위량을 기준으로 띠를 분할하지 않았다. [그림 25]는 [그림 24]의 형태에 수직선을 하나 더 추가한 것으로, 이를 통해 [그림 23], [그림24]에서는 각 띠에 표시했던 양을 수직선의 각 위치에 표현할 수 있게 되어 2개 이상의 양을

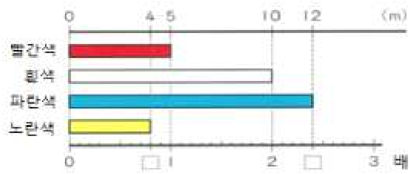
비교할 때 좀 더 용이하게 하였다. [그림 26]의 이중수직선은 [그림 25]에서 띠를 제거한 형태로 [그림 23]에서 [그림 26]까지의 단계를 거치며 이중 척도 모델이 점점 도식화된 표현으로 변화하는 것을 살펴볼 수 있다.



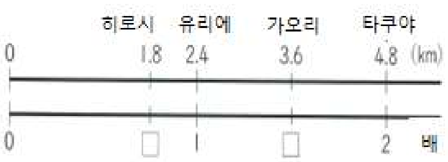
[그림 23] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ①: 배 (藤井齊亮 외, 2013c, p. 44)
[Fig. 23] The first type of double scale models: Times



[그림 24] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ②: 배 (藤井齊亮 외, 2013d, p. 89)
[Fig. 24] The second type of double scale models: Times



[그림 25] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ③: 배 (藤井齊亮 외, 2013e, p. 39)
[Fig. 25] The third type of double scale models: Times



[그림 26] 이중 척도 모델의 제시 형태 변화 과정 ④: 배 (藤井齊亮 외, 2013e, p. 54)
[Fig. 26] The fourth type of double scale models: Times

요약하면 '곱셈 및 나눗셈'과 '배'의 내용에 따라 약간의 차이는 있지만 이중 척도 모델의 형태는 띠와 수직선을 합성한 형태에서 이중수직선의 형태로 도식화된다. 또한 이러한 과정을 학생들이 좀 더 쉽게 받아들일 수 있도록 구체물에서 띠, 그리고 띠에서 수직선으로 도식화되는 과정을 교과서에 명시적으로 제시하였다.

4. 이중 척도 모델이 제시된 문제 맥락의 특징

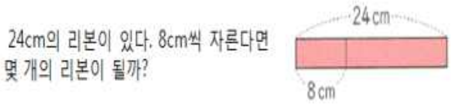
이중 척도 모델을 사용한 모든 문제 맥락을 각각의 특징에 따라 분류하면 다음 [표 6]과 같다. 먼저 곱셈 맥락, 측정 나눗셈 맥락, 분할 나눗셈 맥락을 비교하면 분할 나눗셈 맥락, 곱셈 맥락, 측정 나눗셈 맥락의 순으로 백분율이 높은 것을 살펴볼 수 있다. 다음으로 묶기 및 분할 맥락, 비율 맥락, 곱셈적 비교 맥락을 비교하면 비율 맥락, 곱셈적 비교 맥락, 묶기 및 분할 맥락의 순으로 백분율이 높았다. 이를 종합하면 곱셈 맥락과 분할 나눗셈 맥락에서는 비율 맥락의 백분율이 각각 25.86%, 31.03%로 가장 높았고, 측정 나눗셈 맥락에서는 곱셈적 비교 맥락의 백분율이 12.07%로 가장 높다는 것을 확인할 수 있었다. 이와 같이 전체적인 경향을 파악한 것을 토대로 각 맥락에 관해 좀 더 상세히 살펴보면 다음과 같다.

[표 6] 이중 척도 모델이 제시된 문제 맥락의 분류
[Table 6] Categorization of problem contexts dealing with double scale models

유형	곱셈 (%)	측정 나눗셈 (%)	분할 나눗셈 (%)	합계 (%)
묶기 및 분할	1 (1.72)	-	6 (10.34)	7 (12.6)
비율	**15 (25.86)**	3 (5.17)	**18 (31.03)**	36 (62.06)
곱셈적 비교	4 (6.90)	**7 (12.07)**	4 (6.90)	15 (25.87)
합계	20 (34.48)	10 (17.24)	28 (48.27)	58 (100)

묶기 및 분할 맥락은 똑같은 집합으로 묶거나 분할하여 해결할 수 있는 문제와 관련이 있다. 이에 이중

척도 모델보다는 배열 모델이나 묶음 모델을 활용하는 경우가 많았는데 특히 측정 나눗셈의 묶기 및 분할 맥락에서는 앞서 언급한 것과 같이 이중 척도 모델을 전혀 사용하지 않았다([그림 8] 참조). 하지만 3학년 上권의 3단원 <나눗셈>에서는 [그림 27]과 같이 띠를 이용하여 측정 나눗셈 맥락의 문제를 해결한 것을 살펴볼 수 있다. 이중 척도 모델이 도입되기 전에 띠를 사용한 것과 연관 지어 본다면, 측정 나눗셈 맥락에서도 띠와 수직선을 합성한 형태의 이중 척도 모델을 충분히 활용할 수 있음을 의미한다. 모든 맥락에서 이중 척도 모델을 활용해야 하는 것은 아니지만 측정 나눗셈 맥락에서 이중 척도 모델을 전혀 사용하지 않은 것은 일관성 측면에서 재고의 여지가 있다.



[그림 27] 측정 나눗셈 맥락에서 띠를 사용한 예(藤井齊亮 외, 2013a, p. 32)
[Fig. 27] An example using tape diagram in the context of measurement division

한편 비율 맥락은 단위량, 즉 단위 1에 해당하는 양을 이용하여 곱셈을 하거나 단위 1에 해당하는 양을 구하기 위해서 나눗셈을 하는 경우를 다룬다([표 2] 참조). 이중 척도 모델은 단위 1에 해당하는 양을 지속적으로 강조하여 표시하고 있기 때문에 이러한 맥락을 보여주는 데 매우 효율적인 시각적 모델이다. 따라서 이중 척도 모델이 제시된 문제 맥락에서 비율 맥락이 가장 높은 백분율을 차지한 것은 당연한 결과라 볼 수 있다. 특히 나눗셈과 관련해서는 단위 1에 해당하는 양을 구해야 하는 분할 나눗셈 맥락에서 주로 사용되었는데, 측정 나눗셈 맥락에서 사용된 예를 살펴보면 다음과 같다. '태풍은 시속 25km(1시간에 25 km)로 이동한다. 400km 떨어진 곳까지 이동하는 데 걸리는 시간은 얼마인가?(藤井齊亮 외, 2013g, p. 88)'와 같이 문제에서 주어진 양에 단위 1에 해당하는 양이 몇 번(몇 시간) 들어 있는지를 구하도록 하고 있다. 그런데 측정 나눗셈의 비율 맥락에서는 이중 척도 모델의 형태를 이중수직선만 제시하였다. 이는 앞서 언급한 바와 같이 일본 교과서의 측정 나눗셈 맥락에서 이중 척도 모델이 체계적으로 제시되지 않고 있다는 것을 시사한다. 다른 문제 맥락에서 이중 척도 모델의 형태가 띠와 수직선을 합성한 것에서 이중수직선으로 도식화되는 것과 마찬가지로 측정 나눗셈 맥락에서도 이중 척도 모델의 형태를 단계적으로 제시하여 학생들의 이해를 도울 필요가 있다.

[표 2]에서 제시한 바와 같이 곱셈적 비교 맥락은 배의 개념을 다루는 학습 내용과 관련이 있다. [표 2]의 예시에서 캥거루의 키를 단위 1에 해당하는 양이라고 본다면, 곱셈적 비교의 곱셈 맥락은 '기린의 키는 캥거루 키보다 3배 더 크다. 캥거루의 키가 1m라면 기린의 키는 몇 m인가?'와 같이 단위량(캥거루의 키)을 이용하여 다른 양(기린의 키)을 구하는 경우를 말한다. 곱셈적 비교의 측정 나눗셈 맥락은 '기린의 키는 3m이고 캥거루의 키는 1m이다. 기린의 키는 캥거루의 키의 몇 배인가?'와 같이 문제에서 두 양이 모두 제시되었을 때 한 양(기린의 키)이 단위량(캥거루의 키)의 몇 배가 되는지를 구하는 경우이다. 곱셈적 비교의 분할 나눗셈 맥락은 '기린의 키는 3m이고 기린의 키는 캥거루의 키보다 3배 더 크다. 캥거루의 키는 몇 m인가?'처럼 문제에서 주어진 양(기린의 키)을 이용하여 단위량(캥거루의 키)을 구하는 경우를 말한다. 이는 앞서 배의 개념과 관련하여 언급한 세 가지 유형과 각각 대응된다. 구체적으로 곱셈의 곱셈적 비교 맥락은 유형 2와 관련되며([그림 10] 참조), 측정 나눗셈의 곱셈적 비교 맥락은 유형 1에 해당되고([그림 9] 참조), 분할 나눗셈의 곱셈적 비교 맥락은 유형 3과 관계가 있다([그림 11] 참조). 이와 같이 곱셈적 비교 맥락에서는 두 양의 관계를 배의 개념과 관련하여 학습하기 때문에 띠가 2개 있는 이중 척도 모델을 사용하였다. 이는 문제 맥락에 따라 이중 척도 모델의 형태에 변화를 줄 수 있다는 점을 시사하며, 본 연구에서 배의 개념과 관련된 이중 척도 모델의 형태 변화 과정을 따로 분석한 이유와 일맥상통한다.

곱셈적 비교 맥락에서 발견할 수 있는 또 한 가지의 특징은 다른 문제 맥락에 비해 측정 나눗셈 맥락에서 이중 척도 모델을 많이 사용한 것이다. 일본 교과서에서는 곱셈과 나눗셈을 배의 개념으로 지도하고 있기 때문에 이를 강조하기 위해 두 양이 모두 제시되었을 때, 한 양이 단위량의 몇 배가 되는지를 구하는 곱셈적 비교의 측정 나눗셈 맥락(유형 1)의 문제를 많이

활용한 것으로 판단된다.

Ⅴ. 결론 및 시사점

본 연구에서는 이중 척도 모델을 중심으로 일본의 초등학교 수학 교과서를 살펴보았다. 특히 이중 척도 모델이 제시된 단원의 학습 내용, 제시 목적, 형태의 변화 과정 및 문제 맥락의 특징에 관해 상세히 분석함으로써 이중 척도 모델이 어떻게 활용되고 있는지를 이해할 수 있는 자료를 제공하고자 하였다. 이와 같은 연구 결과를 토대로 주된 결론과 이중 척도 모델의 효과적인 활용 방안에 대해 논의하면 다음과 같다.

첫째, 이중 척도 모델은 곱셈과 관련된 학습 내용에서 적극적으로 활용할 수 있는 시각적 모델이다. 앞서 분석한 바와 같이 이중 척도 모델은 곱셈과 나눗셈 단원 및 비율 관련 단원에서 주로 제시되었다. 특히 곱셈과 나눗셈 단원에서는 배의 개념을 강조하여 다루면서 이중 척도 모델을 사용한 것을 살펴볼 수 있었다. 이는 배의 개념이 곱셈의 본질이므로 이를 강조하여 지도할 필요가 있다는 강흥규(2009)의 연구와 연결되며, 이중 척도 모델은 배의 개념을 토대로 곱셈 지도의 활용 방안을 마련하는 데 도움이 될 수 있다. 또한 이중 척도 모델을 활용한 각 단원에서 학습 내용의 순서를 유사하게 제시한 것은 학생들이 관련 개념을 연결하여 학습할 수 있다는 점에서 의의가 있다. 이처럼 이중 척도 모델은 곱셈과 나눗셈, 비와 비율과 같이 관련된 내용을 학습하는 데 유용한 모델이라는 점을 다시 한 번 확인할 수 있었다. 이에 곱셈과 나눗셈, 비율과 관련된 단원에서는 학생들이 이러한 내용을 연결할 수 있도록 이중 척도 모델과 같이 효과적인 시각적 모델을 지속적으로 제시하여 지도할 필요가 있다.

둘째, 이중 척도 모델의 제시 목적이 학년에 따라 점진적으로 확대되는 양상을 확인할 수 있었다. 장혜원 외(2018)에서는 이중수직선을 계산 결과의 어림, 개념 및 연산 원리의 이해, 문제 상황 파악을 위한 도구로 활용할 것을 제안하였는데, 본 연구에서는 이를 학년에 따라 살펴보았을 때 차이가 있음을 확인할 수 있었다. 3~4학년에서는 이중 척도 모델을 문제 상황 파악을 위한 도구 및 식을 세우기 위한 참조 모델로 활용하고, 대략적인 어림을 알아보는 데 활용하였다. 그러나 5~6학년에서는 이에 덧붙여 어림을 더욱 구체적인 방법으로 할 수 있는 전략을 활용하고, 계산 원리를 탐색하는 데 이중 척도 모델을 활용하기도 하였다는 점에서 차이가 있었다. 특히 일본 교과서에서는 이중 척도 모델이 주로 문제 상황을 식으로 표현하는 데 유용한 도구로 활용되고 있었다. 학생들은 이중 척도 모델에 제시된 정보를 참조하여 어떤 연산을 사용할지를 결정하고 식을 세우는 데 도움을 받을 수 있다. 싱가포르의 초등학교 수학 교과서에 제시되는 모델 메소드도 문제 상황을 직사각형 모델로 표현함으로써 학생들이 식을 세우는 데 도움을 주지만(방정숙, 김은경, 2017), 이중 척도 모델은 곱셈적 사고와 관련된 학습 내용을 시각화하여 보여준다는 점에서 차이가 있다. 또한 이중 척도 모델과 함께 말로 된 식을 함께 제시하여 '1장 당 금액' 또는 '한 사람 당 색종이 수'와 같은 용어를 통해 학생들은 내포량에 대한 개념을 생각해 볼 수 있도록 한 점이 주목할 만하다. 이는 이지영(2018)의 연구에서 내포량을 다루는 구체적인 방안이 필요함을 제안한 것과 관련하여 이중 척도 모델로 두 양 사이의 관계를 탐색하고 식을 쓸 때 내포량을 명시적으로 경험하도록 하는 것이 하나의 방안이 될 수 있을 것이다.

셋째, 시각적 모델의 형태를 변화시킬 때는 점진적이고 단계적으로 제시할 필요가 있으며, 목적에 따라 모델의 형태에 변화를 주어 사용할 수도 있다. 앞서 언급한 바와 같이 이중 척도 모델은 띠와 수직선을 합성한 형태에서 이중수직선의 형태로 단계적으로 도식화되었다. 이와 더불어 구체물에서 띠로, 띠에서 수직선의 형태로 변화하는 과정을 명시적으로 제시하여 학생들이 이러한 과정을 자연스럽게 받아들일 수 있도록 도왔다. 이러한 단계적이고 체계적인 접근은 모델 메소드에서도 찾아볼 수 있는데, 싱가포르의 초등학교 수학 교과서에서는 연결 큐브와 같은 구체물에서 직사각형 모델로 변화하는 단계를 직접적으로 보여줌으로써 학생들의 이해를 돕고 있다(방정숙, 김은경, 2017). 이처럼 시각적 모델의 제시 형태를 체계적으로 단계화하여 보여주는 것은 학생들의 혼란과 어려움을 최소화할 수 있다는 점에서 의미가 있다.

한편, 제시 목적에 따라 이중 척도 모델의 형태에 변화를 줄 수도 있다. 계산 원리를 탐색하는 도구로 활용할 때는 영역 모델과 수직선을 합성한 형태를 사

용하기도 하였으며, 배의 개념과 관련하여 지도할 때는 띠 2개를 이용하여 띠와 수직선을 합성한 형태에 변화를 주기도 하였다. 이와 같이 이중 척도 모델은 고정된 형태가 아니라 학생들의 이해를 위해서 유연하게 변형하여 사용할 수 있음을 확인할 수 있었다.

넷째, 이중 척도 모델은 비율 맥락과 곱셈적 비교 맥락에서 활용하기에 적합한 시각적 모델이다. 이중 척도 모델이 사용된 문제 맥락을 살펴본 결과, 곱셈과 분할 나눗셈 맥락에서는 주로 비율 맥락에서, 측정 나눗셈 맥락의 경우는 주로 곱셈적 비교 맥락에서 사용한 것을 확인할 수 있었다. 이는 이중 척도 모델이 특정한 문제 맥락을 표현하는 데 효과적으로 활용될 수 있음을 의미한다. 이와 관련하여 장혜원 외(2018)에서는 일본, 대만, 싱가포르 교과서에 제시된 이중수직선을 분석하여 나눗셈의 등분제 맥락에서만 사용할 수 있다고 언급하였으나 일본 교과서에서는 측정 나눗셈 맥락에서 이중 척도 모델이 활용된 몇 가지 예를 살펴볼 수 있었다. 다만 측정 나눗셈의 묶기 및 분할 맥락에서는 이중 척도 모델을 전혀 제시하지 않거나, 측정 나눗셈의 비율 맥락에서는 이중수직선의 형태만 제시하는 등 일관성의 측면에서 재고의 여지가 있었다. 한편 배의 개념을 지도하는 학습 내용에서는 띠 2개를 사용하여 두 양을 곱셈적으로 비교하면서 측정 나눗셈 맥락을 설명하기도 하였다. 이처럼 이중 척도 모델은 측정 나눗셈 맥락에서도 충분히 활용 가능하기 때문에 좀 더 체계적이고 단계적으로 제시할 필요가 있다.

본 연구는 일본의 초등학교 수학 교과서에 이중 척도 모델이 제시된 양상을 분석한 것을 바탕으로 이중 척도 모델의 효과적인 활용 방안에 관해 논의하였다. 이에 본 연구 결과가 부족하나마 우리나라 초등학교 수학 교과서에서 곱셈과 관련된 학습 내용에 활용될 수 있는 시각적 모델을 체계적으로 개발하는 데 도움이 될 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

강홍규(2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안. 학교수학, 11(1), 17-37.

Kang, H. K. (2009). An alternative program for the teaching of multiplication concept based on times idea. *School Mathematics,* 17-37.

교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8].

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education #2015-74 [Separate volume 8].

교육부(2018a). 수학 6-1. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018a). *Korean national elementary mathematics 6-1.* Seoul: Chunjae Education.

교육부(2018b). 수학 6-2. 서울: 천재교육.

Ministry of Education (2018b). *Korean national elementary mathematics 6-2.* Seoul: Chunjae Education.

김가영(2018). 두 가지 비례 관점에 입각한 초등학교 6학년 수업 개발 및 실행 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

Kim, K. Y. (2018). *A participatory action research on 6th grade mathematics class based on two perspectives of proportional relationships.* Master's thesis of Korea National University of Education.

김양권, 홍진곤(2016). 수 개념 학습에서 수직선의 도입과 활용. 한국초등수학교육학회지, 20(3), 431-456.

Kim, Y. G., & Hong, J. K (2016). The introduction and the use of number line on the learning of number concept. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 20*(3), 431-456.

방정숙, 김은경(2017). 싱가포르의 초등학교 수학 교과서 분석: 모델 메소드(model method)를 중심으로. 초등수학교육, 20(3), 205-224.

Pang, J. S., & Kim, E. K. (2017). An analysis of the elementary mathematics textbooks in Singapore: Focused on the Model Method. *Education of Primary School Mathematics, 20*(3), 205-224.

서은미, 방정숙, 이지영(2017). 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석. 수학교육학연구, 27(4), 791-810.

Seo, E. M., Pang, J. S., & Lee, J. Y. (2017). An analysis of lessons to teach proportional reasoning with visual models: Focused on ratio table, double number line, and double tape diagram. *Journal of Educational Research in Mathematics, 27*(4), 791-810.

이재춘, 김선유, 강홍재(2008). 한국과 일본의 초등학교 수학교과서 비교 연구: 4학년을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 13(1), 1-15.

Lee, J. C., Kim, S. Y., & Kang, H. J. (2008). A comparative study of elementary school mathematics textbooks between Korea and Japan: Focused on the

4th grade. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea, 13*(1), 1-15.

이지영(2018). 초등학교 수학에서 다루는 곱셈적 구조에서 내포량에 대한 고찰. 학습자중심교과교육연구, 18(18), 725-748.

Lee, J. Y. (2018). A study on intensive quantities related to multiplicative structure in elementary school mathematics. *Journal of Learner-Centered Curriculum and Instruction, 18*(18), 725-748.

임재훈, 이형숙(2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여. 수학교육학연구, 25(2), 189-206.

Yim, J. H., & Lee, H. S. (2015). Visual representations for improving proportional reasoning in solving word problems. *Journal of Educational Research in Mathematics, 25*(2), 189-206.

장혜원, 임미인, 유미경, 박혜민, 김주숙, 이화영(2018). 초등학교 수학 지도를 위한 이중수직선의 활용 방안 탐색. 학교수학, 20(1), 227-249.

Chang, H. W., Lim, M. I., Yu, M. G., Park, H. M., Kim, J. S., & Lee, H. Y. (2018). The application of double number line in elementary school mathematics education. *School Mathematics 20*(1), 227-249.

정영옥(2009). 수학 교수-학습에서 생성 모델의 역할: 비와 비율 지도를 중심으로. 경인교육대학교 교육논총, 29, 17-40.

Chong, Y. O. (2009). The roles of emergent models in mathematics instruction: Focused on the teaching of rate and ratios. *The Journal of Education at Gyeongin National University of Education, 29*, 17-40.

정영옥(2013). 초등수학에서 자연수 곱셈 지도: 곱셈의 도입과 곱셈 구구를 중심으로. 학교수학, 15(4), 889-920.

Chong, Y. O. (2013). Teaching multiplication with whole numbers in elementary school mathematics: Focusing on the introduction of the concept of multiplication and multiplication facts. *School Mathematics, 15*(4), 889-920.

정영옥(2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. 수학교육학연구, 25(1), 21-58.

Chong, Y. O. (2015). Teaching proportional reasoning in elementary school mathematics. *Journal of Educational Research in Mathematics, 25*(1), 21-58.

藤井齊亮 외 41명(2013a). 新しい算數 3上. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 외 41명(2013b). 新しい算數 3下. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 외 41명(2013c). 新しい算數 4上. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 외 41명(2013d). 新しい算數 4下. 東京: 東京書籍

藤井齊亮 외 41명(2013e). 新しい算數 5上. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 외 41명(2013f). 新しい算數 5下. 東京: 東京書籍.

藤井齊亮 외 41명(2013g). 新しい算數 6上. 東京: 東京書籍.

Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 17-38.

Broekman, H., van der Valk, T., & Wijers, M. (2000). Teacher knowledge needed to teach ratio and proportion in secondary school mathematics: On using the ratio table. *Paper presented to the 25th ATEE Conference*, Barcelona, Spain.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann. 김수환, 박영희, 백선수, 이경화, 한대희 공역(2006). 어떻게 수학을 배우지? 서울: 경문사.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics.* Retrieved from http://www.corestandard.org/Math.

Küchemann, D., Hodgen, J., & Brown, M. (2011). Using the double number line to model multiplication. *Paper presented at Seventh Annual Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszow, Poland.

Murata, A. (2008). Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams. *Mathematical Thinking and*

Learning, *10*(4), 374-406.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Orrill, C. H., & Brown, R. E. (2012). Making sense of double number lines in professional development: Exploring teachers' understandings of proportional relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *15*(5), 381-403.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp.41-52). Reston, VA: Erlbaum.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9-35.

An Analysis of Double Scale Models in the Japanese Elementary Mathematics Textbooks

Seo, EunMi
Graduate School at Korea National University of Education
Cheongju, Chungbuk 28173, Korea
E-mail : edmos83@gmail.com

Cho, SeonMi
Graduate School at Korea National University of Education
Cheongju, Chungbuk 28173, Korea
E-mail : halifax01@naver.com

Pang, JeongSuk†
Korea National University of Education
Cheongju, Chungbuk 28173, Korea
E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

Previous studies on double scale models, visual models with two different scales (Chong, 2015), have focused on double number line and little research has been conducted on how to employ double scale models in the elementary mathematics textbooks series. Given this, we analyzed the characteristics of double scale models in the Japanese elementary mathematics textbooks in the following aspects: (a) the contents of units where double scale models were used; (b) the purposes of using such models; (c) the types of such models tailored to the contents and grade levels; and (d) the characteristics of problem contexts dealing with the models. The results of this study showed that double scale models were effectively used to connect the contents related to multiplication, specifically for the contexts of ratio. Such models were addressed for students in a systematic and gradual way as the grade levels went up. Based on these results, this paper describes implications on how to use double scale models in mathematics textbooks.

* ZDM Classification : U22
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20
* Key Words : visual model, double scale model, double number line, textbook analysis
† Corresponding Author