

대칭 조건을 갖는 2-자유절점 공간 트러스의 평형점과 안정성

Equilibrium Point and Stability of Double-Free-Nodes Space Truss Under Symmetric Condition

하 준 홍*
Ha, Junhong

손 수 덕**
Shon, Sudeok

이 승 재***
Lee, Seungjae

황 경 주****
Hwang, Kyung-Ju

Abstract

A stadium roof that uses the pin-jointed spatial truss system has to be designed by taking into account the unstable phenomenon due to the geometrical non-linearity of the long span. This phenomenon is mainly studied in the single-free-node model (SFN) or double-free-node model (DFN). Unlike the simple SFN model, the more complex DFN model has a higher order of characteristic equations, making analysis of the system's stability complicated. However, various symmetric conditions can allow limited analysis of these problems. Thus, this research looks at the stability of the DFN model which is assumed to be symmetric in shape, and its load and equilibrium state. Its governing system is expressed by nonlinear differential equations to show the double Duffing effect. To investigate the dynamic behavior and characteristics, we normalize the system of the model in terms of space and time. The equilibrium points of the system unloaded or symmetrically loaded are calculated exactly. Furthermore, the stability of these points via the roots of the characteristic equation of a Jacobian matrix are classified.

Keywords : Space truss, Equilibrium point, Stability, Critical point, Asymptotically stable, Unstable, Symmetric condition

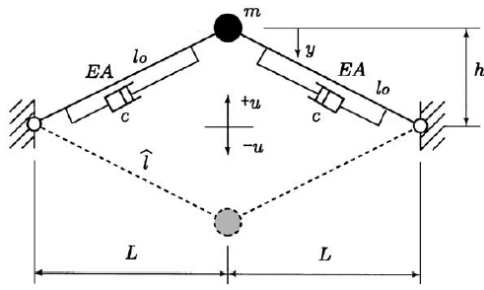
1. 서론

핀 절점의 공간 트러스는 긴 경간의 구조물에 자주 적용되는 구조 시스템으로 경량의 조건과 부재 내 힘의 흐름을 인장과 압축만으로 설명할 수 있는 장점을 가지고 있다. 여러 부재를 조합한 공간 트러스는 일체화된 셸이나 아치 구조물과 같이 외력에 잘 저항할 수 있으며, 부피에 비해 가벼워 여러 공학 분야의 설계자들이 관심을 가지고 적용한다. 그러나 구조물을 아치나 셸 형태로 설계할 때에는 불안정성과 같은 역학적 문제를 반드시 해결해야 한다¹⁾.

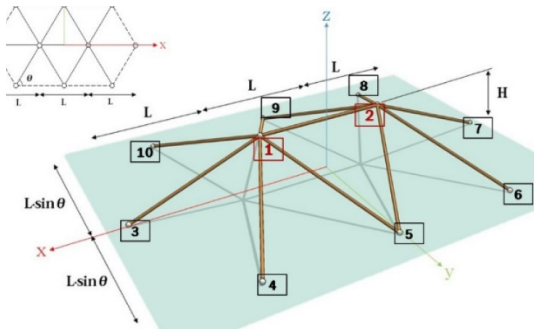
아치나 셸형 공간 트러스의 건축 구조물은 항상 비선형 특성을 가지므로 불안정 현상에 대한 외력의 안전한 범위를 찾고자 하는 경우가 많다. 불안정성에 대한 연구 결과²⁻⁵⁾는 외력에 대한 구조물의 한계를 예측할 수 있기 때문에 구조물의 한계 설정에 매우 유익하다. 불안정성은 본질적으로 시스템의 다양한 비선형성에 기인하므로 비선형 해석 방법⁶⁻⁸⁾의 해석 결과는 구조물의 설계 시 정밀도와 유효성을 담보한다. 그러나 많은 부재로 이루어진 실제 구조물은 불안정 현상을 명확하게 분류하기 어렵기 때문에 주로 단순 부재로 형성된 일반화된 모델들을 이용하여 불안정성을 해석한다.

단순 부재로 형성된 단 자유도에 대한 연구로는 <Fig. 1 (a)>와 같은 모델⁹⁾이 대표적이다. 2자유도는 여러 종류의 모델이 있으며 <Fig. 1 (b)>와 같은 셸형 트러스¹⁰⁾도 그 중 하나이다. 불안정 현상에 대해서는 평형 상태에서 평형 경로에서 나타나는 극한점과 분기점을 분석하고, 평형점과 특이점 근방의 특성 방정식을 통한 동적 안정성 연구가 진행되어

* 정희원, 한국기술교육대학교 교양학부 교수
Liberal arts, Koreatech Univ.
** 정희원, 한국기술교육대학교 건축공학과 연구교수
Dept. of Architectural Engineering, Koreatech Univ.
*** 정희원, 한국기술교육대학교 건축공학과 교수
Dept. of Architectural Engineering, Koreatech Univ.
**** 교신저자, 정희원, 서울시립대학교 건축학과 부교수
School of Architecture, University of Seoul
Tel: 02-6490-2785 Fax: 02-6490-2749
E-mail: kj.hwang@uos.ac.kr



(a) Example of Ario(2004)⁹⁾



(b) Example of Shon et al.(2015)^{8),10)}

<Fig. 1> Examples of single- and double-free-nodes space truss

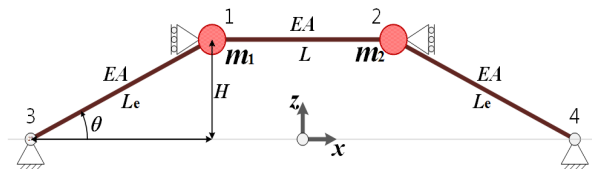
왔다. <Fig. 1 (a)>의 단 자유도 모델의 상태 방정식은 더핑 방정식(Duffing equation)으로 기술되며, 자유 진동의 안정성과 스냅(Snap) 현상이 발생하는 위상 공간 및 특이한 분기(Bifurcation) 등이 연구되고 있다⁹⁾. 2자유도 모델에서는 직접 좌굴(Direct snapping)과 간접 좌굴(Indirect snapping)에 대한 민감한 거동 특성이 주로 연구되어 왔지만¹⁰⁾, 단 자유도와 달리 차수가 높아질수록 선형화된 시스템의 행렬식과 고유치가 매우 복잡하게 나타나기 때문에 안정성에 대한 분석이 쉽지 않다. 특히 4차 이상의 특성 방정식은 일반화된 근으로 시스템의 안정성을 설명하는 것이 어려우며, 주로 평형 경로상의 특이점에 대한 많은 해석을 통해 분석적으로 구한다.

따라서 본 논문에서는 2-자유도 공간 트러스의 안정성을 분석하기 위해서 대칭 조건을 고려해 특수한 경우에 대한 평형점과 안정 임계점을 직접 구하고자 한다. 우선 지배 방정식을 무차원화 하여 표현하고 평형 상태에 대한 대칭성에 대해서 알아보도록 한다. 다음으로 대칭성에 따른 특수한 조건을 고려하여 특성 방정식을 분석하고, 안정성 조건을 토대로 안정 임계점과 불안정 구간을 유도해 파라메

타에 대한 특성을 설명하도록 한다. 논문의 구성은 2장에서 대상 모델의 상태 방정식과 무차원화 및 해석 조건을 다루고, 3장과 4장에서는 가정된 조건에 따른 시스템의 평형점과 안정성을 조사하며, 분석된 결과를 통하여 5장에서 결론을 도출한다.

2. 2-자유절점 모델의 지배 방정식

본 연구에서 다루어질 대칭 형상을 지닌 2-자유절점 공간 트러스는 <Fig. 2>와 같은 모델이다. 4개의 절점과 3개의 부재로 이루어져 있으며, \$(x, y)\$ 평면에서 \$y\$축에 대칭 형상을 가진다. 2개의 자유 절점은 2개의 고정된 경계 절점 사이에 놓이며, Shon et al. (2015)에서도 다루어진 바 있는 2-자유절점 예제¹⁰⁾에서 공간의 차수를 줄인 모델이다. 파라메타는 형상의 높이 \$H\$, 수평 부재 길이 \$L\$, 경사 부재 길이 \$L_e\$, 경사 부재 각도 \$\theta\$ (\$\tan \theta = H/L\$)이며, 세 부재의 탄성 계수와 단면적은 \$EA\$로 동일하다.



<Fig. 2> Adopted double-free-nodes space truss model

공간 트러스에 적용되는 요소의 변위와 외력의 관계는 기하학적 비선형성을 고려하여 기초 방정식을 유도하면 다음과 같다¹⁰⁾.

$$\mathbf{F} = EAL \left\{ \begin{matrix} \mathbf{TU}^T \mathbf{U} \mathbf{T}^T + (\mathbf{K}_s \mathbf{D} \mathbf{U} \mathbf{T}^T + \\ \frac{1}{2} \mathbf{U} \mathbf{T}^T \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_s \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{K}_s \end{matrix} \right\} \mathbf{D} \quad (1)$$

여기서 \$\mathbf{F}\$, \$\mathbf{D}\$는 절점에서의 힘과 변위 자유도 벡터, \$\mathbf{U} = \{N_{j,x} 0 0 : N_{i,x} 0 0\}\$, \$\mathbf{K}_s = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}\$ 이다¹⁰⁾.

식 (1)의 관계로 상태 방정식을 유도하면 식 (2)와 같고, 여기서 \$D_i\$는 절점 변위이며 수직 방향만을 고려한다.

$$F_1 = k_1 D_1 + k_2 D_1^2 + k_3 D_1^3 + k_4 D_1 D_2^2 - k_4 D_1^2 D_2 - k_5 D_2^3 \quad (2)$$

$$F_2 = k_1 D_2 + k_2 D_2^2 + k_3 D_2^3 + k_4 D_2 D_1^2 - k_4 D_2^2 D_1 - k_5 D_1^3$$

식 (2)의 계수 k_i 는 식 (3)과 같다.

$$k_1 = \frac{2\kappa EA}{H\alpha^3}, k_2 = \frac{3\kappa EA}{H^2\alpha^3} \quad (3)$$

$$k_3 = \frac{1+\alpha^3}{\alpha^3}k_5, k_4 = 3k_5, k_5 = \frac{\kappa EA}{H^3}$$

여기서 $\alpha = \cos^{-1} \theta$ 이다.

절점의 상대적인 수직 변위 $D_i(t)$ 를 원점에서의 절대 변위 $d_i(t) = H + D_i(t)$ 로 치환하고 운동 방정식에 적용하면 식 (4)와 같다.

$$\ddot{d}_1 + \gamma \dot{d}_1 + k_1^* d_1 + k_3^* d_1^3 + k_4^* d_1 d_2^2 - k_4^* d_1^2 d_2 - k_5^* d_2^3 = \Lambda_1 \quad (4)$$

$$\ddot{d}_2 + \gamma \dot{d}_2 + k_1^* d_2 + k_3^* d_2^3 + k_4^* d_2 d_1^2 - k_4^* d_2^2 d_1 - k_5^* d_1^3 = \Lambda_2$$

식 (4)의 계수 k_i 를 ω_0 를 이용하여 식 (5)와 같이 표현할 수 있다.

$$k_1^* = \frac{2\kappa\omega_0^2}{H\alpha^3}, k_2^* = \frac{1+\alpha^3}{\alpha^3}k_5^*, \quad (5)$$

$$k_4^* = 3k_5^*, k_5^* = \frac{2\kappa\omega_0^2}{H^3}$$

여기서 $\gamma = c_0/m$, $\omega_0^2 = EA/m$, $\Lambda_i = F_i/m$ 이며 절점 질량은 $m(=m_1=m_2)$ 으로 대칭이다. H 와 $t_0(=2\pi/\omega_0)$ 로 시간과 공간에 대해 변위 (u, v) 를 무차원화($u = d_1/H$)하면 식 (6)과 같다.

$$\ddot{u} + \gamma^* \dot{u} + \kappa^* (2\pi)^2 f = \Lambda_1^* \quad (6)$$

$$\ddot{v} + \gamma^* \dot{v} + \kappa^* (2\pi)^2 g = \Lambda_2^*$$

여기서 $\gamma^* = \gamma t_0$, $\kappa^* = \kappa/H$, $\Lambda_i^* = \Lambda_i t_0^2/H$ 이고, 함수 $f(u, v)$ 와 $g(u, v)$ 는 식 (7)과 같다.

$$f = -\frac{1}{\alpha^3}u + \frac{1+\alpha^3}{\alpha^3}u^3 + 3uv^2 - 3u^2v - v^3 \quad (7)$$

$$g = -\frac{1}{\alpha^3}v + \frac{1+\alpha^3}{\alpha^3}v^3 + 3vu^2 - 3v^2u - u^3$$

여기서 무차원화 방정식인 식 (7)의 계수들은 형상에 대한 파라메타 α 와 상수로 나타난다.

일반적으로 동적 안정성은 $\dot{u} = \dot{v} = 0$ 일 때의 식 (6)에 대해서 분석한다. 그러나 3차 연립 방정식으로 나타나는 특성 방정식 근의 속성을 분석하는 것이 쉽지 않기 때문에 본 논문에서는 앞서 언급한 대로 대칭 조건에 대한 몇 가지 특정한 상태에 대해서만 다루도록 한다. 이를 위해 채택된 대상 모델의 대칭 조건은 두 자유 절점이 초기에 동일한 위치에 있고(H) 외부 하중에 대해서도 대칭이다($\Lambda_i^* = \Lambda^*$). 평형점 (\hat{u}, \hat{v}) 에 대한 관계로 $\hat{u} = \hat{v}$ 인 경우와 $\hat{u} = -\hat{v}$ 인 경우를 살펴보도록 한다. 이러한 조건에 대해서는 다음 장에서 그 관계를 설명하도록 한다. 마지막으로 종속적인 조건 때문에 기울어진 부재의 경사각 θ 는 $0 < \theta < \pi/2$ 의 범위 내에 있어야 하지만 편의상 H 가 L 을 넘지 않는 범위 ($\pi/4$)로 국한한 형상만 다루도록 한다.

본 연구에서는 이상과 같은 대칭 조건과 해석 범위 내에서 식 (6)의 동적 안정성을 식 (8)과 같은 1계 비선형 연립 미분 방정식으로 변환하여 해석하고자 한다.

$$\dot{u}_1 = u_2 \quad (8)$$

$$\dot{u}_2 = -\{\gamma^* u_2 + \kappa^* (2\pi)^2 f(u_1, v_1)\} + \Lambda^*$$

$$\dot{v}_1 = v_2$$

$$\dot{u}_2 = -\{\gamma^* v_2 + \kappa^* (2\pi)^2 g(u_1, v_1)\} + \Lambda^*$$

3. 대칭 조건의 평형점

대상 모델의 안정성은 지배 방정식 식 (8)의 평형

해에 의존하므로 평형점의 위치에 따라 분류하도록 한다. 평형점은 다음 연립 방정식의 해이다.

$$f(u_1, v_1) = \frac{\Lambda^*}{\kappa^* (2\pi)^2} \tag{9}$$

$$g(u_1, v_1) = \frac{\Lambda^*}{\kappa^* (2\pi)^2}$$

식 (9)의 평형점 (\hat{u}_1, \hat{v}_1) 에서 함수 f 와 g 의 관계를 살펴보고, 자유 진동 상태에서 가정된 대칭 조건과 상수 외력에서 대칭 평형점의 특별한 상태만을 관찰해 보기로 한다.

3.1 $\Lambda^* = 0$ 일 때의 평형점

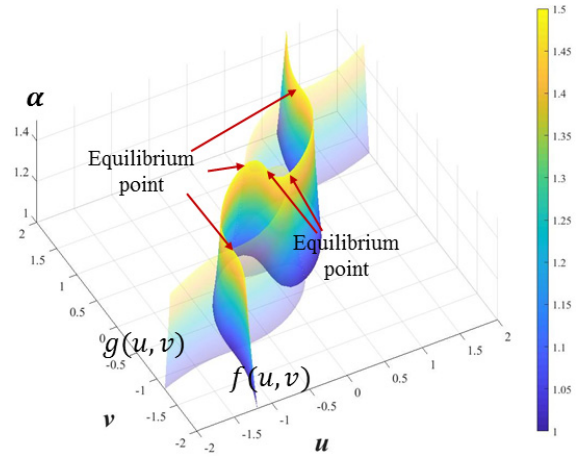
$f(u, v) = g(v, u)$ 이므로 함수 f 와 g 는 평면 $u = v$ 에 대칭이며, 평형점은 평면 $u = v$ 의 위와 법평면에 존재한다. 이때 평면 $u = v$ 위의 평형점은 불변이며, 법평면 위의 평형점은 α 에 의존하여 변한다. <Fig. 3 (a)>는 α 를 z 축으로 한 3차원 공간에서의 두 대칭 함수 그래프를 나타낸 것이다. <Fig. 3 (b)>는 α 의 값에 따른 두 대칭 함수의 2차원 등위 곡선이다.

평형점들을 구하기 위해서 연립 방정식 식 (9)의 합과 차에 각각 α^3 을 곱하면 식 (9)와 동치인 식 (10)을 얻는다.

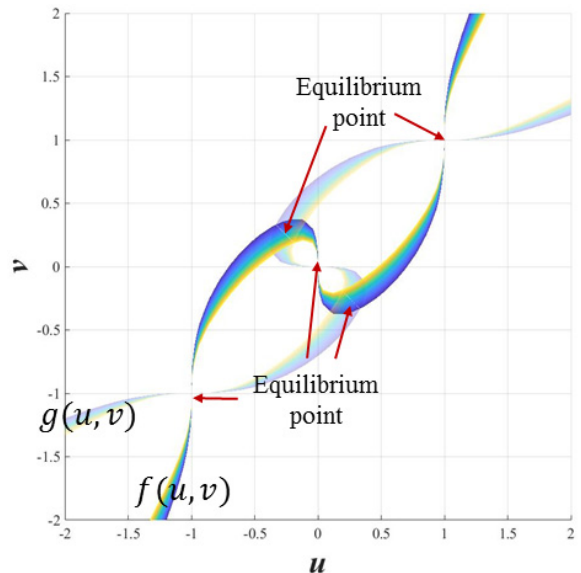
$$(u_1 + v_1)(u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 - 1) = 0 \tag{10a}$$

$$(u_1 - v_1) \left\{ \frac{u_1^2}{r_1} - r_2 u_1 v_1 + \frac{v_1^2}{r_1} - 1 \right\} = 0 \tag{10b}$$

여기서 $r_1 = (2\alpha^3 + 1)^{-1}$, $r_2 = (4\alpha^3 - 1)$ 이다. 따라서 평형점은 <Table 1>과 같이 4가지 경우를 고려해야 한다. 즉 $u_1 = v_1$ 와 $u_1 = -v_1$ 를 만족할 경우인 <Fig. 4 (a)>, $u_1 = -v_1$ 와 $u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 = 1$ 을 만족할 경우인 <Fig. 4 (b)>, $u_1 = v_1$ 와 $u_1^2/r_1 - r_2 u_1 v_1 + v_1^2/r_1 = 1$ 을 만족할 경우인 <Fig. 4 (c)>, 마지막으로 $u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 = 1$ 와 $u_1^2/r_1 - r_2 u_1 v_1 + v_1^2/r_1 = 1$ 을 만족할 경우인



(a) 3D view ($u, v \leq |2|$, $1 < \alpha < \sqrt{2}$)



(b) Equilibrium points

<Fig. 3> Graphs and contours of f and g

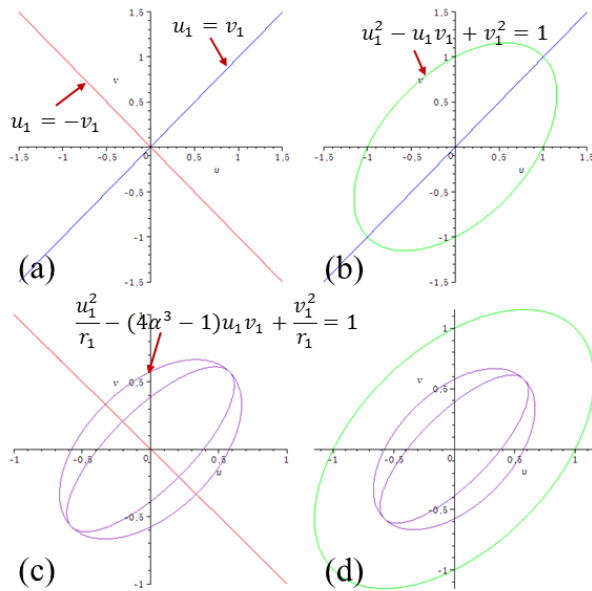
<Fig. 4 (d)>의 해이다. <Fig. 4>에서 보듯이 (a)는 $u_1 = v_1 = 0$, (d)는 값이 없으며, (b) $u_1 = v_1$ 와 (c) $u_1 = -v_1$ 의 조건을 통해서 나머지 평형점을 구할 수 있다. $u_1 = v_1$ 일 때에는 식 (10a)로부터 식 (11a)를 구할 수 있고, $u_1 = -v_1$ 일 때는 식 (10b)로부터 식 (11b)의 조건을 구할 수 있다.

$$u_1^2 - 1 = 0 \tag{11a}$$

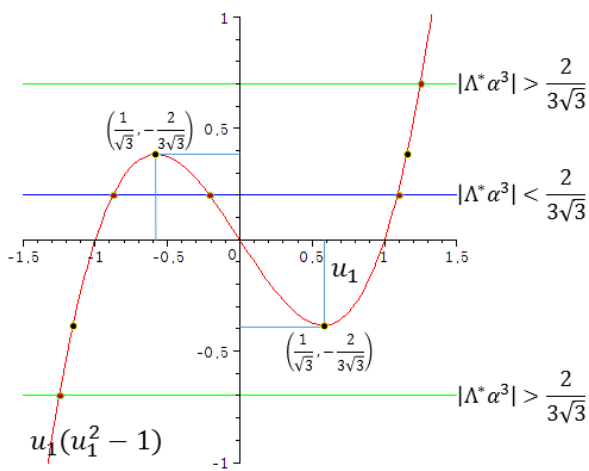
$$(8\alpha^3 + 1)u_1^2 - 1 = 0 \tag{11b}$$

<Table 1> Equilibrium points of the system

Case	Equations	Equilibrium point
1 <Fig. 4 (a)>	$u_1 = v_1$ $u_1 = -v_1$	(0,0)
2 <Fig. 4 (b)>	$u_1 = -v_1$ $u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 = 1$	$(\pm 1, \pm 1)$
3 <Fig. 4 (c)>	$u_1 = v_1$ $u_1^2/r_1 - r_2 u_1 v_1 + v_1^2/r_1 = 1$	$(\pm 1/\sqrt{8\alpha^3+1}, \mp 1/\sqrt{8\alpha^3+1})$
4 <Fig. 4 (d)>	$u_1^2 - u_1 v_1 + v_1^2 = 1$ $u_1^2/r_1 - r_2 u_1 v_1 + v_1^2/r_1 = 1$	-



<Fig. 4> Equilibrium points ($\Lambda^* = 0$)



<Fig. 5> Cases of the equilibrium point ($\Lambda^* \neq 0, u_1 = v_1$)

따라서 (\hat{u}_1, \hat{v}_1) 은 모두 5개의 평형점 $(0,0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1/\sqrt{8\alpha^3+1}, \mp 1/\sqrt{8\alpha^3+1})$ 이 존재한다. 이 중 $u_1 = -v_1$ 는 α 에 따라 변한다.

3.2 $\Lambda^* \neq 0, \hat{u} = \hat{v}$ 일 때의 평형점

식 (9)에서 $u_1 = v_1$ 의 조건을 적용하면 식 (12)를 얻는다.

$$u_1(u_1^2 - 1) = -\Lambda^* \alpha^3 \tag{12}$$

식 (12)의 왼쪽 항은 u_1 에 대한 3차 방정식이고 오른쪽 항은 상수이므로 상수의 크기에 따라 세 종류의 평형점을 얻을 수 있다. <Fig. 5>와 같이 구간 $|\Lambda^* \alpha^3| > 2/(3\sqrt{3})$ 에서는 1개의 평형점, 극점 $|\Lambda^* \alpha^3| = 2/(3\sqrt{3})$ 에서는 2개의 평형점, 그리고 구간 $|\Lambda^* \alpha^3| < 2/(3\sqrt{3})$ 에서는 3개의 평형점이 존재한다.

4. 시스템 평형점의 안정성

식 (8)에 대응하는 야코비안 행렬의 고유치를 구하여 3장에서 본 각 평형점에 대한 안정성을 설명한다. 식 (8)에 대응하는 야코비안 행렬 J 는 다음과 같다.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & -\gamma & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & d & -\gamma \end{bmatrix} \tag{13a}$$

여기서,

$$\begin{aligned} a &= -4\kappa\pi^2 \frac{\partial f}{\partial u_1}, & b &= -4\kappa\pi^2 \frac{\partial f}{\partial v_1} \\ c &= -4\kappa\pi^2 \frac{\partial g}{\partial u_1}, & d &= -4\kappa\pi^2 \frac{\partial g}{\partial v_1} \end{aligned} \tag{13b}$$

f 와 g 에 대한 편도 함수는

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_1} &= -\frac{1}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^3} u_1^2 + 3v_1^2 - 6u_1 v_1 & (14) \\ \frac{\partial f}{\partial v_1} &= \frac{\partial g}{\partial u_1} = 6u_1 v_1 - 3u_1^2 - 3v_1^2 \\ \frac{\partial g}{\partial v_1} &= -\frac{1}{\alpha^3} + \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^3} v_1^2 + 3u_1^2 - 6u_1 v_1 \end{aligned}$$

이므로 식 (13a)의 성분 중에서 $b = c$ 의 관계가 성립한다. 행렬 J 의 고유치 λ 에 대한 특성 방정식을 $\lambda(\lambda + \delta) = \xi$ 로 두면 식 (15)와 같다.

$$|J - \lambda I_4| = \xi^2 - (a + d)\xi + |J| = 0 \quad (15)$$

단, $|J|$ 은 야코비안 행렬 J 의 행렬식으로 식 (16)과 같다.

$$\begin{aligned} |J| &= ad - bc = ad - b^2 & (16) \\ &= -4\kappa\pi^2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial g}{\partial v_1} - \left(\frac{\partial f}{\partial v_1} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

고유치 λ 와 ξ 는 다음과 같다.

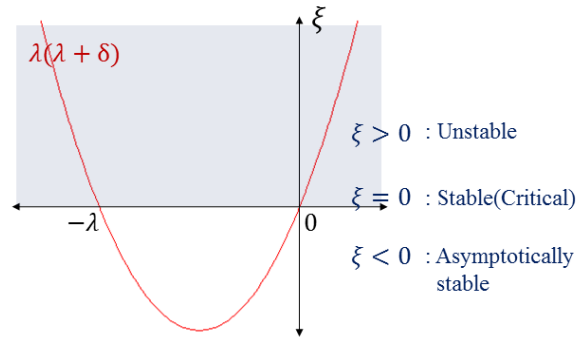
$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\xi}}{2} \quad (17)$$

$$\xi = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4|J|}}{2} \quad (18)$$

시스템의 안정성은 λ 의 실수부 $\text{Re}(\lambda)$ 의 부호에 따라 다음과 같다.

- ① $\text{Re}(\lambda) < 0$ 점근적 안정(Asymptotically stable)
- ② $\text{Re}(\lambda) = 0$ 안정(Stable or critical)
- ③ $\text{Re}(\lambda) > 0$ 불안정(Unstable)

식 (17)에서 볼 때 시스템의 안정성은 결국 γ 와 ξ 의 값에 의해 결정된다. $\gamma > 0$ 이므로 ξ 가 실수이면 안정성은 <Fig. 6>과 같다. 조건 $u_1 = v_1$ 또는 $u_1 = -v_1$ 인 경우에는 다음과 같이 ξ 가 항상 실수가 된다.



<Fig. 6> Classification by ξ

4.1 $u_1 = v_1$ 에서의 안정성

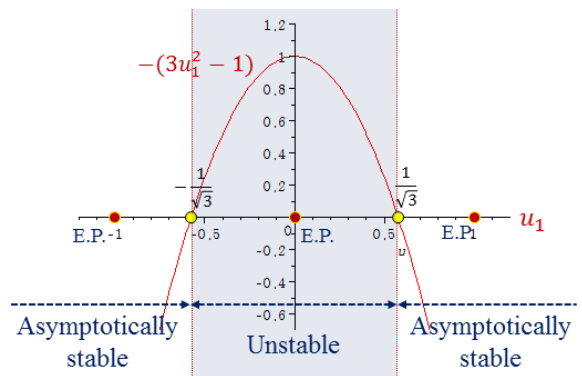
조건 $u_1 = v_1$ 에 대해서 식 (13b)의 항을 다시 구하면 식 (19)와 같은 관계를 얻는다.

$$a = d = -\frac{4\kappa\pi^2}{\alpha^3}(3u_1^2 - 1), \quad b = c = 0 \quad (19)$$

따라서 식 (18)에서 $(a + d)^2 - 4|J|$ 은 0이므로 ξ 는 항상 실수이며 식 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{(a + d)}{2} = a & (20) \\ &= -\frac{4\kappa\pi^2}{\alpha^3}(3u_1^2 - 1) \end{aligned}$$

ξ 의 부호에 의해 시스템 안정성이 정의된다. 따라서 이 조건에서는 a 의 부호에 의해서 안정성이 결정되며, <Fig. 7>에서 보는 바와 같이 u_1 에 따라 변화한다.



<Fig. 7> Stability of the system ($u_1 = v_1$)

구간 $|u_1| < 1/\sqrt{3}$ 에서는 $\text{Re}(\lambda)$ 가 음수로 불안정이 되고, $\pm 1/\sqrt{3}$ 에서는 임계 안정 상태가 된다. 구간 $|u_1| > 1/\sqrt{3}$ 는 점근적 안정 상태에 해당된다. 이는 단자유도계에서 보여지는 더핑 방정식의 결과와 동일하다.

4.2 $u_1 = -v_1$ 에서의 안정성

$u_1 = -v_1$ 에 대해서 식 (13b)를 다시 구하면 식 (21)과 같고 이것을 $h(u_1)$ 로 두자.

$$(a+d)^2 - 4|A| = \{24\kappa(2\pi)^2 u_1^2\}^2 = h(u) \quad (21)$$

위 관계식에서 $\kappa > 0$, $u_1^4 > 0$ 이므로 $h(u_1) > 0$ 이다. 따라서 ξ 는 항상 실수이다. 부호는 식 (22)의 ξ^* ($= \xi/4\kappa\pi^2$)에 의해서 결정된다.

$$\xi^* = \left\{ \frac{1}{\alpha^3} - \left(\frac{12\alpha^3 + 3}{\alpha^3} \right) u_1^2 \right\} \pm (12u^2) \quad (22)$$

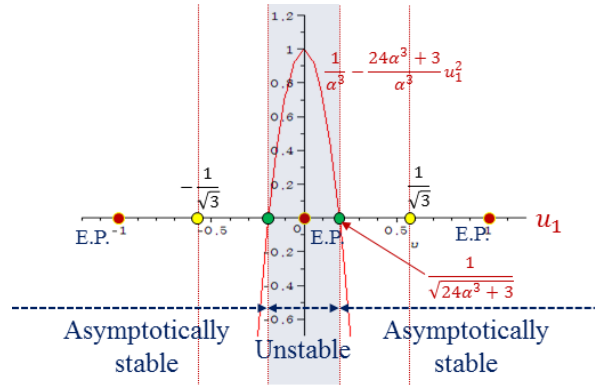
식 (22)에서 ξ 의 부호는 우변에 있는 두 항의 합과 차로 나타난다. 여기서 합은 <Fig. 7>과 동일한 경우이며, 두 항의 차는 다음의 조건으로 나타난다.

$$\xi^* = \frac{1}{\alpha^3} - \frac{24\alpha^3 + 3}{\alpha^3} u_1^2 \quad (23)$$

ξ 의 부호는 <Fig. 8>과 같이 구간 $|u_1| < 1/\sqrt{24\alpha^3 + 3}$ 는 불안정, $\pm 1/\sqrt{24\alpha^3 + 3}$ 는 안정, 구간 $|u_1| > 1/\sqrt{24\alpha^3 + 3}$ 는 점근적 안정에 해당된다. 이들은 α^3 에 따라 달라지며, $\alpha^3 > 1$ 이기 때문에 α 가 클수록 불안정 영역의 간격이 좁다.

4.3 평형점 근처에서의 안정성

3장과 4장에서 나타난 바와 같이 $\Lambda^* = 0$ 에서 평형점 (\hat{u}_1, \hat{v}_1) 는 모두 다섯이며, 각각 $(0,0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1/\sqrt{8\alpha^3 + 1}, \mp 1/\sqrt{8\alpha^3 + 1})$ 이다. 4.1절과 4.2절의 고유치 해석에 의해 분류된 안



<Fig. 8> Stability of the system ($u_1 = -v_1$)

정(stable) 영역에서는 $(0,0)$ 을 제외한 나머지 네 경우의 평형점이 점근적 안정으로 나타난다. $(\pm 1, \pm 1)$ 은 <Fig. 8>에서와 같이 $\pm 1/\sqrt{3}$ 바깥 구간에 위치한다. $(\pm 1/\sqrt{8\alpha^3 + 1}, \mp 1/\sqrt{8\alpha^3 + 1})$ 도 임계점 $\pm 1/\sqrt{24\alpha^3 + 3}$ 의 외부에 위치하고 있다.

3.2절에서 다룬 $\Lambda^* \neq 0$ 이고 $u_1 = v_1$ 인 평형점의 경우 안정성이 $|\Lambda^* \alpha^3|$ 에 따라 다르게 나타난다. 평형점이 1개인 상태는 $|u_1| > 1/\sqrt{3}$ 에 평형점이 존재하므로 점근적 안정이다. 평형점이 2개인 구간의 경우 $|u_1| = 1/\sqrt{3}$ 에서는 임계, 나머지 하나의 평형점은 점근적 안정이다. 마지막으로 3개의 평형점이 존재하는 구간에서는 $|u_1| < 1/\sqrt{3}$ 의 영역에 나타나는 평형점은 불안정, 이를 제외한 나머지 두 평형점은 점근적 안정에 해당된다.

5. 결론

본 논문에서는 2-자유절점 모델의 다양한 대칭 조건에서 평형점, 동적 안정성 및 조건에 따른 안정성을 연구하였다. 무차원화 지배 방정식을 유도하였으며 형상에 대한 파라메타 α 를 이용해 표현하였다. 대상 모델에 대한 야코비안 행렬의 고유치 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

시스템은 자유 진동에서 5개의 평형점 (\hat{u}_1, \hat{v}_1) 이 존재하며, $(0,0)$ 을 제외하고 모두 점근적 안정이다. 외력을 받는 경우 대칭 조건 $u_1 = v_1$ 에서는 외력 레벨에 따라 3가지 상태의 평형점이 존재한다. 여기

서 하나 이상의 평형점이 점근적 안정이 된다.

시스템의 불안정 구간은 야코비안 행렬의 고유치 해석에 따라 분류되며, 본 연구에서 제시된 파라메타 ξ 의 부호로 상태를 파악할 수 있다. 여기서 $u_1 = v_1$ 일 경우는 $|u_1| < 1/\sqrt{3}$ 가 불안정 구간으로 나타나며, $u_1 = -v_1$ 일 경우는 $|u_1| < 1/\sqrt{24\alpha^3 + 3}$ 으로 α^3 에 따라 변화한다.

본 연구는 특수한 경우인 $u_1 = v_1$ 와 $u_1 = -v_1$ 에 대해서만 분석하였으므로 시스템의 안정성에 대한 일반적인 정의는 아니다. 그러나 대상 조건에 대한 평형점 근방에서의 불안정, 안정 그리고 점근적 안정에 대한 구간을 판단할 수 있다. 대공간 구조물의 민감한 비선형 거동이 미소한 비대칭성에서 출발하는 경우가 많기 때문에 이외 비대칭 조건에 대한 지속적인 연구가 필요하고 판단된다.

감사의 글

본 연구는 국토교통부 도시건축연구사업의 연구비 지원(19AUDP-B100343-05)에 의해 수행되었습니다. 또한 본 논문은 2019년도 서울시립대학교 교내 학술 연구비에 의하여 지원되었습니다.

References

1. Shon, S., Hwang, K. J., & Lee, S., "Numerical evaluation of buckling behavior in space structure considering geometrical parameters with joint rigidity", Journal of Central South University, Vol.21, No.3, pp.1115~1124, 2014
2. Choong, K. K., & Hangai, Y., "Review on Methods of Bifurcation Analysis for Geometrically Nonlinear Structures", Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol.34, No.2, pp.133~149, 1993
3. Jang, A. B., & Lee, J. Y., "Chaotic Behavior of a Double Pendulum Subjected to Follower Force", Transactions of the Korean

Society for Noise and Vibration Engineering, Vol.7, No.3, pp.439~447, 1997

4. Ha, J., Gutman, S., Shon, S., & Lee, S., "Stability of shallow arches under constant load", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.58, pp.120~127, 2014
5. Pokhrel, B. P., Shon, S., Ha, J., & Lee, S., "Dynamic Stability and Semi-Analytical Taylor Solution of Arch With Symmetric Mode", Journal of Korean Association for Spatial Structures, Vol.18, No.3, pp.83~91, 2018
6. Adomian, G., & Rach, R., "Modified Adomian Polynomials", Mathematical and Computer Modelling, Vol.24, No.11, pp.39~46, 1996
7. Barrio, R., "Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs", Applied Mathematics and Computation, Vol.163, No.2, pp.525~545, 2005
8. Shon, S., Ha, J., Lee, S., & Kim, J. J., "Application of Multistage Homotopy Perturbation Method to the Nonlinear Space Truss Model", International Journal of Steel Structures, Vol.15, No.2, pp.335~346, 2015
9. Ario, I., "Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.39, No.4, pp.605~617, 2004
10. Shon, S., Lee, S., Ha, J., & Cho, C., "Semi-Analytic Solution and Stability of a Space Truss Using a High-Order Taylor Series Method", Materials, Vol.8, No.5, pp.2400~2414, 2015

- Received : September 20, 2019
- Revised : October 15, 2019
- Accepted : October 29, 2019