한국학교수학회논문집 제 22 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 22, Number 3, 329-350, September 2019
http://doi.org/10.30807/ksms.2019.22.3.008

수학적 문제해결에서 Productive Struggle(생산적인 애씀)에 관한 연구

김소민[1]

Productive struggle(생산적인 애씀)이란 쉽게 풀리지는 않지만 호기심과 과제 집착을 가져올 수 있는 도전적인 문제에 대하여 해결 전략을 궁리하며 문제의 기저를 이루는 수학적 개념의 이해와 문제해결을 향해가는 학생의 노력 과정이다. 즉, 수학적 개념을 깊게 이해하거나 문제를 해결하기 위해 끈질기게 궁리하고 스스로 해결책을 찾기 위해 노력하는 것을 의미한다. Productive struggle이 학생들의 개념이해를 바탕으로 한 수학 학습의 핵심요소로 떠오르면서, 효과적인 수학 교수를 위한 NCTM(2014)의 행동 원리 중 하나로 제시되었다. 그러나 선행연구의 대부분이 학생의 productive struggle에 집중되어 있어, 본 연구에서는 예비 수학 교사들이 비정형적 수학 문제를 해결하는 과정에서 겪는 productive struggle에 초점을 맞추었다. Polya의 문제해결 4단계를 분석틀로 사용하여 문제를 해결하는 동안 각 단계별로 예비 수학 교사가 어떤 productive struggle을 보이는지 분석하였다. 분석 결과, 새로운 유형의 문제를 접했을 때, 예비 수학 교사들의 제한된 선행지식이 문제의 이해부터 계획 수립 및 실행 단계까지 productive struggle을 야기하며 문제해결 과정에 큰 영향을 미친다는 것을 발견했다. 또한, 예비 수학 교사들이 productive struggle을 겪으며 문제를 해결해봄으로써 고군분투 끝에 얻게 되는 학습의 즐거움을 느끼게 되고, 이러한 경험은 미래의 학생들에게 효과적인 수학 학습을 위해 productive struggle을 지원할 수 있도록 격려하는 역할을 하였다. 따라서 productive struggle를 통해 수학 학습에 몰두해보는 기회를 가짐으로써 예비 수학 교사들이 미래의 수학교육전문가로서의 직업적 전문성을 키우는데 도움이 될 것으로 기대된다.

주요용어 : Productive struggle(생산적인 애씀), 문제 해결, 과제와 활동, 예비 수학 교사 교육

Ⅰ. 서론

교사들은 어떻게 하면 학생들이 수학을 좋아하고 잘하도록 가르칠 수 있을까 항상 궁리한다. 이렇듯 교사의 가장 큰 목표는 학생들이 학습에서 성공하는 것이기 때문에, 학생들이 때때로 수학 학습에서 바로 성공적인 결과를 내지 못하거나, 문제를 해결하지 못해 당황하고 어려움을 겪을 때에, 교사들은 학생들이 수학 학습에 실패했다고 생각하거나, 이러한 학생들의 struggle을 수학 수업에서의 문젯거리 또는 불필요한 학습 방해요인으로 여겨왔다(Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2009; Sherman, Richardson, & Yard, 2009). 학생들이 겪는 struggle에 대한 부정적인 시선은 교사로 하여금 이 상황을 빨리 해결하기 위해 과제를 쉬운 단계로 분해하거나 단계마다 해결 과정을 안내하도록 만든다. 하

* MSC2010분류 : 97C70, 97D50
1) 인하대학교 강사 (thals8410@gmail.com)

지만 이러한 행동은 교사의 좋은 의도와는 다르게, 과제를 해결하려는 학생들의 노력을 약화시키고, 과제의 인지적 요구 수준(cognitive demand levels)을 낮추며, 학생들이 수학을 이해하는데 몰입할 수 있는 기회를 빼앗는 결과를 낳는다(Reinhart, 2000; Stein et al., 2009; NCTM, 2014, p. 48).

여러 연구에 따르면(Hiebert & Grouws, 2007; Kapur, 2014; Stein & Lane, 1996), 생산적인 방향의 struggle, 다시 말하면 productive struggle(생산적인 애씀)[2)]은 오히려 학생들의 수학 학습에서 더 깊은 개념적 이해와 발전에 도움이 된다. 따라서 교사는 학생들의 struggle을 부정적으로 보기보다는 학생들의 수학적 사고를 들여다볼 수 있고 수학에 대한 이해를 높일 수 있는 기회로 보고 productive struggle이 되도록 지원해야한다. 미래의 수학 교사로서 예비 수학 교사들 또한 교원 양성 프로그램에서 productive struggle을 경험해봄으로써, 이에 대한 긍정적인 인식을 가지고, 학생들이 productive struggle을 통해 수학적 개념과 문제해결 역량을 기를 수 있도록 교육환경을 지원할 수 있어야 한다.

최근 수학교육학계의 동향에 대해 연구한 김선희와 김수민(2018)에 따르면, productive struggle은 국제 학술대회 연구 동향에 비해 아직 국내 연구가 미비한 주제이다. 김응환(2017)과 김상미(2018)의 논문들처럼 productive struggle을 언급한 선행연구들이 있으나, 국내에서는 아직 해당 주제로 연구가 활발하게 이루어지지 않고 있기 때문에 productive struggle의 개념이나 구조에 대한 심도 있는 연구가 요구된다. 따라서 본 연구에서는 productive struggle이 무엇인지 어떠한 특징을 가지고 있는지 소개하고, 수학적 문제를 해결하는 과정에서 예비 수학 교사들의 productive struggle의 과정을 가까이서 관찰하고 학생들의 문제해결 단계에서 productive struggle에 대한 특징들을 제공할 것이다. 그리고 이 연구를 통해 예비 수학 교사들을 위한 수학 교수·학습의 개선과 교사전문성 개발에 대한 시사점을 얻고자 한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 예비 수학 교사들이 비정형적인 문제를 해결하는 단계에서 어떤 productive struggle 과정을 겪는가?

둘째, 예비 수학 교사들이 productive struggle 과정을 통하여 얻은 것은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. Productive Struggle(생산적인 애씀)이란?

학생들이 수학을 배우고 문제해결 역량을 함양하기 위해서는 암기한 공식이나 절차를 단순히 이용하는 문제가 아닌, 참신하고 학생의 지적 수준에 도전적인 상황이나 문제를 다루는 경험을 해야 한다(Schoenfeld, 1985; Granberg, 2016, p. 33). 이렇게 수학적 개념을 이해하거나 과제 또는 문제를 해결하는 과정에서 때때로 학생들은 어려움을 겪으며 이를 극복하려고 애쓴다. Warshauer(2015)는 이러한 현상을 productive struggle(생산적인 애씀)이라고 명명하며 “수학을 이해하거나, 즉각적으로 분명하지 않은 어떤 것을 알아내기 위한 학생들의 노력”(Hiebert & Grouws, 2007, p. 387)으로 정의했는데, 이는 Hiebert & Grouws(2007)가 사용한 struggle에 대한 의미를 바탕으로 한다. Struggle은 학생이 기존에 가지고 있던 지식으로 문제를 이해하거나 해결할 수 없을 때 또는 새로운 정보를 자신의 것으로 완전히 받아들이지 못할 때 일어난다. 어떠한 문제가 익숙하지 않은 요소를 포함하고 있을 때, 학생들은 현재의 이해와 연결하기 위해 새로운 정보를 해석하고, 만약 필요하다면 기존의 지식을 수정하거

2) 일부 연구자들은 productive struggle을 생산적인 고투(김선희, 김수민, 2018) 또는 생산적인 어려움(김상미, 2018)이라고 쓰기도 한다.

나 새로운 것을 재해석한다(Hiebert & Grouws, 2007; Granberg, 2016).

Warshauer(2011)는 이러한 학생의 struggle이 수학에 대한 이해, 추론, 또는 수학적 감각 형성을 향해 갈 때는 productive struggle로 정의하고, 이와 대조적으로 당면한 문제나 과제에서 수학적 감각을 형성하거나 설명하기, 또는 절차 진행을 향한 진전이 없을 때는 unproductive struggle이라고 정의하였다(p. 21).

Jackson & Lambert(2010)에 따르면 productive struggle은 학생들이 정보를 붙들고 씨름하고 스스로 해결책을 찾을 수 있는 기회를 허용하는 것으로, 이는 정신적 탄력성 또는 복원력과 끈기를 발달시키며, 학생들이 자신의 학습을 위한 전략을 개선하는데 도움을 준다. 또한 성취 가능해 보이는 분명한 학습목표와 함께 productive struggle이라는 터널 끝에는 빛이 있으며, 학생들은 자신들이 어려움에 직면할 지라도, 직면한 장애물들의 요점을 파악하여 결국에는 그 장애물들을 극복할 수 있다는 것을 믿는 것이 중요하다(p. 53-54).

앞서 제시한 여러 연구자들의 productive struggle에 대한 정의를 종합하여, 본 연구에서는 productive struggle(생산적인 애씀)을 쉽게 풀리지는 않지만 호기심과 과제 집착을 가져올 수 있는 도전적인 문제에 대하여 해결 전략을 궁리하며 문제의 기저를 이루는 수학적 개념의 이해와 문제 해결을 향해가는 학생의 노력 과정이라고 정의하겠다. 즉, 생산적인 애씀이란 수학적 개념을 깊게 이해하거나 문제를 해결하기 위해 끈질기게 궁리하고 스스로 해결책을 찾기 위한 노력이며, 이 노력을 통해 수학적 이해와 문제 해결에서 진전을 보일 때를 의미한다고 할 수 있다.

2. Productive Struggle(생산적인 애씀)과 교수·학습과의 관계

Hiebert & Grouws(2007)가 이해를 동반한 수학 학습을 위한 필수적인 요소로써 struggle을 제시하면서 productive struggle에 대한 관심이 높아졌지만, 이 struggle에 대한 아이디어는 오랜 역사를 가지고 있다(Warshauer, 2015). Dewey(1933)는 깊은 이해를 구축하는데 있어서 학생들을 “어느 정도의 당혹감, 혼란, 또는 의심”에 빠지게 하는 과정을 필수적인 것으로 보았다(p. 12). 또한, 학생들의 struggle을 기존의 수학적 사실, 아이디어, 절차들의 재구성 또는 재배치 과정으로 본다면, 새로운 정보가 쉽게 동화되지 않거나 기존의 정보가 적절하지 않음을 깨달았을 때 새로운 정보에 관한 인지적 불균형을 해소하기 위해 기존의 지식을 수정 및 재구성하는 Piaget(1960)의 조절 작용과 같은 맥락이라고 할 수 있다. Festinger(1957)와 Hatano(1988)와 같은 인지이론 학자들 또한 인지적 당혹감, 인지적 부조화, 인지적 불일치 등과 같은 용어들을 제시하면서 이들이 인지적 성장을 자극하거나 개념적 이해를 위한 추론 능력을 촉진시키는 핵심적인 요소임을 주장했다(Warshauer, 2015). Polya(1957) 또한 struggle을 실험과 함께 체계적이고 연역적인 측면과 함께 학생들이 경험해야 할 수학 발전의 중요한 부분으로 보았다(Hiebert & Grouws, 2007). 좀 더 최근 연구를 살펴보면, Hiebert & Wearne(2003)이 심도 있는 수학 학습을 위해서는 모든 학생은 도전적인 문제를 해결하기 위해 고군분투해야 함을 주장하며 struggle의 중요성을 언급했고, Kapur(2014)는 개념-예제-문제 순의 전통적인 수업과 반대인 문제-개념 순으로 진행하는 수업을 중요시하며, 학생들이 문제 풀이 과정에서 productive failure(생산적인 실패) 또는 struggle을 경험하는 것이 수학적 개념과 절차의 이해 단계에서 매우 중요함을 강조했다.

그렇다면 productive struggle이 학생의 수학 학습에서 효과적인 이유는 무엇일까? 여러 연구자들에 따르면, productive struggle을 하는 동안에는 새로운 수학적 개념을 이해하거나 기존 지식 구조에 통합하거나 또는 문제를 해결하기 위해서 학생의 선행지식과 직관적인 아이디어가 활성화되는데, 특히

문제 해결 방법을 스스로 생각해보고 구성해 볼수록 더 활성화된다(Kapur & Bielaczyc, 2012; Kapur, 2014). 또한 학생이 productive struggle에 몰입할 때, 학습 목표와 자신의 지식의 격차를 더욱 잘 인지하고, 문제와 관련된 개념과 요소에 집중하며, 이를 선행지식구조에 잘 통합할 수 있다(Loibl & Rummel, 2014; Renkl & Atkinson, 2007; Granberg, 2016, p. 36-37). 즉, 학생은 문제와 씨름하면서 여러 수학적 사실, 아이디어, 절차 등을 연결하고, 수학에 대한 깊은 개념적 이해를 발전시킨다고 할 수 있다(Hiebert & Grouws, 2007; Kahan & Schoen, 2009; Warshauer, 2011).

이렇듯 수학 학습에서 핵심적인 과정으로 여겨지는 productive struggle은 효과적인 수학 교수를 위해 NCTM(2014)에서 제시한 행동 원리 중 하나이기도 하다. 효과적인 수학 교수는 개인적으로 또는 집단적으로 productive struggle에 몰입할 수 있도록 학생들에게 기회와 지원을 지속적으로 제공해야 함을 강조한다. 또한 NCTM(2014)에서는 수학적 개념이해 과정이나 문제해결 과정에서 교사가 학생들에게 적절한 도전을 제공하고, 끈기를 가지고 스스로 문제를 해결할 수 있도록 격려하고, 적절한 발문과 충분한 시간을 제공함으로써 학생들의 productive struggle을 지원하는 구체적인 예를 제시하면서 교사의 역할을 강조하고 있다.

3. Productive Struggle(생산적인 애씀)에 관한 선행연구

Productive struggle에 관한 선행연구는 수학 학습에서 학생들의 productive struggle의 중요성 또는 효과에 대한 연구(Hiebert & Grouws, 2007; Kapur, 2014; Stein & Lane, 1996), 학생들의 productive struggle을 촉진시킬 수 있는 과제와 수업 유형을 제시한 연구(Livy, Muir, & Sullivan, 2018; Townsend, Slavit, & McDuffie, 2018; Warshauer, 2015; Zeybek, 2016), 학생들에게서 나타나는 productive struggle의 유형 및 struggle의 해결 단계(Granberg, 2016; Warshauer, 2015)나 학생들의 productive struggle에 대한 교사의 대응을 분류하여 설명한 연구(Warshauer, 2015; Zeybek, 2016) 등으로 나눌 수 있다.

학생들이 productive struggle에 몰입할 수 있도록 도와주는 핵심적인 요소 중 하나는 지적으로 도전적인 수학 과제나 문제이다. 많은 연구자들에 따르면, 학생들의 productive struggle을 지원하기 위해서는 학생들에게 도전적이지만 너무 어렵지 않고, 불확실성과 미지의 풀이과정, 검증이 쉽지 않은 결과 등을 포함하며, 모순을 탐구하거나 오류 또는 오개념을 검토하고, 깊은 수학적 이해와 의미, 가치가 있고, 학생들의 실생활과도 밀접한, 높은 인지적 요구 수준(cognitive demand level)의 과제를 제공해야한다(Livy, Muir, & Sullivan, 2018; Townsend, Slavit, & McDuffie, 2018; Zaslavsky, 2005, Warshauer, 2011). 특히 Warshauer(2015)와 Zeybek(2016)의 연구에서는 productive struggle을 촉진하기 위한 수학 과제를 Smith & Stein(1998)의 수학 과제의 인지적 요구 수준 프레임워크(Levels of Task)를 바탕으로 제시했다. 이 프레임워크는 수학 과제를 다음 네 가지 인지적 요구 수준의 카테고리로 분류했다. 낮은 수준부터 높은 수준 순서로, memorization(암기형), procedures without connections(연계 없는 절차형), procedures with connections(연계 있는 절차형), doing mathematics (수학 행하기) 과제이다(Smith & Stein, 1998). Warshauer(2015)와 Zeybek(2016)은 성공적인 productive struggle을 위해 학생들에게 높은 인지적 요구 수준의 과제인 연계 있는 절차형 또는 수학 행하기 과제를 제시할 것을 제안한다.

일부 연구자들은 학생들이 문제 해결 과정에서 겪는 여러 가지 productive struggle를 유형별로 구분하였는데, Granberg(2016)은 선행지식과 관련된 productive struggle, 새로운 지식과 관련된 productive struggle, unproductive struggle(비생산적인 애씀), struggle의 부재, 문제 해결, 이렇게 다섯 가지로 분류하여 학생들의 productive struggle 과정을 분석하였고, Warshauer(2015)와

Zeybek(2016)은 학생들의 productive struggle 유형을 get started, carry out a process, uncertainty in explaining and sense-making, express misconception and errors, 이렇게 네 단계로 나누어 제시하였다. Granberg(2016)는 학생의 struggle을 학생의 수학적 지식과 수학 내용, struggle의 유무와 방향을 바탕으로 분류하였고, Warshauer(2015)와 Zeybek(2016)의 struggle 유형은 처음 세 단계는 문제 해결 과정과 밀접하게 연관되어 있고 마지막 단계는 수학적 내용에 관한 학생들의 오개념과 오류를 바탕으로 구성되었다.

학생들의 productive struggle을 성공적으로 지원하기위해서는 과제나 문제의 유형뿐만 아니라 교사의 반응 또는 대응이 매우 중요하다. 우선 과제를 해결할 충분한 시간을 제공하며, 학생들이 겪을 법한 struggle을 예상해보고, 과제의 인지적 요구 수준(cognitive demand level)을 낮추지 않는 적절한 발문과 지원을 통해 학생의 struggle을 생산적인 방향으로 이끈다. 또한 교사와 학생들, 그리고 동료 학생들 사이의 활발한 상호작용과 학급 분위기 조성이 매우 중요한데, 학생들이 겪는 struggle은 기피해야 할 현상이 아니라 학습하는 과정에서 매우 자연스러운 일이며, 이는 수학을 이해하고 지식을 확장할 수 있는 의미 있는 경험임을 알려주는 것이 중요하다.

위의 선행연구를 종합해보면, 수학 수업에서 productive struggle을 지원하기 위해서는 교사는 너무 어렵지 않으면서 학생들에게 도전적인 과제를 제시하고, 그 과제를 탐구할 수 있는 충분한 시간을 제공하며, 학생들을 수학적 사고에 집중시키고 문제해결과 반성적 사고를 돕기 위해 정보를 제공하거나 질문을 하되 과제의 인지적 요구 수준을 유지해야 하며, 학생들의 productive struggle을 통해 학생들의 개념적 이해와 수학적 사고를 향상시켜야 한다. 또한, 활발한 수학적 의사소통을 위해 교사와 학생들, 그리고 동료 학생들 사이의 상호작용이 중요함을 알 수 있다(Livy et al., 2018; Warshauer, 2015; Townsend et al., 2018; Zeybek, 2016). 하지만 기존의 선행연구를 살펴보면, 효과적인 수학 학습을 위해 학생들의 productive struggle을 지원하는 수학 과제 또는 문제를 제시하거나 교사의 수업 전략 등을 다룬 연구들은 많으나 문제해결 과정에서 학생들이 보이는 productive struggle의 유형 및 구조에 초점을 둔 연구는 그리 많지 않다. Productive struggle의 유형, 구조, 특징, 해결 과정 등에 관한 연구 및 분석이 선행되어야 그에 맞는 체계적이고 적절한 피드백이나 수업 전략을 구성하는 데 더욱 도움이 될 것이기 때문에 productive struggle 자체에 초점을 맞춘 연구가 좀 더 필요하다. 또한 초·중등 학생의 productive struggle에 관한 연구가 주를 이루고, 예비 수학 교사에 대한 연구는 매우 드물다. 물론 productive struggle이 수학 학습과 밀접한 관련이 있기 때문에 학생을 대상으로 한 연구보다 예비 수학 교사에 대한 연구의 수가 적을 수는 있겠지만, 미래의 수학 교사로서 학생들을 가르칠 것이기 때문에 예비 수학 교사들로 하여금 productive struggle을 경험하게 해주고 이러한 활동이 얼마나 학생들의 수학 학습에 도움이 될 것인지 느끼게 해주는 것 또한 매우 중요한 과정이라고 생각한다. 따라서 productive struggle에 대한 국내 연구가 미비한 이 시점에, 우리나라의 예비 수학 교사들이 수학적 문제를 해결하는 과정에서 어떤 productive struggle을 겪는지 유형 및 해결 과정을 연구할 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법

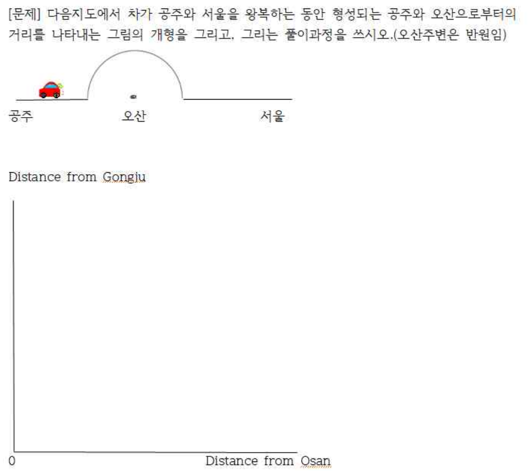
1. 연구 대상

본 연구는 비정형적인 수학 문제를 해결하는 과정에서 예비 수학 교사들이 겪는 productive struggle을 자세히 관찰하고 분석하기 위해 설계되었다. 연구 대상은 연구에 자발적으로 참여한 수도권 소재 A대학 수학교육과 3, 4학년 학생 20명과 중부지방 소재 B대학의 수학교육과 3학년 학생 22명이다. 모두 고학년에 속하는 학생들이므로 수학교육과 학교수학에 관해 어느 정도의 지식을 가지고 있다고 할 수 있으며, 두 대학에서 연구 대상을 모집함으로써 연구 결과가 특정 대학 학부생의 특성에 편향되지 않을 수 있다.

2. 연구 절차 및 자료 수집

예비 수학 교사인 수학교육과 학부생들에게 비정형적인 수학 문제가 제시된 활동지를 나눠 주고 1시간 정도 문제해결 과정 및 활동을 통해 느낀 점을 작성하도록 했다. 예비 수학 교사들은 주어진 문제를 해결하는 과정을 Polya의 문제해결 4단계를 고려하여 기록하였으며, 문제 해결 중에 겪는 당황, 어려움, 교착 상태를 벗어나려는 노력 등의 productive struggle(생산적인 애씀)과 문제 해결, 그리고 이 활동을 통해 느낀 점 등도 활동지에 기록했다. 예비 수학 교사들은 개인의 문제해결 시간을 가진 후 옆 동료와 간단한 의견교환은 가능했지만 예비 수학 교사들의 struggle을 관찰하기 위해 각자의 수학적 생각과 해결 전략은 가급적 수정하지 않도록 지시했다. 연구자의 개입을 최소화 하며 예비 수학 교사들의 struggle을 면밀히 관찰했다.

본 연구에서 제시한 비정형적인 수학 문제는 Stevens, Paoletti, Moor, Liang, & Hardison(2017)의 “The going around Gainesville” 과제를 연구자가 일부 수정한 것으로, “오산 둘레 돌아가기 문제”라고 하겠다([그림 Ⅲ-1]).



[그림 Ⅲ-1] 오산 둘레 돌아가기 문제

오산 둘레 돌아가기 문제는 거리를 그래프 상에 나타내는 문제지만, 예비 수학 교사들에게 매우 익숙한 거리와 시간 또는 속력과 시간 간의 관계를 탐색하는 종래의 문제들과는 상황 맥락이 다르다. 한 양(quantity)의 변화에 따른 다른 양의 종속적인 변화 관계만을 생각해서는 이 문제를 해결할 수가 없으며, 두 변수인 ‘공주로부터 차까지 거리’와 ‘오산으로부터 차까지 거리’를 동시에 고려해야하는 문제이므로 두 양의 크기를 동시에 나타내는 한 점의 좌표를 이해하는 것이 필요하다. 그러나 이러한

이해를 구성(construction)하는 것은 자명하지 않다(Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua, & Byerley, 2017; Stevens et al., 2017, p. 4). Paoletti(2015)는 학생들이 좌표평면에서 양이 표현될 때, 한 양이 단조롭게 변화하는 상황에서는 다른 양이 경험상 시간에 관하여 변화한다고 추론하는 경향이 있으며, 따라서 학생들은 단조로운 변화에 크게 주목하지 않는다고 보고했다. 그래서 오산 둘레 돌아가기 문제는 학생들의 productive struggle을 야기할 수 있도록 변수가 시간도 아니고 단조롭게 변화하지도 않는 두 쌍의 양을 고려하도록 디자인되었다(Stevens et al., 2017). 게다가 이 문제는 두 양과 관련된 구체적인 수치 또는 양의 크기를 제공하지 않기 때문에 예비 수학 교사들은 두 양의 변화에 대한 이미지를 머릿속으로 구성해야 한다(Matthews & Ellis, 2018). 따라서 이 문제는 예비 수학 교사들이 기존에 다뤄왔던 공변(covariation)의 양상과 그래프에 대한 통념을 깰 것을 요구하며, 동시에 변하는 두 양의 관계에 대한 본질을 탐구하고 이해하도록 요구하는 문제이다. 또한, 오산 둘레 돌아가기 문제는 Smith & Stein(1998)이 제시한 과제의 인지적 요구 수준(<표 Ⅲ-1>) 중 높은 인지적 요구 수준인 doing mathematics(수학 행하기) 과제로 분류할 수 있으므로 예비 수학 교사들의 productive struggle을 야기하기에 적합한 문제라고 볼 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 과제의 인지적 요구 수준(Smith & Stein, 1998)

인지적 요구 수준	과제 유형	과제 특징
Lower-level demands (낮은 수준의 요구)	Memorization (암기형)	• 이미 학습한 사실, 규칙, 공식, 정의를 재현하거나 기억하는 것 포함 • 이전에 접한 자료와 동일하거나, 무엇을 산출해야 하는지 분명하고 직접적으로 제시되어 있어 애매하지 않음
	Procedures without Connections (연계 없는 절차형)	• 알고리즘에 관한 것. 특정 절차의 사용 요구 또는 이전의 지시, 경험, 또는 과제의 배열에 기초함 • 과제 수행에 사용되는 절차는 개념이나 의미와 관련성 없음 • 수학적 이해를 추구하기 보다는 정확한 답을 얻는데 초점을 둠 • 제한된 인지적 수준 요구
Higher-level demands (높은 수준의 요구)	Procedures with Connections (연계 있는 절차형)	• 시각적인 도표, 구체적 조작, 기호, 문제 상황 등의 다양한 방법으로 표현되고 이를 연계하여 의미를 발전시키는데 도움을 줌 • 일반적인 절차에 따라 과제가 수행되지만, 성공적으로 수행하고 이해하기 위해 절차와 관련된 개념적 아이디어에 몰입할 필요가 있음 • 어느 정도의 인지적 노력 요구
	Doing Mathematics (수학 행하기)	• 복잡하면서도 비알고리즘적인 사고를 요구(예측 가능하고 잘 숙지 된 접근 방법 또는 경로가 명시적으로 제시되지 않음) • 수학적인 개념, 과정 또는 관계의 본질을 탐구하고 이해하도록 요구 • 자신의 인지 과정을 스스로 점검 또는 규제하도록 요구 • 관련된 지식과 경험을 적절히 활용하여 과제를 해결하도록 함 • 상당한 인지적 노력 요구. 예측 불가능한 해결 과정의 속성 때문에 어느 정도의 학생들의 불안감 초래

3. 자료 분석

예비 수학 교사들이 비정형 문제인 오산 둘레 돌아가기 문제를 해결하는 각 과정에서 어떤 productive struggle 과정을 겪는지 알아보기 위해 Polya의 문제해결 4단계(Polya, 1957)를 분석 틀로

사용하여 예비 수학 교사들이 작성한 문제해결 활동지 내용을 분석하였다. Polya(1957)의 문제해결 4단계는 다음과 같다.

1) 문제에 대한 이해: 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고, 문제를 이해하는 단계
2) 계획의 작성: 주어진 것과 구하려는 것이 어떻게 연결되어 있는지 관계를 파악하여, 문제 해결에 대한 착상을 하고 전략 및 계획을 세우는 단계
3) 계획의 실행: 해결 계획을 실행하는 단계
4) 반성: 해결 과정을 검토해 보고, 다양한 방법을 모색하거나, 다른 문제로의 일반화를 생각해 보는 단계

본 연구는 예비 수학 교사들이 문제를 해결하는데 있어서 연구자의 개입을 최소화하고 예비 수학 교사들의 productive struggle 해소를 위한 발문이나 지원보다는 예비 수학 교사들이 겪는 productive struggle 자체를 조사하는 것에 중점을 두었기 때문에 문제해결 단계와 관련된 발문이나 권고 사항은 다루지 않았다.

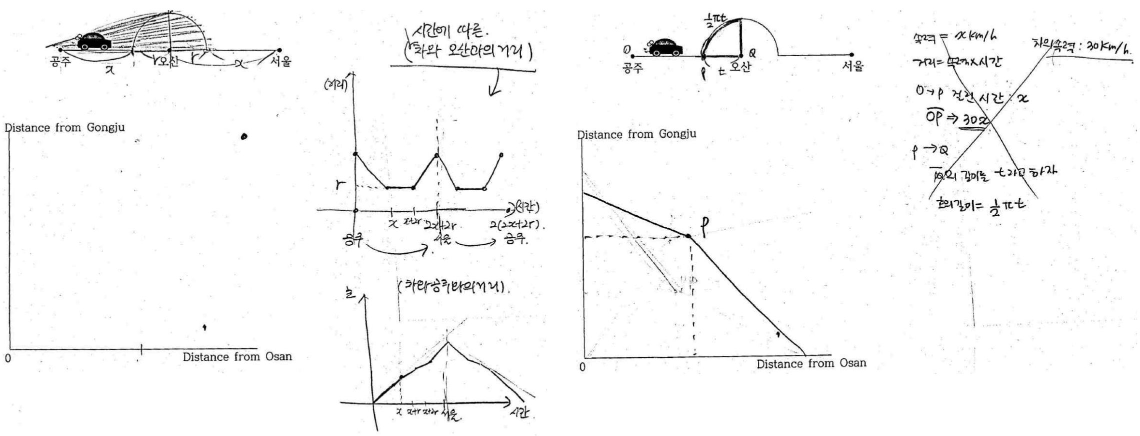
Ⅳ. 연구 결과

A대학과 B대학의 예비 수학 교사들의 활동지 자료를 종합하여 분석한 후, Polya의 문제해결 4단계인 문제에 대한 이해, 계획의 작성, 계획의 실행, 반성, 각 단계에서 예비 수학 교사들이 보인 productive struggle를 비슷한 유형끼리 분류하였다. 그 다음 각 유형의 특징을 잘 나타낼 수 있는 자료를 선별하여 예비 수학 교사의 productive struggle의 예시로 제시하였다. 본 연구 결과 부분에서는 Warshauer(2011)의 productive struggle의 정의를 바탕으로 productive struggle과 struggle을 구별하여 사용하였는데, struggle은 문제 해결에서 겪는 일반적인 당혹감 또는 어려움을 의미하고, productive struggle은 이러한 struggle을 통해 수학적 이해나 문제 해결에서 생산적인 방향으로 진전을 보일 때의 struggle을 의미한다. 따라서 결과 부분에서는 예비 수학 교사들이 겪은 다양한 productive struggle 과정 및 그 이유와 productive struggle 결과, 어떤 진전을 보였는지 순으로 설명하였다.

1. Polya의 문제해결 4단계에서의 productive struggle(생산적인 애씀)

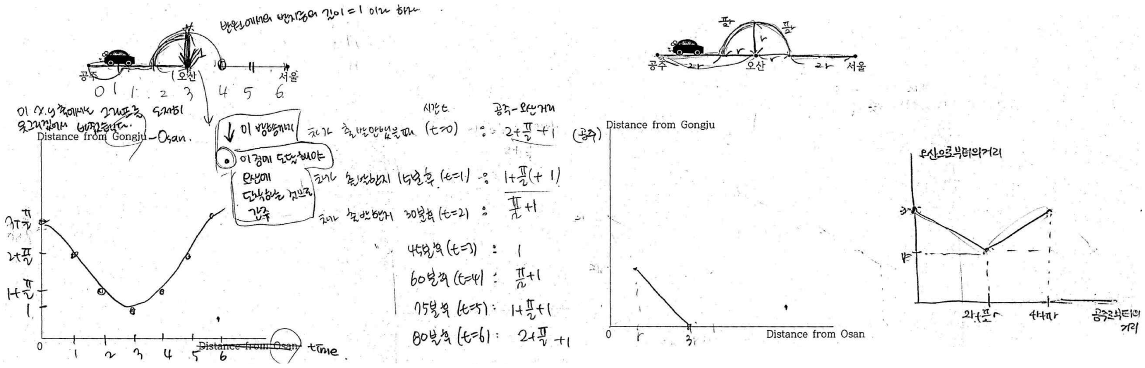
1) 문제에 대한 이해 단계에서의 productive struggle(생산적인 애씀)

오산 둘레 돌아가기 문제를 해결하는 과정에서 예비 수학 교사들이 가장 어려웠다고 말한 단계는 바로 ‘문제에 대한 이해’ 단계였다. 다음 [그림 IV-1]에서 볼 수 있듯이, 많은 예비 수학 교사들은 문제가 요구하는 것이 거리와 거리를 변수로 하는 그래프 개형을 그리는 것이었음에도 불구하고, 가장 먼저 거리-시간 관계를 생각해냈다. 즉, 두 거리 사이의 관계를 묻는 문제를 거리와 시간 사이의 관계로 이해해 보려는 시도를 하였다. 대부분의 예비 수학 교사들이 이 문제를 이해하는데 어려움을 느낀 이유는 지도상에서 자동차가 움직이는 맥락에 관한 문제일 때, 두 변수가 모두 거리인 그래프를 경험해 보지 못했기 때문이었다고 활동지에 서술했다. 따라서 예비 수학 교사들은 이 문제를 접했을 때 거리-시간 그래프를 자동적으로 떠올리면서, 문제가 요구하는 x축과 y축의 변수가 무엇을 의미하는지 이해하는데 상당한 시간이 소요되었다.



[그림 Ⅳ-1] 문제에 대한 이해 단계에서 거리-시간 관계로 해석하려는 시도로 인한 struggle 예시

문제에 대한 이해 단계에서 예비 수학 교사들은 오산 둘레 돌아가기 문제를 이해하기 위해 거리와 시간의 관계를 생각해보거나, 각 공주와 오산에 대한 거리-시간 그래프를 따로 그려보는 등 여러 가지 방법을 시도해보는 productive struggle 과정을 통해, 기존의 문제를 해결할 때 유용했던 거리-시간 그래프에 대한 개념 또는 지식이 새로운 문제의 상황에 맞지 않음을 알아차렸다. 그 결과, 다시 문제를 천천히 읽어 봄으로써 문제에서 구하고자 하는 x축과 y축의 의미를 파악하여, 자동차가 이동함에 따라 변하는 '공주로부터 차까지의 거리'와 '오산으로부터 차까지의 거리'가 두 변수인 거리-거리 그래프를 그려야 한다는 것을 이해하게 되는 진전을 보였다. 그러나 몇몇 예비 수학 교사들은 [그림 Ⅳ-2]에서 볼 수 있듯이, 각 공주 또는 오산으로부터 차까지 거리를 차가 지나온 총 거리의 합으로 이해하기도 했는데, 이들은 문제를 해결하기 위해 struggle 하였지만, 문제가 요구하는 것을 제대로 파악하지 못하고 문제 해결에 진전을 보이지 못했다.



[그림 Ⅳ-2] 문제가 요구하는 것을 차가 지나온 총 거리의 합으로 이해하여 겪는 struggle 예시

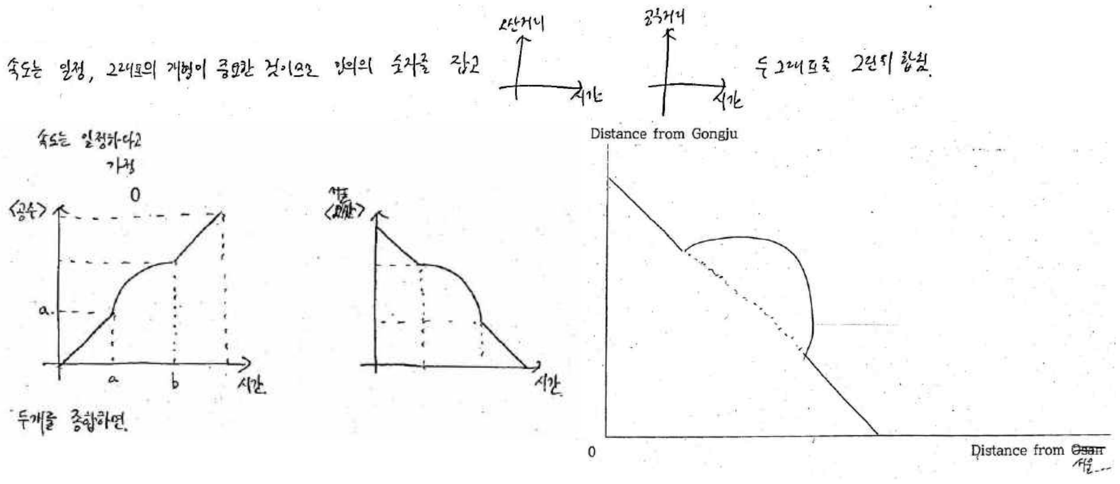
2) 계획의 작성 단계에서의 productive struggle(생산적인 애씀)

문제를 해결하기 위한 실마리를 찾고 전략 또는 계획을 세우는 '계획의 작성' 단계는 예비 수학 교사들이 두 번째로 어려워한 단계였다. 이 단계에서 예비 수학 교사들은 문제의 이해 단계를 통해 이

문제가 요구하는 것이 거리와 시간 사이의 관계가 아니라 두 거리 사이의 관계이고, 이것을 그래프로 나타내야 한다는 사실을 이해하였으나, 두 거리 사이의 관계를 어떻게 그래프로 나타내야 하는지에 관해 struggle을 겪었다. 예비 수학 교사들이 문제 해결 전략을 세우는 과정에서 겪는 productive struggle을 크게 두 가지로 나눌 수 있는데, 함수로 생각하여 대수적 식을 세우려는 과정에서의 struggle과 거리와 시간 사이의 관계를 이용하는 과정에서의 struggle이다.

첫째, 함수로 생각하여 대수적 식을 세우려는 과정에서는, 주어진 지도에 시간, 거리, 속도 등의 구체적인 수치를 부여하거나, 거리와 거리 사이의 관계를 함수로 생각하여 식 또는 함숫값을 구하려는 과정에서 struggle을 겪었다. 예비 수학 교사들은 그래프를 그리기 위한 구체적인 수치가 주어지지 않아 그래프를 그리기 위한 기준을 스스로 설정을 하는 것을 어려워하였다. 또한 그래프가 반드시 함수이어야 한다는 생각에 x값에 종속되는 y값, 즉 함숫값을 구하려고 했지만, x값 하나에 대응하는 y값이 하나 이상 존재하여 혼란스러웠다고 서술하였다.

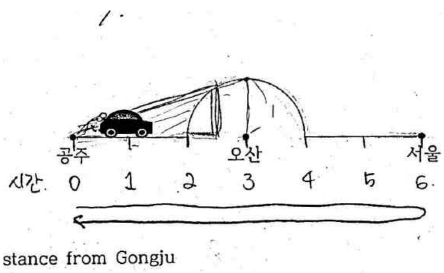
둘째, 거리와 시간 사이의 관계를 이용하는 과정에서는, 두 개의 거리-시간 그래프를 그려 하나의 거리-거리 그래프로 통합하기 위해 struggle 하는 경우([그림 Ⅳ-3])와 시간에 따른 각 공주와 오산으로부터 차까지 거리를 표로 작성하여 한 그래프에 나타내기 위해 struggle 하는 경우([그림 Ⅳ-4])를 볼 수 있었다. [그림 Ⅳ-3]의 전략을 세운 예비 수학 교사들은 x축과 y축이 모두 거리였기 때문에 그래프를 어떻게 그릴지 궁리하다가 기존의 익숙했던 거리-시간 그래프 두 개로 나누어 그래프를 그린 후, 두 그래프를 합쳐 거리-거리 그래프를 그리는 과정을 계획했다. 그러나 두 그래프를 하나로 합치는 과정에서 시간이라는 변수에 의해 혼란을 겪거나, y축인 '차와 오산사이의 거리'를 '차와 서울까지의 거리'로 바꾸면서 하나의 그래프로 통합하여 그리는데 어려움을 겪었다. [그림 Ⅳ-4]의 예비 수학 교사의 경우는 시간의 흐름에 따른 '차와 공주사이의 거리'와 '차와 오산사이의 거리'의 크기를 표로 나타냈음에도 불구하고 두 양의 크기 사이의 대응관계를 파악하지 못했다.



[그림 Ⅳ-3] 두 개의 거리-시간 그래프를 하나로 합치는 과정에서의 struggle 예시

앞서 제시한 바와 같이, 예비 수학 교사들은 어떻게 그래프를 그릴지 전략을 세우는 과정에서 쉽게 계획을 세우지 못하고 다양한 struggle을 겪었다. 그 동안 예비 수학 교사들이 경험한 그래프 문제는 모두 함수에 관련된 정형적인 문제였기 때문에, 그래프로 나타내는 문제를 접하면 자동적으로 함수가 떠올랐고, 그래프를 그리기 위해 함수식을 구하거나 함수 값 또는 점의 좌표를 구한 후, 표를 만들어 좌표평면에 표시하는 방식, 즉 양적 접근 방식으로 그래프를 그려왔다. 그러나 이 문제는 함수식을 구

하기에 시간, 거리, 속도 등에 관한 어떤 수치도 주어져 있지 않고, '공주로부터 거리'와 '오산으로부터 거리' 관계는 함수 관계도 아니다. 이러한 새로운 유형의 문제를 해결하기 위해 두 거리-시간 그래프를 하나로 통합하고, 구간별 수치를 직접 입력하고, 표로 만들고, 함수 관계로 생각해 함숫값을 구하는 상황에서 겪는 productive struggle을 통해, 예비 수학 교사들은 자동차가 움직이는 맥락의 문제 상황에서 시간이란 변수가 드러나지 않을 수 있고, 그래프로 나타낼 수 있는 것이 함수가 아닐 수도 있다는 사실을 경험하게 된다. 그 결과, 예비 수학 교사들은 지도상의 도로 모양을 바탕으로 구간을 나누어 '차와 공주사이의 거리'와 '차와 오산사이의 거리'에 더욱 집중하여 그 변화 자체를 관찰함으로써 거리-거리 그래프의 개형을 생각해내는 생산적인 방향으로 진전을 보였다. 다음 [그림 Ⅳ-5]은 예비 교사가 해결 계획을 세우는 단계에서 그래프를 그리는 문제가 반드시 함수에 관한 것이 아닐 수 있다는 것을 깨닫고 해결 전략의 방향을 다시 잡는 과정을 서술한 부분이다.



시간	0	1	2	2.5	3	3.5	4	5	6
차~공주	0	1	2		$\sqrt{10}$		4	5	6
차~오산	3	2	1		1		1	2	3

시간	7	8	9	10	11	12	13
차~공주	6	5	4	$\sqrt{10}$	2	1	0
차~오산	3	2	1	1	1	2	3

어떻게 착안했는가? 문제는 이해했지만 그래프에 어떻게 표현해야 할지 모르겠다.
차와 공주 사이 거리, 차와 오산 사이 거리에 대한 관계를 그래프에 표현해야 할것 같은데
표로 적어도 그 관계성이 잘 파악 안 된다. ~~공주 - 서울 - 공주 로 왕복하는 상황인데,~~

[그림 Ⅳ-4] 거리-시간 표를 바탕으로 거리-거리 관계를 파악하는 과정에서의 struggle 예시

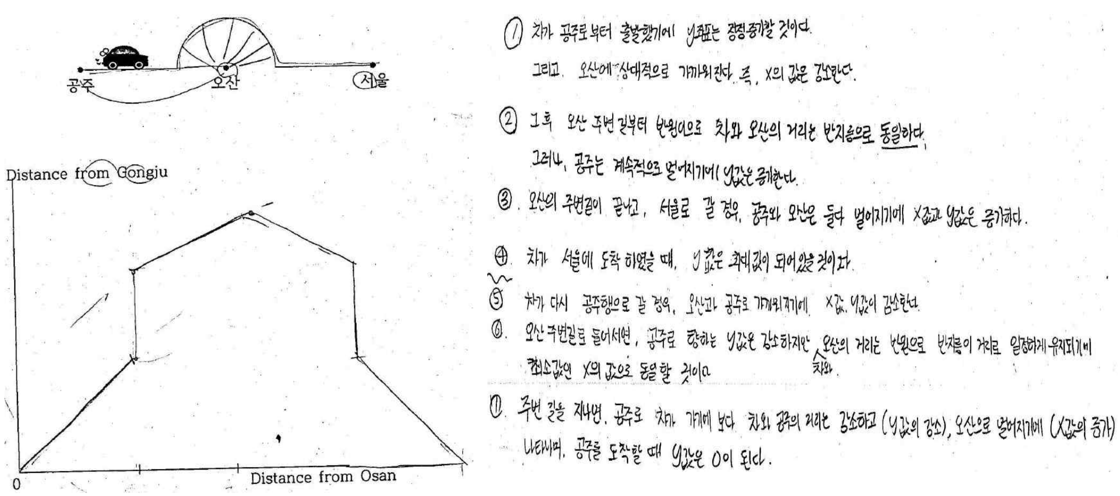
이문제는 기존에 가지고 있던 저의 발상을 뒤엎고 생각하게 만든 문제였고.
신선한 충격을 받은 문제이다.
그래프를 오로지 함수로만 생각했을 때는 막막하고 답이 안 나왔지만, 함수가 아닌
단지 그림의 개형을 그리라 해서 방향성을 ~~[illegible]~~ 곡선 자체에 불어넣을 수 있었다

[그림 Ⅳ-5] 문제 해결의 실마리를 다른 발상으로 찾으려는 노력

3) 계획의 실행 단계에서의 productive struggle(생산적인 애씀)

이전 단계에서 세운 계획이나 전략을 실행하여 그래프를 그리는 단계인 '계획 실행' 단계 또한 예비 수학 교사들이 어려워한 단계였다. 앞서 제시했던 [그림 Ⅳ-4]의 예비 수학 교사는 시간에 따른 구간을 나눠 '차와 공주사이의 거리'와 '차와 오산사이의 거리'의 크기를 구해 표로 나타냈지만, 두 양의 크기를 한 점의 좌표로 동시에 나타낼 수 있음을 생각하지 못해 결국 그래프를 그리지 못했다. 대부분의 많은 예비 수학 교사들은 다음 [그림 Ⅳ-6]의 오른쪽 부분처럼 지도상 도로의 모양의 변화에 따라

구간을 나누어 각 공주와 오산으로부터 차까지의 거리의 변화를 동시에 생각하며 거리의 변화 과정을 기록한 후, 그래프의 개형을 그리려고 시도하였다. 그러나 [그림 Ⅳ-6]의 예비 수학 교사의 경우, 자동차의 위치 변화에 따른 x 값과 y 값의 변화를 옳게 기록했음에도 불구하고 그래프를 정확하게 그리지 못했다. 그 이유는 자동차의 출발 지점이자, 거리-시간 그래프에서 시간처럼 계속 증가하거나 감소하는 변수인 '공주로부터의 거리'가 x축이 아니라 y축에 놓여 있었기 때문이었다. 예비 수학 교사들은 오산 둘레 돌아가기 문제가 그래프의 시작점이 원점 또는 x의 값이 0이었던 기존에 다뤄온 문제 맥락과 달랐기 때문에, 그래프의 시작점을 그리는 과정에서 struggle을 겪으며 혼란스러웠고 당황했다고 언급하였다.

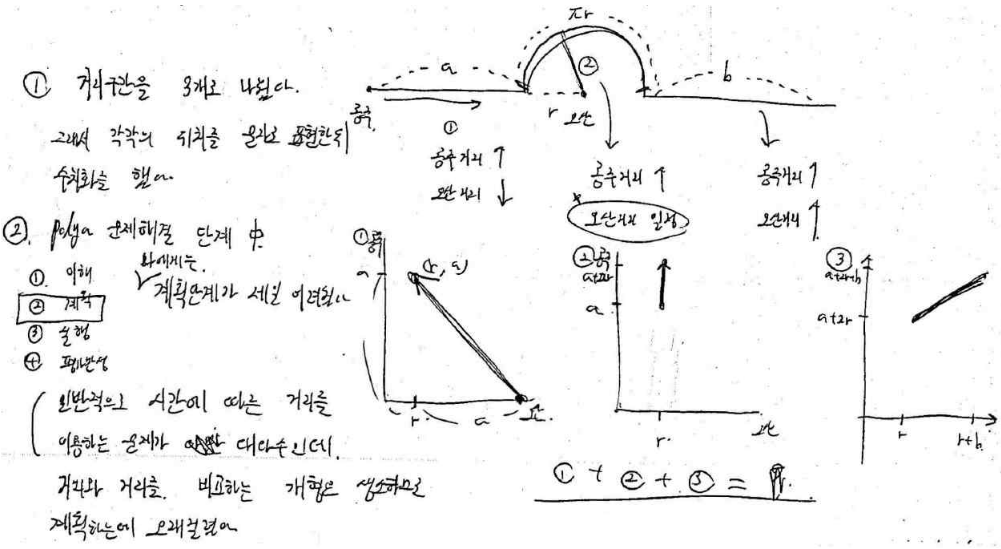


[그림 Ⅳ-6] 각 공주와 오산으로부터 차까지의 구간별 거리 변화의 기록을 그래프로 나타내는 과정에서의 struggle 예시

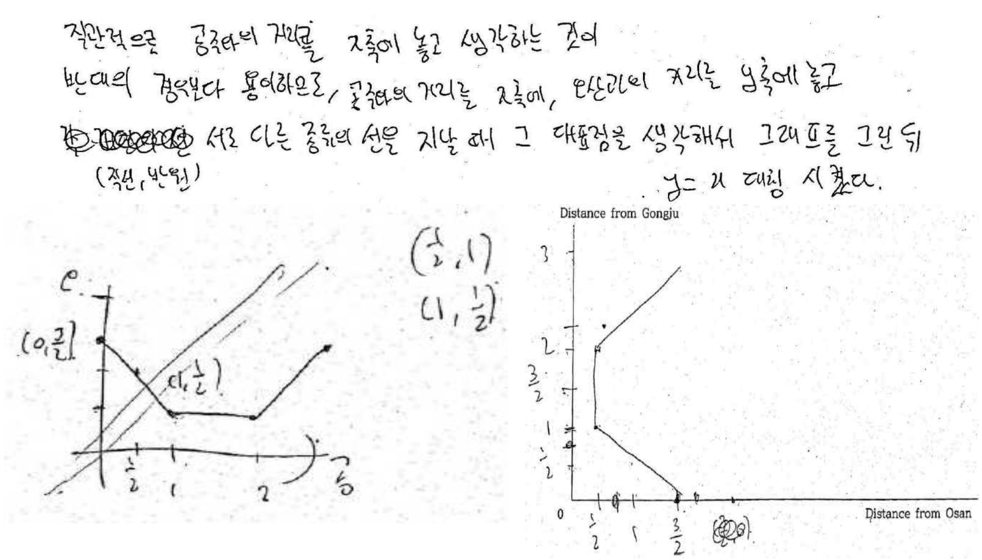
예비 수학 교사들은 그래프의 시작점이 원점이 아닌 생소한 문제 상황을 해결하기 위해, 차의 움직임에 따라 '차와 공주사이의 거리'인 x값과 '차와 오산사이의 거리'인 y값의 변화를 각각 따로 생각해보거나, [그림 Ⅳ-7]처럼 도로의 구간을 나누어 각 구간의 거리를 문자로 표현한 뒤, 차가 움직일 때 각 공주와 오산으로부터의 거리의 변화를 구간별 그래프로 각각 나타내보는 등의 여러 가지 방법을 시도하는 productive struggle을 통해 그래프의 개형을 어떻게 그릴 수 있을 지 궁리하였다.

그 결과, 문제 상황의 맥락을 정확히 이해하고, 구간을 나눠 분석한 거리-거리 관계를 통합하여 하나의 그래프로 나타내거나 각 공주와 오산으로부터 차까지의 거리의 변화를 동시에 생각하며, 좌표평면 위의 하나의 점에 두 양의 크기를 동시에 대응시켜 표현할 수 있게 되었다. 또한, 몇몇 예비 수학 교사들은 [그림 Ⅳ-8]에서 볼 수 있듯이, '공주로부터의 거리'는 자동차가 이동하면서 0에서부터 계속 증가하기 때문에, '공주로부터의 거리'를 y축이 아니라 x축에 놓고 그래프를 그린 후, y=x을 대칭축으로 한 그래프 대칭이동을 생각해냄으로써 그래프를 그리는데 용이한 방법을 찾아냈다.

오산 둘레 돌아가기 문제를 처음 직면했을 때, 대부분의 예비 수학 교사들은 그동안 다뤄보지 않은 생소한 문제의 유형에 당황했지만, 문제해결을 위한 생산적인 노력과 궁리, 즉 productive struggle을 통해 문제 상황의 맥락을 정확히 이해하고, 문자 또는 기호와 좌표개념을 동원하여 문제해결 전략을 수립하고 실행에 착수하게 되었다. 다음 [그림 Ⅳ-9]는 productive struggle 끝에 체계적으로 계획 실행에 성공한 결과의 예이다.



[그림 Ⅳ-7] 각 구간의 거리-거리 관계의 변화를 나타내기 위한 계획 실행의 예시



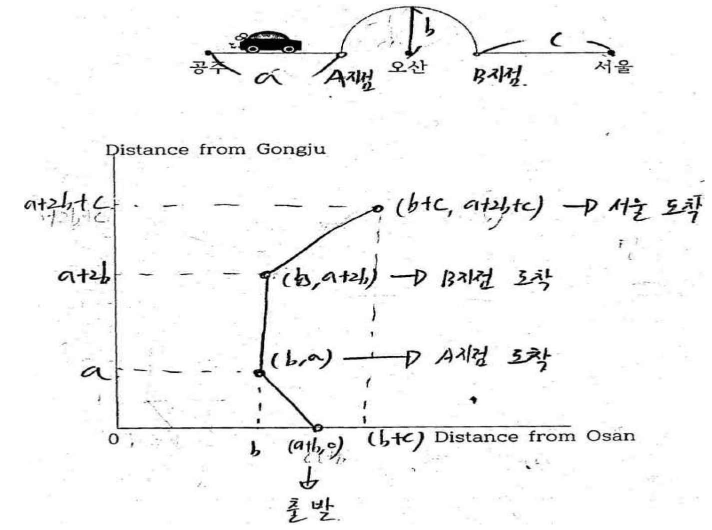
[그림 Ⅳ-8] x축과 y축을 바꾸어 그린 후, 대칭이동을 하는 전략을 성공적으로 실행한 예시

4) 반성 단계에서의 productive struggle(생산적인 애씀)

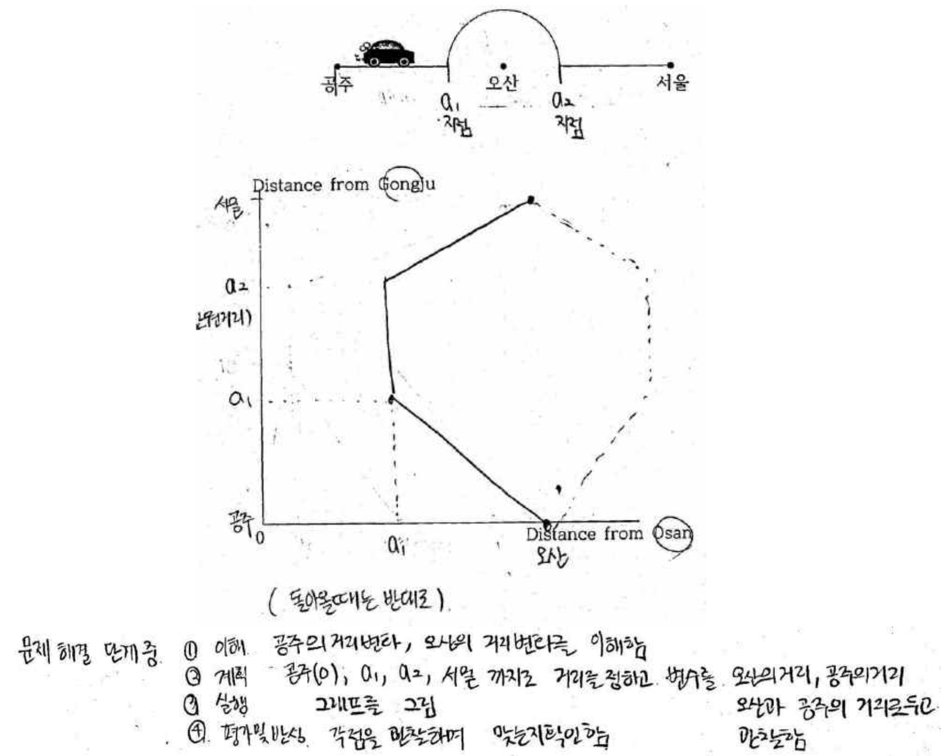
문제해결의 반성 단계에서는, 문제의 이해, 해결 계획 작성 또는 계획 실행 단계에서 struggle을 극복하지 못해 문제를 해결하지 못한 몇몇 예비 수학 교사들을 제외한 대부분의 예비 수학 교사들은 자신들의 그래프가 자동차의 움직임에 따른 각 공주와 오산으로부터의 거리를 잘 반영하였는지 그래프를 따라 생각해보며 검토해보는 과정을 거쳤다.

반성 단계를 어렵다고 느낀 예비 수학 교사들은 많지 않았지만, 이 단계에서도 struggle을 보였던 경우가 있었다. 반성 단계의 struggle은 크게 두 가지 경우로 나눌 수 있었는데, 자신의 문제 해결 과정에 대한 반성 과정을 거치면서도 틀린 점을 알아차리지 못한 경우와 자신의 풀이 과정 또는 결과에 확신을 못하는 경우이다. 다음 [그림 Ⅳ-10]에서 볼 수 있듯이, 몇몇 예비 수학 교사들은 자동차가 서울에서 출발하여 공주로 돌아오는 과정을 그래프로 나타내는데 오류를 보였다. 이 예비 수학 교사들은 반성 단계에서 각 점을 관찰하며 그래프가 맞는지 확인했다고 서술했지만, 서울에서 돌아오는 과정에서 차와 각 공주와 오산으로부터의 거리를 제대로 파악하지 못했음을 알아차리지 못했다. 반성 단계가 어려웠다고 서술한 예비 수학 교사들은 문제 해결 결과가 맞았음에도 불구하고 자신의 문제 해결 과정이나 결과에 확신을 하지 못하는 모습을 보이기도 했다. 특히 반원 구간에서 '차에서 공주까지의 거리'가 계속 멀어지는 것이 맞는지 의심하거나, 반원 구간에서의 '차에서 공주까지의 거리'가 삼각함수적으로 늘어나는데 이것이 그래프 상에는 직선으로만 나타내어진 자신의 결과가 맞는 것인지 확신하지 못하였다. 이렇게 반성 단계에서 나타난 struggle은 예비 수학 교사로 하여금 자동차의 움직임에 따라 각 거리-거리 변화가 그래프에 잘 반영이 되었는지 자신의 결과를 한 번 더 집중해서 검토하게 하거나, 확신 하지 못하는 자신의 해결 과정이나 결과가 맞는지 확인하기 위해 다른 접근 방법을 모색해 보도록 하고, 다른 예비 수학 교사들과의 의견 교환을 통해 productive struggle로 나아가도록 했다.

대부분의 예비 수학 교사들은 반성 단계에서 자신의 문제 풀이 과정이나 결과를 정리하고 보완하여 명확하게 나타내었고, 문제를 수정하거나 보완하여 유사한 문제를 다시 만들어보는 활동을 하였다. 이를 통해 오산 둘레 돌아가기 문제의 난이도를 상향하거나 하향하기 위해서는 어떤 요소를 변경해야하는지, 함수 단원 문제로 포함시키기 위해서는 문제를 어떻게 변형해야하는지 등, 예비 수학 교사로서 오산 둘레 돌아가기 문제가 학생들에게 어떻게 도움이 될 것인지 생각해 보는 시간을 가졌다. 마지막으로 반성 단계에서 거리-거리 그래프에는 명시되어 있지 않았던 시간의 흐름을 고려하여 거칠지만 3차원의 그래프를 그리려는 시도를 해 봄으로써 확산적 사고과정을 보여준 예비 수학 교사들도 있었다.



[그림 Ⅳ-9] Productive struggle 끝에 계획 실행에 성공한 예시



[그림 Ⅳ-10] 문제해결의 반성 단계에서 부분적 오류를 발견하지 못한 struggle 예시

2. 오산 둘레 돌아가기 문제해결 활동을 통해 예비 수학 교사들이 느낀 점

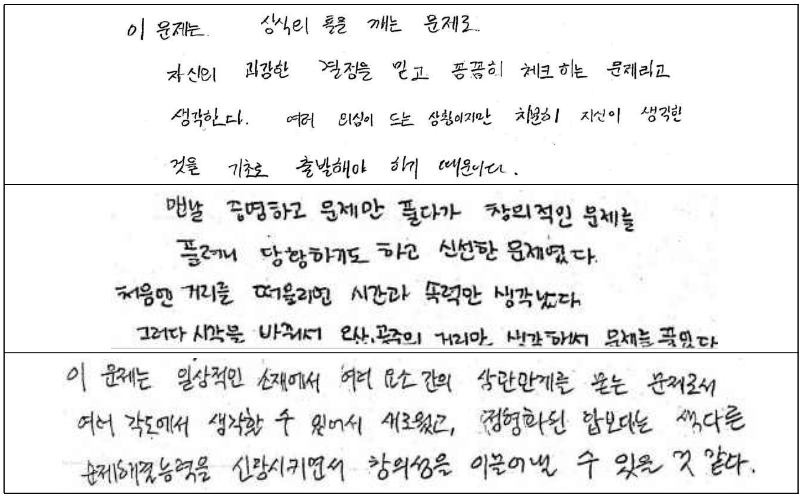
예비 수학 교사들은 오산 둘레 돌아가기 문제해결 활동을 한 후, 느꼈던 점들을 활동지에 작성하였다. 예비 수학 교사들의 소감을 종합하여 정리해 보면, 문제 자체에 대한 소감, 문제 해결 과정에 대한 소감, 그리고 예비 교사로서 교수·학습 상황에 관련된 소감으로 나눌 수 있었다.

다음 [그림 Ⅳ-11]에서 볼 수 있듯이, 대부분의 예비 수학 교사들은 오산 둘레 돌아가기 문제를 새롭고 창의적인 문제, 움직이는 자동차 맥락에 관한 문제나 그래프에 대한 기존의 통념을 깨는 문제라고 묘사했다. 또한 일상적인 소재에서 착안한 문제로써 정형화된 문제 해결 과정이나 답을 요구하기보다는, 문제를 해결하기 위해 다양한 각도에서 생각해 볼 수 있도록 기회를 제공하면서 복합적인 사고능력, 문제해결 능력, 그리고 창의성을 신장시킬 수 있는 문제라고 서술했다.

문제 해결 과정에 대한 소감으로는 어렵지만 흥미로웠다고 서술하였다. 처음 오산 둘레 돌아가기 문제와 같은 비정형문제를 접했을 때는 다소 당혹감과 어려움이 따랐지만, 이 문제를 해결하기 위해 예비 수학 교사들은 자신의 수학적 선행지식을 동원하여 새로운 문제 상황을 해석하고 적용해 보면서 productive struggle을 겪고, 이를 통해 선행지식을 수정 및 보완해 나가며 도전감과 흥미를 느꼈다. 문제를 이해하거나 해결하기 위해 해결 전략을 설계하는 것이 어려웠지만 흥미로웠다거나, 실행 단계에서 수학적 원리를 적용하거나 그래프를 그릴 때 재미있었다고 서술한 예비 수학 교사들도 있었다([그림 Ⅳ-12]).

마지막으로 미래의 수학 교사로서 교수·학습 상황에 관련된 소감을 발견할 수 있었다. 예비 교사들

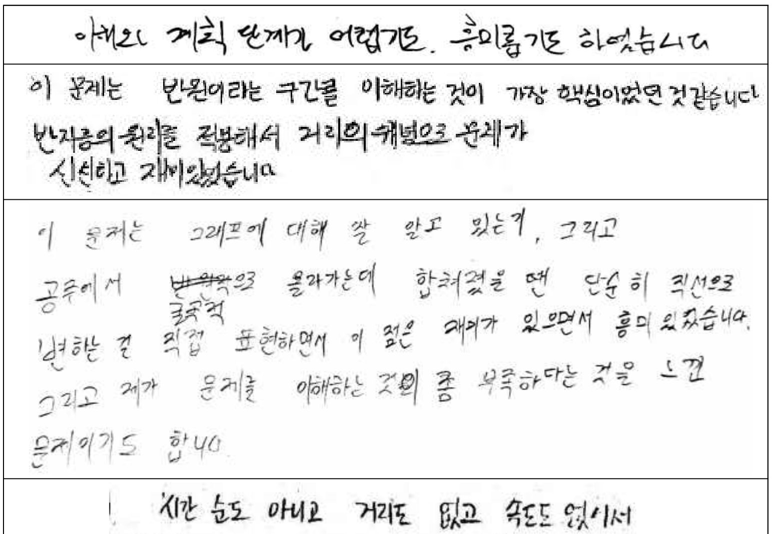
이 오산 둘레 돌아가기 문제해결 활동을 통해 비정형 문제 또는 실생활 관련 문제의 중요성과 수학의 필요성을 느낌으로써, 미래의 자신의 학생들에게도 다양한 실생활 문제를 경험하게 하고 수학의 필요성을 인지하도록 해야겠다고 서술하였다. 또한, 자신이 오산 둘레 돌아가기 문제 해결에서 겪은 당혹감, 즉 productive struggle을 통해 문제해결 과정에서 어려움을 겪는 학생들을 이해할 수 있었다고 언급하기도 하였다([그림 Ⅳ-13]).


이 문제는 상식의 틀을 깨는 문제로
자신의 괴강한 결정을 믿고 꼼꼼히 체크하는 문제라고
생각한다. 여러 의심이 드는 상황이지만 차분히 자신이 생각한
것을 기초로 출발해야 하기 때문이다.

맨날 증명하고 문제만 풀다가 창의적인 문제를
풀려니 당황하기도 하고 신선한 문제였다.
처음엔 거리를 떠올리면 시간과 속력만 생각났다
그러다 시각을 바꿔서 오산.곡주의 거리만 생각해서 문제를 풀었다

이 문제는 일상적인 소재에서 여러 요소 간의 상관관계를 묻는 문제로서
여러 각도에서 생각할 수 있어서 새로웠고, 정형화된 답보다는 색다른
문제해결능력을 신장시키면서 창의성을 이끌어낼 수 있을 것 같다.

[그림 Ⅳ-11] 예비 수학 교사들의 오산 둘레 돌아가기 문제 자체에 대한 소감

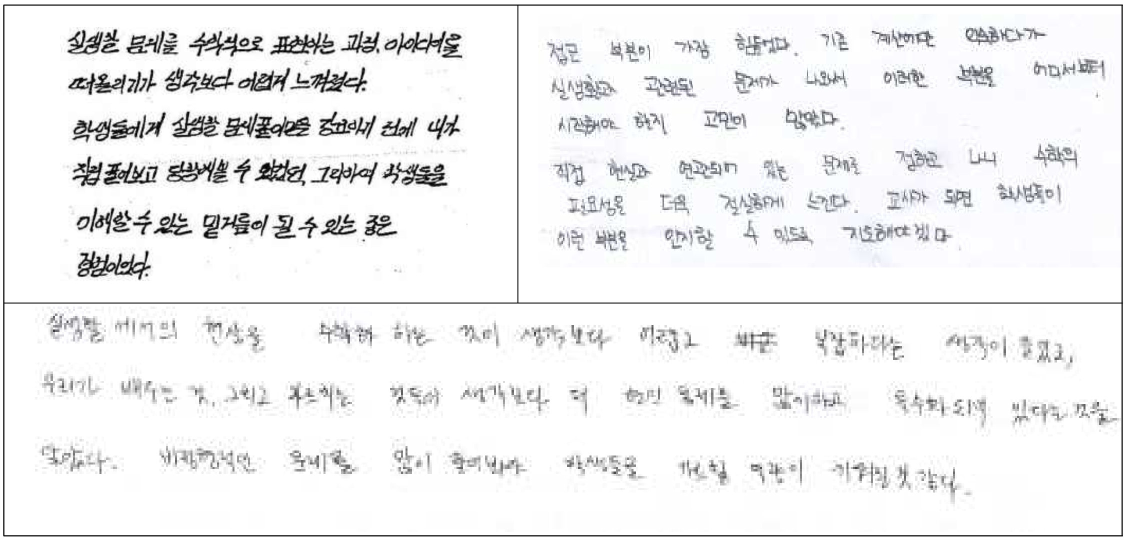

아래의 계획 단계가 어렵기도, 흥미롭기도 하였습니다

이 문제는 반원이라는 구간을 이해하는 것이 가장 핵심이었던 것 같습니다
반지름의 원리를 적용해서 거리의 개념으로 문제가
신선하고 재미있었습니다

이 문제는 그래프에 대해 잘 알고 있는가, 그리고
공부에서 ~~반원~~으로 올라가는데 합쳐졌을 땐 단순히 직선으로
곡선적
변하는 걸 직접 표현하면서 이 점은 재미가 있으면서 흥미있었습니다.
그리고 제가 문제를 이해하는 것의 좀 부족하다는 것을 느낀
문제이기도 합니다

시간 순도 아니고 거리도 없고 속도도 없어서
당황했지만 스스로 설정하니 재밌었다. 그래프라는
개념이 새롭게 정의될 수도 있구나! 싶었다.

[그림 Ⅳ-12] 오산 둘레 돌아가기 문제를 해결하는 과정에 대한 소감



[그림 Ⅳ-13] 미래의 교수·학습 상황에 관련된 소감

Ⅴ. 결론

본 연구에서는 NCTM(2014)에서 제시한 학생들의 수학 학습에 효과적인 교수·학습 행동 원리 중 하나인 productive struggle에 대한 소개와 더불어 국내 연구가 미비한 분야인 예비 수학 교사들의 productive struggle에 대한 조사를 실시하였다. 예비 수학 교사들이 생소하고 비정형적인 수학 문제를 접했을 때, 이를 해결하기 위해서 궁리하고 노력하는 productive struggle 과정을 Polya의 문제해결 4단계에 입각하여 조사하였고, 수집된 자료를 바탕으로 분석해 보았을 때, 연구 결과는 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 예비 수학 교사들의 productive struggle은 그들의 선행지식에 많은 영향을 받았다. 자동차가 움직이는 상황에 관련된 전형적인 문제의 경우 x축은 단조롭게 변화하는 시간을 나타내고, y축은 거리나 속력을 나타낸다. 따라서 학생들은 자연스럽게 흘러가는 시간의 변화에는 주목하지 않고 종속변수인 거리나 속력에만 주목하는 경향이 있다. 오산 둘레 돌아가기 문제는 x축의 변수가 단조롭게 변화하지 않으며, y축의 변수와 동시에 고려해야 해결할 수 있는 기존에 겪어보지 못한 새로운 문제였기 때문에, 예비 수학 교사들도 선행지식이라고 볼 수 있는 ‘자동차의 움직임 상황은 거리와 시간 그래프로 해결해야 한다’는 생각으로 인해 productive struggle을 겪게 되었다. 이렇게 고착된 아이디어는 결코 어렵지 않은 문제임에도 예비 수학 교사들이 문제를 이해할 때뿐만 아니라 해결 계획을 수립하고 그 계획을 실행할 때에도 영향을 주어 다양한 productive struggle을 겪는 상황을 야기하였다.

둘째, struggle이 productive struggle이 되기 위해서는 문제해결 활동을 위한 충분한 시간과 자신의 사고과정을 반성하는 시간을 필요로 한다. 본 연구 활동에서 예비 수학 교사는 충분한 시간을 제공받음으로써 마음껏 궁리하고 자신의 사고과정의 반성을 통해 찾아낸 오류를 적절한 시기에 수정할 수 있는 기회를 통해, struggle을 생산적인 방향으로, 즉 productive struggle로 발전시킬 수 있었다. 충분한 시간을 바탕으로 문제 이해, 계획수립, 계획실행, 반성 단계를 거쳐 주어진 문제와 자신의 풀이 과정을 재해석하면서 자신의 사고과정을 반성하고, 그래프의 개형을 수정 보완하는 일련의 문제해결 과

정을 통하여, 예비 수학 교사들은 '동시에 변화하는 두 양의 관계'와 '그래프'에 대한 근본적인 개념에 대해 더 깊이 이해하고 반성하는 메타인지적인 사고활동을 경험을 할 수 있었다. 이러한 경험을 통해 예비 수학 교사들이 미래에 자신들이 수학 교사가 되었을 때, 학생들이 수학을 배우는 과정에서 겪는 productive struggle은 부정적인 것이 아닌 자연스러운 현상이며, 좌절이 아닌 성장의 기회로 볼 수 있도록 도와줄 수 있으며, 비정형적인 문제 상황의 과제를 제시하여 학생들이 productive struggle를 경험할 기회를 제공함으로써 효과적인 수학학습을 지원할 수 있을 것이다.

셋째, productive struggle의 경험을 통해 예비 수학 교사들에게 기존의 선입견에서 벗어나는 계기를 제공할 수 있었다. 본 연구에 사용된 오산 둘레 돌아가기 문제는 익숙하지 않은 요소들을 포함하고 있어 예비 수학 교사들로 하여금 새로운 생각과 발상을 요구하였다. 이로 인해 productive struggle을 겪은 대부분의 예비 수학 교사들은 문제해결 과정에서 느낀 신선함과 충격을 소감문에 표현하였다. 또한 예비 수학 교사들은 이 과제를 해결하고자 문제와 씨름하며 productive struggle을 경험한 끝에, 그래프에 대한 기존의 선입견에서 벗어나 문제를 해결하며 성공의 기쁨을 경험할 수 있었다. 문제를 이해하고, 해결하기 위해 계획을 세우고, 계획을 실행하는 과정에서 예비 수학 교사들이 도전을 느끼고 흥미로워했음을 파악할 수 있었다.

넷째, 예비 수학 교사들이 비정형화된 수학적 문제나 비수학적 문제 상황에서 출발하는 수학적 모델링을 다뤄본 경험이 많지 않음을 알 수 있었다. 예비 수학 교사들의 오산 둘레 돌아가기 문제를 해결하는 과정이나 그들의 소감을 분석해 보면, 많은 예비 수학 교사들이 생소하고 전형적이지 않은 문제를 접해본 경험이 별로 없음을 언급했다. 본 연구의 결과로 모든 예비 수학 교사들을 일반화할 수는 없지만, 학생들의 문제해결 역량 향상이 꾸준히 강조되고 있음에도 그 학생들을 가르칠 예비 수학 교사들조차 비정형화된 수학 문제나 수학적 모델링 활동을 경험할 수 있는 기회가 많지 않고, 수학적 모델링이나 현실적인 상황 맥락을 수학화하는 과제 해결의 경험과 연습이 부족한 것을 관찰할 수 있었다. 또한, 예비 수학 교사들은 어떤 상황을 수량화 되지 않은 상태로 그래프로 개략적으로 표현하고 설명하는 질적 접근에 익숙하지 않은 모습을 보였다(김남희 외, 2017). 오산 둘레 돌아가기 문제에서도 거리, 시간, 속력 등의 수치적 정보가 없어 그래프 개형을 그리기에 정보가 부족하다는 인식을 가지고 있었다. 그럼에도 불구하고 예비 수학 교사들 대부분은 자신들의 문제 해결 과정을 반성하고 수정하면서 문제 해결을 위한 궁리를 지속적으로 시도하는 등의 생산적인 성향을 보임으로써 그들의 productive struggle 과정을 관찰할 수 있었다.

Mason & Johnston-Wilder(2004)는 교사가 학생들을 가르치거나 어떤 과제를 제공할 때, 학생들의 행동에 민감하게 반응해야 한다고 주장했다. 교사는 문제해결을 하는 과정에서 학생들이 어떻게 사고하는지, 어떤 어려움을 겪는지, 심리적 상태는 어떠한지, 실제 행동 기저는 무엇인지, 어떤 문제에 몰입하는지 등을 파악하고, 학생의 잠재력을 사용하도록 요구하고 이끌어야 한다고 언급했다. 따라서 본 연구에서 제안하고자 하는 것은 예비 수학 교사들부터 문제해결 상황에서 productive struggle을 경험함으로써, 수학 학습에서 productive struggle이 필수적인 요소임을 알고, 학생들의 struggle을 이해하며, 어떤 부분이 학생들의 흥미와 몰입을 유도하는지, 어떻게 수학 학습을 촉진할 수 있는지 생각해 볼 수 있는 기회를 제공받아야 한다는 것이다. 이는 예비 수학 교사의 수학 교사로서의 전문성 향상을 위한 교육방법 개선에 대한 시사점이기도 하다. 예비 수학 교사들은 오랜 기간 동안 학생으로서의 경험으로부터 교수·학습 방법에 대한 신념을 형성해왔으며 이는 교사로서 교수·학습 과정에서 어떠한 의사결정을 내릴지에 대해서도 영향을 미친다(Kim, 2016; Pajares, 1992; Richardson, 2003). 따라서 예비 수학 교사를 양성하는 프로그램에서 예비 수학 교사들에게 productive struggle을 경험할 수 있는 기회를 갖도록 해야 나중에 교사가 되어서 자신의 학생들에게 효과적이고 심도 있는 수학 학습을 위한 productive struggle을 지원할 수 있는 교육 환경을 제공할 수 있을 것이다.

본 연구는 productive struggle에 관한 국내 연구의 문을 여는 역할 정도만 했다고 할 수 있다. 후속 연구로는 더욱 다양한 상황과 문제를 통해 예비 수학 교사들이 겪는 productive struggle의 유형을 좀 더 일반화할 수 있는 연구가 필요하며, 어떤 요소가 struggle을 생산적인 방향으로 이끄는지, 어떤 교수·학습 방법이 productive struggle을 촉진할 수 있는지 등과 같은 productive struggle에 관한 다양한 연구가 필요할 것이다.

참고 문헌

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥 (2017). **수학교육과정과 교재연구**, 서울: 경문사.

김상미 (2018). 소수 나눗셈 수업의 계획, 실행, 비평 과정에서 초등교사의 성찰과 실천에 관한 사례연구. **C-초등수학교육, 21**(3), 309-327.

김선희, 김수민 (2018). 언어 네트워크 분석법을 이용한 최근 수학교육 연구 동향 탐색 - 2017년 국제수학교육 학술대회 발표 논문을 중심으로 -. **학교수학, 20**(4), 591-608.

김응환 (2017). 얼굴그림(Face Plot)을 활용한 수학 영재교육의 사례연구. **한국학교수학회논문집, 20**(4), 369-385.

Dewey, J. (1910, 1933). *How we think*. Boston: Heath.

Festinger, L. (1957). *A theory of cognitive dissonance. Evanston*, IL: Row, Peterson.

Granberg, C. (2016). Discovering and addressing errors during mathematics problem-solving－A productive struggle? *The Journal of Mathematical Behavior, 42*, 33-48.

Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child Development, 41*, 55 - 70.

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). *The effects of classroom mathematics teaching on students' learning.* In J. Frank & K. Lester (Eds.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 371 - 404). Charlotte: Information Age.

Hiebert, J., & Wearne, D. (2003). *Developing understanding through problem solving*. In H. L. Schoen & R. I. Charles (Eds.), Teaching mathematics through problem solving: Grades (pp. 6 - 12). Reston, VA: NCTM.

Jackson, R. R., & Lambert, C. (2010). *How to Support Struggling Students. Mastering the Principles of Great Teaching series.* VA: ASCD..

Kahan, J. A., & Schoen, H. L. (2009). Visions of problems and problems of vision: Embracing the messiness of mathematics in the world. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), p. 168-178.

Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science, 38*(5), 1008 - 1022.

Kapur, M., & Bielaczyc, K. (2012). Designing for productive failure. *Journal of the Learning Sciences, 21*(1), 45 - 83.

Kim, S. (2016). The Influence of Preservice Teachers' Experience and Beliefs Related to Technology Use in Mathematics Class on Their Technology-related Knowledge. ***Journal of the Korean School Mathematics Society, 19***(4), 459-478.

Livy, S., Muir, T., & Sullivan, P. (2018). Challenging tasks lead to productive struggle! *Australian*

Primary Mathematics Classroom, 23(1), 19-24.
Loibl, K., & Rummel, N. (2014). Knowing what you don't know makes failure productive. *Learning and Instruction, 34*, 74 - 85.
Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). 수학 과제의 설계와 활용 (권오남 외 11명 역). 서울: 경문사
Matthews, P. G., & Ellis, A. B. (2018). Natural alternatives to natural number: The case of ratio. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 19 - 58.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.
Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research, 62*(3), 307-332.
Paoletti, T. (2015). Students' reasoning when constructing quantitatively rich situations. Paper presented at the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education, Pittsburgh, PA.
Piaget, J. (1960). *The psychology of intelligence*. Garden City, NY: Littlefield, Adams Publishing.
Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Garden City, NY: Doubleday Anchor Books.
Reinhart, S. C. (2000). Never Say Anything a Kid Can Say! *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(8), 478 - 83.
Renkl, A., & Atkinson, R. K. (2007). Interactive learning environments: Contemporary issues and trends. An introduction to the special issue. *EducationalPsychology Review, 19*(3), 235 - 238.
Richardson, V. (2003). P*reservice teachers' beliefs*. In J. Raths & A. C. McAninch (Eds.), Teacher beliefs and classroom performance: The impact of teacher education (pp. 1-22). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic press.
Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 344 - 350.
Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50 - 80.
Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). I*mplementing standards-based math instruction: A casebook for professional development* (2nd ed.). New York: Teachers College Press.
Sherman, H. J., Richardson, L. I., & Yard, G. J. (2009). *Teaching Learners who Struggle with Mathematics: Systematic Intervention and Remediation* (2nd ed.). New Jersey: Allyn & Bacon.
Stevens, I. E., Paoletti, T., Moore, K. C., Liang, B., & Hardison, H. (2017). *Principles for designing tasks that promote covariational reasoning*. In A. Weinberg, C. Rasmusssen, J. Rabin, M. Wawro, & S. Brown (Eds.), Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 928-936). San Diego, CA.
Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among US and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of*

Mathematical Behavior, 48, 95-111.

Townsend, C., Slavit, D., & McDuffie, A. R. (2018). Supporting all learners in productive struggle. *Mathematics Teaching in the Middle School, 23*(4), 216-224.

Warshauer, H. K. (2015). Productive struggle in middle school mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(4), 375-400.

Warshauer, H. K. (2011). The role of productive struggle in teaching and learning middle school mathematics (Doctoral dissertation). The University of Texas at Austin, Austin, TX.

Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 60*(3), 297 321.

Zeybek, Z. (2016). Productive struggle in a geometry class. *International Journal of Research in Education and Science, 2*(2), 396-415.

A Study on Productive Struggle in Mathematics Problem Solving

Kim, Somin[3)]

Abstract

Productive struggle is a student's persevering effort to understand mathematical concepts and solve challenging problems that are not easily solved, but the problem can lead to curiosity. Productive struggle is a key component of students′ learning mathematics with a conceptual understanding, and supporting it in learning mathematics is one of the most effective mathematics teaching practices. In comparison to research on students' productive struggles, there is little research on preservice mathematics teachers' productive struggles. Thus, this study focused on the productive struggles that preservice mathematics teachers face in solving a non-routine mathematics problem. Polya's four-step problem-solving process was used to analyze the collected data. Examples of preservice teachers' productive struggles were analyzed in terms of each stage of the problem-solving process. The analysis showed that limited prior knowledge of the preservice teachers caused productive struggle in the stages of understanding, planning, and carrying out, and it had a significant influence on the problem-solving process overall. Moreover, preservice teachers' experiences of the pleasure of learning by going through productive struggle in solving problems encouraged them to support the use of productive struggle for effective mathematics learning for students, in the future. Therefore, the study's results are expected to help preservice teachers develop their professional expertise by taking the opportunity to engage in learning mathematics through productive struggle.

Key Words : Productive struggle, Problem solving, Task and activity, Preservice mathematics teachers education

Received September 6, 2019
Revised September 24, 2019
Accepted September 24, 2019

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C70, 97D50
3) Inha University (thals8410@gmail.com)