한국학교수학회논문집 제 22 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 22, Number 3, 303-327, September 2019
http://doi.org/10.30807/ksms.2019.22.3.007

초등학교 수학에서 곱셈의 통합적 접근에 대한 탐색

이지영[1)]

본 연구는 초등학교 수학에서 곱셈에 대한 학생들의 이해를 돕는 하나의 방안으로 곱셈의 통합적 접근을 제안하였다. 곱셈의 통합적 접근이란 수학 수업에서 학생들이 하나의 곱셈 상황을 다양한 방법으로 해결하고 서로의 방법에 대해 탐색하고 논의하면서 곱셈에 대해 폭넓은 이해를 하도록 하는 것이다. 곱셈의 통합적 접근은 곱셈에 대한 다양한 접근, 일관적 접근, 특정한 접근을 강조한 여러 선행 연구를 기반으로 도출되었다. 연구 결과, 곱셈의 통합적 접근은 하나의 곱셈 상황을 크게 4가지 방법으로 해석할 수 있으며 각각의 방법은 선행 연구에서 강조한 곱셈의 중요한 특성과 모두 연결된다. 또한, 곱셈의 통합적 접근은 곱셈뿐만 아니라 나눗셈, 분수 및 분수의 연산, 비와 비율, 비례 등으로 자연스럽게 확장되는 데 중요하다는 것을 이론적으로 확인하였다. 이를 통해 초등학교 수학에서 다루는 곱셈과 관련하여 실제 수업을 진행하는 교사에게 시사점을 제공하고자 한다.

주요용어 : 곱셈, 곱셈의 통합적 접근, 승수, 배, 연산자, 스칼라

Ⅰ. 서론

초등학교 수학에서 곱셈은 그 자체로도 중요한 학습 주제이지만 나눗셈, 분수, 비와 비율, 비례 등 다른 주제에 기반이 되기 때문에 핵심이 된다(Beckmann & Izsák, 2015; Kaput & West, 1994; Vergnaud, 1994). 학생들은 자신이 알고 있는 곱셈 관련 지식을 이용해서 나눗셈, 분수, 비와 비율, 비례 등으로 사고를 확장해나간다. 이는 학생들이 곱셈을 학습할 때 여러 상황이나 후속 학습으로 확장할 수 있는 다양한 경험을 하는 것이 중요하다는 것을 시사한다.

2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015)에서는 "곱셈의 의미는 배의 개념과 동수누가를 통하여 다루고, 1의 곱과 0의 곱은 실생활과 관련지어 다룬다(p. 10)."라고 제시하여 곱셈에 대한 초기 경험으로 동수누가와 배의 의미를 강조하고 있다. 이에 곱셈이 처음 제시되는 초등학교 2학년 교과서에서는 '몇씩 몇 묶음' 상황을 '몇의 몇 배'와 연결하여 곱셈식을 도입한다(교육부, 2019a). 동수누가는 합성 단위를 반복하는 것이지만, 배의 의미는 두 양 사이의 관계로 확대 및 축소 상황과 관련된다(강흥규, 2009; 김유경, 방정숙, 2014). 이렇듯 배의 의미는 동수누가와 근본적으로 다르지만, 교과서에서 다루는 대부분의 배의 의미는 동수누가와 같이 이산량을 반복하는 상황으로 제시되어 있다(정영옥, 2013).

그러나 곱셈을 동수누가로만 이해하게 되면 곱셈뿐만 아니라 후속 주제를 학습하는 데에도 많은 어려움이 발생한다. 대표적으로 승수가 분수나 소수인 상황에서는 동수누가 방법을 적용할 수 없고 주

* MSC2010분류 : 97C10, 97D10
1) 송신초등학교 교사 (ez038@naver.com)

어진 상황을 왜 곱셈식으로 표현하는지를 이해하기 어렵다(Izsák & Beckmann, 2019). 이에 임재훈(2017)은 단위가 반복되는 '횟수로서의 배'의 의미뿐만 아니라 하나의 단위가 확대되는 '연산자로서의 배'의 의미도 중요하다고 하였다. 하지만, 곱셈을 '연산자로서의 배'의 의미로 확대 및 축소 상황과 관련하여 이해한다고 하여도 여전히 한계는 있다. 배는 '쿠키 6개는 쿠키 2개의 3배'처럼 같은 종류의 두 양 사이의 곱셈적 관계를 나타낼 수는 있어도, '6km는 2시간의 3배'처럼 다른 종류의 두 양 사이의 곱셈적 관계를 나타내기에는 어색함이 있기 때문이다(임재훈, 2015). 그러나 다른 종류의 두 양 사이의 곱셈적 관계는 곱셈에서 결정적인 역할을 하는 내포량(intensive quantity)과 관련되고(이지영, 2018; Schwartz, 1988), 분수의 나눗셈, 비와 비율, 비례 등에서 중요한 역할을 하는 단위 비율과도 직접적으로 연결되기 때문에 곱셈에서부터 이를 경험할 필요가 있다.

곱셈과 관련된 많은 연구에서는 곱셈이 똑같은 묶음, 곱셈적 비교, 직사각형 넓이 및 배열, 조합 등 여러 상황에서 드러난다는 점에 주목하고, 곱셈에 대한 폭넓은 이해를 위해 다양한 상황에서 곱셈을 경험할 필요가 있다고 하였다(예, 정영옥, 2013; Greer, 1994; Schwartz, 1988; Vergnaud, 1994). 반면에 Izsák & Beckmann(2019)은 서로 다른 상황임에도 불구하고 똑같은 곱셈식으로 표현할 수 있다는 일관적인 측면에 주목하고, 측정을 기반으로 곱셈을 하나의 의미로 정의할 것을 제안하였다. 한편 Steffe & Olive(2010)는 곱셈의 중요한 특성을 나타내는 조작으로 단위 조정 조작(Units-coordinating operation)을, Confrey(1994)는 스플리팅 조작(Splitting operation)을 강조하였다. 이렇듯 곱셈과 관련된 선행 연구에서는 곱셈에 대한 다양한 접근, 일관적 접근, 또는 특정한 접근을 강조하면서 다양한 관점을 취하고 있다.

본 연구에서는 위의 선행 연구들이 강조한 내용을 통합하여, 하나의 곱셈 상황에 여러 가지 방법으로 접근하는 '곱셈에 대한 통합적 접근'을 제안한다. 본 연구의 기본 가정은 초등학교 수학에서 하나의 곱셈 상황을 여러 가지 방법으로 접근하는 것이 곱셈을 이해하는 것뿐만 아니라 다른 주제로 확장하는 데 매우 중요하다는 것이다. 또한 수업에서 학생들에게 하나의 곱셈 상황을 다양하게 해석하는 기회를 제공함으로써, 어떤 해석이 상황에 더 적절한지, 각각의 해석들이 서로 어떻게 연결되는지 등과 관련하여 생산적인 논의를 일으키고 이를 통해 곱셈을 보다 심도 있게 이해하도록 도울 수 있을 것으로 본다. 본 연구는 이러한 기본 가정에 대한 이론적인 고찰에 초점을 두고 있다.

곱셈과 관련된 국내 연구는 곱셈 관련 주제에 대해 수학적 또는 역사적으로 탐색한 연구(예, 임재훈, 2014; 정연준, 2011), 여러 나라의 교과서에 제시된 곱셈 관련 내용을 비교한 연구(예, 김현, 조영미, 정연준, 2016; 정연준, 조영미, 2012), 곱셈의 지도 방안과 관련된 연구(예, 강문봉, 김정하, 2018; 강흥규, 2009; 박만구, 박경선, 2009; 정영옥, 2013), 곱셈, 곱셈식, 계산 원리 등에 대한 학생들의 이해와 관련된 연구(예, 강흥규, 심선영, 2010; 김유경, 방정숙, 2014; 김주창, 이광호, 2019; 이소민, 김진호, 2009; 이종욱, 2007), 곱셈과 나눗셈, 비와 비율, 비례 추론 등의 관계에 대한 연구(예, 김정원, 방정숙, 2013; 한은혜, 류희수, 2008) 등으로 다양하다. 그러나 초등 수학에서 하나의 곱셈 상황에 여러 가지 방법으로 접근하는 것이 왜 중요하고, 어떻게 이루어질 수 있을지를 탐색한 연구는 찾아보기 힘들다.

이에 본 연구에서는 선행 연구에서 제시하고 있는 곱셈에 대한 다양한 관점을 정리하고, 본 연구에서 제안하는 곱셈의 통합적 접근을 설명한다. 이와 함께 학교 수학에서 곱셈의 통합적 접근을 어떻게 이끌 수 있는지에 대한 몇 가지 방안을 제시한다. 또한 곱셈의 통합적 접근이 후속 주제와 어떻게 연결되는지를 논한다. 이를 바탕으로 실제 수업을 진행하는 교사들에게 곱셈에 대한 교수・학습과 관련하여 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 곱셈에 대한 다양한 관점

본 장에서는 곱셈과 관련된 선행 연구를 곱셈에 대한 다양한 접근을 강조한 연구, 곱셈에 대한 일관적 접근을 강조한 연구, 곱셈에 대한 특정한 접근을 강조한 연구로 구분하여 살펴보고, 각각의 특징과 한계점에 대해 논한다. 또한 본 연구에서 강조하고 있는 곱셈의 통합적 접근과 관련하여 하나의 곱셈 상황에 대해 두 가지 방법으로 접근하는 것을 제시한 연구에 대해 탐색한다. 마지막으로 현행 교육과정에 의한 교과서에서 곱셈을 어떻게 다루고 있는지 간략하게 제시한다.

1. 곱셈에 대한 다양한 접근을 강조한 연구

곱셈에 대한 다양한 접근을 강조한 연구들은 곱셈이 서로 다른 상황에서 드러나기 때문에, 곱셈을 개념적으로 이해하기 위해서는 여러 상황에서 다양한 곱셈의 의미를 파악할 수 있어야 한다고 주장한다(예, Greer, 1994; Otto et al., 2011; Schwartz, 1988; Vergnaud, 1994). 정영옥(2013)은 곱셈 상황을 다양한 유형으로 구분한 여러 선행 연구를 정리하여 4×3에 해당하는 곱셈 상황을 <표 Ⅱ-1>과 같이 제시하였다. 똑같은 묶음 상황은 크기가 같은 합성 단위가 반복하여 나타나는 것으로 묶음 상황뿐만 아니라 비율, 가격 등의 상황을 포함한다. 곱셈적 비교 상황은 주어진 양이 확대 및 축소되는 것이며 같은 종류의 측정 단위로 측정한 두 대상의 크기를 곱셈적으로 비교하는 것이다. 직사각형 넓이와 배열 상황은 가로와 세로의 길이를 이용하여 직사각형의 넓이를 구하거나 직사각형 모양으로 배열된 대상의 개수를 곱셈을 이용하여 구하는 것이다. 데카르트 곱 상황은 조합과 같이 두 개의 집합으로 만들 수 있는 순서쌍의 모든 경우의 수를 구하는 것이다. 곱셈에 대한 다양한 접근을 강조한 연구들은 학교 수학에서 곱셈 상황이 똑같은 묶음에 지나치게 치중되어 있는 것을 지적한다. 곱셈을 똑같은 묶음 상황으로만 이해하게 되면 곱셈의 다양한 측면을 고려하지 못하고 분수나 소수의 곱셈 상황에서 이를 개념적으로 이해하는 데 어려움이 있을 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 4×3과 관련된 다양한 곱셈 상황(정영옥, 2013, p. 894)

상황	예	대칭성
똑같은 묶음	(a) 미정이는 한 봉지에 4개씩 들어 있는 과자 3봉지를 가지고 있다. 미정이가 가진 과자는 모두 몇 개인가?(묶음) (b) 3명의 아이들에게 각각 4개의 과자를 주려고 한다. 과자는 모두 몇 개가 필요가?'(몫) (c) 아기 코끼리의 몸무게는 하루에 4파운드씩 늘어난다. 8일째에는 아기 코끼리의 몸무게가 몇 파운드가 되겠는가?'(비율) (d) 1개에 4센트인 풍선껌의 3개의 가격은 얼마인가?'(가격, 비율) (e) 한 번에 4칸씩 점프한다면, 3번 점프한 후의 위치는 어디인가?(수직선)	비대칭
곱셈적 비교	(a) 민수는 민희의 3배만큼의 사과를 가지고 있다. 민희가 4개의 사과를 가지고 있다면, 민수가 가진 사과는 몇 개인가?' (b) 민수는 4m의 끈을 가지고 있다. 민희는 민수가 가진 끈의 길이의 3배 만큼 되는 끈을 가지고 있다면 민희가 가진 끈의 길이는 얼마인가?	대칭
직사각형 넓이와 배열	(a) 가로 3m, 세로 4m인 직사각형의 넓이는 얼마인가?' (b) 달걀이 상자 안에 3개씩 4줄이 있다면, 상자 안에 든 달걀은 몇 개인가?	대칭
데카르트 곱	(a) 남학생 4명과 여학생 3명이 춤을 추고 있다. 남학생과 여학생의 가능한 쌍은 모두 몇 쌍인가?	대칭

그러나 곱셈에 대한 다양한 접근을 강조한 연구에도 몇 가지 한계점이 나타난다. 첫째, 곱셈의 일관

적인 측면을 고려하기에 어려움이 있다는 것이다. Izsák & Beckmann(2019)은 곱셈을 다양한 상황에서 폭넓게 이해하는 것이 중요하다는 점에 동의하지만, 선행 연구에서 서로 다른 상황임에도 불구하고 왜 똑같은 곱셈식으로 표현되는지와 관련하여 일관성 측면에서 논의하지 않았다는 점을 비판한다. 예를 들어, 학생들은 직사각형 넓이 상황에서 수치적으로 계산하여 넓이를 구할 수는 있지만 왜 길이(cm)와 길이(cm)를 곱하면 넓이(㎠)가 나오는지를 이해하지 못한다. 이에 Izsák & Beckmann(2019)은 여러 곱셈 상황에 내재되어 있는 공통적인 구조를 강조하여 곱셈을 정의할 필요가 있다고 하였다.

둘째, 학생들이 한 차시나 한 단원에서 곱셈의 다양한 상황을 모두 경험하는 것은 쉽지 않다는 것이다. 특히, 똑같은 묶음 상황에 비해 곱셈적 비교, 직사각형 넓이, 데카르트 곱 상황 등은 비율, 간접 측정, 조합 등 여러 수학 주제와 연결되어 있기 때문에 같은 단원에서 동시적으로 제시되지 않을뿐더러, 학생들의 인지적 수준 측면에서도 이해하기에 더 어려울 수 있다. 그러나 학생들의 인지적 수준과 접근 가능성만을 고려하여, 곱셈을 도입할 때 똑같은 묶음 상황을 동수누가로만 경험하게 한다면 곱셈에 대한 학생들의 이미지가 고착될 가능성이 있다. 이는 다른 곱셈 상황과 후속 주제로 확장해나가는 데 걸림돌로 작용할 수 있다.

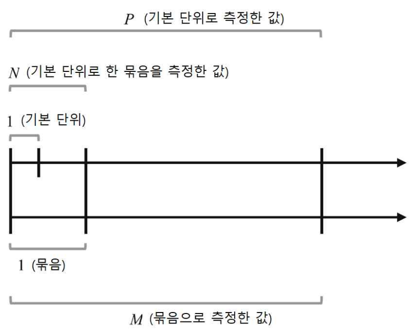
이러한 한계점들은 곱셈에 대한 다양한 접근에서 상황의 다양성뿐만 아니라 하나의 상황에 다양하게 접근하는 방향에 대한 탐색도 함께 이루어져야 한다는 것을 시사한다.

2. 곱셈에 대한 일관적 접근을 강조한 연구

Izsák & Beckmann(2019)은 조정된 측정(coordinated measurement) 관점을 통해 곱셈을 [그림 Ⅱ-1]과 같이 정의하였다. 이는 자연수뿐만 아니라 분수, 소수 맥락에서 일관적으로 적용되며, 측정을 기반으로 하여 똑같은 묶음, 곱셈적 비교, 직사각형 넓이, 데카르트 곱 상황과 같은 다양한 곱셈 상황뿐만 아니라 비와 비율, 비례 추론 등과 같은 후속 주제에서도 일관적으로 적용가능하다고 하였다.

$$N \cdot M = P$$

(a) 피승수(N): 몇 개의 기본 단위가 하나의 묶음에 해당하는가? (즉, 하나의 묶음을 기본 단위로 측정한 값)
(b) 승수(M): 몇 개의 묶음이 결과에 해당하는가? (즉, 곱을 묶음으로 측정한 값)
(c) 결과(N·M) : 몇 개의 기본 단위가 결과에 해당하는가? (즉, 결과를 기본 단위로 측정한 값)



[그림 Ⅱ-1] 조정된 측정으로서의 곱셈(Izsák & Beckmann, 2019)

조정된 측정의 기본적인 아이디어는 곱셈의 결과가 되는 하나의 양을 두 가지 다른 단위 즉, 기본 단위(base units)와 묶음(groups)으로 동시에 측정된 양으로 보는 것이다. 즉, 곱셈의 결과는 한 묶음을 단위로 하여 측정하였을 때에는 M이지만, 기본 단위로 측정하였을 때에는 P가 된다. 연구자들은 이러한 구조가 곱셈적 구조의 핵심이라고 보았다.

연구자들은 조정된 측정으로 곱셈을 일관적으로 정의할 때 몇 가지 주요 사항을 제안하였다. 그 중 일부에 대해 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 곱셈은 반복(iterating)과 분할(partitioning)에 모두 관련되어

있다. 전형적으로 곱셈은 반복으로, 나눗셈은 분할로 구분하지만 측정 결과를 두 가지 단위로 각각 측정하는 과정은 양을 똑같은 크기의 부분으로 분할하고 이를 측정하기 위해 반복하는 것이 통합되어 있는 과정이다.

둘째, 하나의 똑같은 묶음 상황이라도 N과 M에 해당하는 수가 일관적으로 주어지기 보다는 학생들이 무엇을 기본 단위로, 묶음으로, 곱으로 보는지에 따라 곱셈식은 다양하게 나타낼 수 있다. 예를 들어, 그릇 7개를 만드는 데 한 그릇 당 찰흙 3kg을 사용하는 상황에서 어떤 학생은 1기본 단위를 1kg으로, 1묶음을 그릇 한 개로 하여, 3(그릇 한 개에 해당하는 kg의 수)×7(전체에 해당하는 그릇의 개수)=21(전체에 해당하는 kg의 수)로 문제를 해결할 수 있다. 어떤 학생은 위의 상황을 $\frac{1}{3}$(1kg에 해당하는 그릇의 개수)×21(전체에 해당하는 kg의 수)=7(전체에 해당하는 그릇의 개수)로 표현할 수 있다. 또 다른 학생은 21(전체에 해당하는 kg의 수)×$\frac{1}{7}$(그릇 한 개에 해당하는 전체 무게)=3(그릇 한 개에 해당하는 kg의 수)로 표현할 수 있다.

셋째, N과 M은 비대칭적이다. 따라서 교환법칙은 계산할 때는 가능하지만 문제 상황을 모델링할 때는 불가능하다. 예를 들어, 그릇 하나 당 찰흙 3kg씩 7개의 그릇을 만드는 것과 그릇 하나 당 찰흙 7kg씩 3개의 그릇을 만드는 것은 곱의 결과가 모두 21kg이라고 하더라도 서로 다른 상황이다. 이러한 비대칭성은 Schwartz(1988)가 곱셈을 지시체가 변하는 구조로 제시할 때 하나를 내포량으로, 다른 하나를 외연량으로 구분하는 것과는 다르다. 조정된 측정 관점에서의 비대칭성은 N과 M이 서로 다른 측정 단위로 측정한 양이라는 것에서 드러난다.

넷째, 똑같은 묶음 상황뿐만 아니라 직사각형 배열 및 조합과 같이 두 양이 서로 대칭적인 곱셈 상황에서도 이런 비대칭성을 그대로 적용하여 똑같은 묶음, 곱셈적 비교, 직사각형 넓이, 데카르트 곱 상황을 모두 설명할 수 있다. 직사각형 넓이를 구하는 상황에서는 기본 단위를 단위 정사각형으로, 묶음을 한 줄이나 한 열로 보고, 줄이나 열로 묶어서 전체 직사각형을 측정한 결과를 단위 정사각형을 기본 단위로 측정한 결과로 재해석하는 과정으로 설명할 수 있다. 또한 남학생과 여학생이 짝을 이룰 수 있는 경우의 수를 구하는 조합 상황에서는 기본 단위를 짝의 수로, 묶음을 여학생 한 명이 만들 수 있는 모든 짝의 수로 볼 수 있다. 이러한 접근법은 Schwartz(1988)가 제시한 길이 단위와 길이 단위를 곱해서 다른 차원인 넓이 단위를 만드는 과정을 설명하지 못하는 것에 비해 상황에 적합한 측정 단위를 설정하여 곱셈의 결과를 측정 결과로 해석할 수 있다는 점에서 확장성이 있는 것으로 보았다.

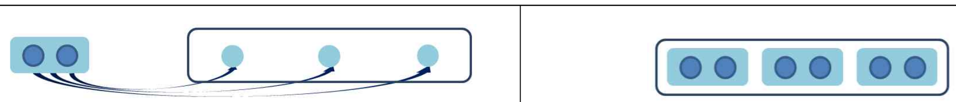
곱셈에 대한 일관적 접근을 강조한 연구는 곱셈에 내재되어 있는 공통적인 구조를 측정을 기반으로 일관적으로 정의하고 다양한 상황을 하나의 방법으로 해석하도록 한다는 점에서 의미가 있지만, 학생들이 곱셈이 드러나는 서로 다른 상황 자체에 대해 탐색하기 보다는 각각의 상황에서 결과를 두 가지 단위로 측정하고, 측정한 값들을 서로 조정하는 것에만 치중할 수 있다는 한계를 갖는다. 그러나 찰흙으로 그릇을 만드는 상황에서 학생들이 기본 단위와 묶음을 무엇으로 설정하는가에 따라 하나의 상황을 여러 가지 방법으로 접근하고, 여러 곱셈식으로 나타낼 수 있다는 가능성을 제시하였으므로 본 연구에서는 이 부분에 더욱 초점을 둔다.

3. 곱셈에 대한 특정한 접근을 강조한 연구

곱셈에 대한 특정한 접근을 강조한 연구들은 학교 수학에서 곱셈을 하나의 합성 단위가 반복되는 동수누가에만 치중하는 것을 문제 삼고, 이를 보완할 수 있으면서 곱셈의 독특한 특징을 담고 있는 조작을 강조한다. 대표적으로 Steffe & Olive(2010)의 단위 조정 조작과 Confrey(1994)의 스플리팅 조

작을 예로 들 수 있다.

Steffe(1994)와 Steffe & Olive(2010)는 [그림 Ⅱ-2]와 같은 단위 조정 조작이 내재화된 단위 조정 스킴을 곱셈 스킴으로 제시한다. 단위 조정 스킴은 한 학생이 2와 3을 곱한 결과를 구하기 위해서 구체적인 활동을 하기 전에 머릿속에서 2개로 이루어진 합성 단위(이하, 2-단위)와 3개로 이루어진 합성 단위(이하, 3-단위)를 조정하는 것으로, 3-단위를 이루는 기본 단위 각각에 2-단위를 삽입하여, 2개씩 3묶음인 상황으로 이해하는 것이다.



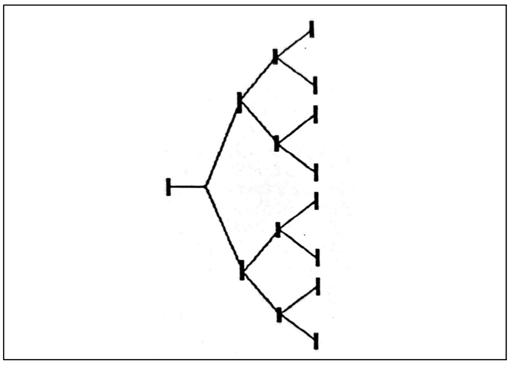
(a) 2-단위와 3-단위를 조정 (b) 3-단위의 기본 단위 각각에 2-단위를 삽입

[그림 Ⅱ-2] Steffe & Olive(2010)의 단위 조정 스킴

[그림 Ⅱ-2]의 단위 조정 스킴이 2개씩 3묶음과 관련된다는 점에서 동수누가와 차이가 없는 것으로 볼 수 있지만, [그림 Ⅱ-2]의 (b)에 제시된 구조는 2씩 3묶음으로 순차적으로 구성할 수 있을뿐만 아니라 3묶음의 각 묶음에 2개씩 동시적으로 분배되는 것으로 구성할 수도 있다. 즉 학생들의 정신적 활동에 따라 합성 단위인 2-단위가 3번 반복되는 과정으로 접근할 수도 있고, 합성 단위인 3-단위의 기본 단위에 합성 단위 2-단위가 각각 분배되는 과정으로 접근할 수도 있다. Steffe & Olive(2010)는 “단위 조정”을 하는 정신적 활동을 후자의 방법으로 설명하고 있다. 본 연구에서 Steffe & Olive(2010)의 단위 조정 스킴에 초점을 맞추는 이유가 여기에 있다. 더욱 주목할만한 점은 2와 3이 각각 합성 단위(즉, 두 가지 수준의 단위 구조)라는 점에서, 두 합성 단위를 조정한 결과로 구성된 단위 구조는 단위의 단위의 단위(즉, 세 가지 수준의 단위 구조)로 더욱 복잡해진다는 것이다. 따라서 학생들은 점점 더 복잡해지는 상황에서 단위 조정 스킴을 이용하고 이를 통해 곱셈뿐만 아니라 다양한 분할 조작에 참여하면서 분수와 관련된 다양한 지식(예, 합성 단위 분수(15의 1/3), 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수 곱셈)을 구성해 나간다. 즉, 단위 조정 스킴은 반복 뿐만 아니라 분할 과정과도 연결된다.

한편, Confrey(1994)의 스플리팅[2]은 [그림 Ⅱ-3]과 같이 원본의 여러 복사본을 동시적으로 만들거나 똑같은 크기의 부분들을 동시적으로 만드는 행동을 일컫는다. 이러한 행동은 종종 수형도로 표현된다. Steffe & Olive(2010)와 Izsák & Beckmann(2019)은 세기와 측정을 기반으로 하여 동수누가와 곱셈적 사고 두 가지를 모두 통합하고 있다면, Confrey는 스플리팅을 세기나 반복의 관점과 독립적으로 구분되면서 상호보완적인 기초적인 인지 스킴으로 보았다. Confrey는 스플리팅을 어린 나이의 학생에게서 이른 시기부터 나타나는 가장 기초적인 형태로 본다(예, 반으로 계속 나누기). 동수누가와 같은 덧셈적 구조는 하나의 합성 단위를 확인하고 그 단위를 반복하여 연속적으로 세는 것이라면, 스플리팅은 동시에 일어나는 일-대-다 행동(one-to-many)이다.

2) Confrey(1994)의 스플리팅은 Steffe & Olive(2010)가 제시한 스플리팅 스킴과 다르다. Confrey(1994)는 스플리팅을 곱셈과 나눗셈의 기초가 되는 초기 조작으로 본 반면에, Steffe & Olive(2010)의 스플리팅은 동시분할(Simultaneous partitioning), 등분할(Equi-partitioning)보다 더 수준이 높은 조작 및 스킴으로 보고 반복과 분할이 동시에 일어나는 것으로 보았다.



[그림 Ⅱ-3] 스플리팅(Confrey, 1994, p. 302)

Confrey(1994)는 스플리팅을 덧셈과 구분되는 곱셈의 독특한 특징을 나타내는 스킴으로 보지만, 이에 대한 곱셈의 문제 상황을 구체적으로 제시하지는 않았다. 다만 똑같이 나눠 갖기(sharing), 접기(folding), 대칭적으로 나누기(dividing symmetrically), 확대하기(magnifying) 등 학생들이 하는 행동과 관련짓고 있다. Confrey(1994)는 양의 유리수는 각각의 소수에 대한 스플리팅 구조가 서로 합성되어 구성될 수 있다고 보았다. 즉, 6과 같은 합성수는 2와 3의 스플리팅 구조가 합성된 것으로 1이 두 배가 되고(two-split), 다시 각각이 3배가 되거나(three-split), 그 반대 과정으로 구성될 수 있다고 하였다.

Confrey(1994)는 교육과정에서 세기와 관련된 행동과 스플리팅과 관련된 행동을 구분하고 곱셈을 경험하는 이른 시기에서부터 두 가지 모두를 개발하도록 도울 필요가 있다고 강조하면서 이는 곱셈에 대한 두 가지 개념을 동시적으로 만들도록 돕는다고 하였다. 또한 스플리팅을 구성함으로써, 학생들은 비와 비율, 곱셈적 변화율, 지수 함수 등의 후속 주제들에 더 적절하게 접근할 수 있다고 하였다.

이상으로 Steffe & Olive(2010)와 Confrey(1994)의 곱셈에 대한 특정한 접근을 강조한 연구를 살펴보았다. 이들이 강조하는 조작은 대부분 물리적으로 포함된 관계에 있는 양(예, 2개씩 3묶음)이나 하나의 양의 변화(예, 확대하기)에 대한 것으로 서로 다른 종류의 양 사이의 곱셈적 관계에 대한 것은 아니다. 그러나 이러한 특정한 조작은 합성 단위가 반복되는 덧셈적 구조와 구분되는 곱셈만의 특징과 연결된 것이므로 곱셈에서 이를 강조할 필요가 있다. 따라서 본 연구에서도 하나의 상황에서 이러한 조작이 일어나도록 돕는 활동을 어떻게 구성할 수 있을지에 대해 탐색해본다.

4. 하나의 곱셈 상황에 대한 두 가지 접근을 강조한 연구

이지영(2018)은 곱셈적 구조에서 나타나는 두 양 사이의 관계에 초점을 둔 연구들을 종합하여 <표 Ⅱ-2>와 같이 정리한 바 있다. 여러 연구들의 공통점은 곱셈적 구조나 비율 및 비례 등에서 나타나는 같은 종류의 두 양 사이의 관계와 다른 종류의 두 양 사이의 관계에 초점을 맞추고 있다는 점이다.

Schwartz(1988)는 곱셈을 연산에 관여하는 세 양 즉, 피승수, 승수, 곱의 지시체가 변하는 연산이라는 점에서 덧셈과 구분한다. 그리고 이때 내포량은 두 양 사이의 관계를 다시 양으로 다루는 것으로, 지시체를 변하게 하는 가장 결정적인 역할을 한다고 보았다. 외연량(extensive quantity)은 거리 및 시간과 같이 세거나 측정하여 나타낼 수 있는 양인데 반해, 내포량은 속도 2km/s와 같이 두 개의 외연량 사이의 관계를 나타내는 양이다. 이는 두 개의 외연량이 같은 종류의 양인가, 다른 종류의 양인가에 따라 구분하여 나타낼 수 있다.

<표 Ⅱ-2> 이지영(2018)의 연구에서 정리한 두 양 사이의 곱셈적 관계에 대한 다양한 관점(p. 730)

선행연구	두 개의 같은 종류의 외연량 사이의 관계(①)	두 개의 다른 종류의 외연량 사이의 관계(②)
Kaput(1985) Schwartz(1988)	특정한 종류의 내포량 (스칼라, 단위 측정 변환 인수)	내포량
Freudenthal(1983)	내적 비율(internal ratio)	외적 비율(external ratio)
Vergnaud(1994)	스칼라 비율(scalar ratios)	함수 비율(functional rates)

같은 종류의 두 양 사이의 관계는 '쿠키가 한 봉지에 2개씩, 모두 3봉지가 있을 때 쿠키의 개수를 구하는 상황'에서 같은 종류의 양인 1봉지와 3봉지 사이의 곱셈적 관계가 쿠키 2개와 쿠키 6개 사이의 관계에 그대로 적용되는 것으로 보는 것이다. 이를 Freudenthal(1983)은 내적 비율이라고 하였다. 즉 봉지의 개수가 3배 되었으므로 내적 비율의 불변성(invariance of internal ratios)에 따라 쿠키의 개수도 2의 3배가 된다고 보았다. Vergnaud(1994)는 위의 곱셈적 관계를 단위가 없는 스칼라 비율이라고 하였고, $f(1)=2$일 때, $f(1)+f(1)+f(1)$을 구하는 상황이므로 $3f(1)=3\cdot2$으로 나타낼 수 있다고 보았다. 이와 같이 스칼라 비율에는 단위가 나타나지 않지만 Kaput(1985)는 다른 내포량과 표현을 통일하기 위해 단위를 붙여 나타내기도 하였다(즉, 3봉지/봉지, 3개/개).

다른 종류의 두 양 사이의 관계는 쿠키의 개수와 봉지의 개수 사이의 관계에 초점을 맞추는 것이다. 이를 Freudenthal(1983)은 외적 비율로, Vergnaud(1994)는 함수 비율로 지칭하였다. 특히 Freudenthal(1983)은 봉지의 개수와 쿠키의 개수 사이의 관계는 항상 일정하므로(즉, 1봉지 당 쿠키 2개 또는 2개/봉지), 외적 비율의 일정성(constancy of external ratios)에 따라 쿠키의 개수를 구할 수 있다고 하였으며, Vergnaud(1994)는 $f(x)=2x$이므로 $f(3)=2\cdot3$으로 나타낼 수 있다고 하였다. 주목할만한 점은 앞에서 $3f(1)=3\cdot2$라고 표현한 것과 다르게 피승수 및 승수의 위치가 바뀌었다는 점이다.

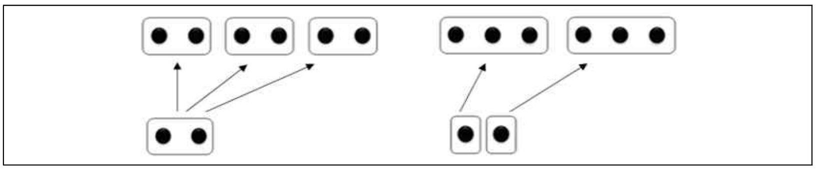
Otto et al.(2011)는 곱셈과 나눗셈의 필수 이해 중에 하나로 "문제 상황 맥락에서 만들어진 곱셈식은 그에 대한 이유가 있으며, 한 상황에 대한 다른 표현과 다른 추론 방법은 서로 다른 수식으로 나타난다(백석윤 외, 2016, p. 3)"고 하였다. 이에 대한 하나의 예로 아래 문제에서 학생들이 관련 상황을 어떻게 해석하는지에 따라 4×5로도, 5×4로도 나타낼 수 있다고 하였다.

> 로버트의 각 셔츠에는 단추가 4개씩 달려 있다. 그렇다면 셔츠 5장에 달려있는 단추는 모두 몇 개인가? (백석윤 외, 2016, p. 8)

먼저 4×5라고 제시한 경우에는 4는 한 셔츠에 달려있는 단추의 개수이고, 5는 셔츠의 개수로 4개씩 5묶음으로 해석한 것이다. 이들은 똑같은 상황을 5×4로도 나타낼 수 있다고 보았는데, 이때 5는 첫 번째 단추들의 개수이고, 4는 각 셔츠에 달려있는 단추의 개수이다. 이는 Izsák & Beckmann(2019)이 제시한 것처럼 하나의 곱셈 상황을 학생들이 어떻게 받아들이는가에 따라 각각의 수의 단위가 달라질 수 있으며, 나아가 곱셈식의 순서도 변경될 수 있는 가능성을 보여준다.

임재훈(2016) 역시 2의 3배인 양을 만드는 두 가지 방법을 [그림 Ⅱ-4]와 같이 제시하여 전자를 '측정접근법'으로, 후자를 '동형접근법'으로 일컬었다. 측정접근법은 2를 하나의 합성 단위로 보고 합성 단위의 크기는 그대로 유지하면서 합성 단위의 개수를 변화시키는 것이며, 동형접근법은 2의 각각의 하나의 단위가 3배가 되는 것으로 합성 단위의 개수가 2개로 그대로 유지하면서 합성 단위의 크기가 3배가 되는 것이다. 이와 관련하여 임재훈(2017)은 '배'의 의미를 '횟수로서의 배'와 '연산자로서의 배'로

구분한다. 이러한 측면에서 살펴보면 [그림 Ⅱ-4]는 모두 2의 3배에 대한 그림이므로 두 가지 모두를 2×3으로 나타낼 수 있을 것이다.



[그림 Ⅱ-4] 2의 3배인 양을 만드는 두 가지 방법(임재훈, 2016, p. 530)

이상으로 하나의 곱셈 상황을 두 가지 방법으로 접근하는 것을 강조한 연구들을 살펴보았다. 이 연구들은 하나의 곱셈 상황도 학생들이 이를 어떻게 해석하는가에 따라 서로 다를 수 있다는 것을 보여준다. 하나의 곱셈 상황을 여러 가지로 해석할 수 있다는 것은 한 차시의 수학 수업에서 곱셈 상황에 다양하게 접근해보도록 함으로써 곱셈을 더욱 심도 있게 다룰 수 있는 가능성을 보여준다.

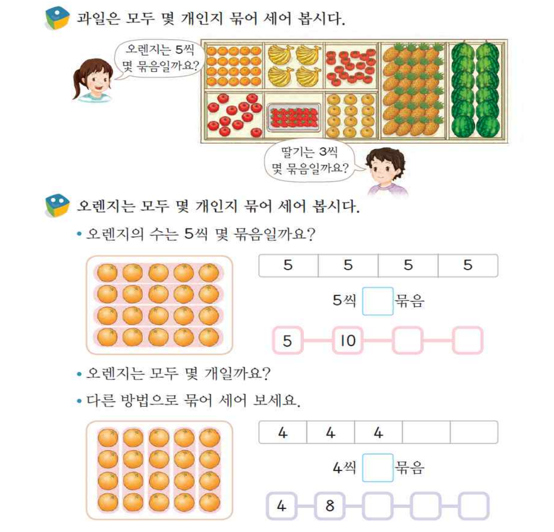
5. 우리나라의 초등학교 교과서에서 곱셈을 다루는 방법

본 연구에서 제안하고자 하는 곱셈의 통합적 접근을 설명하기에 앞서 2015 개정 수학과 교육과정에 의한 교과서(이하 2015 개정 교과서)에서 곱셈을 어떻게 다루고 있는지 간략하게 살펴볼 필요가 있다. 2015 개정 교과서에서는 2학년 1학기에 곱셈을 [그림 Ⅱ-5]와 같이 도입한다.

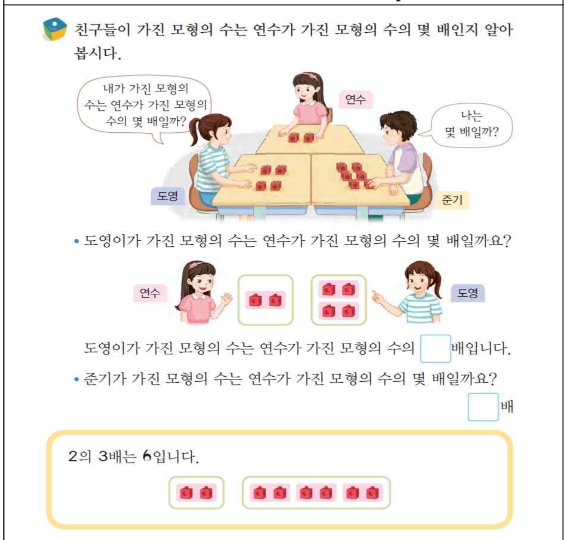
먼저 (a)와 같이 뛰어세기나 묶어세기 등을 이용하여 곱셈 상황에 접근하게 하고, (b)와 같이 몇씩 몇 묶음으로 상황을 표현한다. (c)와 같이 두 개의 대상을 곱셈적으로 비교하는 상황으로 배 상황을 제시하고, (d)와 같이 묶음과 배를 연결하여 곱셈식을 나타내고 읽는 것을 학습한다. 구체적으로 고깔모자의 수를 3씩 6묶음으로 나타내고 이를 3의 6배로 표현한다. 이후에 3의 6배를 3×6으로 쓰고, 3 곱하기 6으로 읽도록 한다. 이때 3×6을 똑같은 묶음 상황에서 살펴보면 한 묶음당 3개의 고깔모자가 있고, 이러한 묶음이 6묶음이므로 3은 합성단위의 크기가 되고 6은 합성단위의 개수가 된다. 다시 말하면 3은 묶음과 고깔모자 개수 사이의 관계를 나타내는 외적 비율이 된다. 반면에 3의 6배에서 3은 기준이 되는 고깔의 개수이고 18은 비교하는 고깔의 개수로 6은 두 개수 사이의 관계를 나타내는 내적 비율이 된다. 그러나 상황으로 살펴보면 모두 3씩 6묶음으로 동수누가와 배의 의미를 구분하기에 어려움이 있다.

앞에서 지속적으로 강조한 바와 같이, 초등학교에서 배의 의미를 구성하는 과정에 있어서 양이 반복적으로 늘어나는 것에만 초점을 맞추면 분수, 비, 비율, 비례 등으로 확장하는 데 한계가 있다. 이지영(2018)은 곱셈에서 중요한 역할을 하는 내포량이 초등학교 수학 교과서에서 어떻게 제시되어 있는지를 살펴보았는데, 이 연구에 따르면 곱셈을 도입하는 단원뿐만 아니라 그 이후의 단원에서도 대부분 곱셈을 양이 반복되는 동수누가 상황으로 제시하고 있다는 것을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서는 이에 대한 대안으로 하나의 곱셈 상황에서 곱셈의 다양한 측면을 경험할 수 있는 곱셈의 통합적 접근을 강조한다.

(a) 여러 가지 방법으로 세기(p. 144)



(b) 몇씩 몇 묶음(p. 146)



(c) 몇의 몇 배(p. 148)

(d) 곱셈식 도입(p. 152)

[그림 Ⅱ-5] 2015 개정 교과서 2학년 1학기에서 곱셈을 도입하는 방법(교육부, 2019a)

Ⅲ. 곱셈의 통합적 접근

본 장에서는 곱셈에 대한 다양한 관점을 고찰한 내용을 기반으로 하여 곱셈의 통합적 접근에 대해 설명한다. 곱셈의 통합적 접근은 하나의 곱셈 상황에 다양한 방법으로 접근하는 것이다. 물론 제시된 상황에 더 적절한 방법이 있을 수 있고, 덜 적절한 방법이 있을 수 있다. 또한 둘다 적절하다고 하더라도 학생들이 자연스럽게 생각해낼 수 있는 것도 있고, 그렇지 않은 것도 있다. 본 연구에서는 하나의 곱셈 상황에 얼마나 다양하게 접근 가능한지를 탐색해보는 것에 초점을 두지만, 이러한 방법들을

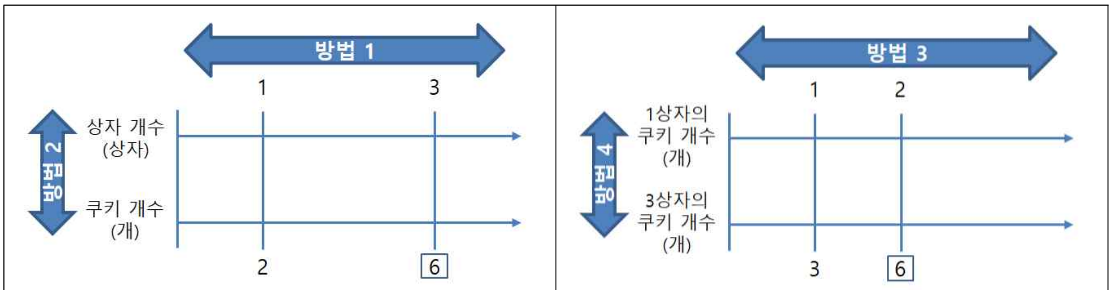
학생들이 한 번에 모두 경험해야 한다고 주장하는 것은 아니다. 대신에 학생들에게 익숙하지 않은 방법을 학생들이 스스로 생각하도록 돕기 위해서 교사가 무엇에 주목할 필요가 있는지를 살펴본다.

1. 똑같은 묶음 상황

곱셈의 통합적 접근을 설명하기 위해 초등학교 수학 교과서에서 곱셈 상황으로 가장 먼저 제시하는 똑같은 묶음 상황으로 시작한다.

쿠키가 한 상자에 2개씩 있습니다. 3상자에 있는 쿠키는 모두 몇 개입니까?

위의 곱셈 상황에는 네 양 사이의 관계가 내재되어 있고, 이를 비례 관계와 연결할 수 있으므로 (Vergnaud, 1994), 이러한 구조를 시각적으로 보여주기 위해서 이중수직선을 사용하면 [그림 Ⅱ-6]과 같이 두 가지 해석으로 구분하여 나타낼 수 있다[3]. 하나는 상자 개수와 쿠키 개수를 두 개의 측정 공간으로 구분하는 것이고, 다른 하나는 한 상자의 쿠키 개수와 세 상자의 쿠키 개수를 곱셈적으로 비교하는 것이다.



(a) 해석 1　　　(b) 해석 2

[그림 Ⅲ-1] 똑같은 묶음 상황에 대한 두 가지 해석

[그림 Ⅲ-1]의 (a)는 양 사이의 공변 관계에 초점을 두는가, 불변 관계에 초점을 두는가에 따라 두 가지 방법으로 접근할 수 있다. 따라서 양 사이의 공변 관계에 초점을 두는 것을 <방법 1>로, 불변 관계에 초점을 두는 것을 <방법 2>로 구분한다.

<방법 1>은 상자 개수가 한 상자에서 세 상자로 3배가 되었으므로, 쿠키의 개수도 2개의 3배인 6개가 되는 것이다. 즉, 1(상자)×3(배)=3(상자)이므로 2(개)×3(배)=6(개)이다. 이것은 Freudenthal(1983)의 용어에 따르면 내적 비율의 불변성에 따라 곱셈을 해결한 것이다. 즉 상자 개수 사이의 내적 비율과 쿠키 개수 사이의 내적 비율이 서로 동치 관계를 이룬다. 이 경우에 3은 같은 종류의 양 사이의 관계를 나타내는 내적 비율(즉, 1묶음과 3묶음 사이의 관계, 쿠키 2개와 쿠키 6개 사이의 관계)이다. 또한 3은 Vergnaud(1994)의 용어에 따르면 단위가 없는 스칼라 비율(즉, 3묶음/1묶음, 6개/2개)이다. 이는 덧셈적 동형성질을 통해 곱셈적 동형성질을 유도해낸 것으로 f(1)=2일 때, f(1)의 3배이므로 3f(1)이고 따라서 3f(1)=f(1)+f(1)+f(1)=2+2+2=2×3으로 나타낼 수 있다. Schwartz(1988)의 양의 지시체가 변

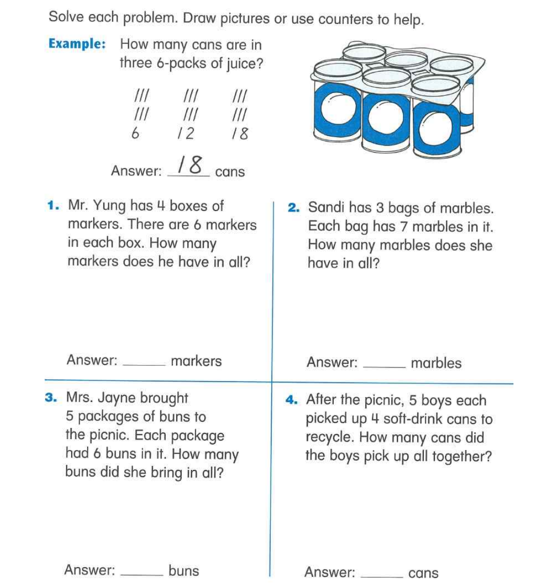
3) 이중수직선은 해당 상황에 제시된 양 사이의 관계를 시각적으로 나타내기 위하여 편의상 사용한 것으로, 수업 시간에 학생들이 다루어야 할 표현으로 제안하기 위함이 아니다.

하는 곱셈의 특징과 연결하여 설명하면, 쿠키가 2개씩 한 묶음이라는 하나의 단위를 구성하고, 이러한 합성 단위가 3개있는 상황으로 나타낼 수 있다. 즉, 2(개/상자)×3(상자)=6(개)이다. 이때 피승수의 분모가 되는 단위와 승수의 단위가 서로 같다. 이와 같이 <방법 1>은 선행 연구와 연결하여 다양하게 설명할 수 있는데, 모두 곱셈식 2×3으로 나타난다.

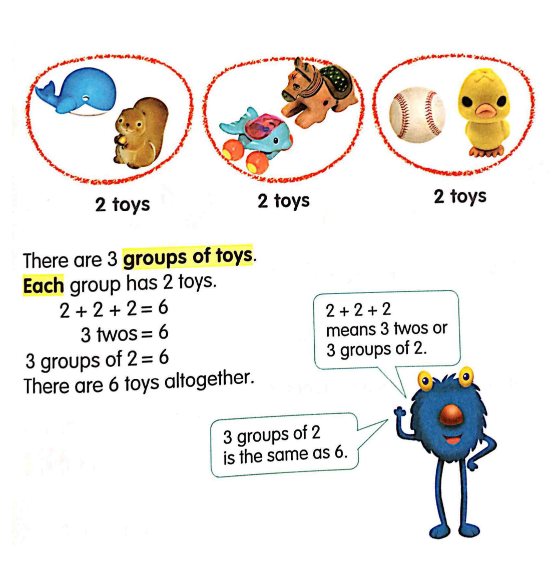
<방법 2>는 상자의 개수와 쿠키의 개수 사이의 비율이 일정하게 유지되므로 일정한 단위 비율(2개/상자)을 세 상자에 적용하여 쿠키의 개수가 6개가 되는 것이다. 즉, 3(상자)×2(개/상자)=6(개)이다. 이것은 Freudenthal(1983)의 용어에 따르면 외적 비율의 일정성에 따라 곱셈을 해결한 것이다. 즉 한 상자와 쿠키 2개가 이루는 외적 비율과 세 상자와 쿠키 6개가 이루는 외적 비율이 서로 동치 관계를 이룬다. 이 경우에 2는 다른 종류의 양 사이의 관계를 나타내는 외적 비율(즉, 한 상자와 쿠키 2개 사이의 관계, 세 상자와 쿠키 6개 사이의 관계)이다. 또한 2는 Vergnaud(1994)의 용어에 따르면 함수 비율(즉, 2개/상자)이다. 이를 $f(x)=2x$이므로 $f(3)=2\cdot 3=3\times 2$로 나타낼 수 있다. <방법 2>는 세 상자 각각에 쿠키가 2개씩 들어있는 것이므로 Steffe & Olive(2010)의 단위 조정 조작과 직접적으로 관련된다. 즉, 합성 단위인 세 상자의 각각의 단위에 또 다른 합성 단위인 쿠키 2개가 삽입되는 과정으로 설명할 수 있다. 또한 Confrey(1994)가 강조한 스플리팅과도 연결할 수 있다(즉, 3개의 단위가 각각 2개로 스플리팅된 과정).

<방법 2>와 관련하여 2가지 사항을 고려할 필요가 있다. 첫째, <방법 2>로 접근할 때, 곱셈식을 2×3으로 표현하는 것이 적합한가, 아니면 3×2로 표현하는 것이 적합한가이다. 묶음 상황을 곱셈식으로 나타낼 때 이제까지 표현했던 (한 묶음에 들어가는 기본 단위의 수)×(묶음의 수)의 형식을 유지한다면 2×3으로 나타내야 하지만, Izsák & Beckmann(2019) 또는 Otto et al.(2011)이 제시한 것처럼 학생이 기본 단위와 묶음으로 보는 단위를 무엇으로 설정하는가에 따라, 또한 연산자를 무엇으로 보는가에 따라 3×2로 나타낼 수도 있다. 따라서 <방법 2>를 곱셈식으로 표현하는 것과 관련하여서는 심도있는 논의가 이루어져야 한다.

둘째, <방법 1>에 비해 <방법 2>로 문제를 해결하는 것이 학생들에게 익숙한가이다. <방법 2>는 <방법 1>과 같이 쿠키가 2개씩 들어있는 한 상자로부터 시작하는 것이 아니라, 세 상자로부터 시작한다. 즉, 곱셈 상황에서 가장 먼저 초점을 두는 것이 쿠키 상자가 3상자가 있다는 것이다. 그러나 초등학교 수학 교과서에서는 대부분 '쿠키가 한 상자에 2개씩 있습니다. 3상자에 있는 쿠키는 모두 몇 개입니까?'와 같은 순서로 문제를 제시하기 때문에 세 상자에 먼저 관심을 두기는 어렵다. 따라서 <방법 2>와 관련하여 학생들이 이러한 방법을 자연스럽게 생각하도록 돕는 방안 중 하나로 문장제에 수를 다양한 순서로 제시하는 것을 제안한다. 위의 상황을 '쿠키 상자가 세 상자 있습니다. 각각의 상자에 쿠키가 2개씩 있습니다. 세 상자에 있는 쿠키는 모두 몇 개입니까?'와 같이 제시할 수도 있다. 이는 우리나라와 곱셈식을 표현하는 순서가 다른 미국이나 싱가포르에서 제시하는 문장제와 유사하다. [그림 Ⅲ-2]을 보면 미국과 싱가포르에서는 문장제에서 묶음의 수를 먼저 제시하고 그 이후에 각 묶음에 들어가는 기본 단위의 수를 제시하고 있다(예, 미국: 샌디는 구슬 3묶음을 가지고 있습니다. 각 묶음에 구슬 7개가 있습니다. 샌디가 가지고 있는 구슬은 모두 몇 개입니까?, 싱가포르: 인형 3묶음이 있습니다. 각각의 묶음에 인형이 2개씩 있습니다. 등). 이는 미국과 싱가포르에서 곱셈식을 (묶음의 수)×(한 묶음에 들어가는 기본 단위의 수)로 제시하는 것과 연결된다. 그러나 주목해야 할 것은 단순히 문장제나 곱셈식에 수를 제시하는 순서가 다르다는 것이 아니라 이러한 차이가 곱셈 상황을 해석하고 이해하는 데 중요한 영향을 미칠 수 있다는 것이다. 즉 문장제에 묶음의 수를 먼저 제시한다면, 학생들이 똑같은 묶음 상황에 <방법 2>로 접근하는 것도 가능할 것이다.



(a) 미국 Everyday Mathematics 2A 교과서(Bell et al., 2007, p. 148)



(b) 싱가포르 My Pals Are Here 1B 교과서(Kheong, Ramakrishnan, & Wah, 2013, p. 57)

[그림 Ⅲ-2] 미국과 싱가포르 교과서에 제시된 곱셈 문장제

[그림 Ⅲ-1]의 (b)는 한 상자의 쿠키 개수와 세 상자의 쿠키 개수를 곱셈적으로 비교하는 상황이다. 이 역시 앞에서 살펴본 바와 같이 두 가지 방법으로 접근할 수 있다.

<방법 3>에서 한 상자의 쿠키 개수가 1개이면, 세 상자의 쿠키 개수는 3개가 된다. 이때 한 상자의 쿠키 개수가 2개로 2배가 되면, 세 상자의 쿠키 개수도 3개에서 2배를 한 6개가 된다. 즉 1(개)×2(배)=2(개)이므로 3(개)×2(배)=6(개)이다. 이는 3×2=6으로 표현할 수 있다. 결과적으로 해당 상황을 3개씩 2묶음으로 구성할 수도 있다. 그러나 이 상황은 엄밀히 따지면 1(개)×3(배)×2(배)=6(개)으로, Confrey(1994)가 제시한 스플리팅과 연결할 수도 있다. 또한 이때 연산자 역할을 하는 2는 Schwartz(1988)가 스칼라를 단위가 있는 내포량처럼 표현한 것을 적용하면 2(개/개)로 나타낼 수 있다. 즉 한 상자의 쿠키 개수가 변하면 세 상자의 쿠키 개수도 똑같이 변하기 때문에 한 상자의 쿠키 개수를 쿠키 1개에서 스칼라 비율에 따라 변한 양으로 볼 수 있다.

<방법 4>는 세 상자의 쿠키 개수는 한 상자의 쿠키 개수의 3배이므로 이 관계를 이용하여 한 상자의 쿠키 개수 2개에 3배를 하여 6개가 된다는 것이다. 이는 2(개)×3(배)=6(개)이다. 이는 2×3=6으로 표현할 수 있다. 한 상자에 쿠키가 2개 들어있는 것을 각각 1이 반복된 합성 단위로 생각하면 한 상자의 쿠키 2개의 각각 1개당 3배가 되는 과정으로 생각할 수 있다. 즉, 2(개)×3(개/개)=6(개)와 연결할 수 있다. 그러나 이 상황은 엄밀히 따지면 1(개)×2(배)×3(배)=6(개)으로 이 역시 Confrey(1994)가 제시한 스플리팅과 연결할 수도 있다. 한 상자의 쿠키 개수는 원래 1의 복사본을 2개씩 동시에 만드는 과정이고, 세 상자의 쿠키 개수는 복사본 각각에 대한 복사본을 다시 동시에 3개씩 만드는 과정이다. 이는 조합 모델이나 수형도로 나타내는 과정과 동일하다. 이 역시 결과적으로 해당 상황을 3개씩 2묶음으로 구성할 수도 있다.

<방법 3>과 <방법 4>는 한 상자에 들어있는 쿠키 1개에 초점을 맞춰야 하는 것으로 대부분의 학

생들은 이러한 방법을 자연스럽게 생각해낼 수 없을 것이다. 따라서 학생들이 이러한 방법을 스스로 생각해내도록 돕는 방안 중 하나로 아래와 같은 문장제를 제시할 수 있다. 이는 원래의 문장제에 기본 단위 1에 초점을 맞출 수 있는 조건을 더 추가한 것이다.

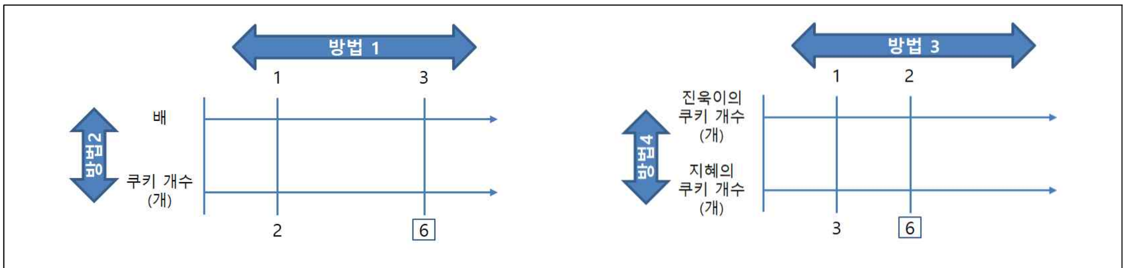
쿠키가 한 상자에 2개씩 있습니다. 하나는 초코 쿠키이고 다른 하나는 치즈 쿠키입니다. 3상자에 있는 쿠키는 모두 몇 개입니까?

이러한 문장제를 제시하면 일부 학생들은 이 상황을 초코 쿠키와 치즈 쿠키가 각각 한 묶음을 이루고 이러한 묶음이 3묶음 있는 구조로 생각할 수도 있고, 다른 학생들은 초코 쿠키와 치즈 쿠키가 각각 3배가 된 구조로 생각할 수도 있을 것이다. 즉, <방법 1>, <방법 2>뿐만 아니라 <방법 3>과 <방법 4>도 학생들에게 나타날 수 있다.

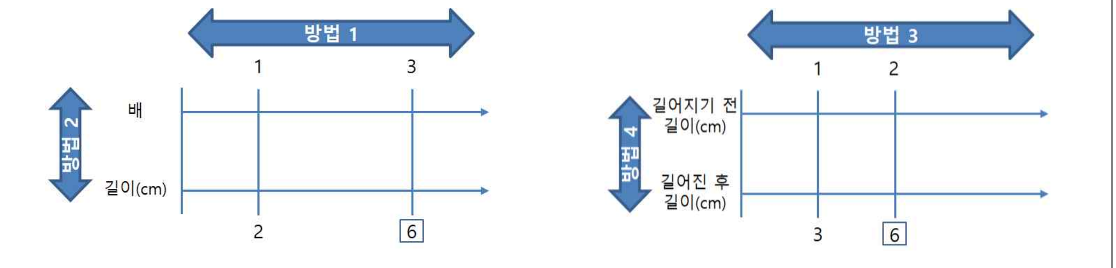
2. 곱셈의 다양한 상황

똑같은 묶음 상황 이외의 다양한 곱셈 상황에도 [그림 Ⅲ-3]과 같이 4가지 방법을 모두 적용할 수 있다. 몇 가지만 예를 들어 설명하면 다음과 같다.

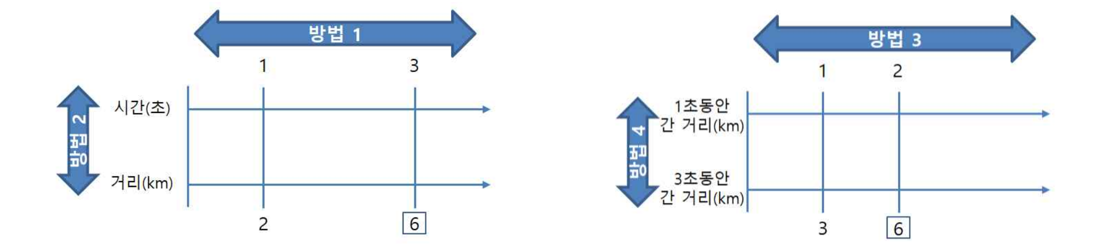
먼저 곱셈의 통합적 접근 측면에서 [그림 Ⅲ-3]의 (a)에 해당하는 독립적인 두 양의 곱셈 상황을 [그림 Ⅲ-4]와 같이 제시할 수 있다.



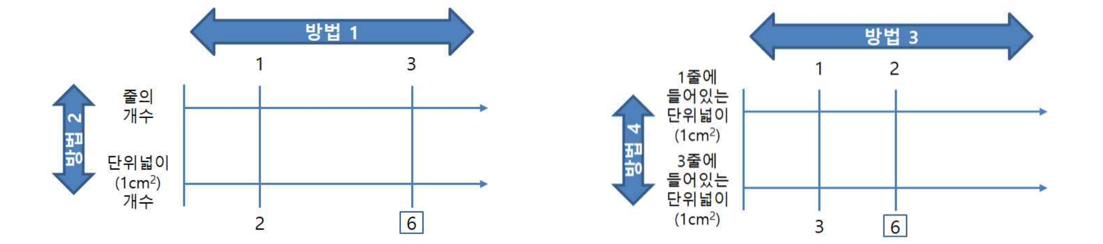
(a) 독립적인 두 양의 곱셈적 비교 상황



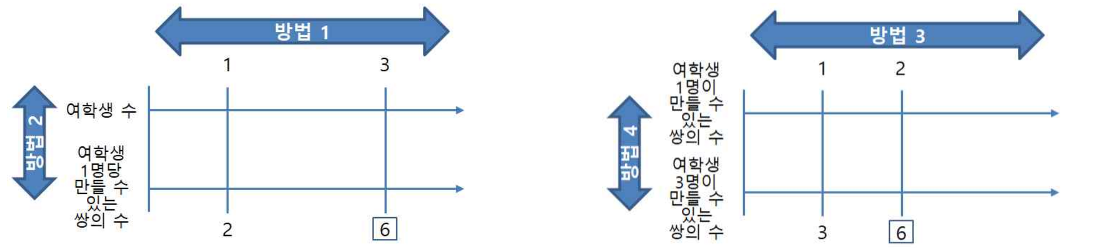
(b) 확대 상황



(c) 서로 다른 종류의 연속량 사이의 곱셈적 비교 상황



(d) 직사각형의 넓이 상황



(e) 데카르트 곱 상황

[그림 Ⅲ-3] 다양한 곱셈 상황에 대한 곱셈의 통합적 접근

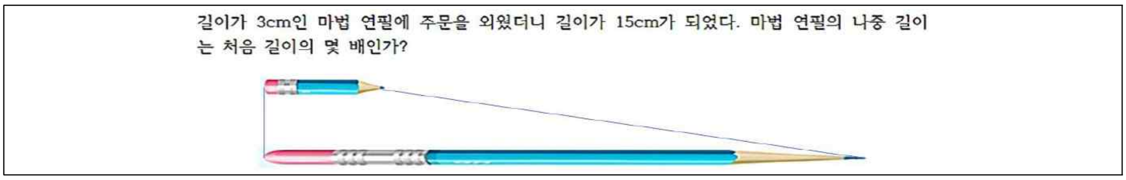
(a) 진욱이는 초코맛 쿠키와 치즈맛 쿠키 2개를 가지고 있습니다.
지혜는 진욱이가 가지고 있는 쿠키 개수의 3배를 가지고 있습니다.
지혜가 가지고 있는 쿠키는 모두 몇 개입니까?
(b) 지혜는 진욱이가 가지고 있는 쿠키의 3배 만큼 가지고 있습니다.
진욱이는 초코맛 쿠키와 치즈맛 쿠키 2개를 가지고 있습니다.
지혜가 가지고 있는 쿠키는 모두 몇 개입니까?

[그림 Ⅲ-4] 독립적인 두 양의 곱셈적 비교 상황과 관련된 문장제

똑같은 묶음 상황에서는 하나의 양이 다른 양에 물리적으로 포함되어 있다는 점(즉, 쿠키 2개씩 한 상자)에서 원래의 2개씩 3묶음인 구조를 <방법 3>과 <방법 4>과 같이 3개씩 2묶음인 구조로 생각하는 것이 어렵다. 그러나 독립적인 두 양의 곱셈적 비교 상황에서는 [그림 Ⅲ-4]와 같이 문제를 제시하면 <방법 1>과 <방법 2>뿐만 아니라 <방법 3>과 <방법 4>도 학생들이 스스로 생각해낼 수 있을 것이다. <방법 1>은 지혜가 가지고 있는 쿠키를 쿠키 2개씩 3묶음 있는 것으로 생각하는 것이고, <방법 2>는 3묶음 각각에 쿠키가 2개씩 들어있는 것으로 생각하는 것이다. <방법 3>은 초코맛 쿠키 3개와 치즈맛 쿠키 3개로 3개씩 2묶음 있는 것으로 생각하는 것이고, <방법 4>는 지혜가 가지고 있는

쿠키는 진욱이가 가지고 있는 두 개의 쿠키가 각각 3배되는 것으로 생각하는 것이다.

[그림 Ⅲ-3]의 (b)는 임재훈(2017)이 곱셈적 비교에서 독립적인 두 양을 비교하는 것과 구분되는 상황으로 제시한 것으로 하나의 양이 확대 및 축소되는 상황에 대한 것이다. 임재훈(2017)은 이 상황을 [그림 Ⅲ-5]와 같이 나눗셈 상황과 관련하여 '확대 상황 포함 나눗셈'이라고 지칭하였다. 이때 하나의 연필이 3cm에서 5배인 길이로 늘어난 상황은 3cm씩 5번 반복되는 상황보다는 각각의 1cm가 5배되는 상황에 더욱 적합하다고 하였다. 이러한 방법은 [그림 Ⅲ-3]의 (b)의 <방법 3> 및 <방법 4>와 관련된다. 이와 관련된 문장제는 [그림 Ⅲ-6]과 같이 제시할 수 있다. 마법지팡이 그림을 1cm씩 다른 색으로 구분하여 제시함으로써 학생들이 각각의 1cm가 늘어난 상황에 초점을 맞출 수 있도록 도울 수 있다. 또한 다양한 방법으로 접근하도록 함으로써 어떤 방법이 상황에 더욱 적절한지에 대해 깊은 논의를 이끌 수도 있을 것이다.



[그림 Ⅲ-5] 확대 상황 포함 나눗셈과 관련된 문장제(임재훈 2017, p. 118)

길이가 2cm인 마법지팡이에 주문을 외웠더니 길이가 3배가 되었습니다. 마법지팡이의 길이는 몇 cm가 되었을까요? (마법지팡이 그림은 1cm만큼은 빨간색으로, 나머지 1cm만큼은 파란색으로 제시)

[그림 Ⅲ-6] 확대 상황과 관련된 문장제

이외에도 곱셈의 통합적 접근은 [그림 Ⅲ-3]의 (c), (d), (e)와 같이 곱셈의 다양한 상황에 모두 적용 가능하다. 특히 [그림 Ⅲ-3]의 (d), (e)는 Izsák & Beckmann(2019)이 곱셈을 조정된 측정으로 일관적으로 해석한 것과 연결된다. 예를 들어 직사각형의 넓이와 관련된 곱셈 상황을 가로와 세로의 길이를 곱해서 넓이를 구하는 상황으로 접근하기보다는 단위 정사각형이 2개씩 3줄 있는 상황으로 접근한다. 또한 각각의 문장제는 앞에서 제시한 것처럼 하나의 단위에 초점을 맞출 수 있도록 직사각형의 넓이 상황에서는 가로 2cm 중에서 각각의 1cm에 해당하는 넓이를 서로 다른 색깔로 구분하여 제시할 수 있고, 데카르트 곱 상황에서는 여학생의 이름을 각각 제시할 수도 있다.

Ⅳ. 곱셈에 대한 통합적 접근의 확장성

본 장에서는 하나의 곱셈 상황에 대해 다양한 방법으로 접근하는 것이 다른 주제와 어떻게 연결되는지를 살펴본다.

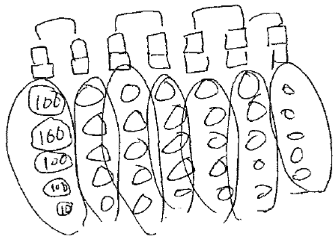
1. 곱셈의 교환법칙

Izsák & Beckmann(2019)은 곱셈에서 계산을 할 때 피승수와 승수의 순서를 바꾸는 것은 가능하지만 상황을 모델링할 때에는 교환법칙을 적용할 수 없다고 하였다. 이에 대한 하나의 예로, 그릇 하나 당 찰흙 3kg씩 7개의 그릇을 만드는 것과 그릇 하나 당 찰흙 7kg씩 3개의 그릇을 만드는 것은 곱의 결과가 모두 21kg이라고 하더라도 서로 다른 상황이라는 것을 제시하였다. 그러나 이러한 방식으로 상황을 모델링한다면 덧셈에서도 교환법칙을 적용할 수 없다. 예를 들어 사과 주스 3L와 복숭아 주스 7L를 더해서 혼합 주스 10L를 만드는 것과 사과 주스 7L와 복숭아 주스 3L를 더해서 혼합 주스 10L를 만드는 것은 상황이 다르기 때문이다. 대신에 사과 주스 3L와 복숭아 주스 7L를 더해서 혼합 주스를 만드는 것과, 복숭아 주스 7L와 사과 주스 3L를 더해서 혼합 주스를 만드는 것으로 접근하면 상황을 모델링할 때에도 교환 법칙을 적용하는 것이 가능하다. 이와 같이 곱셈에서도 그릇 하나 당 찰흙 3kg씩 7개의 그릇을 만드는 것과 7개의 그릇을 만드는 데 각각 찰흙 3kg이 필요한 상황으로 모델링을 한다면 상황을 모델링할 때에도 교환법칙을 적용할 수 있을 것이다.

3장에서 살펴본 바와 같이 곱셈의 통합적 접근에서는 하나의 곱셈 상황을 어떻게 해석하는가에 따라 2×3으로도, 3×2로도 표현할 수 있다. 이와 관련하여 다음과 같은 세 가지 주장이 나올 수 있다. 첫째, 일관성을 위해 한 묶음에 해당하는 기본 단위의 개수는 피승수로, 묶음의 수는 승수로 통일하자는 것이다. 이러한 방법을 따를 경우, <방법 1>과 <방법 2>는 2×3으로, <방법 3>과 <방법 4>는 3×2로 표현할 수 있다. 둘째, 연산자 역할을 하는 수를 일관적으로 승수로 두자는 것이다. 이러한 방법을 따를 경우, <방법 1>과 <방법 4>는 2×3으로 <방법 2>와 <방법 3>은 3×2로 표현할 수 있다. 마찬가지로 하나의 상황을 곱셈식으로 나타낼 때 2×3과 3×2가 모두 가능하다. 마지막으로는 곱셈식에서 피승수와 승수의 위치를 정하지 않고 각각의 역할만 구분하자는 것이다. 곱셈이 덧셈과 구분되는 중요한 특징은 피승수와 승수에 해당하는 수의 역할이 서로 다르다는 데 있다. 즉 곱셈에서는 두 양의 지시체가 서로 다르다(Schwartz, 1988). 하지만 피승수와 승수에 해당하는 수의 역할을 구분하는 것과 피승수와 승수의 위치를 엄밀하게 구분하는 것은 별개의 문제이다. 따라서 곱셈식에서 피승수와 승수의 위치를 구분하는 것과 관련하여 보다 실제적이고 다양한 연구가 진행될 필요가 있다.

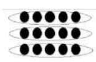
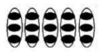
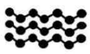
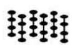
피승수와 승수의 위치와 관련하여 학생들은 자신이 먼저 인식한 수를 곱셈식의 앞에 위치시키는 경향이 있다. 이종욱(2007)에서 초등학교 2학년인 한 학생은 '지우개 1개에 백원짜리 5개, 지우개 3개면 몇 개의 동전이 필요한가?'에 대한 활동을 한 후에, 후속 문제로 '지우개 7개를 사려면 몇 개의 동전이 필요한가?'가 단독으로 제시되었을 때 [그림 Ⅳ-1]와 같이 해당 상황을 백원짜리 동전 5개가 7묶음이 있는 것으로 해석하기 보다는 7개의 지우개에 각각 동전 5개가 대응하는 상황으로 표현하였다. 그리고 이를 7×5라는 곱셈식으로 표현하였다. 학생은 연구자와의 면담을 통해 해당 상황이 7×5보다는 5개씩 7묶음인 5×7에 더 적합하다는 것을 알고 이를 정정하였다.

김주창, 이광호(2019)의 연구에서도 이와 유사한 반응이 제시되었다. 초등학교 5학년 학생들에게 다양한 묶음 모델을 제시하고 이를 곱셈식으로 표현하라고 하였을 때 [그림 Ⅳ-2]의 (a)와 같이 각각 두 가지 곱셈식이 모두 제시되었다. 특히 해당 연구에서는 시선 추적 검사를 통해 [그림 Ⅳ-2]의 (b)와 같이 (묶음의 수)×(한 묶음에 들어가는 기본 단위의 수)로 해당 모델을 해석한 학생의 경우에 묶음의 수를 먼저 세었다는 것을 확인하였다. 해당 연구에서는 곱셈식을 제시할 때 (한 묶음에 들어가는 기본 단위의 수)×(묶음의 수)를 일관적으로 지도하여 학습 초기에 학생들의 혼란을 방지할 것을 강조하였다.

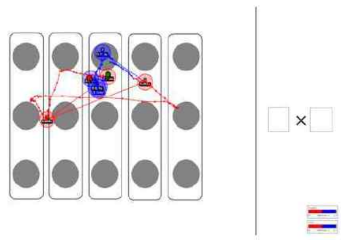


교사: 곱셈으로 나타내면 어떻게 될까요?
준수: (머뭇거리면서) 7×5
교사: 7곱하기 5는?
준수: 7, 5, 35
교사: 왜?
준수: 지우개가 7개 있잖아요. 그리고 (동전이) 5개씩 그러니까 7 곱하기 5.
교사: 동전이 5개씩 몇 묶음?
준수: 7묶음
교사: 5개씩 7묶음이면
준수: 아 맞다. 5 곱하기 7

[그림 Ⅳ-1] (묶음의 수)×(한 묶음에 들어있는 기본 단위의 수)로 제시한 2학년 학생의 반응(이종욱, 2007, p. 163)

번호	문항	식	인원 (명)	응답률 (%)
1-(1)		5X3	134	89.93
		3X5	13	8.72
		기타 (오답)	2	1.34
1-(4)		5X3	29	19.46
		3X5	115	77.18
		기타 (오답)	5	3.35
1-(3)		7X3	124	83.22
		3X7	23	15.44
		기타 (오답)	2	1.34
1-(6)		6X4	37	24.83
		4X6	109	73.15
		기타 (오답)	3	2.01

(a) 묶음 모델에 대한 초등학교 5학년 학생들의 곱셈식 표현 (p. 73)



(b) 위의 모델을 5×3으로 표현한 한 학생의 시선 이동 경로 (p. 77)

[그림 Ⅳ-2] 묶음 모델에 대한 초등학교 5학년 학생의 곱셈식 표현 및 시선 이동 경로(김주창, 이광호, 2019)

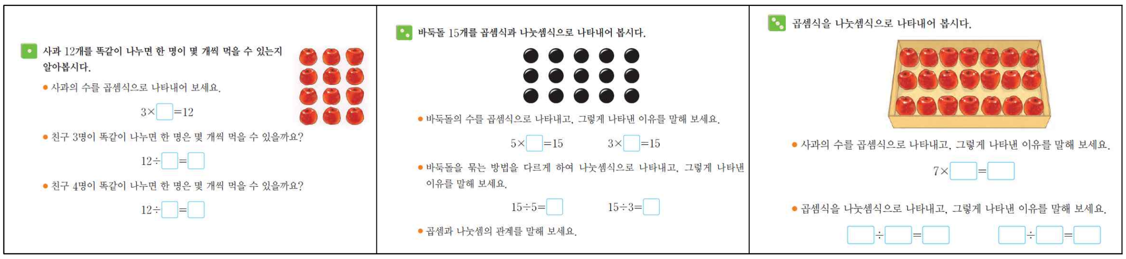
곱셈의 통합적 접근에서는 하나의 상황을 7×5와 5×7로 나타낼 수 있다고 보기 때문에 위의 두 선행 연구와 다소 다른 견지를 취한다. 학생이 '지우개 7개'를 먼저 인식하였을 때 7×5라고 나타내는 것이 5×7로 나타내는 것보다 덜 적합한가, 즉 (묶음의 수)를 먼저 인식한 학생이 해당 상황을 (묶음의 수)×(한 묶음에 들어가는 기본 단위의 수)로 표현하는 것이 덜 적합한가에 대해서는 재고할 여지가 있다. 이러한 학생의 사고는 Steffe & Olive(2010)의 단위 조정 조작과 직접적으로 연결되는 중요한 곱셈적 사고라고 볼 수 있다. 따라서 곱셈의 통합적 접근 측면에서 학생들로 하여금 동수누가와 구분되는 곱셈의 중요한 특징에 대해 경험하도록 돕기 위해서는 곱셈의 교환법칙에 대해서 보다 유연하게 접근하는 것도 고려해볼만 하다.

2. 나눗셈의 등분제와 포함제

임재훈(2016)은 자연수 나눗셈 12÷3에서 사과를 한 번에 3개씩 들어내는 동수누감이 포함제와 등분제에 공통적으로 포함되어 있다고 하였다: "포함제에서는 사과를 3개씩 한 묶음으로 놓아두는 조작으

로, 등분제는 사과를 3개씩 들어내어 각 접시에 하나씩 놓는 조작으로 해결할 수 있다(p. 521)". 나눗셈을 처음 도입할 때에는 이와 같이 학생들이 알고 있는 지식을 충분히 활용하여 접근할 수 있도록 동수누감 구조를 적용할 수 있다. 어느 시점이 지나면 포함제에서 12개를 3개씩 한 묶음으로 세면 4묶음이 된다는 것, 등분제에서 12를 3등분하면 각각의 묶음의 크기가 4개가 된다는 것을 한 번에 생각해낼 수 있어야 한다. 이를 위해서는 12개를 낱개 12개로 구성된 구조가 아니라 3개의 묶음에 기본 단위가 각각 4개씩 들어있는 곱셈적 구조로 파악할 수 있어야 한다. 이는 Steffe & Olive(2010)의 단위 조정 스킴과 직접적으로 연결된다. 이때 12개를 4개씩 순차적으로 반복하여 3묶음으로 묶여있는 구조로 보고 곱셈을 적용한다면 <방법 1>에 해당하는 것이고, 이는 포함제와 서로 역관계를 이룬다. 또한 12개를 3묶음 각각에 4개씩 포함되어 있는 구조로 보고 곱셈을 적용한다면 <방법 2>에 해당하는 것이고, 이는 등분제와 서로 역관계를 이룬다.

초등학교 수학 교과서에서 곱셈과 나눗셈의 관계를 다룬 부분을 살펴보면 [그림 Ⅳ-3]와 같이 활동 1에서는 3×4=12라는 하나의 곱셈식으로 12를 3등분하고 4등분하는 등분제 상황으로만 연결한다. 이는 곱셈을 학습할 때 3×4=12를 3개씩 4묶음으로만 해석하였기 때문에 12를 4등분하는 상황과 연결되지만, 12를 3등분하는 상황과는 직접적으로 관련된 곱셈식이라고 보기는 어렵다. 활동 2에서는 바둑돌이 배열되어 있는 것을 보고 5×3=15와 3×5=15로 나타내지만 이를 통해 15÷5=3과 15÷3=5를 포함제 상황으로만 연결한다. 따라서 하나의 곱셈 상황을 등분제와 포함제 모두와 연결하여 설명하고 있다고 보기에는 어려움이 있다. 반면에 활동 3에서는 사과의 수를 7개씩 5묶음인 7×5=35로 나타내도록 하고 이를 포함제인 35÷7=5와 등분제인 35÷5=7과 연결한다. 하지만 포함제 및 등분제와 연결되는 곱셈 상황은 7개씩 5묶음으로만 한정될 수 있다. 이때 곱셈의 통합적 접근에서 강조하는 것처럼 학생들이 하나의 곱셈 상황을 7개씩 5묶음인 상황뿐만 아니라 5묶음 안에 각각 7개의 사과가 있는 구조로도 동시에 파악한다면, 하나의 상황을 모델링할 때 포함제와 등분제 각각과 직접적으로 연결되는 곱셈적 구조를 모두 인식할 수 있을 것이다.

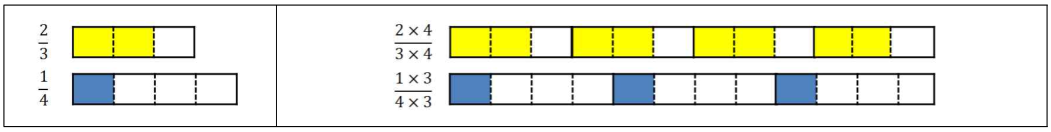


[그림 Ⅳ-3] 곱셈과 나눗셈의 관계에 대한 3학년 1학기 교과서 활동(교육부, 2019b, pp. 56-57)

3. 분수 및 분수 연산

이지영, 방정숙(2016) 및 이지영(2017)은 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$과 같은 이분모 분수의 덧셈을 하기 위해 두 분수를 통분할 때, 곱셈을 합성 단위를 반복하는 것으로만 파악하고 있는 학생의 경우에 $\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}$을 [그림 Ⅳ-4]와 같이 잘못 표현할 수 있다는 점을 지적한 바 있다. 이 학생은 $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m를 더하는 상황에서 $\frac{2}{3}$가 분모의 3과 분자의 2가 각각 4번 반복되어 $\frac{8}{12}$이 된다고 보았다. 그러나 이는 처음 제시된 $\frac{2}{3}$m

에 해당하는 양 자체가 늘어난 것으로 이분모 분수의 덧셈에 적합한 표현은 아니다.



[그림 Ⅳ-4] $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m를 더한 양을 구하는 문제 상황에서 $\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}$을 잘못 표현한 그림

곱셈의 통합적 접근을 통해 학생들이 하나의 곱셈 상황에 대한 여러 가지 방법을 충분히 경험한다면 각각의 단위가 다른 단위로 변경되면서 양은 그대로 유지하고 그 양을 다른 측정 단위로 측정하면서 개수가 많아지는 상황을 곱셈에서부터 경험할 수 있을 것이다. <방법 2>의 경우는 쿠키 상자의 개수가 3 상자인 상태에서 이 양을 쿠키의 개수로 측정하였을 때 3×2를 하여 값을 구한 것이다. 즉 Izsák & Beckmann(2019)이 설명한 바와 같이 쿠키의 양은 그대로인데 상자를 단위로 하여 측정하는가, 쿠키의 개수를 단위로 하여 측정하는가에 따라 측정값이 달라지며 이는 곱셈식으로 표현할 수 있다. 이러한 방법은 [그림 Ⅳ-5]와 같이 표현된 $\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}$과 직접적으로 연결된다. [그림 Ⅳ-5]의 (c)에서 $\frac{8}{12}$에 해당하는 그림은 전체 길이가 3묶음으로 묶여져 있고 각 묶음에 4개씩 포함되어 있는 것이므로 3×4로 표현할 수 있으며, 색칠된 양은 2묶음으로 묶여져 있고 각 묶음에 4개씩 포함되어 있는 것이므로 2×4로 표현하는 데 무리가 없다.

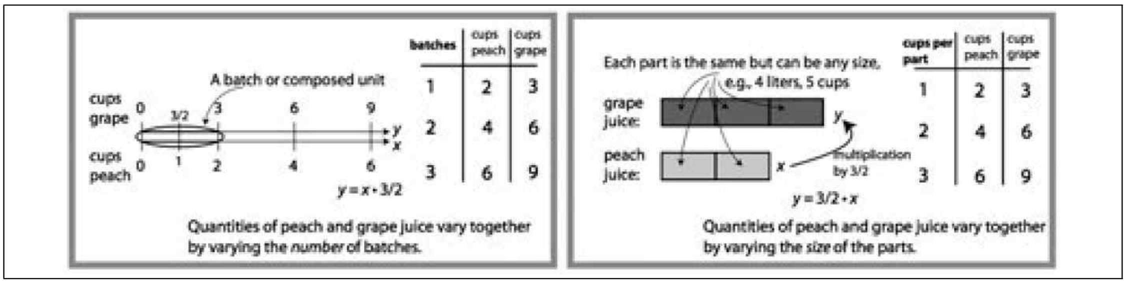
	단위의 구조			의미 (pp. 627-628)
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$	
(a)	1	1	1	**핵심 아이디어1.** 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 연산에 관여하는 세 가지 양이 가리키는 대상의 단위는 모두 같다.
(b)	$\frac{1}{3}$이 2개	$\frac{1}{4}$이 1개	$\frac{1}{3}$이 2개와 $\frac{1}{4}$이 1개	**핵심 아이디어2.** 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 결과를 하나의 양으로 표현하기 위해서는 새로운 단위가 필요하다.
(c)	$\frac{1}{12}$이 4개인 $\frac{1}{3}$이 2개	$\frac{1}{12}$이 3개인 $\frac{1}{4}$이 1개	$\frac{1}{12}$이 8개와 3개이므로 $\frac{11}{12}$	**핵심 아이디어3.** 재귀적 분할을 통해 세 번째 수준의 단위를 찾을 수 있고 이러한 과정은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 알고리즘과 연결된다.

[그림 Ⅳ-5] $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m를 더한 양을 구하는 문제 상황에서 $\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}$을 올바르게 표현한 그림(이지영, 방정숙, 2016, p. 795)

4. 비와 비율 및 비례 추론

비와 비율은 2장에서 곱셈의 통합적 접근을 설명하면서 이미 다룬 바 있다. 학생들은 <방법 1>과 같이 접근함으로써 내적 비율을 경험할 수 있고, <방법 2>와 같이 접근함으로써 외적 비율을 함께 경험할 수 있다.

또한 비례 추론과 관련하여서는 곱셈의 통합적 접근을 통해 Beckmann & Izsák(2015)이 강조한 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점의 기초가 되는 곱셈 상황을 경험할 수 있다. 다중 묶음 관점은 [그림 Ⅳ-6]과 같이 복숭아 주스와 포도 주스를 2:3으로 혼합한 주스를 만드는 비례 상황에서 복숭아 주스 2컵과 포도 주스 3컵을 하나의 합성된 단위로 보고 이 단위의 개수를 변화시켜 문제를 해결하는 것이다. 이에 비해 변동 부분 관점은 복숭아 주스와 포도 주스의 컵의 개수를 고정하고 각각의 컵에 들어가는 부분의 양을 변화시켜 문제를 해결하는 것이다. 3장에서 제시한 <방법 1>과 <방법 2>는 곱셈 상황이 비례 상황으로 확장되었을 때 부분의 크기는 그대로 유지하면서 부분의 개수가 변한다는 측면에서 다중 묶음 관점과 연결된다고 볼 수 있다. 즉 [그림 Ⅲ-1]의 (a)에서 화살표 방향으로 확장하는 것은 부분의 개수가 된다. <방법 3>과 <방법 4>는 부분의 개수가 그대로 유지되면서 부분의 크기가 변한다는 측면에서 변동 부분 관점과 연결된다고 볼 수 있다. 즉 [그림 Ⅲ-1]의 (b)에서 화살표 방향으로 확장하는 것은 부분의 크기가 된다.



[그림 Ⅳ-6] 다중 묶음 관점과 변동 부분 관점(Beckmann & Izsák, 2015, p. 22)

이상으로, 곱셈의 통합적 접근 방법으로 학생들이 현재 학습하고 있는 하나의 상황에 다양한 방법으로 접근하는 경험을 충분히 하게 된다면, 곱셈 뿐만 아니라 이후에 다른 주제를 학습할 때 곱셈의 다양한 측면을 고려하면서 해당 주제를 깊이 있게 이해하는 데 도움이 된다는 것을 이론적으로 확인하였다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 초등학교 수학뿐만 아니라 학교 수학에서 결정적인 곱셈에 대해 학생들이 충분히 경험하고 있는가에 대한 의문으로부터 출발하였다. 양, 나눗셈, 분수, 비와 비율, 비례와 관련된 다양한 연구에서는 학교 수학에서 각각의 주제와 관련하여 어느 한가지 특정한 방법에만 지나치게 치우쳐 있다는 점을 지적한다. 구체적으로 내포량과 관련하여 배라는 용어는 있지만 단위율을 나타내는 용어는 없고 배에 비해 단위율에 대한 탐색이 미흡하다는 연구(예, 임재훈, 2015), 나눗셈과 관련하여 자연수 상황에서는 포함제(측정 나눗셈)와 등분제(분할 나눗셈)가 고르게 제시되지만 분수 상황에서 측정 나눗셈

에 치중하고 등분제와 같은 구조를 취하고 있는 단위 비율 결정 맥락은 소홀하다는 연구(예, 이지영, 2015), 비례에서는 다중 묶음 관점에 비해 변동 부분 관점이 소홀하다는 연구(예, Beckmann & Izsák, 2015) 등이 있다. 이러한 연구에서 제기하고 있는 문제점들을 관통하고 있는 하나의 질문은 과연 학생들이 해당 주제를 자연스럽게 학습할 수 있도록 곱셈적 구조에 대해 폭넓게 경험하고 있는가이다.

이에 본 연구에서는 곱셈에 대한 여러 선행 연구를 고찰하여 곱셈에 대한 보다 폭넓은 이해를 돕기 위한 하나의 방안으로 곱셈의 통합적 접근을 제안하였다. 곱셈의 통합적 접근이란 수학 수업에서 하나의 상황으로 제시된 곱셈 상황을 각자 다양하게 해석해보게 하고 이를 곱셈식으로 표현하고 이에 대해 각자의 방법을 서로 연결하고 논의해보도록 하는 것이다.

본 연구에서는 곱셈의 통합적 접근이 다양한 측면에서 '통합적'이라는 점을 이론적으로 확인하였다. 첫째, 곱셈의 통합적 접근은 다양한 곱셈의 관점을 하나의 곱셈 상황에서 경험하도록 한다는 점에서 통합적이다. 2장에서 살펴본 여러 선행 연구에서는 곱셈에 하나의 합성 단위를 순차적으로 반복하는 동수누가로만 접근하는 것을 지적하면서 이를 보완하기 위한 다양한 관점을 제시하였다. 본 연구에서는 선행 연구에서 제시한 다양한 관점들을 하나의 곱셈 상황에서 통합적으로 접근하는 것을 강조한다. 특히 곱셈의 전체적인 구조를 파악하여 순차성뿐만 아니라 각각의 합성 단위의 크기가 동시에 변하는 동시성을 함께 강조한다. 이는 Steffe & Olive(2010)가 제시한 단위 조정 스킴과 Confrey(1994)의 스플리팅과 직접적으로 연결된다. 이외에 곱셈에서 내적 비율과 외적 비율을 동시에 경험할 수도 있다(Freudenthal, 1983; Vergnaud, 1994).

둘째, 곱셈의 통합적 접근은 자연수에서의 곱셈뿐만 아니라 분수 및 소수의 개념 및 연산 이해, 비와 비율, 비례 및 함수와 관련된 이해로 확장되어 여러 주제를 아우를 수 있다는 점에서 통합적이다. 특히 동수누가로만 접근하는 반복은 이후에 분수, 분수 연산 및 비와 비율, 비례 추론과 관련하여 많은 한계를 갖지만 Confrey(1994)는 이를 상호보완할 수 있는 스플리팅이 기본적으로 분할과 관련되어 있다는 것을 강조하였으며, Izsák & Beckmann(2019)의 조정된 측정에서도 반복과 분할 과정을 모두 강조하고 있다. 따라서 학생들은 곱셈의 통합적 접근을 통해 자연수의 곱셈 상황에서 반복과 분할 상황에 모두 참여할 수 있을 것이다.

셋째, 곱셈의 통합적 접근은 하나의 교실 수업에서 곱셈에 참여하는 학생들의 다양한 관점을 모두 다룰 수 있다는 점에서 통합적이다. 하나의 곱셈 상황을 어떻게 이해하는가는 학생들에 따라 서로 다를 수 있다(Izsák & Beckmann, 2019; Otto et al., 2011). 따라서 수업에서 서로 다른 의견이 제시되었을 때 이에 대한 논의를 활발하게 이끌어 감으로써 곱셈의 다양한 측면들을 탐색할 수 있고 이를 통해 곱셈에 대해 통합적으로 이해하도록 도울 수 있을 것이다.

그러나 본 연구에서는 이론적 고찰을 통해서만 곱셈의 통합적 접근을 제안하였으므로, 실제 학생들과의 수업 및 교수 실험 등을 통해 반드시 수정・보완할 필요가 있다. 특히, 곱셈의 통합적 접근에서 학생들에게 하나의 곱셈 상황을 다양하게 해석해보도록 하는 것을 자칫 잘못하면 한 차시의 수업에서 해당 곱셈 상황에 접근 가능한 모든 방법을 따져보고 이를 인위적으로 탐색하도록 하는 것으로 오해할 수 있다. 따라서 곱셈의 통합적 접근을 실제 수업에 적용할 때에는 이에 주의할 필요가 있다. 또한 곱셈의 통합적 접근을 도입하는 시기 및 교수 방법 등에 대해 보다 심도있게 논의할 필요가 있다.

본 연구는 초등학교 수학에서 다루는 곱셈과 관련하여 실제 수업을 진행하는 교사에게 몇 가지 시사점을 제공할 수 있을 것이라 기대한다. 곱셈의 통합적 접근을 하도록 돕기 위하여 교사는 수학 수업에서 하나의 곱셈 상황을 제시하고 이를 다양한 방법으로 해석하고 논의할 수 있는 장을 마련해야 한다. 또한 한 묶음의 기본 단위의 수를 앞에, 묶음의 수를 뒤에 제시하는 일관적인 문장제에서 수의 순서를 다양하게 제시하여 학생들이 여러 가지 방법에 대해 자연스럽게 탐색할 수 있도록 도와야 한다. 마지막으로 기본 단위 1에 초점을 맞출 수 있도록 문장제에 새로운 조건을 추가하는 것도 하나의 방안이 될 수 있다.

참고 문헌

강문봉, 김정하(2018). 곱셈 지도에 관한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 22**(4), 369-384.

강흥규(2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안. **학교수학, 11**(1), 17-37.

강흥규, 심선영(2010). 알고리즘의 다양성을 활용한 두 자리 수 곱셈의 지도 방안과 그에 따른 초등학교 3학년 학생의 곱셈 알고리즘 이해 과정 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 287-314.

교육부(2015). **수학과 교육과정**(교육부 고시 제 2015-74호 별책 8).

교육부(2019a). **수학 2-1.** 서울: 천재교육.

교육부(2019b). **수학 3-1.** 서울: 천재교육.

김유경, 방정숙(2014). 곱셈적 구조에 대한 2, 4, 6학년 학생들의 수학적 사고의 연결성 분석. **수학교육, 53**(1), 57-73.

김정원, 방정숙(2013). 초등학교 3학년 학생들의 곱셈적 사고에 따른 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구, 23**(1), 1-16.

김주창, 이광호(2019). 시각적 모델에 따른 곱셈식 표현 방법에 대한 연구. **초등수학교육, 22**(1), 65-82.

김현, 조영미, 정연준(2016). 한국・중국・일본・싱가포르 수학교과서의 곱셈구구 지도내용 비교 연구. **한국초등수학교육학회지, 20**(3), 407-430.

박만구, 박경선(2009). Skemp 이론에 따른 곱셈 놀이활동이 수학학업성취도 및 수학적 태도에 미치는 효과. **한국학교수학회논문집, 12**(3), 211-230.

이소민, 김진호(2009). 추론 능력이 열등한 초등학교 2학년 학생의 곱셈 지식 구성 능력에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 12**(1), 47-70.

이종욱(2007). 한 초등학교 2학년 아동의 곱셈과 나눗셈 해결 전략에 관한 사례 연구. **수학교육, 46**(2), 155-171.

이지영 (2015). **초등학교 학생들의 단위 추론을 기반으로 한 분수 나눗셈의 학습경로 개발.** 한국교원대학교 박사학위논문.

이지영(2017). 초등학교 분수 학습에서 퀴즈네어 막대 활용에 대한 비판적 고찰. **수학교육, 56**(2), 193-212 .

이지영(2018). 초등학교 수학에서 다루는 곱셈적 구조에서 내포량에 대한 고찰. **학습자중심교과교육연구, 18**(18), 725-748.

이지영, 방정숙(2016). 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대한 초등학교 5학년 학생들의 이해. **학교수학, 18**(4), 793-818.

임재훈(2014). 선험적 지식으로서 곱셈의 교환법칙 교육의 문제. **한국초등수학교육학회지, 18**(1), 1-17.

임재훈(2015). 비의 값과 비율 용어에 대한 교수학적 분석. **한국초등수학교육학회지, 19**(3), 371-386.

임재훈(2016). 분수 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성. **한국초등수학교육학회지, 20**(4), 521-539.

임재훈(2017). 확대 상황 포함나눗셈에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 21**(1), 115-134.

정연준(2011). 자연수 곱셈 계산법의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. **학교수학, 13**(2), 267-286.

정연준, 조영미(2012). 자연수 곱셈 계산 지도에 관한 초등학교 수학교과서 비교 분석 연구: 우리나라, 미국, 싱가포르, 일본 교과서를 중심으로. **수학교육학연구, 22**(2), 293-309.

정영옥(2013). 초등수학에서 자연수 곱셈 지도: 곱셈의 도입과 곱셈 구구를 중심으로. **학교수학, 15**(4),

889-920.
한은혜, 류희수(2008). 초등에서의 곱셈적 사고 지도: 초등 5학년을 위한 교수-학습 자료 개발을 중심으로. **학교수학, 10**(2), 155-179.
Bell, M., Isaacs, A., Bell, J., McBride, J., Bretzlauf, J., & Moran, C. G. et al. (2007). *Everyday mathematics student math journal Grade 2 Volume 1*(3rd ed). Chicago: McGraw-Hill.
Beckmann, S., & Izsák, A. (2015). Two perspectives on proportional relationships: Extending complementary origins of multiplication in terms of quantities. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 17-38.
Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*(pp. 291-329). Albany, NY: State University of New York Press.
Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.
Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). Albany, NY: State University of New York Press.
Izsák, A., & Beckmann, S. (2019). Developing a coherent approach to multiplication and measurement. *Educational Studies in Mathematics, 101*(1), 83-103.
Kaput, J. (1985). *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response* (Technical Report 85-19). Cambridge, MA: Educational Technology Center.
Kaput, J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235-287). New York: State University of New York Press.
Kheong, F. H., Ramakrishnan, C., & Wah, B. L. P. (2013). *My pals are here! Maths 1B* (3rd ed). Singapore: Marshall Cavendish Education.
Otto, A. D., Caldwell, J., Lubinski, C. A., Hancock, S. W., Rathmell, E. C., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of multiplication and division for teaching mathematics in grades 3-5.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 백석윤, 류현아, 이종영, 도주원 공역(2016). **곱셈과 나눗셈의 필수 이해.** 서울: 교우사.
Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Erlbaum.
Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-39). New York: State University of New York Press.
Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge.* New York: Springer.
Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). New York: State University of New York Press.

A Study on the Integrated Approach to Multiplication in Elementary School Mathematics

Lee, Jiyoung[4)]

Abstract

This study proposed an integrated approach to multiplication as a way to help students understand multiplication in elementary mathematics. The integrated approach to multiplication is to give students a broad understanding of multiplication by solving a situation of multiplication in a variety of ways in mathematics classes, exploring and discussing each other's methods. The integrated approach to multiplication was derived from a number of previous studies that emphasized various approaches, a consistent approach, and a specific approach to multiplication. As results, the integrated approach of multiplication can be interpreted in four ways as a situation of multiplication, and each method is connected to important characteristics of multiplication emphasized in previous studies. In addition, this study has theoretically confirmed that the integrated approach to multiplication is important not only for multiplication but also for division, fraction and operation of fractions, ratios, rates, and proportions. This study is expected to provide some implications for teachers with regard to multiplication in elementary school mathematics.

Key Words : Multiplication, The integrated approach to multiplication, Multiplier, Times, Operator, Scalar

Received August 18, 2019
Revised September 27, 2019
Accepted September 28, 2019

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97C10, 97D10

4) Songshin Elementary School (ez038@naver.com)