JANT 한국항행학회논문지
Journal of Advanced Navigation Technology

기반 기술
J. Adv. Navig. Technol. 23(6): 577-583, Dec. 2019

비구조화 불확실성을 갖는 양의 시변 이산 구간 시스템의 안정 조건

Stability Conditions for Positive Time-Varying Discrete Interval System with Unstructured Uncertainty

한 형 석
가천대학교 전자공학과

Hyung-seok Han
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do, 13120, Korea

[요 약]

음이 아닌 입력에 대하여 음이 아닌 초기상태에서 출발한 모든 상태변수 값들이 시간에 대하여 항상 음이 아닌 값을 유지하는 시스템은 양의 시스템으로 정의된다. 본 논문에서는 상태변수에 시변 지연시간과 비구조화된 불확실성이 함께 존재하는 양의 시변 선형 이산 구간 시스템의 안정조건을 새롭게 제안한다. 시변 지연시간은 변동가능한 최소와 최대 지연시간 범위 내에서 변하는 것으로 고려되며, 불확실성은 비선형성을 포함하여 그 최대 크기만을 알 수 있는 것으로 고려한다. 제안된 안정조건은 이전의 결과들이 시불변시스템에만 적용되었거나 불확실성에 대한 고려가 없었던 것을 개선한 것으로 매우 간단한 부등식의 형태로 표현된다. 안정조건은 리아프노프 안정이론을 이용하여 유도되며, 리아프노프 방정식의 상한 해 한계(upper solution bound)를 이용한 기존 결과에 비하여 많은 장점을 갖는다. 제안된 안정조건은 기존의 결과들을 포함하는 효과적인 것으로 수치예제를 통하여 이를 검증한다.

[Abstract]

A dynamic system is called positive if any trajectory of the system starting from non-negative initial states remains forever non-negative for non-negative controls. In this paper, we consider the new stability condition for the positive time-varying linear discrete interval systems with time-varying delay and unstructured uncertainty. The delay time is considered as time-varying within certain interval having minimum and maximum values and the system is subjected to nonlinear unstructured uncertainty which only gives information on uncertainty magnitude. The proposed stability condition is an improvement of the previous results which can be applied only to time-invariant systems or had no consideration of uncertainty, and they can be expressed in the form of a very simple inequality. The stability conditions are derived using the Lyapunov stability theory and have many advantages over previous results using the upper solution bound of the Lyapunov equation. Through numerical example, the proposed stability conditions are proven to be effective and can include the existing results.

Key word : Stability condition, Positive time-varying discrete interval system, Time-varying delay, Unstructured uncertainty, Nonlinear.

https://doi.org/10.12673/jant.2019.23.6.577

Received 20 November 2019; **Revised** 23 November 2019
Accepted (Publication) 21 December 2019 (30 December 2019)

***Corresponding Author; Hyung-seok Han**

Tel: +82-31-750-5561
E-mail: hshan@gachon.ac.kr

Ⅰ. 서 론

양의 시스템은 음이 아닌 초기상태에서 시작하여 음이 아닌 입력에 대하여 항상 음이 아닌 상태변수 궤적을 영원히 유지하는 동적 시스템으로 정의된다[1]-[3]. 이러한 시스템에 대하여 안정성에 관련된 연구는 최근에도 이산시간과 연속시간[4]에 대하여 발표되고 있다. 양의 시스템에 대한 안정성 판단 문제는 이 분야의 중요한 주제로, 지난 몇 년간 다양한 연구결과가 제시되었다[5]-[9]. 시간지연을 갖는 양의 구간 이산 시스템에 대한 견실 안정성 필요충분조건은 [8]에서 제시되었으나, 제안된 조건은 일정한 지연시간을 갖는 시불변 구간 시스템에만 적용이 가능하다. 시변 구간 시스템에 대한 결과는 [9]에서 상태변수에 시변 지연시간이 있는 양의 시변 선형 이산 구간 시스템의 안정조건이 제안되었으며, 시변 지연시간을 고려한 간단한 형태의 부등식의 형태로 표현되었다. [10]에서는 일반적인 시불변 시스템의 경우에 대하여 시불변 지연을 갖는 시스템에 비구조화된 불확실성이 인가된 경우의 안정 조건을 제안하였다. 최근의 결과인 [11]에서는 [10]의 결과를 개선하여 시변 지연과 비선형 불확실성을 고려한 결과를 시불변시스템에 대하여 적용한 결과를 제시하였다. 본 논문에서는 [9]-[11]의 결과를 개선하여 비구조화된 불확실성을 포함한 양의 시변시스템에 대하여, 구간 시변 지연과 비선형, 비구조화된 특성을 갖는 불확실성 조건이 인가된 포괄적인 시스템의 경우에 대한 안정 조건을 유도한다. 이는 [9]의 결과에 비교하여, 비구조화된 불확실성을 추가한 것이며, [10]과 [11]에 대하여 시변 구간 시스템으로 적용가능한 시스템의 범위를 확장한 결과이다, .

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 기존 결과를 요약하고 III장에서는 새로운 안정조건을 제시하고, IV장에서는 기존 수치 예제에 대하여 새로운 조건을 적용하고 그 결과를 제시한다.

Ⅱ. 기존의 안정 조건

본 논문에서 사용하는 기호로는 Z_+ 는 음이 아닌 정수 집합, $R_+^{n\times m}$는 음이 아닌 값으로 행렬 요소를 갖는 $n\times m$ 행렬이며, $R_+^n = R_+^{n\times 1}$, $\|X\|$는 행렬 X의 스펙트랄 노옴(spectral norm), ($\|X\|: X^TX$행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며, $X>0$는 대칭행렬 X가 양의 정칙(positive definite), $A=[a_{ij}]$는 행렬 요소 값 a_{ij} 로 구성된 행렬. $|A|=[|a_{ij}|]$,$A\le_e B$는 행렬 요소별 부등식을 나타내며, $\lambda_{\max}(X)$는 행렬 X의 최대 고유치, $\rho(X)$ 는 $max|\lambda_i(X)|$,즉, 스펙트랄 반경(spectral radius), I_n 는 $n\times n$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다. 벡터 $x\in R_+^n$ 중 모든 행렬요소가 양의 값을 갖는 경우에는, 완전 양(strictly positive) 벡터라 정의하며 $x>0$으로 표시한다.

식 (1)과 같은 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)x(k-d(k)) \tag{1}$$

여기서,$A(k),B(k)\in R_+^{n\times n}, x(k)\in R_+^n$, $\forall k\in Z_+$ 이고, 모든 $x(-k)\in R_+^n$, $k=0,1,....,d_M$이다. 또한,

$$\begin{aligned}
&A(k)\in[A^-,A^+]\subset R_+^{n\times n}\\
&0\le_e A^-\le_e A(k)\le_e A^+(0\le a_{ij}^-\le a_{ij}(k)\le a_{ij}^+)\ \forall k,i,j\\
&B(k)\in[B^-,B^+]\subset R_+^{n\times n}\\
&0\le_e B^-\le_e B(k)\le_e B^+(0\le b_{ij}^-\le b_{ij}(k)\le b_{ij}^+)\ \forall k,i,j\\
&d(k)\in[d_m,d_M]\subset Z_+,\ (0\le d_m\le d(k)\le d_M)\ \forall k
\end{aligned} \tag{2}$$

기존 결과 1[9]: 식(1),(2)를 만족하는 양의 구간 이산시스템은 시스템 행렬 A^+이 점근안정하고, 즉

$$\rho(A^+)<1 \tag{3}$$

하고, 다음의 조건을 만족하면

$$\begin{aligned}&(\|A^+\|+\sqrt{1+d_M-d_m}\,\|B^+\|)\\ &\times\left(\frac{(A^+)^TA^+}{\|A^+\|}+\sqrt{1+d_M-d_m}\,\frac{(B^+)^TB^+}{\|B^+\|}\right)<I_n\end{aligned} \tag{4}$$

점근안정하다.

위의 기존결과는 양의 시변시스템에 대한 것으로 가장 일반적인 시변시스템에 대하여 표현하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned}x(k+1)=&A(\bullet)x(k)+B(\bullet)x(k-d(\bullet))\\&+f(x(k),k)+f_1(x(k-d),k)\end{aligned} \tag{5}$$

여기서, $A(\bullet), B(\bullet), d(\bullet)$의 시간에 따른 특성에 따라 다양한 형태의 시스템을 나타낼 수 있으며 이에 관해 다수의 결과가 발표되었다[5]-[11]. 특히, 최근의 결과인 [10],[11]에서는 식(6)을 만족하는 비선형 불확실성 $f(x(k),k), f_1(x(k-d),k)$를 포함하여 안정성을 고려하였다. [10]에서는 시불변시스템에 대하여 시불변지연시간를 가정하여 두 개의 불확실성 요소 모두를 고려한 안정조건을,[11]에서는 시불변시스템에 대하여 시변지연시간을 가정하고 비선형 불확실성을 고려한 안정조건을 다루었다.

$$\begin{aligned}&x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d)+f(x(k),k)+f_1(x(k-d),k)\\&\|f(x(k),k)\|\le n\|x(k)\|, f_1(x(k-d),k)\le\gamma\|x(k-d)\|\end{aligned} \tag{6}$$

기존 결과 2[10]: 식 (6)를 만족하는 이산시스템이 식 (7)의 조건을 만족하면

$$(\|A\|+\|B\|+\eta+\gamma)\ \left(\frac{A^TA}{\|A\|}+\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n+\gamma I_n\right) < I_n \qquad (7)$$

점근안정하다.

기존 결과 [11]에서는 식(8)로 표현되는 시스템에 대하여 안정 조건을 제시하였다.

$$\begin{aligned} &x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k))+f(x(k),k) \\ &\|f(x(k),k)\| \le \eta\|x(k)\| \\ &0 \le d_m \le d(k) \le d_M,\ \ \forall k \end{aligned} \qquad (8)$$

기존 결과 3[11]: 식 (8)를 만족하는 이산시스템이 주어진 $\epsilon>0, d_M-d_m \ge 0$에 대하여, 다음의 식 (9)을 만족하면 안정하다.

$$\begin{aligned} &D \equiv 1+d_M-d_m \\ &(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)\left(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n\right) \\ &\qquad +\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|} \quad < I_n \end{aligned} \qquad (9)$$

본 논문에서는 다음과 같은 잘 알려진 정리를 사용한다.

보조정리 I ([12]) :임의의 벡터 x,y와 양의 상수 ϵ 에 대하여 식 (10)이 성립한다.

$$2x^Ty \le \epsilon^{-1}x^Tx+\epsilon y^Ty \qquad (10)$$

Ⅲ. 새로운 안정 조건

본 장에서는 양의 시변 시스템의 경우에 대하여 구간 시변 지연을 갖는 시스템에 비구조화된 불확실성이 인가된 경우의 안정 조건을 유도한다. 이는 식 (2)의 시스템에서 식(8)의 불확실성을 추가한 것으로 식 (11)로 표현된다..

$$\begin{aligned} &x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)x(k-d(k))+f(x(k),k) \\ &\|f(x(k),k)\| \le \eta\|x(k)\| \end{aligned} \qquad (11)$$

여기서,$A(k),B(k)\in R_+^{n\times n}, x(k)\in R_+^n$, $\forall k\in Z_+$ 이고, 모든 $x(-k)\in R_+^n$, $k=0,1,\ldots,d_M$이다.

리아프노프 함수를 식 (12)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} &V(x(k))=x^T(k)x(k)+\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\ &+\sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}\ \sum_{i=k+j-1}^{k-1}x^T(i)Rx(i)=V_1+V_2+V_3 \end{aligned} \qquad (12)$$

여기서, 대칭행렬 R은 양의 정칙행렬로 $R>0$.

보조정리 II: 식(11)의 시스템은 식(12)에 정의된 리아프노프 함수와 $\epsilon>0, d_M-d_m \ge 0$ 에 대하여 식 (13)의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} &D \equiv 1+d_M-d_m \\ &V(x(k+1))-V(x(k))=\triangle V_1+\triangle V_2+\triangle V_3 \\ &\le x^T(k)(A^T(k)A(k)-I_n+(1+d_M-d_m)R)x(k) \\ &\quad +x^T(k-d(k))(B^T(k)B(k)-R)x(k-d(k)) \\ &\quad +2x^T(k-d(k))B^T(k)A(k)x(k)+2f^T(x(k),k)A(k)x(k) \\ &\quad +2f^T(x(k),k)B(k)x(k-d(k))+f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\ &\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A^+\|})A^{+T}A^+-I_n+DR \\ &+(\eta^2+\eta\|A^+\|+\eta\|B^+\|)I_n)x(k) \\ &+x^T(k-d(k))((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B^+\|})B^{+T}B^+)-R)x(k-d(k)) \end{aligned} \qquad (13)$$

증명: $V(x(k+1))-V(x(k))=\triangle V_1+\triangle V_2+\triangle V_3$

$$\begin{aligned} &x_d(k) \equiv x(k-d(k)) \\ &\triangle V_1=x^T(k+1)x(k+1)-x^T(k)x(k) \\ &=x^T(k)(A^T(k)A(k)-I_n)x(k) \\ &\ +2x_d^T(k)B^T(k)A(k)x(k)+2f^T(x(k),k)B(k)x_d(k) \\ &\ +2f^T(x(k),k)A(k)x(k)+x_d^T(k)B^T(k)B(k)x_d(k) \\ &\ +f^T(x(k),k)f(x(k),k) \end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} \triangle V_2 &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k}x^T(i)Rx(i)-\sum_{i=k-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\ &=x^T(k)Rx(k)-x_d^T(k)Rx_d(k)+\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\ &\quad -\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \qquad (15)$$

참고문헌 [11]에서와 같이 식 (16),(17)을 만족한다.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1}x^T(i)Rx(i)-\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i) \\ &\le (\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i)+\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m}x^T(i)Rx(i)) \\ &\quad -\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1}x^T(i)Rx(i)=\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m}x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \qquad (16)$$

$$\begin{aligned} &\triangle V_3=\sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1}(x^T(k)Rx(k)-x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) \\ &=(-d_m+1-(-d_M+2)+1)x^T(k)Rx(k) \\ &-(x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1)-\ldots \\ &-x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1)) \\ &=(d_M-d_m)x^T(k)Rx(k)-\sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m}x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \qquad (17)$$

그러므로, 보조정리 I과 잘 알려진 대칭행렬의 성질 $A^T(k)A(k) \le \|A^+\|^2I_n$, $B^T(k)B(k) \le \|B^+\|^2I_n, f^Tf \le \eta^2\|x(k)\|^2$ 을

이용하면 식 (18)과 (19)를 얻는다.

$$
\begin{aligned}
&2x_d^T(k)B^T(k)A(k)x(k) \\
&\le \frac{1}{\epsilon}x^T(k)A^T(k)A(k)x(k)+\epsilon x_d^T(k)B^T(k)B(k)x_d(k) \\
&2f^T(x(k),k)B(k)x_d(k) \\
&\le \frac{\|B^+\|}{\eta}f^Tf+\frac{\eta}{\|B^+\|}x_d^T(k)B^{+^T}B^+x_d(k) \\
&\le \eta\|B^+\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|B^+\|}x_d^T(k)B^{+^T}B^+x_d(k) \\
&2f^T(x(k),k)A(k)x(k) \\
&\le \frac{\|A^+\|}{\eta}f^Tf+\frac{\eta}{\|A^+\|}x^T(k)A^{+^T}A^+x(k) \\
&\le \eta\|A^+\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|A^+\|}x^T(k)A^{+^T}A^+x(k) \\
&D\equiv 1+d_M-d_m
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&V(x(k+1))-V(x(k))=\triangle V_1+\triangle V_2+\triangle V_3 \\
&\le x^T(k)(A^T(k)A(k)-I_n)x(k) \\
&\quad +2x_d^T(k)B^T(k)A(k)x(k)+2f^T(x(k),k)B(k)x_d(k)+2f^T(x(k),k)A(k)x(k) \\
&\quad +x_d^T(k)B^T(k)B(k)x_d(k)+f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\
&\quad +x^T(k)Rx(k)-x_d^T(k)Rx_d(k)+(d_M-d_m)x^T(k)Rx(k) \\
&\le x^T(k)(A^T(k)A(k)-I_n+(1+d_M-d_m)R)x(k) \\
&+x_d^T(k)(B^T(k)B(k)-R)x_d(k) \\
&+2x_d^T(k)B^T(k)A(k)x(k)+2f^T(x(k),k)B(k)x_d(k)+2f^T(x(k),k)A(k)x(k) \\
&+f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\
&\le x^T(k)(A^T(k)A(k)-I_n+DR)x(k) \\
&+x_d^T(k)(B^T(k)B(k)-R)x_d(k) \\
&+\frac{1}{\epsilon}x^T(k)A^T(k)A(k)x(k)+\epsilon x_d^T(k)B^T(k)B(k)x_d(k) \\
&+\eta\|B^+\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|B^+\|}x_d^T(k)B^{+^T}B^+x_d(k) \\
&+\eta\|A^+\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|A^+\|}x^T(k)A^{+^T}A^+x(k) \\
&+\eta^2x^T(k)x(k) \\
&\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A^+\|})A^{+^T}A^+-I_n+DR \\
&+(\eta^2+\eta\|A^+\|+\eta\|B^+\|)I_n)x(k)+x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B^+\|})B^{+^T}B^+-R)x_d(k)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

보조정리 III: $D\equiv 1+d_M-d_m$ 에 대하여 식 (20)의 관계식을 만족한다.

$$
-\sqrt{D}\|B^+\|I_n+\|B^+\|I_n\le -\sqrt{D}\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}+\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|} \tag{20}
$$

증명:

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{D}\|B^+\|I_n+\|B^+\|I_n+\sqrt{D}\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}-\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|} \\
&=(\sqrt{D}-1)(\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}-\|B^+\|I_n)\le 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\because\ \sqrt{D}-1\ge 0,\ B^{+^T}B^+\le\|B^+\|^2I_n,\ \frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}-\|B^+\|I_n\le 0) \\
&\therefore -\sqrt{D}\|B^+\|I_n+\|B^+\|I_n\le -\sqrt{D}\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}+\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}
\end{aligned}
$$

위의 보조정리II,III을 이용하면 다음과 같은 안정조건을 얻을 수 있다

정리 I: 주어진 $\epsilon>0, d_M-d_m\ge 0$에 대하여, 식 (21)의 행렬을 이용한다.

$$
-R=\frac{(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A^+\|})A^{+^T}A^+-I_n+(\eta^2+\eta\|A^+\|+\eta\|B^+\|)I_n}{1+d_M-d_m}<0 \tag{21}
$$

다음의 부등식을 만족하면 식 (11)의 시스템은 안정하다.

$$
D\equiv 1+d_M-d_m \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\|A^+\|+\sqrt{D}\|B^+\|+\eta)(\frac{A^{+^T}A^+}{\|A^+\|}+\sqrt{D}\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}+\eta I_n) \\
&\quad +\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^{+^T}B^+}{\|B^+\|}<I_n
\end{aligned}
\tag{23}
$$

증명 : 식 (21)과 같이 행렬 R을 선택하여 대입하면 식 (24)이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&V(x(k+1))-V(x(k)) \\
&\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A^+\|})A^{+^T}A^+-I_n \\
&\quad +DR+(\eta^2+\eta\|A^+\|+\eta\|B^+\|)I_n)x(k) \\
&\quad +x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B^+\|})B^{+^T}B^+-R)x_d(k) \\
&=x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B^+\|})B^{+^T}B^+-R)x_d(k)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

따라서 , 식(21)을 사용하여

$$
\begin{aligned}
&(1+d_M-d_m)(1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B^+\|})B^{+^T}B^++(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A^+\|})A^{+^T}A^+-I_n \\
&+(\eta^2+\eta\|A^+\|+\eta\|B^+\|)I_n<0
\end{aligned}
$$

이 되면 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 이 됨을 알 수 있다. 이를 보이기 위하여,

$$
\epsilon=\frac{\|A^+\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B^+\|}>0
$$

로 하여, 식 (23)의 부등식이 성립함을 보이도록 한다.

$$(1+d_M-d_m)(1+\frac{\|A^+\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B^+\|}+\frac{\eta}{\|B^+\|})B^{+T}B^+$$
$$+(1+\frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B^+\|}{\|A^+\|}+\frac{\eta}{\|A^+\|})A^{+T}A^++(\eta^2+\eta\|A^+\|+\eta\|B^+\|)I_n$$
$$<I_n \tag{25}$$

$D\equiv 1+d_M-d_m$ 로 하고 식(25)을 식 (26)과 같이 표현한다.

$$(\|A^+\|+\sqrt{D}\|B^+\|+\eta)(\frac{A^{+T}A^+}{\|A^+\|}+\sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}+\eta I_n)$$
$$-\eta\sqrt{D}\|B^+\|I_n-\eta\sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}+\eta D\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}+\eta\|B^+\|I_n<I_n \tag{26}$$

여기서, 위의 마지막 4개의 항은 보조정리 III을 이용하면 식(27)의 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned}&\eta D\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}-\eta\sqrt{D}\|B^+\|I_n-\eta\sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}+\eta\|B^+\|I_n\\&=\eta(D\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}-\sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}-\sqrt{D}\|B^+\|I_n+\|B^+\|I_n)\\&\le\eta(D\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}-\sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}-\sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}+\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|})\\&=\frac{\eta}{\|B^+\|}(\sqrt{D}B^+-B^+)^T(\sqrt{D}B^+-B^+)\\&=\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}\end{aligned} \tag{27}$$

따라서, 식 (27)을 이용하여 식 (28)을 만족하면, 식(26)의 부등식도 만족한다.

$$(\|A^+\|+\sqrt{D}\|B^+\|+\eta)(\frac{A^{+T}A^+}{\|A^+\|}+\sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}+\eta I_n) \tag{28}$$
$$+\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}<I_n$$

위의 부등식을 만족하면 식(24)의 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 이 만족된다. 따라서, 식 $(1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B^+\|})B^{+T}B^+-R<0$이 만족되므로 $-R<0$ 은 당연히 만족하게 된다.

정리I의 행렬 부등식을 간단한 수식으로 표현하면 다음의 따름정리를 얻는다.

따름정리 I: 주어진 $d_M-d_m\ge 0$에 대하여, 식 (29)의 부등식을 만족하면 식 (11)의 시스템은 안정하다.

$$(\|A^+\|+\sqrt{D}\|B^+\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|B^+\|<1 \tag{29}$$

증명: 식 (23)의 결과에서 $\frac{A^{+T}A^+}{\|A^+\|}<\|A^+\|I_n$ 과 $\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}<\|B^+\|I_n$ 를 이용하면 증명된다.

위의 결과는 정리I의 충분조건이 되나 행렬 연산을 필요로 하지 않으므로 간단하게 계산될 수 있다. 위의 정리I 의 조건은 이전에 발표된 식(4)의 비구조화된 불확실성을 고려하지 못한 결과[9]와 시불변시스템의 안정조건[10],[11]를 확장시킨 결과이다. 기존 결과[9] 식(4)와 비교하면, 비구조화된 불확실성에 의한 영향을 나타내는 항이 추가되어 있음을 알 수 있다. 기존 [10]과 비교하기 위하여 위의 정리를 시불변 시스템에 적용하면 다음과 같은 따름정리를 얻는다.

따름정리 II: 시불변 지연시간에 대하여, 식 (30)의 부등식을 만족하면 식 (11)의 시스템은 안정하다.

$$(\|A^+\|+\|B^+\|+\eta)(\frac{A^{+T}A^+}{\|A^+\|}+\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|}+\eta I_n)<I_n \tag{30}$$

증명: 시불변 지연시간이므로 $d_M=d_m, D=1$이며, 식 (23)에 대입하면 식 (30)을 얻는다.

위의 결과는 시불변 지연에 대한 결과인 참고문헌 [10] 의 결과와 같음을 알 수 있다. 그러나, [10]의 결과는 시불변 시스템에 대한 것이고 새로 제안된 따름정리 II의 결과는 시변 시스템에 대한 결과이므로 [10]의 결과를 포함한 것이다. 불확실성을 고려하지 않은 시변이산 시간에 대한 안정조건을 행렬 연산이 필요 없는 형태로 구하면 다음의 따름정리와 같다.

따름정리 III: 시변 지연시간을 갖고 비선형 불확실성이 없는 경우에 대하여, 식 (31)의 부등식을 만족하면 식 (11)의 시스템은 안정하다.

$$\|A^+\|+\sqrt{1+d_M-d_m}\|B^+\|<1 \tag{31}$$

증명: 비구조화된 불확실성이 없는 경우는 $\eta\to 0$ 으로 고려될 수 있으며 이 경우 부등식 (31)을 얻는다.

위의 정리I의 조건은 양의 시변 이산 시스템에서 고려될 수 있는 주요 요소들을 모두 포함한 시스템에 대하여 안정 조건을 매우 간결하고 함축적으로 제시한 결과이다. 이 결과는 기존의 여러 측면에서 연구되어 제시된 안정 조건들을 포괄적으로 설명할 수 있는 결과이며, 각각의 결과들을 하나의 수식으로 표현한 효과적인 것이다.

다음 장에서는 제안된 안정조건을 기존의 예제에 적용하여 얻은 결과를 설명한다.

Ⅳ. 새로운 조건의 수치 예제 적용

[9]에서 예제로 사용된 수치예제를 이용한다. [9]에서는 시변 시스템과 시변 지연시간에 대하여 안정성 해석을 행하였다. [9]에서 다룬 바와 같이 먼저, 양의 시스템 식 (11)의 시스템을 다음과 같이 고려한다.

$$A^- = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$B^- = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

시불변 지연시간을 고려하기 위하여 정리1에서 $d_m = d_M, d_M - d_m = 0$로 두고, 상수인 지연 시간에 대하여 정리1과 따름정리1를 적용하면 $d_M - d_m = 0$ 이므로 다음의 조건으로 표시된다.

$$H = (\|A^+\| + \sqrt{D}\|B^+\| + \eta)\left(\frac{A^{+T}A^+}{\|A^+\|} + \sqrt{D}\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|} + \eta I_n\right) + \eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|} < I_n$$

$$h = (\|A^+\| + \sqrt{D}\|B^+\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{D}-1)^2\|B^+\| < 1$$

$\sqrt{D} = 1$ 이므로 다음의 조건으로 구할 수 있다.

$$H = (\|A^+\| + \|B^+\| + \eta)\left(\frac{A^{+T}A^+}{\|A^+\|} + \frac{B^{+T}B^+}{\|B^+\|} + \eta I_n\right) < I_n \quad (33)$$

$$h1 = \|A^+\| + \|B^+\| + \eta < 1$$

위와 같은 안정 조건을 만족하는 불확실성의 크기인 η 을 구하면 다음과 같다.

$$\eta = 0.48$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.9288 & 0 & 0.1572 \\ 0 & 0.8369 & 0 \\ 0.1572 & 0 & 0.5565 \end{bmatrix}, \lambda_{\max}(H) = 0.9863 < 1$$

$$h1 = \|A^+\| + \|B^+\| + \eta = 0.9957$$

시변 지연시간에 대하여 $d_M - d_m = 1, \sqrt{D} = \sqrt{2}$ 인 경우에 대한 안정 조건을 만족하는 불확실성의 크기인 η 을 구하면 다음과 같다.

$$\eta = 0.35$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.9205 & 0 & 0.1879 \\ 0 & 0.7653 & 0 \\ 0.1879 & 0 & 0.4393 \end{bmatrix}, \lambda_{\max}(H) = 0.9852 < 1$$

$$h = (\|A^+\| + \sqrt{2}\|B^+\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{2}-1)^2\|B^+\| = 0.9911 < 1$$

시변 지연시간에 대하여 $d_M - d_m = 2, \sqrt{D} = \sqrt{3}$ 인 경우에 대한 안정 조건을 만족하는 불확실성의 크기인 η 을 구하면 다음과 같다.

$$\eta = 0.25$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.9215 & 0 & 0.2130 \\ 0 & 0.7146 & 0 \\ 0.2130 & 0 & 0.3514 \end{bmatrix}, \lambda_{\max}(H) = 0.9922 < 1$$

$$h = (\|A^+\| + \sqrt{3}\|B^+\| + \eta)^2 + \eta(\sqrt{3}-1)^2\|B^+\| = 0.9986 < 1$$

위의 예에서와 같이 제안된 조건을 이용하면 기존의 결과에서는 수행할 수 없는 비선형 불확실성의 영향 분석이 가능하며 다양한 시변 지연 시간에 대하여 안정성 해석이 가능하다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 양의 지연 이산시스템에서 시스템 행렬과 지연 시간 모두 시변이고, 이와 함께 비선형이며 비구조화된 불확실성이 있는 시스템의 안정조건을 새로이 제안하였다. 제안된 조건에는 시변 지연의 변동 범위와 불확실성의 크기가 부등식에 포함되어 있다. 따라서, 제안된 안정조건은 기존에 다수의 논문에 발표된 결과들을 동시에 포함할 수 있는 매우 효과적인 조건이며, 이를 수치예제를 통하여 확인할 수 있다.

References

[1] L. Farina and S. Rinaldi, *Positive Linear Systems; Theory and Applications,* New York, NY: J. Wiley, 2000.

[2] T. Kaczorek, *Positive 1D and 2D Systems*, London, UK: Springer-Verlag, 2002.

[3] D. Krokavec and A. Filasov, “Stabilization of discrete-time LTI positive systems,” *Archives of Control Sciences*, Vol. 27, No. 4, pp. 575-594, 2017.

[4] T. Kaczorek, “Stability of interval positive continuous-time linear systems,” *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 66. No. 1, pp. 31-35, Jan. 2018.

[5] M. Busłowicz, “Robust stability of positive discrete-time linear systems with multiple delays with linear unity rank uncertainty structure or non-negative perturbation matrices,” *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 55. No. 1, pp. 1-5, Jan. 2007.

[6] M. Busłowicz, “Simple conditions for robust stability of positive discrete-time linear systems with delays,” *Control and Cybernetics*, Vol. 39, No. 4, pp. 1159-1171, Apr. 2010.

[7] C. Zhang and Y. Sun, “Stability analysis of linear positive systems with time delays on time scales,” *Advances in*

Difference Equations, Open access, Vol. 2012:56, 2012.
[8] M. Busłowicz and T. Kaczorek, “Robust stability of positive discrete-time interval systems with time-delays,” *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Vol. 52, No. 2, pp. 99-102, Feb. 2004.
[9] H. S. Han, “New Stability Conditions for Positive Time-Varying Discrete Interval System with Interval Time-Varying Delay Time,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 18, No. 5, pp. 501-507, Oct. 2014.
[10] C. H. Lee, T. L. Hsien, and C. Y. Chen, “Robust stability of discrete uncertain time-delay systems by using a solution bound of the Lyapunov equation,” *Innovative Computing Information and Control Express Letters,* Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, May 2011.
[11] H. S. Han, “Stability Condition of Discrete System with Time-varying Delay and Unstructured Uncertainty,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 22, No. 6, pp. 630-635, Dec. 2018.
[12] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval time-varying system with time-varying delay time,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 20, No. 5, pp. 475-481, Oct. 2016.

한 형 석 (Hyung-Seok Han)

1986년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학사)
1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)
1993년 9월 ~ 1997년 8월: 순천향대학교 제어계측공학과 조교수
1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수
※관심분야 : 유도제어, 견실제어, 센서 응용 시스템