

## 다양한 경계조건에서 부분 분포 하중을 받는 이방성 사각평판 해석

시상광<sup>1</sup>

### Analysis for A Partial Distribution Loaded Orthotropic Rectangular Plate with Various Boundary Condition

See, Sangkwang<sup>1</sup>

**Abstract** : In this study, a governing differential equation for the bending problem of orthotropic rectangular plate is derived. Its exact solution for various boundary conditions is presented. This solution follows traditional method like Navier's solution or Levy's solution that transforms the governing differential equation into an algebraic equation by using trigonometric series. To obtain a solution by Levy's method, it is required that two opposite edges of the plate be simply supported. And the boundary conditions, for which the Navier's method is applicable, are simply supported edge at all edges. In this study, it overcomes the limitations of the previous Navier's and Levy's methods. This solution is applicable for any combination of boundary conditions with simply supported edge and clamped edge in x, y direction. The plate could be subjected to uniform, partially uniform, and line loads. The advantage of the solution is that it is the exact solution as well as it overcomes the limitations of the previous Navier's and Levy's methods. Calculations are presented for orthotropic plates with nonsymmetric boundary conditions. Comparisons between the result of this paper and the result of Navier, Levy and Szilard solutions are made for the isotropic plates. The deflections were in excellent agreement.

**Keywords** : Orthotropic plate, Partially loaded, Double trigonometric series, Single fourier series.

## 1. 서론

이방성평판은 구조물을 구성하는 주요한 요소 중의 하나이다. 이에 대한 구조적 안전을 평가하기 위해 여러 가지 해석기법들이 알려져 왔다. 현재 일반적인 평판해석은 전산화된 유한요소 이론을 활용하거나 해석의 편리성을 위해 평판을 띠부재(Strip member)로 단순화하여 보 이론을 사용하는 방법을 채택한다. 이러한 해석은 근사해법으로 보다 정확한 해법을 통한 구조적 안전을 평가할 필요가 있다. 본 연구는 평판해석 전산프로그램 개발에 활용할 수 있는 이방성평판의 정확한 해법을 연구하여 제안하였다.

평판이론은 처음 Lagrange(1813)에 의하여 등방성 평판의 지배 방정식이 유도된 후 Navier(1820)가 삼각함수의 double series를 이용하여 지배방정식을 해석했다. 이방성 평판에 대한 연구는 Cauchy(1829)가 이방성 물체의 탄성론에 관한 일반화된 식을 발표함으로써 시작되었고 Boussinesq(1879)가 이방성 평

판에 대한 평행방정식을 제안하였다. 그 후 Huber(1929)는 비대칭하중을 받고 있는 원형 이방성평판을 해석했다. Hrennikoff(1941)는 근사해법으로 복잡한 평판 해석에 대한 프레임워크(framework)해석 방법을 발표하였지만 고속으로 처리할 수 있는 컴퓨터의 부족으로 그의 이론은 일반화 되지 못하였다. Turner et al(1956)는 복잡한 평판구조물을 해석할 수 있는 유한요소 해석 방법을 처음 소개하였는데 그 후 컴퓨터의 발달로 최근까지 이 이론을 기초로 다양한 평판 해석이 가능해졌다.(Szilard,1974) 최근 국내에서 한충목(2005)이 원형 등분포 하중을 받고 있는 탄성 지반위에 놓인 평판에 대한 수치해석 과정을 제안했고 박효진과 황상무(2017)는 평판압연에 대한 새로운 유한 요소 접근방법을 제안하는 등 다양한 연구가 이루어지고 있다.

일반적으로 평판구조물은 처짐이 작은 얇은 평판, 처짐이 큰 얇은 평판, 그리고 두꺼운 평판으로 나뉘는데 그 구분에 따라 각각 선형이론, 비선형이론 그리고 3차원 탄성체이론을 기초로 해석 한다.(Szilard,1974)

지금까지 처짐이 작은 얇은 이방성 사각형 평판의 해를 구하는 방법으로 Levy(1899)의 방법과 Navier(1820)의 방법이 일반적으로 정확한 해법으로 알려져 왔다.(Timoshenko et al., 1970) 이들의 방법은 처짐과 하중의 관계를 나타내는 지배 미분 방정식을 각각 삼각함수의 단일급수해법(Single fourier series) 과 이중삼

<sup>1</sup>정회원, (주)케이아트엔지니어링종합건축사사무소, 기술부, 이사.

\*Corresponding author: again-maria@hanmail.net

KOREA ART ENGINEERING & ARCHITECTURE CO.,LTD #508, 66, Gwangdeokseo-ro, Danwon-gu, Ansan-si, Gyeonggi-do, Republic of Korea

•본 논문에 대한 토의를 2018년 10월 1일까지 학회로 보내주시면 2018년 11월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

각급수해법(Double trigonometric series)을 이용하여 대수학적 방정식으로 변환시킴으로서 용이하게 해를 구할 수 있는 장점이 있다. 그러나 Navier(1820)의 방법은 평판의 네 끝단이 모두 단 순 지지단일 경우에만 적용되며, Levy(1899)의 방법은 서로 마주보는 두 끝단이 단순 지지단일 경우에만 적용이 되는 단점이 있다.(Szilard,1974) 이러한 풀이 해의 한계를 극복하고자 유한요소법(Yang,1986), 유한띠요소법(Harrik et al.,1986), 일방향유한차분법(Gould,1988), 에너지방법(Reddy,1984) 등 여러 가지 근사 해법이 소개되었으나 이러한 방법들은 각각의 요소들의 개수에 따라 해석결과에 정확도의 문제가 유발된다.

본 연구는 Navier(1820)와 Levy(1899)방법의 장점인 미분 방정식을 대수학적 방정식으로 변환시키는 방법을 유지하면서 이들 방법이 갖는 단점인 경계조건과 하중조건의 제약을 극복하였다. 본 연구는 직교조건을 만족하는 진동보의 고유함수를 이용하여 여러 가지 경계조건과 함께 선하중, 부분하중 그리고 분포하중을 받고 있는 이방성평판의 해석방법을 제안하고 그 풀이 과정을 소개하였다.

## 2. 이방성 평판의 기본 미분 방정식 유도

수직 하중  $q(x,y)$ 을 받는 이방성 평판에서 두께에 비하여 처짐이 작은 경우를 생각해 보기로 한다. 평판의 한 요소에 작용하는 힘은 그림 1.과 같이 평판의 각 면에 휩 모멘트  $M_x, M_y$  와 비틀림 모멘트  $M_{xy}$  그리고 전단력  $V_x, V_y$ 가 작용한다. 평판의 두께가 넓이나 길이에 비해 작은 경우 이들 힘들은  $x, y$ 함수로 나타낼 수 있는데 각각의 힘의 크기는 식 (1)과 같다.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (1a)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (1b)$$

$$V_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad V_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (1c)$$

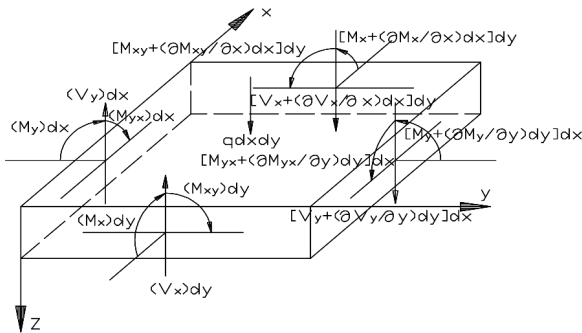


Fig 1. Forces on a rectangular plate element

그림 1.에 나타난 평판요소에서 힘의 평형방정식  $\Sigma M_x = 0$ ,

$\Sigma M_y = 0$ 를 정리하여  $\Sigma F_z = 0$ 에 대입하면 식 (2)가 된다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x,y) \quad (2)$$

그림 1,의 평판요소에서 중립선 위, 임의 점에서 하중에 의한 처짐벡터의  $x, y, z$ 방향 성분을 각각  $u, v, w$ 라 하면 처짐과 변형율의 관계를 나타내는 변위방정식은 식 (3)과 같다.

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

그리고 이방성 물체의 응력과 변형율의 관계를 응력에 관한 식으로 바꾸어 표현하면 식 (4)가 된다.

$$\sigma_x = \frac{E_x}{(1 - \mu_x \mu_y)} (\epsilon_x + \mu_y \epsilon_y) \quad (4a)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{(1 - \mu_x \mu_y)} (\epsilon_y + \mu_x \epsilon_x) \quad (4b)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (4c)$$

식 (3)을 식 (4)에 대입하면 평판 각 방향의 응력을 처짐과의 관계로 나타내는 구성방정식을 얻을 수 있고 이렇게 얻어진 구성방정식을 식 (1)에 대입하여 적분 한 후 식 (2)의 힘의 평형방정식에 대입하면 식 (5a)와 같이 이방성 평판의 처짐에 관한 기본 미분 방정식이 유도된다. 여기서  $D_x, D_y$ 는 각방향의 휩강성이고  $D_{xy}$ 는 비틀림강성이다.

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x,y) \quad (5a)$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} \quad (5b)$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)} \quad (5c)$$

$$D_{xy} = \frac{Gh^3}{12} \quad (5d)$$

$$2H = \mu_y D_x + 4D_{xy} + \mu_x D_y \quad (5e)$$

위의 식 (5)에서  $E_x, E_y$ 는 각 방향 탄성계수,  $G$ 는 전단계수,  $\mu_x, \mu_y$ 는 각 방향 포아손 비,  $q(x,y)$ 는 평판에 작용하는 수직하중,  $w(x,y)$ 는 평판의  $z$  방향 처짐이다. 식 (5)는 힘의 평형방정식, 변형율방정식, 그리고 구성방정식을 통해 유도된 이방성 평판 해석에 기초가 되는 중요한 지배 방정식이다. 이 선형 미분 방정식을 경계조건을 이용하여 수학적 개념으로 풀고 그 값을 가지고 전단력  $V_x, V_y$  그리고 모멘트  $M_x, M_y, M_{xy}$ 를 계산할 수 있다.

### 3. 이방성 평판의 미분방정식 풀이

본 연구는 식 (5)의 지배함수의 해를 구하기 위해 Navier와 Levy방법을 개선하여 여러 형태의 경계조건 및 하중조건을 적용시킬 수 있는 풀이방법을 제안한다. 식 (5)의 수직하중  $q(x,y)$  을 받고 있는 이방성 평판의 처짐  $w(x,y)$  에 관한 미분방정식을 풀기 위해 처짐함수  $w(x,y)$  를  $F(x)$  와  $G(y)$  함수의 곱인 변수 분리 형태로 놓으면 식 (6)과 같다.

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) G_n(y) \quad (6)$$

여기서  $F_n(x)$  와  $G_n(y)$  는 각각  $n$  번째 처짐 모드의  $x$  와  $y$  방향 처짐함수이다. 식 (6)을 식(5)의 지배 미분방정식에 적용하면 식 (7)이 된다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ D_x \frac{d^4 F_n(x)}{dx^4} G_n(y) + 2H \frac{d^2 F_n(x) d^2 G_n(y)}{dx^2 dy^2} + D_y F_n(x) \frac{d^4 G_n(y)}{dy^4} \right] = q(x,y) \quad (7)$$

한편, 식 (5) 선형 편미분 방정식의 해는 다음과 같이 일반해와 특이해인 두 함수의 합으로 이루어져 있다. 여기서  $w_H(x,y)$  는 일반해 이고,  $w_P(x,y)$  는 특이해이다.

$$w(x,y) = w_H(x,y) + w_P(x,y) \quad (8)$$

$y$  방향의 처짐함수  $G_n(y)$  는  $y$  방향의 경계조건을 만족시켜야 하고, 처짐함수  $w(x,y)$  가 변수분리의 형태로 되기 위해서  $n \neq m$  인 경우에 다음과 같은 직교조건을 만족해야한다.

$$\int_0^b G_n(y) G_m(y) dy = 0 \quad (9a)$$

$$\int_0^b \frac{d^2 G_n(y)}{dy^2} G_m(y) dy = 0 \quad (9b)$$

$$\int_0^b \frac{d^4 G_n(y)}{dy^4} G_m(y) dy = 0 \quad (9c)$$

여기서  $b$  는 평판의  $y$  방향 길이이다.  $y$  방향의 처짐함수  $G_n(y)$  는 위의 직교조건을 만족하는 진동보의  $n$  번째 모드에 관한 고유함수(Clough 와 Penzien,1975)를 이용하면 일반해는 식 (10)이 된다.

$$G_n(y) = Y_{1n} \cosh\left(\frac{\lambda_n}{b} y\right) + Y_{2n} \sinh\left(\frac{\lambda_n}{b} y\right) + Y_{3n} \cos\left(\frac{\lambda_n}{b} y\right) + Y_{4n} \sin\left(\frac{\lambda_n}{b} y\right) \quad (10)$$

여기서  $\lambda_n$  와 상수  $Y_{1n}, Y_{2n}, Y_{3n}, Y_{4n}$  은  $y=0$  과  $y=b$  에서 경계조건을 사용하여 구한다. 본 연구에서  $y$  방향 경계조건은 실제 구조물에서 주로 사용되는 양단이 모두 단순지지단인 경우와 양단이 모두 고정단인 경우 그리고  $y=0$  에서 고정단,  $y=b$  에서 단순지지단인 경우를 고려한다. 이들의 경계조건을 이용하여 구한 각각의  $\lambda_n$  과 상수  $Y_{1n}, Y_{2n}, Y_{3n}, Y_{4n}$  값을 정리하면 표 1.과 같다. 여기서  $B_n$  은 아래 식 (11)과 같다.

Table 1. Constants of deflection function  $G_n(y)$

Edge Condition		$Y_{1n}$	$Y_{2n}$	$Y_{3n}$	$Y_{4n}$	$\lambda_n$
$y=0$	$y=b$					
Hinged	Hinged	0	0	0	1.0	$n\pi$
Clamped	Clamped	1.0	$B_n$	-1.0	$-B_n$	$(n+0.5)\pi$
Clamped	Hinged	1.0	$B_n$	-1.0	$-B_n$	$(n+0.25)\pi$

$$B_n = \frac{\cos(\lambda_n) - \cosh(\lambda_n)}{\sinh(\lambda_n) - \sin(\lambda_n)} \quad (11)$$

$y$  방향의 처짐함수  $G_n(y)$  이 결정된 후 평판의 지배함수 식 (7) 양변에  $n \neq m$  인  $m$  번째 모드의  $G_m(y)$  을 곱하고  $y=0$  에서  $y=b$  까지 적분을 시켜주면, 직교조건에 의하여  $n \neq m$  인 경우는 모두 0이 되므로 결국 식 (7)의  $x$  와  $y$  에 관한 편미분방정식 형태의 지배 방정식은 식 (12)와 같이  $m$  번째 처짐모드의  $x$  에 관한 상미분 방정식으로 바뀌어 진다.

$$D_x \frac{\partial^4 F_m(x)}{\partial x^4} \int_0^b G_m^2(y) dy + 2H \frac{\partial^2 F_m(x)}{\partial x^2} \int_0^b \frac{\partial^2 G_m(y)}{\partial y^2} G_m(y) dy + D_y F_m(x) \int_0^b \frac{\partial^4 G_m(y)}{\partial y^4} G_m(y) dy = \int_0^b q(x,y) G_m(y) dy \quad (12)$$

$x$  방향 처짐함수의 계산을 위해 식 (12)의 양변을  $\int_0^b G_m^2(y) dy$  로 나누어 주고 외부하중  $q(x,y)$  를  $x$  와  $y$  방향의 함수의 곱인  $q(x,y) = Q_0 f(x) g(y)$ , ( $Q_0$ =상수)의 형태라 하면 이 식은  $x$  에 대한 선형 미분 방정식인 식 (13)이 된다.

$$\left[ D_x \frac{d^4 F_m(x)}{dx^4} + 2H \eta_m^2 g_{2m} \frac{d^2 F_m(x)}{dx^2} + D_y \eta_m^4 g_{4m} F_m(x) \right] = Q_0 g_{1m} f(x) \quad (13)$$

여기서  $\eta_m = \lambda_m/b$  이고  $g_{1m}, g_{2m}, g_{4m}$  은  $m$  번째 모드의 처짐 상수로써 식 (14)와 같다.

$$g_{1m} = \frac{\int_0^b g(y) G_m(y) dy}{\int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (14a)$$

$$\eta_m^2 g_{2m} = - \frac{\int_0^b G_m''(y) G_m(y) dy}{\int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (14b)$$

$$\eta_m^4 g_{4m} = \frac{\int_0^b G_m''''(y) G_m(y) dy}{\int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (14c)$$

식 (13)은 선형미분방정식으로  $F_m(x)$ 는 일반해  $F_{mH}(x)$ 와 특이해  $F_{mP}(x)$ 의 합 형태를 갖고 치짐 함수는 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} F_m(x) G_m(y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} [F_{mH}(x) + F_{mP}(x)] G_m(y) \\ &= w_H(x,y) + w_P(x,y) \end{aligned} \quad (15)$$

식 (13)의 x방향의 일반해  $F_{mH}$ 를 구하기 위해 아래 방정식 (16)을 풀면 다음 식 (17)과 같은 근을 구할 수 있는데 여기서  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각  $\alpha = D_y/D_x$ ,  $\beta = H/D_x$ 이다.

$$D_x \xi_m^4 - 2H_m^2 g_{2m} \xi_m^2 + D_y \eta_m^4 g_{4m} = 0 \quad (16)$$

$$\xi_{m1} = \eta_m \sqrt{\beta} \left\{ g_{2m} + \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} \right\}^{1/2} \quad (17a)$$

$$\xi_{m2} = \eta_m \sqrt{\beta} \left\{ g_{2m} - \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} \right\}^{1/2} \quad (17b)$$

$$\xi_{m3} = -\eta_m \sqrt{\beta} \left\{ g_{2m} + \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} \right\}^{1/2} \quad (17c)$$

$$\xi_{m4} = -\eta_m \sqrt{\beta} \left\{ g_{2m} - \sqrt{g_{2m}^2 - g_{4m}(\alpha/\beta^2)} \right\}^{1/2} \quad (17d)$$

따라서 식 (13)의 일반해는 식 (18)로 정식화 되고 다음 식 (19)과 같이 3가지 경우로 분류된다.

$$F_{mH}(x) = A_m e^{\xi_{m1}x} + B_m e^{\xi_{m2}x} + C_m e^{\xi_{m3}x} + D_m e^{\xi_{m4}x} \quad (18)$$

$$\text{Case 1) } \frac{g_{2m}^2}{g_{4m}} > \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (19a)$$

$$\text{Case 2) } \frac{g_{2m}^2}{g_{4m}} = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (19b)$$

$$\text{Case 3) } \frac{g_{2m}^2}{g_{4m}} < \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (19c)$$

식 (19a)의 경우는  $\xi_m$ 이  $\xi_{m1} = -\xi_{m3}$ ,  $\xi_{m2} = -\xi_{m4}$ 가 되어 각각 서로 다른 실근을 갖기 때문에 일반해는 식 (20)으로 나타낼 수 있다. 식 (19b)의 경우는  $\xi_{m1} = \xi_{m2} = -\xi_{m3} = -\xi_{m4}$ 인 두 세트의 실근을 갖기 때문에 식 (21)로 나타낼 수 있다. 식 (19c)의 경우,  $\xi_{m(1,2,3,4)} = \pm \phi_m \pm \psi_m i$ 인 허근을 가지므로 식 (22)로 나타낼 수 있다. 여기서  $\phi_m$ 과  $\psi_m$ 은 각각 식 (23)과 식(24)와 같고 상수  $X_{1m}, X_{2m}, X_{3m}, X_{4m}$ 은 y축과 나란한 가장자리의 경계조건에 의하여 각각 결정된다.

$$F_{mH}(x) = X_{1m} \cosh(\xi_{m1}x) + X_{2m} \sinh(\xi_{m1}x) + X_{3m} \cosh(\xi_{m2}x) + X_{4m} \sinh(\xi_{m2}x) \quad (20)$$

$$F_{mH}(x) = X_{1m} \cosh(\xi_{m1}x) + X_{2m} \sinh(\xi_{m1}x) + X_{3m} \eta_m \cosh(\xi_{m2}x) + X_{4m} \eta_m \sinh(\xi_{m2}x) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} F_{mH}(x) &= X_{1m} \cosh(\phi_m x) \cos(\psi_m x) \\ &+ X_{2m} \sinh(\phi_m x) \sin(\psi_m x) \\ &+ X_{3m} \eta_m \cosh(\phi_m x) \sin(\psi_m x) \\ &+ X_{4m} \eta_m \sinh(\phi_m x) \cos(\psi_m x) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\phi_m = \eta_m \sqrt{\beta} \left[ \frac{\sqrt{(\alpha g_{4m}/\beta) + g_{2m}}}{2} \right]^{1/2} \quad (23)$$

$$\psi_m = \eta_m \sqrt{\beta} \left[ \frac{\sqrt{(\alpha g_{4m}/\beta) - g_{2m}}}{2} \right]^{1/2} \quad (24)$$

식 (13)의 x방향의 특이해  $F_{mP}$ 를 구하는 문제에서 본 연구는 평판에 작용하는 외부하중이 아래 그림 2.에서 그림4.와 같이 등분포하중, 선하중, 부분분포하중의 경우로 제한 한다.

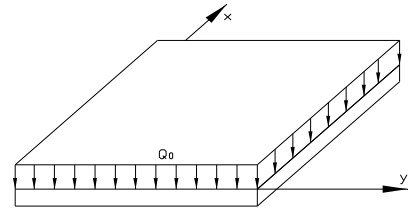


Fig 2. Plate under uniform load

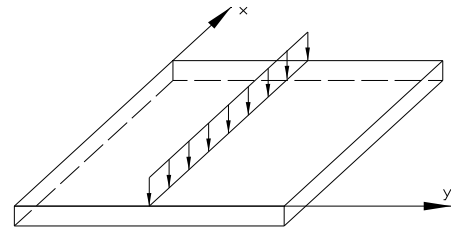
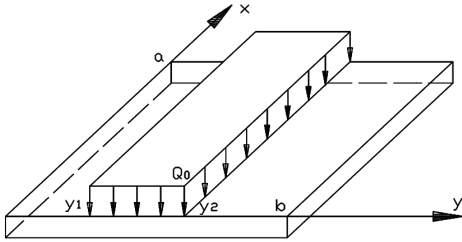


Fig 3. Plate under line load

그림 2.와 같이 평판에 작용하는 분포하중이 등분포 인 경우 하중함수  $q(x,y)$  와 이에 대한 특이해  $F_{mP}$ 와 처짐상수  $g_{1m}$ 를 정리하면 표 2.와 같다.

**Table 2.** Load function, particular solution & deflection constant for uniform load

Load Type	Uniform Load
Load Function	$q(x,y) = Q_0$
Particular Solution	$F_{mP} = \frac{Q_0 g_{1m}}{D_y \eta_m^4 g_{4m}}$
Deflection Constant	$g_{1m} = \left[ \int_0^b G_m(y) dy \right] / \left[ \int_0^b G_m^2(y) dy \right]$



**Fig 4.** Partially loaded plate

특히 그림 4.와 같이 y축 방향으로 부분하중을 받는 평판은 표 2.에 제시된 등분포 하중의 특이해를 사용하고 처짐상수  $g_{1m}$ 은 하중을 받는 구간만 적분하여 결정한다. 이 경우 하중 분포 구간을 변화시킴으로 그림 3.과 같이 직선하중을 받는 평판의 경우도 쉽게 계산 할 수 있다. y축 방향으로 부분하중을 받는 평판의 특이해와 각각의 변수 식 (25)와 같이 정식화 된다.

$$F_{mP} = \frac{Q_0 g_{1m}}{D_y \eta_m^4 g_{4m}} \quad (25a)$$

$$g_{1m} = \frac{\int_{y_k - \Delta y}^{y_k + \Delta y} G_m(y) dy}{\int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (25b)$$

$$\eta_m^4 g_{4m} = \frac{\int_{y_k - \Delta y}^{y_k + \Delta y} G_m''(y) G_m(y) dy}{\int_0^b G_m^2(y) dy} \quad (25c)$$

여기서  $y_1$ 과  $y_2$ 는 각각 하중의 시작점과 끝점이고  $y_k = (y_1 + y_2)/2$ ,  $\Delta y = (y_2 - y_1)/2$  이다. 식 (25)의 처짐상수 각각의 변수를 적분하여 부분하중을 받는 이방성 평판의 특이해를 정리하면 식 (26)이 된다.

$$F_{mP} = \frac{2.0 \delta Q_0 b^4}{D_y \lambda_m^5} \left[ \frac{\{Y_{1m} \cosh(\eta_m y_k) - Y_{2m} \sin(\eta_m y_k)\} \sinh(\eta_m y_k)}{-\{Y_{3m} \cos(\eta_m y_k) - Y_{4m} \sin(\eta_m y_k)\} \sin(\eta_m y_k)} \right] \quad (26)$$

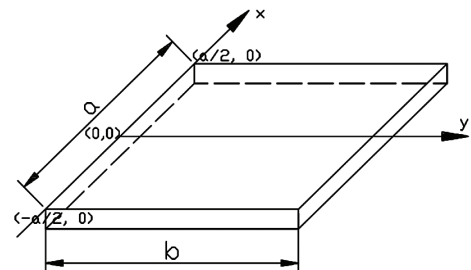
여기서  $y=0$ 과  $y=b$ 에서 단순지지단인 경우  $\delta=2.0$ 이고 고정단인 경우  $\delta=1.0$ 이다. 그리고  $y=0$ 에서 고정단이고  $y=b$ 에서 단순지지단인 경우  $\delta=1.0$ 이다. 만약 평판 전체에 등분포 하중을 받는 경우  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = b$ 이므로  $y_k = \Delta y = b/2$ 가 된다. 또한 그림 5.와 같이 평판이 선하중을 받는 경우  $Q_0 = L_x$ 로 놓고  $\Delta y$ 를 0으로 접근시켜 계산하면 식 (27)로 나타난다.

$$F_{mP} = \frac{\delta L_x b^3}{D_y \lambda_m^4} \left[ \frac{\{Y_{1m} \cosh(\eta_m y_k) - Y_{2m} \sin(\eta_m y_k)\} \sinh(\eta_m y_k)}{-\{Y_{3m} \cos(\eta_m y_k) - Y_{4m} \sin(\eta_m y_k)\} \sin(\eta_m y_k)} \right] \quad (27)$$

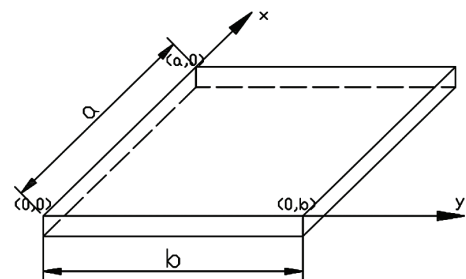
앞에서 구한 특이해  $F_{mP}$ 가 상수이므로 식 (15)를 식 (28)로 변형시켜 사용한다.

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{mH}(x) [1.0 + F_{mP}(x)] G_m(y) \quad (28)$$

x 방향의 처짐함수  $F_m(x)$ 의 상수  $X_{1m}, X_{2m}, X_{3m}, X_{4m}$ 를 구하기 위해 평판의 x와 y의 좌표축 결정은 그림 5. 및 그림 6과 같이 구성한다. y축과 평행한 평판의 양 끝단의 경계조건이 서로 대칭인 경우는 그림 5와 같이 x축은 평판 가장자리에 y축은 평판 중앙에 놓고, 대칭이 아닌 경우에는 그림 6과 같이 x, y축을 모두 평판의 가장 자리에 놓고 경계조건을 이용함으로써 적분상수  $X_{1m}, X_{2m}, X_{3m}, X_{4m}$ 를 결정할 수 있다. 여기서 x방향의 경계조건을 정리하면 표 3.과 같다.



**Fig 5.** Rectangular coordinates for symmetric plate



**Fig 6.** Rectangular coordinates for nonsymmetric plate

**Table 3.** Boundary conditions of plate in x-axis

Type	Boundary Condition
Hinged at $x = \pm a/2$	$w(x, y) = 0$ at $x = \pm a$ , $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ at $x = \pm a$
Clamped at $x = \pm a/2$	$w(x, y) = 0$ at $x = \pm a$ , $\partial w / \partial x = 0$ at $x = \pm a$
Hinged at $x = 0$ Clamped at $x = a$	$w(x, y) = 0$ at $x = 0$ & $x = a$ , $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ at $x = 0$ $\partial w / \partial x = 0$ at $x = a$
Clamped at $x = 0$ Hinged at $x = a$	$w(x, y) = 0$ at $x = 0$ & $x = a$ , $\partial w / \partial x = 0$ at $x = 0$ $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ at $x = a$

식(19)에서 구분한 것과 같이  $g_{2m}^2/g_{4m} > \alpha/\beta^2$  일 때 적분상수  $X_{1m}, X_{2m}, X_{3m}, X_{4m}$ 를 구하면 경계조건에 따라 식(29)에서 식(32)와 같다.  $x = \pm a/2$ 에서 단순지지단일 경우 적분상수는 식(29)이다. 이 경우  $X_{3m} = X_{4m} = 0.0$ 이다.

$$X_{1m} = \frac{-1.0}{(1 - \xi_{m1}^2) \cosh(\xi_{m1}a/2)} \quad (29a)$$

$$X_{2m} = \frac{\xi_{m1}^2}{\xi_{m2}^2 (1 - \xi_{m1}^2) \cosh(\xi_{m2}a/2)} \quad (29b)$$

$x = \pm a/2$ 에서 고정단일 경우 적분상수는 식(29)인데 이 때  $X_{2m} = X_{4m} = 0.0$ 이다.

$$X_{1m} = \frac{\xi_{m2} \sinh(\xi_{m2}a/2)}{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m2} \sinh(\xi_{m2}a/2) \cosh(\xi_{m1}a/2) \\ - \xi_{m1} \sinh(\xi_{m1}a/2) \cosh(\xi_{m2}a/2) \end{array} \right]} \quad (30a)$$

$$X_{3m} = \frac{\xi_{m1} \sinh(\xi_{m1}a/2)}{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m2} \sinh(\xi_{m2}a/2) \cosh(\xi_{m1}a/2) \\ - \xi_{m1} \sinh(\xi_{m1}a/2) \cosh(\xi_{m2}a/2) \end{array} \right]} \quad (30b)$$

$x=0$ 에서 단순지지단이고  $x=a$ 에서 고정단일 경우 적분상수는 식(31)이다.

$$X_{1m} = \frac{\xi_{m2}^2}{\xi_{m2}^2 - \xi_{m1}^2}, \quad X_{3m} = \frac{\xi_{m1}^2}{\xi_{m2}^2 - \xi_{m1}^2} \quad (31a)$$

$$X_{2m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m1} \cosh(\xi_{m2}a) + X_{3m} \xi_{m2} \\ + X_{1m} \xi_{m2} \cosh(\xi_{m1}a) \cosh(\xi_{m2}a) \\ - X_{1m} \xi_{m1} \sinh(\xi_{m1}a) \sinh(\xi_{m2}a) \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m1} \sinh(\xi_{m2}a) \cosh(\xi_{m1}a) \\ - \xi_{m2} \sinh(\xi_{m1}a) \cosh(\xi_{m2}a) \end{array} \right]} \quad (31b)$$

$$X_{4m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m1} \cosh(\xi_{m1}a) + X_{1m} \xi_{m1} \\ + X_{3m} \xi_{m1} \cosh(\xi_{m1}a) \cosh(\xi_{m2}a) \\ - X_{3m} \xi_{m2} \sinh(\xi_{m1}a) \sinh(\xi_{m2}a) \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m1} \sinh(\xi_{m2}a) \cosh(\xi_{m1}a) \\ - \xi_{m2} \sinh(\xi_{m1}a) \cosh(\xi_{m2}a) \end{array} \right]} \quad (31c)$$

$x=0$ 에서 고정단이고  $x=a$ 에서 단순지지단일 경우 적분상수는 식(32)이다.

$$X_{1m} = - \frac{\left[ X_{4m} \left\{ (\xi_{m2}/\xi_{m1}) \sinh(\xi_{m1}a) - \sinh(\xi_{m2}a) \right\} + \cosh(\xi_{m2}a) - 1.0 \right]}{\cosh(\xi_{m1}a) - \cosh(\xi_{m2}a)} \quad (32a)$$

$$X_{2m} = \frac{\xi_{m2} X_{4m}}{\xi_{m1}}, \quad X_{3m} = -(1.0 + X_{1m}) \quad (32b)$$

$$X_{4m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m1} (\xi_{m2}^2 - \xi_{m1}^2) \cosh(\xi_{m1}a) \cosh(\xi_{m2}a) \\ + \xi_{m1}^3 \cosh(\xi_{m1}a) + \xi_{m1} \xi_{m2}^2 \cosh(\xi_{m2}a) \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{l} \xi_{m2} (\xi_{m1}^2 - \xi_{m2}^2) \sinh(\xi_{m1}a) \cosh(\xi_{m2}a) \\ + \xi_{m1} (\xi_{m2}^2 - \xi_{m1}^2) \sinh(\xi_{m2}a) \cosh(\xi_{m1}a) \end{array} \right]} \quad (32c)$$

또한  $g_{2m}^2/g_{4m} = \alpha/\beta^2$  일 때 적분상수  $X_{1m}, X_{2m}, X_{3m}, X_{4m}$ 를 구하면 다음 식(33)에서 식(36)과 같다.  $x = \pm a/2$ 에서 단순지지단일 경우 적분상수는 식(33)인데  $X_{2m} = X_{3m} = 0.0$ 이다.

$$X_{1m} = - \frac{2.0 + (\xi_{m1}a/2) \tanh(\xi_{m1}a/2)}{2 \cosh(\xi_{m1}a/2)} \quad (33a)$$

$$X_{4m} = \frac{\xi_{m1}^2}{\eta_m 2 \cosh(\xi_{m1}a/2)} \quad (33b)$$

식(34)는  $x = \pm a/2$ 에서 고정단일 경우 각각의 적분상수인데 이 경우  $X_{2m} = X_{3m} = 0.0$ 이다.

$$X_{1m} = - \frac{2 \sinh(\xi_{m1}a/2) + a \xi_{m1} \cosh(\xi_{m1}a/2)}{\sinh(\xi_{m1}a) + \xi_{m1}a} \quad (34a)$$

$$X_{4m} = \frac{2 \xi_{m1} \sinh(\xi_{m1}a/2)}{\eta_m [\sinh(\xi_{m1}a) + \xi_{m1}a]} \quad (34b)$$

$x=0$ 에서 단순지지단이고  $x=a$ 에서 고정단일 경우 적분상수는 식(35)이다. 이 때  $X_{1m} = -1.0$ 이다.

$$X_{2m} = \frac{[\xi_{m1} \sinh^2(\xi_{m1}a)/2 - \xi_{m1} \cosh(\xi_{m1}a) + \xi_{m1}]}{\eta_m [a \xi_{m1} - \cosh(\xi_{m1}a) \sinh(\xi_{m1}a)]} \quad (35a)$$

$$X_{3m} = \frac{[a \xi_{m1} \sinh(\xi_{m1}a) - \cosh^2(\xi_{m1}a)]}{a \xi_{m1} - \cosh(\xi_{m1}a) \sinh(\xi_{m1}a)} \quad (35b)$$

$$X_{4m} = \frac{\xi_{m1}}{2 \eta_m} \quad (35c)$$

$x=0$ 에서 고정단이고  $x=a$ 에서 단순지지단일 경우 적분상수는 식(36)이고  $X_{1m} = -1.0$ 이다.

$$X_{2m} = \frac{\xi_{m1} \left[ \begin{array}{l} 2\cosh^2(\xi_{m1}a) - a\xi_{m1}\sinh(\xi_{m1}a) \\ -2\cosh(\xi_{m1}a) \end{array} \right]}{2\eta_m [a\xi_{m1} - \cosh(\xi_{m1}a)\sinh(\xi_{m1}a)]} \quad (36a)$$

$$X_{3m} = -\frac{\left[ \begin{array}{l} 2\cosh^2(\xi_{m1}a) - a\xi_{m1}\sinh(\xi_{m1}a) \\ -2\cosh(\xi_{m1}a) \end{array} \right]}{2[a\xi_{m1} - \cosh(\xi_{m1}a)\sinh(\xi_{m1}a)]} \quad (36b)$$

$$X_{4m} = -\frac{\sinh(\xi_{m1}a)}{\cosh(\xi_{m1}a)} X_{2m} + \frac{\xi_{m1}}{2\eta_m \cosh(\xi_{m1}a)} \quad (36c)$$

마지막으로  $g_{2m}^2/g_{4m} < \alpha/\beta^2$  일 때 각각의 경계조건에 따라 적분상수  $X_{1m}, X_{2m}, X_{3m}, X_{4m}$  를 구하면 다음 식(37)에서 식(40)과 같다.  $x = \pm a/2$ 에서 단순지지단일 경우 적분상수는 식(37)인데  $X_{3m} = X_{4m} = 0.0$ 이다.

$$X_{1m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} (\Phi_m^2 - \Psi_m^2) \sinh(\Phi_m a/2) \sin(\Psi_m a/2) \\ + 2\Phi_m \Psi_m \cosh(\Phi_m a/2) \cos(\Psi_m a/2) \end{array} \right]}{2\Phi_m \Psi_m \left[ \begin{array}{l} \cosh^2(\Phi_m a/2) \cos^2(\Psi_m a/2) \\ + \sinh^2(\Phi_m a/2) \sin^2(\Psi_m a/2) \end{array} \right]} \quad (37a)$$

$$X_{2m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} (\Phi_m^2 - \Psi_m^2) \cosh(\Phi_m a/2) \cos(\Psi_m a/2) \\ + 2\Phi_m \Psi_m \sinh(\Phi_m a/2) \sin(\Psi_m a/2) \end{array} \right]}{2\Phi_m \Psi_m \left[ \begin{array}{l} \cosh^2(\Phi_m a/2) \cos^2(\Psi_m a/2) \\ + \sinh^2(\Phi_m a/2) \sin^2(\Psi_m a/2) \end{array} \right]} \quad (37b)$$

식(38)은  $x = \pm a/2$ 에서 고정단일 경우 각각의 적분상수이며 이 때  $X_{3m} = X_{4m} = 0.0$ 이다.

$$X_{1m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \Psi_m \cosh(\Phi_m a/2) \sin(\Psi_m a/2) \\ + \Psi_m \sinh(\Phi_m a/2) \cos(\Psi_m a/2) \end{array} \right]}{(1/2) [\Phi_m \sin(\Psi_m a) + \Psi_m \sinh(\Phi_m a)]} \quad (38a)$$

$$X_{2m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \Psi_m \sinh(\Phi_m a/2) \cos(\Psi_m a/2) \\ - \Psi_m \cosh(\Phi_m a/2) \sin(\Psi_m a/2) \end{array} \right]}{(1/2) [\Phi_m \sin(\Psi_m a) + \Psi_m \sinh(\Phi_m a)]} \quad (38b)$$

그리고  $x=0$ 에서 단순지지단  $x=a$ 에서 고정단일 경우 적분상수는 식(39)이다. 이 경우  $X_{1m} = -1.0$ 이다.

$$X_{2m} = \frac{\Phi_m^2 - \Psi_m^2}{2.0\Phi_m \Psi_m} \quad (39a)$$

$$X_{3m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \Phi_m \cos^2(\Phi_m a) - \Phi_m \cosh(\Psi_m a) \cos(\Psi_m a) \\ + \Psi_m \sinh(\Phi_m a) \sin(\Psi_m a) \\ + (\Phi_m^2 - \Psi_m^2) \sinh^2(\Phi_m a) / (2\Phi_m) \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{l} \Phi_m \sin(\Psi_m a) \cos(\Psi_m a) \\ - \Psi_m \sinh(\Phi_m a) \cosh(\Phi_m a) \end{array} \right]} \quad (39b)$$

$$X_{4m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} -\Psi_m \cosh^2(\Phi_m a) + \Psi_m \cosh(\Phi_m a) \cos(\Phi_m a) \\ + \Phi_m \sinh(\Phi_m a) \sin(\Psi_m a) \\ + (\Phi_m^2 - \Psi_m^2) \sin^2(\Phi_m a) / (2\Phi_m) \end{array} \right]}{\left[ \begin{array}{l} \Phi_m \sin(\Psi_m a) \cos(\Psi_m a) \\ - \Psi_m \sinh(\Phi_m a) \cosh(\Phi_m a) \end{array} \right]} \quad (39c)$$

$x=0$ 에서 고정단  $x=a$ 에서 단순지지단일 경우 적분상수는 식(40)이다. 이 경우  $X_{1m} = -1.0$ 이다.

$$X_{2m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} \Psi_m^2 \sin(2\Psi_m a) + \Phi_m \Psi_m \sinh(2\Phi_m a) \\ + (\Phi_m^2 - \Psi_m^2) \left\{ \cosh(\Phi_m a) \sin(\Psi_m a) \right. \\ \left. + \Phi_m \Psi_m \sinh(\Phi_m a) \cos(\Psi_m a) \right\} \end{array} \right]}{\left[ \Psi_m^2 \sinh(2\Phi_m a) - \Phi_m \Psi_m \sin(2\Psi_m a) \right]} \quad (40a)$$

$$X_{3m} = \frac{\left[ \begin{array}{l} (\Phi_m^2 - \Psi_m^2) \sinh(\Phi_m a) \sin(\Psi_m a) \\ + 2\Phi_m \Psi_m \left\{ \cosh(2\Phi_m a) \cos(\Psi_m a) \right. \\ \left. - \sinh^2(\Phi_m a) - \cos^2(\Phi_m a) \right\} \end{array} \right]}{\left[ \Psi_m^2 \sinh(2\Phi_m a) - \Phi_m \Psi_m \sin(2\Psi_m a) \right]} \quad (40b)$$

$$X_{4m} = \frac{\Phi_m X_{3m}}{\Phi_m} \quad (40c)$$

#### 4. 이방성 평판 해석

이상과 같이 다양한 경계조건을 갖는 이방성 평판의 해법을 정리하면 다음과 같다. 먼저 평판재료의 물성치와 경계조건 그리고 하중의 분포와 크기를 이용하여 적분상수를 결정한 다음  $y$  방향 일반해를 계산한다. 이 때 수직하중을 받는 이방성평판의 처짐함수는 식(28)과 같다. 여기서  $y$ 방향 처짐함수  $G_m(y)$ 는 식(10)을 사용하고 필요한 상수들은 각각의 경계조건에 따라 표 1,의 값을 사용한다.

다음으로 경계조건에 따른  $x$  방향 일반해를 계산하고 하중조건에 따른 특이해를 계산한다.  $x$ 방향 처짐함수의 일반해  $F_{mH}(x)$ 는 강성비  $\alpha$ 와  $\beta$ 에 따라 식(20), 식(21), 식(22)를 선택하고 특이해  $F_{mE}(x)$ 는 하중상태에 따라 식(26) 또는 식(27)을 사용하는데 상수  $X_{1m}, X_{2m}, X_{3m}, X_{4m}$ 은 강성비와 경계조건에 따라 식(29)에서 식(40) 사이의 것을 선택하여 사용한다. 마지막으로 계산된 각 방향 일반해와 특이해의 결과를 이용하여 처짐량을 산출한다.

#### 5. 이방성 평판의 해석 결과 비교

그림 7에서 보는 바와 같이 평판의 가장자리가 비대칭으로, 두 단은 고정단, 나머지 두 단은 단순지지단 일 때, 이방성 평판의  $y$ 축으로  $b/3$ 지점에서  $2b/3$ 지점까지 부분 하중을 받는 경우에 대하여 각각의 점에서 처짐과 모멘트를 계산하였으며 그 결과는 표 4.와 같다.

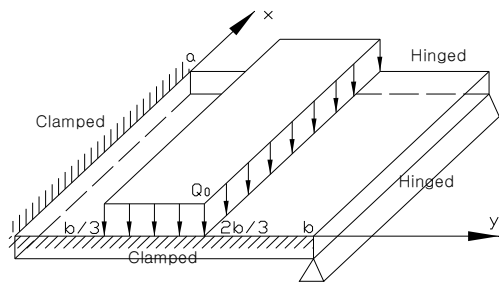


Fig 7. 2 clamped & 2 hinged plate

Table 4. Results of 2 clamped 2 hinged orthotropic plate analysis  
( $b/a = 1.5$ ,  $\alpha=3.0$ ,  $\beta=1.0$ )

점	x좌표	y좌표	$w(\times D_y/Q_0b^4)$	$M_x(/Q_0b^2)$	$M_y(/Q_0b^2)$
1	0.25a	b/6	.116E-03	-.512E-01	-.497E-01
2	0.25a	2b/6	.364E-03	.272E+00	.247E+00
3	0.25a	3b/6	.528E-03	-.221E+00	-.192E+00
4	0.25a	4b/6	.457E-03	.150E-01	.174E-01
5	0.25a	5b/6	.239E-03	.685E-01	.619E-01
6	0.50a	b/6	.238E-03	-.583E-03	-.713E-02
7	0.50a	2b/6	.720E-03	.807E-02	.120E-01
8	0.50a	3b/6	.103E-02	.137E-01	.246E-01
9	0.50a	4b/6	.921E-03	.114E-01	.184E-01
10	0.50a	5b/6	.503E-03	.535E-02	.666E-02
11	0.75a	b/6	.196E-03	.645E+47	.581E+47
12	0.75a	2b/6	.597E-03	-.169E+48	-.152E+48
13	0.75a	3b/6	.860E-03	.646E+47	.581E+47
14	0.75a	4b/6	.764E-03	.119E+48	.107E+48
15	0.75a	5b/6	.416E-03	-.156E+48	-.140E+48

본 연구에서 사용된 이론의 정확성을 증명하기 위해 그림 8,과 같이 등분포 하중을 받는 네 단이 모두 단순지지단인 등방성 평판의 계산 결과를 Navier의 방법과 비교하였다. 두 방법에 의한 처짐 결과는 표 5.와 같으며 정확해법인 Navier방법의 결과와 일치하고 있음을 알 수 있다.

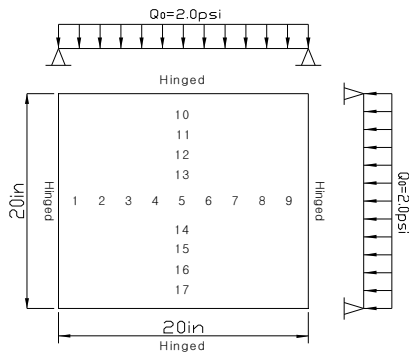


Fig 8. Comparison point

Table 5. Comparison of results with Navier's solution

Point	Deflections by Navier solution	Deflections by this study	Point	Deflections by Navier solution	Deflections by this study
1	0.676E+01	.676E+01	10	0.676E+01	.676E+01
2	0.127E+02	.127E+02	11	0.127E+02	.127E+02
3	0.171E+02	.171E+02	12	0.171E+02	.171E+02
4	0.199E+02	.199E+02	13	0.199E+02	.199E+02
5	0.209E+02	.209E+02	14	0.199E+02	.199E+02
6	0.199E+02	.199E+02	15	0.171E+02	.171E+02
7	0.171E+02	.171E+02	16	0.127E+02	.127E+02
8	0.127E+02	.127E+02	17	0.676E+01	.676E+01
9	0.676E+01	.676E+01			

또한 본 연구의 결과와 Levy방법의 결과를 비교하였다. 등분포하중을 받는 네 단이 모두 고정단인 정사각형과 직사각형 평판을 대상으로 하였으며 각 평판의 중앙점에서의 처짐과 모멘트를 계산하여 그 비교 값을 표 6.에 나타내었다. 표에서 알 수 있듯이 초기 변수인 처짐은 본 논문의 결과와 정확해법인 Levy의 결과와 매우 접근함을 알 수 있다. 그러나 이 차변수인 모멘트는 약간의 오차를 나타내며 이것은 컴퓨터에 의한 반올림오차로 생각 되어 진다.

Table 6. Comparison of Results with Levy's Solution(at center point)

	b/a	$wD_y/Q_0b^4$	$M_x/Q_0b^2$	$M_y/Q_0b^2$
Solutions by Levy's method	1.0	0.00126	0.0231	0.0231
	1.5	0.00220	0.0368	0.0203
	2.0	0.00254	0.0412	0.0158
Solutions by this study	1.0	0.00127	0.0233	0.0240
	1.5	0.00222	0.0378	0.0207
	2.0	0.00257	0.0419	0.0161

그리고 선 하중을 받는 정사각형 이방성 평판의 네 단이 모두 단순지지단인 경우에 본 연구의 계산결과를 이용한 처짐의 계산 값과 R. Szilard의 방법을 이용한 처짐의 계산 값을 계산하여 표 7.에서 비교하였다. 각 방법의 평판 좌표와 처짐을 계산한 점과 작용하는 선 하중의 위치는 그림 9.와 같다. 비교에서 알 수 있듯이 두 방법은 일치된 결과를 나타내고 있다.

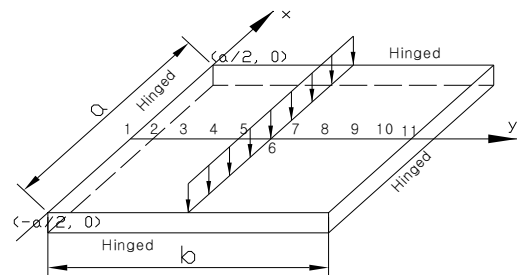


Fig 9. Comparison point of plate under line load



**Table 7.** Comparison of results with R. Szilard's solution

Point	y- Coord.	Deflections by this study $w \times D_y / Q_0 b^4$	Deflections by R. Szilard $w \times D_y / Q_0 b^4$
1	0.0b	.000E+00	0.000E+00
2	0.1b	.914E-04	0.914E-04
3	0.2b	.179E-03	0.179E-03
4	0.3b	.256E-03	0.256E-03
5	0.4b	.313E-03	0.313E-03
6	0.5b	.337E-03	0.337E-03
7	0.6b	.313E-03	0.313E-03
8	0.7b	.256E-03	0.256E-03
9	0.8b	.179E-03	0.179E-03
10	0.9b	.914E-04	0.914E-04
11	1.0b	-.256E-10	-0.256E-10

## 6. 결론

본 연구는 이방성 평판의 해법을 유도하여 제안하였다. 본 연구에 사용된 해석 방법은 삼각급수를 이용한 Levy방법을 개선하여 평판의 서로 마주보는 두 끝단이 단순지지단과 고정단의 어떠한 조합이라도 해석이 가능하다. 하중은 등분포하중, 부분하중과 선하중의 경우를 고려하여 계산할 수 있도록 하였다. 본 연구에서 사용된 해석 방법 중의 또 하나의 특징은 계산 값이 정확하다. 여기에서 제안한 해법을 통해 얻어진 여러 가지 결과를 지금까지 알려진 정확한 해법과 비교하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 지금까지 평판 구조물을 해석하는데 있어 Navier와 Levy방법에서 문제가 되어왔던 경계조건과 하중조건의 제약을 극복하였다.
2. 근사 해법인 유한요소법이나 유한차분법은 원하는 정확도를 얻기 위해서는 많은 요소들을 필요로 한다. 그러나 본 연구는 주어진 미분 방정식을 대수 방정식으로 전환하는 기법을 사용하여 평판의 임의 점에 대해 원하는 정확도를 얻을 수 있다.
3. 본 연구에서 제안한 해석방법은 전산화가 가능하여 구조물유지관리에 필요한 평판구조물 해석 프로그램개발이 가능하다.

## 참고문헌

1. 한충목(2005), '개선된 소영역분할법을 이용한 탄성지반위에 놓

인 평판의 해석' 한국전산구조공학회 논문집 제18권 제2호

2. 박효진, 황상무(2017), '유한요소법을 활용한 평판압연에서의 롤판 연계해석 Part II:적용', 한국소성가공학회지, 제26권, 제4호.
3. Joseph Louis Lagrange(1813) 'Éléments d'algèbre, par Léonard Euler, traduits de l'allemand avec des notes et des additions' Description matérielle : 2 vol.
4. Par M. Augustin Cauchy(1829) 'Lecons Sur Le Calcul Différentiel', A Paris, Chez de Bure Frères, Libraires Du Roi Et De La Bibliothèque Du Roi, Rue Serpente, No.7.
5. Huber M. T., 'Teoria Sprezystoci, Theorie de l'élasticité', Nakl. Polskiej Akademii Uniejtnosci, Krakow.
6. Boussinesq J.V.(1879), 'Complements a une Etude sur la Theorie de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques dont Certaines Dimensions sont Tres Petites par Rapport a l'Autre,'Journal de Mathematiques, T. 5, Paris.
7. Hrennikoff, A.(1941), 'Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method', Trans. ASME, J, Appl. Mech.,8 Dec.
8. Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, G. C., Topp, L.J.(1956), 'Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structure', J. Aeron. Sci.,23.
9. Szilard, Rudolph(1974), "Theory and Analysis of Plates", Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
10. Levy, M.(1899), "Sur l'equilibre elastique d'une plaque rectangulaire", C. R. Acad. Sci., 129.
11. Navier(1820) "The Solution of Bending of Simply Supported Rectangular Plates by Double Trigonometric Series", French Journal of Science.
12. Timoshenko, Stephen P. and Woinowsky-Krieger, S.(1970), "Theory of Plate and Shell", Mcgraw-Hill International Editions, New York.
13. T. Y. Yang(1986), 'Finite Element Structural Analysis', Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
14. Issam E. Harrik, A. M. and Ghassan L. Salamoun(1986), "Analytical Strip Solution to Rectangular Plates." Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, Vol.112,
15. Phillip L. Gould(1988), "Analysis of Shells and Plates", Springer-Verlag, New York.
16. J. N. Reddy(1984), 'Energy and Variational Method in Applied Mechanics', A Wiley-Interscience Publication, New York.
17. Ray W. Clough, Joseph Penzien(1975), "Dynamics of Structures", Mcgraw-Hill International Editions, New York.

Received : 02/25/2018

Revised : 04/04/2018

Accepted : 04/23/2018

---

**요 지 :** 이 연구는 이방성 평판의 휨 해석을 위한 지배방정식을 유도하고 다양한 경계조건을 갖는 평판의 정확한 풀이과정을 제시하였다. 이 해법은 삼각급수를 이용하여 미분 방정식을 대수학적 방정식으로 변환시키는 전통적인 Navier와 Levy의 방법을 따랐다. Levy의 방법을 이용해 해를 구하려면 평판의 마주보는 두 끝단이 단순지지단인 경우에만 가능하다. Navier의 방법은 사각평판의 네 끝단이 모두 단순지지단이어야 한다. 본 연구는 Navier와 Levy해법이 갖는 경계조건 한계를 극복하였다. 이 해법은 평판 네 끝단의 경계조건이 단순지지단과 고정단의 어떤 조합이라도 적용될 수 있다. 하중조건도 분포하중, 부분하중 그리고 선하중에 대해 적용할 수 있다. 이 해법의 장점은 Navier와 Levy해법이 갖는 경계조건 한계를 극복하였을 뿐만 아니라 정확한 해를 구할 수 있다. 비대칭 경계조건을 갖는 이방성평판에 대하여 이 해법을 이용한 계산결과를 나타냈다. 또한 Navier해법과 Levy해법 그리고 Szilard의 계산결과와 비교를 보여주었는데 계산된 처짐량이 잘 일치한다.

**핵심용어 :** Orthotropic plate, Partially loaded, Double trigonometric series, Single fourier series.

---