

무한 다공성 매질에서의 비선형 파전파 해석과 지반-구조물 상호작용 해석을 위한 실용적 수치 모형

Practical Numerical Model for Nonlinear Analyses of Wave Propagation and Soil-Structure Interaction in Infinite Poroelastic Media

이진호^{1)*}

Lee, Jin Ho^{1)*}

¹⁾부경대학교 해양공학과 조교수

¹⁾Assistant Professor, Department of Ocean Engineering, Pukyong National University

/ A B S T R A C T /

In this study, a numerical approach based on mid-point integrated finite elements and a viscous boundary is proposed for time-domain wave-propagation analyses in infinite poroelastic media. The proposed approach is accurate, efficient, and easy to implement in time-domain analyses. In the approach, an infinite domain is truncated at some distance. The truncated domain is represented by mid-point integrated finite elements with real element-lengths and a viscous boundary is attached to the end of the domain. Given that the dynamic behaviors of the proposed model can be expressed in terms of mass, damping, and stiffness matrices only, it can be implemented easily in the displacement-based finite-element formulation. No convolutional operations are required for time-domain calculations because the coefficient matrices are constant. The proposed numerical approach is applied to typical wave-propagation and soil-structure interaction problems. The model is verified to produce accurate and stable results. It is demonstrated that the numerical approach can be applied successfully to nonlinear soil-structure interaction problems.

Key words: Soil-structure interaction, Wave propagation, Poroelastic medium, Mid-point integrated finite element, Viscous boundary, Caisson breakwater

1. 서론

토목 및 기계공학에서는 다공성 매질에서의 파전파 현상에 대하여 많은 관심을 가져왔는데, 이는 이와 관련된 물리 현상이 다양한 공학적 시스템에 활용되고 있기 때문이다. 이에 대한 전형적인 예로는 다공성 반무한 지반에서의 지반-구조물 상호작용, 지반의 액상화 해석, 탄성파를 이용한 지반 조사, 다공성 물질로 이루어진 구조물의 비파괴 검사 등을 들 수 있다. 그러므로, 다공성 매질의 동역학을 이해하기 위해 많은 연구가 이루어져 왔다[1]. 무한 다공성 매질에서의 파전파 해석 시 가장 중요하게 고려하여야 할 요소 중의 하나가 무한 매질에서의 에너지 방사 현상이다. 만약 이를 적절하게 고려하지 않는다면 다공성 탄성파(poroelastic wave)가 한정된 영역에 갇히게 되어 최종 응답이 실제와 많은 차이를 보이게 되기 때문이다. 그러므로,

무한 매질의 효과를 정확하면서도 효율적인 방법으로 고려하는 것은 무한 매질에서의 파전파 해석기법 개발의 가장 중요한 연구 주제이다. 무한 매질에서의 파전파 문제의 정해는 주파수영역에서 얻을 수 있고, 이를 위해 전달 경계[2], 경계요소[3, 4], 무한요소[5] 등과 같은 수치모형이 주파수영역에서 개발되어 사용되어 왔다.

시스템의 비선형 거동은 다공성 매질의 파전파 문제에서 중요한 고려 사항 중 하나이다. 예를 들면, 강진 지반운동은 지반-구조물 상호작용 시스템의 큰 변형과 이로 인한 지반의 액상화를 유발할 수 있는데, 이는 그 시스템의 안전성에 큰 영향을 미친다. 재료 비선형성을 포함한 비선형 거동은 시간영역에서 비선형 유한요소를 사용하여 가장 잘 나타낼 수 있다. 그러므로, 무한 다공성 매질에서의 비선형 파전파 해석의 정확성과 효율성은 무한 영역에서의 에너지 방사를 시간영역에서 얼마나 정확하고 효율적으로 나타낼 수 있는지에 의하여 결정된다. 앞에서 언급한 방법들은 주파수 영역에서 개발되었기 때문에, 이들을 시간영역 해석에 적용하면 convolutional operator의 형태를 가지게 된다. Convolution operator는 현재 시간에서의 응답을 계산

*Corresponding author: Lee, Jin Ho

E-mail: jholee0218@pknu.ac.kr

(Received July 23, 2018; Revised October 4, 2018; Accepted October 5, 2018)

하기 위해 계산을 시작하는 순간부터의 모든 응답 이력을 필요로 하므로, 정확한 해를 얻을 수는 있지만 효율적인 방법이라고 할 수는 없다. 시간영역에서 효율적인 지반-구조물 상호작용 해석을 수행하기 위해서는 convolution operator와 같은 global temporal operator보다는 local temporal operator가 선호되고, 이러한 형태로 표현되는 수치 모형이 필요하게 된다. 고차 흡수 경계조건[6]과 perfectly matched layer(PML)[7, 8]는 시간영역에서 local temporal operator의 형태로 표현할 수 있는 접근법이고, 최근 무한영역에서의 파전파 문제에 다양하게 활용되고 있다. 특히, 고차 흡수경계조건과 PML의 장점을 모두 가지고 있는 perfectly matched discrete layer(PMDL)를 이용하여 반무한 지반에서의 비선형 파전파 해석과 지반-구조물 상호작용 해석을 위한 수치적 방법이 개발되기도 하였다[9-11].

고차 흡수경계조건과 PML이 무한 매질에서의 시간영역 파전파 해석에 정확하고 효율적인 방법이지만, 이 방법들을 구현할 때는 특별히 고려해야 할 사항들이 있다. 고차 흡수경계조건은 무한영역의 분산방정식을 유리식으로 근사하거나 간단한 미분연산자의 조합으로 표현하는 방법이다. 하지만, 이를 구현하기 위해서는 물리적인 의미가 없는 추가 변수를 사용해야 한다[6]. PML은 복소좌표변환의 개념을 사용하여 매질에 인위적인 감쇠를 부여하여 진행하는 파의 진폭을 감소시키는 방법이다. PML은 주로 응력-속도 정식화를 사용하여 구현되었는데[12], 대부분의 엔지니어는 변위 기반 정식화에 익숙하다. 변위 기반 정식화를 사용하여 PML을 구현할 수 있지만, 이때는 변위를 시간에 대하여 적분한 항이 발생한다[8]. 참고로 변위를 시간에 대하여 적분한 항은 고차 흡수경계조건에서도 관찰되는 현상이기도 하다[9-11, 13-15]. 즉, 고차 흡수경계조건과 PML을 구현하기 위해서는 특별히 고려해야 할 사항들이 있고, 이는 이 방법들의 사용성을 저하시키는 요인이다. 또한, 이 방법들의 수치 안정성에 대해서는 아직 명확한 결론이 나지 않았고[16, 17], 이는 고차 흡수경계조건과 PML의 활용성을 저해하는 또 다른 요인이기도 하다.

이 연구에서는 무한 다공성 매질에서의 시간영역 파전파 해석에 활용할 수 있는 정확하고 효율적이면서도 구현하기 쉬운 수치적 방법을 제안하고자 한다. 이를 위해 다공성 탄성 매질에 대한 mid-point integrated finite element와 점성경계에 근거한 방법을 제안할 것이다. 기존 연구에서 mid-point integrated finite element와 PMDL의 조합을 사용하면 층상반 무한체를 정확하고 효율적으로 모사할 수 있음을 이미 보였다[18]. Mid-point integrated finite element는 통상적인 유한요소와 유사하게 질량, 감쇠, 강성 행렬을 사용하여 정식화할 수 있다. 하지만, PMDL은 시간영역 정식화를 위해서는 변위를 시간에 대하여 적분한 항을 필요로 한다[9-11, 13-15]. 그러므로, 이 연구에서는 무한 매질에 대한 PMDL을 시간영역에서 간단한 감쇠기로 표현할 수 있는 점성경계로 대체한 수치 모형을 제안하고자 한다. 점성경계는 기존 상용 유한요소 해석코드에 이미 구현되어 있고, mid-point integrated finite element는 유한요소의 개념을 사용하여 기존 해석코드에 사용자 요소로 쉽게 구현이 가능하기 때문에 제안된 수치 모형은 무한 다공성 매질에서의 파전파 문제에 대하여 아주 “실용적”인 접근법이라고 할 수 있다. 이 논문에서는 무한 다공성 탄성 매질에 대한 mid-point integrated finite element와 점성경계에 대해 간략히 살펴보고, 이를 사용하여 다공성 반무한체를 모사하는 방법을 제안할 것이다. 그 후 제안된 수치 모형의 정확성을 검토하고 다공성 지반에서의 비선형 동적 해석에 적용할 것이다.

2. 무한 다공성 탄성 매질의 수치 모형

이 절에서는 무한 다공성 매질에서의 파전파 문제에 적용할 수 있는 “실용적”인 수치 모형을 제안하고자 한다. 이 모형은 mid-point integrated finite element와 점성경계에 근거하고 있다. 그러므로, 두가지 구성 요소에 대해 살펴본 후, 무한 다공성 탄성 매질을 나타내는 방법에 대해 제안하고자 한다. 이 연구에서는 다공성 탄성 매질의 2차원 평면 변형 문제만 다를 것이지만, 일반적인 3차원 문제로의 확장을 어렵지 않게 수행할 수 있다.

2.1. 다공성 탄성 매질에 대한 Mid-point Integrated Finite Element

직교좌표계에서 다공성 매질의 지배방정식은 다음과 같다[19-21]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x \partial z} - \tilde{\mathbf{M}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \tilde{\mathbf{C}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x, z, t) = [\tau_{xz}(x, z, t) \quad \sigma_z(x, z, t) \quad 0 \quad -p(x, z, t)]^T \quad (2a)$$

$$\mathbf{u}(x, z, t) = [u_x(x, z, t) \quad u_z(x, z, t) \quad w_x(x, z, t) \quad w_z(x, z, t)]^T \quad (2b)$$

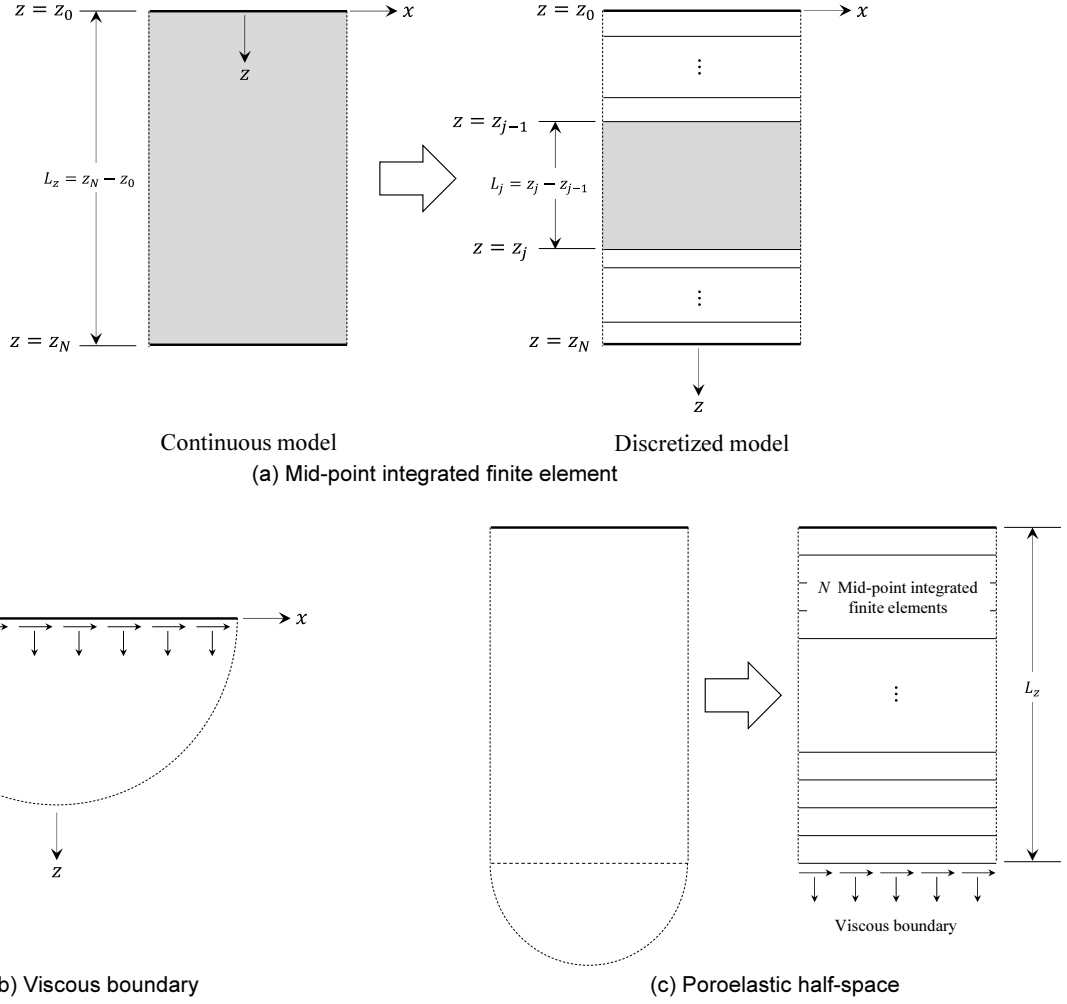
$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + Q\alpha^2 & 0 & Q\alpha & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ Q\alpha & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda + Q\alpha^2 & 0 & Q\alpha \\ \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q\alpha & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & \rho_w & 0 \\ 0 & \rho & 0 & \rho_w \\ \rho_w & 0 & \frac{\rho_w}{n} & 0 \\ 0 & \rho_w & 0 & \frac{\rho_w}{n} \end{bmatrix} \quad (3c)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix} \quad (3d)$$

여기서, $u_x(x, z, t)$ 와 $u_z(x, z, t)$ 는 고체 골격의 변위, $w_x(x, z, t)$ 와 $w_z(x, z, t)$ 는 공극율을 곱한 고체 골격에 대한 유체의 상대 변위이다. $\sigma_z(x, z, t)$ 와 $\tau_{xz}(x, z, t)$ 는 혼합체의 전응력, $p(x, z, t)$ 는 유체의 간극수압이다. λ 와 μ


Fig. 1. Representation of a poroelastic half-space

는 고체 골격의 Lamé 상수, Q 와 α 는 다공성 매질의 압축성을 고려하기 위한 Biot 상수이다. ρ_w 는 유체의 밀도, $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_w$ 는 혼합체의 평균 밀도인데, 여기서 ρ_s 는 고체의 밀도이다. n 은 공극율, $f = 1/\kappa$ 인데, 여기서 κ 는 투수계수이다. 식(2a)의 응력과 간극수압은 식(2b)의 변위와 관련된다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \tilde{\mathbf{G}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \quad (4)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu + Q\alpha^2 & 0 & Q\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q\alpha & 0 & Q \end{bmatrix} \quad (5)$$

Fig. 1a에 보인 바와 같이 $z = z_0 = 0$ 부터 $z = z_N = L_z$ 까지의 영역을 고려해보자. 이 영역에서의 지배방정식을 근사하기 위해, 이 영역을 N 개의 층으로 나눌 것이다. $z_{j-1} \leq z \leq z_j$ 의 j 번째 층에서 z 방향으로의 변위는 선형으로 변동한다고 가정하고 식(1)의 지배방정식에 mid-point integration 기

법을 적용하면, 그 층에서의 지배방정식의 근사식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & -\frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{A}} \\ \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{j-1}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial x^2} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}}^T & -\tilde{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}}^T \\ \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}^T & -\tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_{j-1}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{L_j} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & -\tilde{\mathbf{C}} \\ -\tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{j-1} \\ \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \\ & + \frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}} & \tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{j-1}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial t^2} \end{Bmatrix} + \frac{L_j}{4} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_{j-1}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\sigma}_{j-1} \\ \boldsymbol{\sigma}_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서, $\mathbf{u}_j(x, t) = \mathbf{u}(x, z_j, t)$ 이고 $\boldsymbol{\sigma}_j(x, t) = \boldsymbol{\sigma}(x, z_j, t)$ 이다. 식(6)의 두 옆을 더한 후, 이를 L_j 로 나누면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\sigma}_j - \boldsymbol{\sigma}_{j-1}}{L_j} &= -\tilde{\mathbf{A}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{j-1}}{\partial x^2} \right) - \tilde{\mathbf{B}} \cdot \frac{1}{L_j} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}_{j-1}}{\partial x} \right) \\ &+ \tilde{\mathbf{M}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{j-1}}{\partial t^2} \right) + \tilde{\mathbf{C}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}_{j-1}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)은 z 방향으로의 식(1)의 Crank-Nicolson 이산화임을 알 수 있다. 식(4)도 다음과 같이 이산화할 수 있다. 식(6)의 2열로부터 1열을 뺀 후 그 결과를 2로 나누면 다음과 같이 이산화된 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\sigma_j + \sigma_{j-1}}{2} = \tilde{\mathbf{B}}^T \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}_{j-1}}{\partial x} \right) + \tilde{\mathbf{G}} \left(\frac{\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1}}{L_j} \right) \quad (8)$$

식(8)은 z 방향으로의 식(4)의 Crank-Nicolson 이산화이다. 길이 L_j 는 Padé 근사에 의하여 scalar wave 전파로부터 얻은 것과 동일하게 얻을 수 있다[18]. 얻어진 길이는 z 방향으로의 파수에 독립적이기 때문에, 다공성 매질에서의 vector wave 전파문제의 mid-point integrated finite element에 대해서도 동일하게 적용할 수 있다.

2.2. 무한 다공성 탄성 매질의 점성경계

무한 다공성 탄성 매질의 점성경계는 Lee[11]에 유도되어 있고, 여기서 는 그 결과만을 간략히 서술하고자 한다. Fig. 1b에 보인 다공성 반무한체에 대하여 x 방향으로 일정한 운동을 가정하고 무한의 투수계수($\zeta, f=0$)를 가정하면, 매질은 다음과 같이 감쇠기로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} t_x(t) \\ t_z(t) \\ p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xz}(t) \\ -\sigma_z(t) \\ p(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_v^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_v^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_x(t) \\ \dot{u}_z(t) \\ \dot{w}_z(t) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$C_v^s = (1-n)\rho_s C_s^0 \quad (10a)$$

$$C_v^p = \begin{bmatrix} \rho & \rho_w \\ \rho_w & \frac{\rho_w}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ C_{w1}^0 & C_{w2}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{p1}^0 & 0 \\ 0 & C_{p2}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ C_{w1}^0 & C_{w2}^0 \end{bmatrix}^{-1} \quad (10b)$$

여기서 $\dot{u}_x(t), \dot{u}_z(t), \dot{w}_z(t)$ 는 무한매질 표면에서의 속도, $\sigma_z(t), \tau_{xz}(t)$ 는 무한 매질 표면에서의 응력, $p(t)$ 는 무한 매질 표면에서의 간극수압, $t_x(t), t_z(t)$ 는 무한 매질 표면에서의 표면력이다. $C_s^0 = \sqrt{\mu/(1-n)}\rho_s$ 는 $f=0$ 일 때 다공성 탄성 매질의 S파 속도이고, 이 매질의 P1과 P2파 속도 C_{p1}^0 과 C_{p2}^0 는 다음의 고유값 문제의 고유값이다.

$$\begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + Q\alpha^2 & Q\alpha \\ Q\alpha & Q \end{bmatrix} - (C_p^0)^2 \begin{bmatrix} \rho & \rho_w \\ \rho_w & \frac{\rho_w}{n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ C_w^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

식(11)의 고유값 중 더 큰 값이 C_{p1}^0 이고, 작은 다른 하나는 C_{p2}^0 이다. 각각의 고유값에 대응하는 고유벡터는 $\{ C_{w1}^0 \}^T$ 와 $\{ C_{w2}^0 \}^T$ 이다. 점성경계가 수직으로 입사하는 파에 대해서만 정확한 모형이지만, 경사지게 입사하는 파에 대해서도 아주 효율적인 역학적 모형임이 이미 증명되었다[22]. 식(9)의 점성경계도 경사지게 입사하는 다공성 탄성파를 흡수하는 데 효율

적임을 3절의 예제에서 보일 것이다.

2.3. 무한 다공성 탄성 매질의 모사

무한 다공성 탄성 매질을 mid-point integrated finite element와 점성 경계를 사용하여 나타내는 방법을 제안하고자 한다. Fig. 1c는 이 방법을 적용할 수 있는 전형적인 예인 다공성 반무한체를 보여주고 있다. 반무한체의 $0 \leq z \leq L_z$ 의 영역을 나타내기 위해 일련의 mid-point integrate finite elements를 사용한다. 이 요소들의 길이는 Astaneh and Guddati[18]에 주어져 있는데, 이 길이는 복소수이기 때문에 실제 구현할 때는 주의하여야 한다. 특히, 범용 유한요소 해석 코드에 이 요소를 구현할 때는 이 점을 염두에 두어야 할 것이다. 이 연구에서는 $0 \leq z \leq L_z$ 의 영역을 N 개의 세부 영역으로 나누고, L_z/N 의 길이를 가지는 mid-point integrate finite element를 사용하는 것을 제안한다. 이 요소들은 실수의 길이를 가지기 때문에, 통상적인 유한요소와 같은 방법으로 구현할 수 있다. 그리고, mid-point integrated finite elements로 나타낸 $0 \leq z \leq L_z$ 의 유한 영역에 매질의 무한 영역을 나타내기 위하여 식(9)의 점성경계를 부착한다.

식(6)과(9)로부터 무한 다공성 탄성 매질에 대해 제안된 모형이 질량, 감쇠, 강성의 항으로만 표현이 가능하다는 것을 관찰할 수 있다. 시간에 대하여 변위를 적분한 항은 나타나지 않는다. 그러므로, 고차 흡수경계조건과 PML의 단점을 극복할 수 있다. 또한, 각 항의 계수가 상수이기 때문에, 시간영역 운동방정식에서 convolution이 나타나지 않게 되어, 주파수영역 정식화에 기반한 방법의 단점 또한 극복할 수 있게 된다. 그러므로, mid-point integrated finite element와 점성경계에 기반하여 제안한 모형은 토목 및 기계공학 분야의 적용에 아주 유용한 방법이라고 할 수 있다. Mid-point integrated finite element와 점성경계를 구현할 수 있도록 기존의 해석 코드를 조금만 수정하면, 무한 다공성 매질에서의 파전파 문제를 풀 수 있다. 그러므로, 제안된 모형은 무한 다공성 탄성 매질에서의 동적 거동의 수치 해석에 “실용적”인 방법이라고 할 수 있을 것이다.

제안된 방법에 근거하여, Fig. 2에 보인 다공성 매질에서의 비선형 파전파 문제와 지반-구조물 상호작용 문제의 지배방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} + \mathbf{M}_{bb}^f & \mathbf{M}_{be}^f \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{eb}^f & \mathbf{M}_{ee}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_i \\ \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{bi} & \mathbf{C}_{bb} + \mathbf{C}_{bb}^f & \mathbf{C}_{be}^f \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{eb}^f & \mathbf{C}_{ee}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_i \\ \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_i^{int}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) \\ \mathbf{P}_b^{int}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb}^f & \mathbf{K}_{be}^f \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{eb}^f & \mathbf{K}_{ee}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_i^{ext} \\ \mathbf{P}_b^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{P}^{int}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$ 는 각각 일반적인 유한요소로 인해 표현되는 구조물과 지반 근역의 질량 행렬, 감쇠 행렬, 비선형 내력 벡터를 의미한다. $\mathbf{M}^f, \mathbf{C}^f, \mathbf{K}^f$ 는 mid-point integrated finite element와 점성경계에 의해 나타내어 지는 지반 원역의 질량, 감쇠, 강성 행렬을 의미한다. $\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}, \ddot{\mathbf{U}}$ 는 각각 변위, 속도, 가속도 벡터이고, \mathbf{P}^{ext} 는 외력 벡터이다. 식(12)에서 하첨자 i, b, e 는 각각 구조물과 지반 근역의 유한요소에만 위치하는 절점, 지반 근역

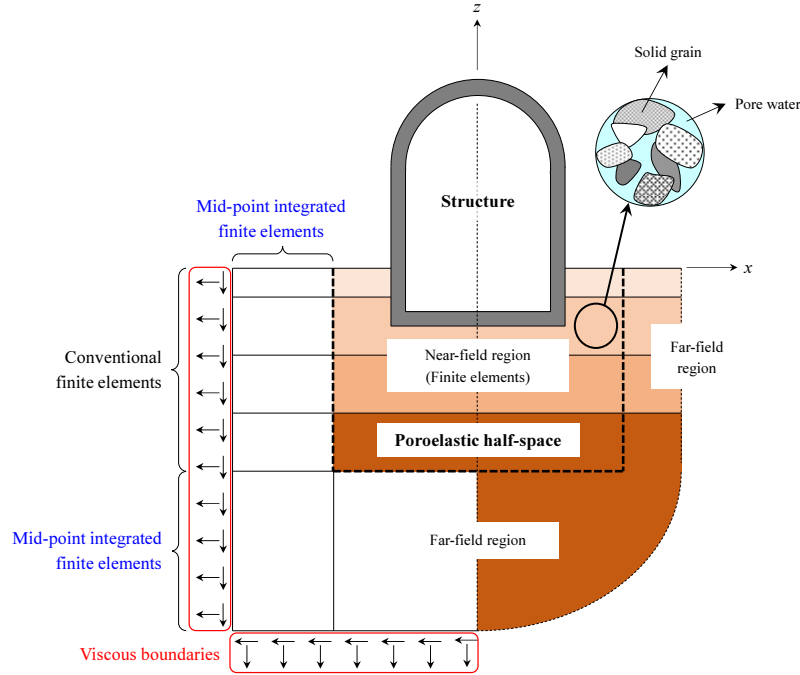


Fig. 2. Soil-structure interaction system in a poroelastic half-space

과 원역의 경계면에 위치하는 절점, 지반 원역에만 위치하는 절점을 의미한다.

지진파만 입사하고 구조물과 지반 근역에 외력이 가해지지 않을 때, 지반-구조물 상호작용계의 운동방정식은 다음과 같다[9], [10], [23].

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ib} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{bi} & \mathbf{M}_{bb} + \mathbf{M}_{bb}^f & \mathbf{M}_{be}^f \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{eb}^f & \mathbf{M}_{ee}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_i \\ \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ib} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{bi} & \mathbf{C}_{bb} + \mathbf{C}_{bb}^f & \mathbf{C}_{be}^f \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{eb}^f & \mathbf{C}_{ee}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_i \\ \dot{\mathbf{U}}_b \\ \dot{\mathbf{U}}_e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_i^{int}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) \\ \mathbf{P}_b^{int}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb}^f & \mathbf{K}_{be}^f \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{eb}^f & \mathbf{K}_{ee}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_b \\ \mathbf{U}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{bb}^f \ddot{\mathbf{U}}_b^* \\ \mathbf{M}_{eb}^f \ddot{\mathbf{U}}_b^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{bb}^f \dot{\mathbf{U}}_b^* \\ \mathbf{C}_{eb}^f \dot{\mathbf{U}}_b^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{bb}^f \mathbf{U}_b^* \\ \mathbf{K}_{eb}^f \mathbf{U}_b^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{P}_b^* \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (13)
 \end{aligned}$$

여기서 $\ddot{\mathbf{U}}_b^*$, $\dot{\mathbf{U}}_b^*$, \mathbf{U}_b^* , \mathbf{P}_b^* 는 입사 지진파에 의한 자유장 운동을 나타낸다. 이 물리량들은 1차원 파전파 해석을 통해 쉽게 얻을 수 있다. 식 (13)에서 $\mathbf{M}_{eb}^f \ddot{\mathbf{U}}_b^*$, $\mathbf{C}_{eb}^f \dot{\mathbf{U}}_b^*$, $\mathbf{K}_{eb}^f \mathbf{U}_b^*$ 는 절점 b 와 이웃한 절점에만 0이 아닌 값을 가진다[9], [10], [23].

식 (12)와 (13)을 풀어서, 지반-구조물 상호작용계의 비선형 거동을 얻을 수 있다. 이 연구에서는 일정 가속도법(constant acceleration method)을 사용할 것이다[9-11].

3. 검증과 적용

Mid-point integrated finite element와 점성경계로 구성된 수치모형의 정확성과 적용성을 검토하고자 한다. 제안된 모형의 반사계수를 조사한 후, 다공성 탄성 매질에서의 파전파 문제에 제안된 수치모형을 적용하고자 한다.

다. 마지막으로 다공성 지반에서의 비선형 동적 문제에 제안된 방법을 적용하여 그 활용성을 검토하고자 한다.

3.1. 반사계수

다공성 탄성 반무한체에 제안된 수치모형을 적용하였을 때의 반사계수를 계산하여, 제안된 모형의 오차를 조사하고자 한다. 입사파와 반사파가 $\exp[i(\omega t - k_r x)]$ 의 의존성을 가지고 각각의 진폭이 $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}^T$ 와 $\mathbf{B} = \{B_1, B_2, B_3\}^T$ 로 주어질 때, 반사계수 $\mathbf{R} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ 를 Lee[11]에서 유도하였다. 여기서, 하첨자 1, 2, S는 각각 P1, P2, S파의 진폭을 나타낸다.

고려한 매질의 재료 성질은 다음과 같다. Lamé 상수는 $\lambda = 85.4$ MPa이고 $\mu = 42.7$ MPa이다. Biot 상수는 $Q = 1488.56$ MPa이고 $\alpha = 0.9$ 이다. 밀도는 $\rho_s = 2640$ kg/m³이고, $\rho_w = 1000$ kg/m³이다. 공극율은 $n = 0.3$ 이고, 투수계수는 $\kappa = 1.019368 \times 10^{-8}$ m³·s/kg이다. 이 경우, $f = 0$ 일 때의 P1, P2, S파의 속도는 각각 $C_{p1}^0 = 880.8$ m/s, $C_{p2}^0 = 230.6$ m/s, $C_s^0 = 152$ m/s이다. 이 예제에서 입사파의 가진진동수 ω 는 50 rad/s이다.

반무한체를 mid-point integrated finite element와 점성경계를 사용하여 나타낸다. 요소의 길이(또는 두께)는 $0.1 \lambda_r^0$ 인데, 여기서 λ_r^0 은 $f = 0$ 일 때의 Rayleigh 파의 파장이다. 반무한체의 동적 강성 행렬의 판별식을 0로 두어, Rayleigh 파의 속도 C_r^0 와 파장 λ_r^0 를 계산하면 이 예제에서는 각각 141.56 m/s와 17.79 m로 계산된다.

Fig. 3a는 $f = 0$ 이고 $L_z / \lambda_r^0 = 0, 1, 2, 3, 4$ 일 때의 반사계수를 보여주고 있다. 반무한체의 표면에 평행하게 입사하는 P1, P2, S파의 정규화된 파수 $k_x C_s^0 / \omega$ 는 그림에 보인 바와 같이 각각 $C_s^0 / C_{p1}^0 = 0.173$, $C_s^0 / C_{p2}^0 = 0.659$, 1.0이다. 평행하게 입사하는 파에 대해서는 흡수할 성분이 없으며

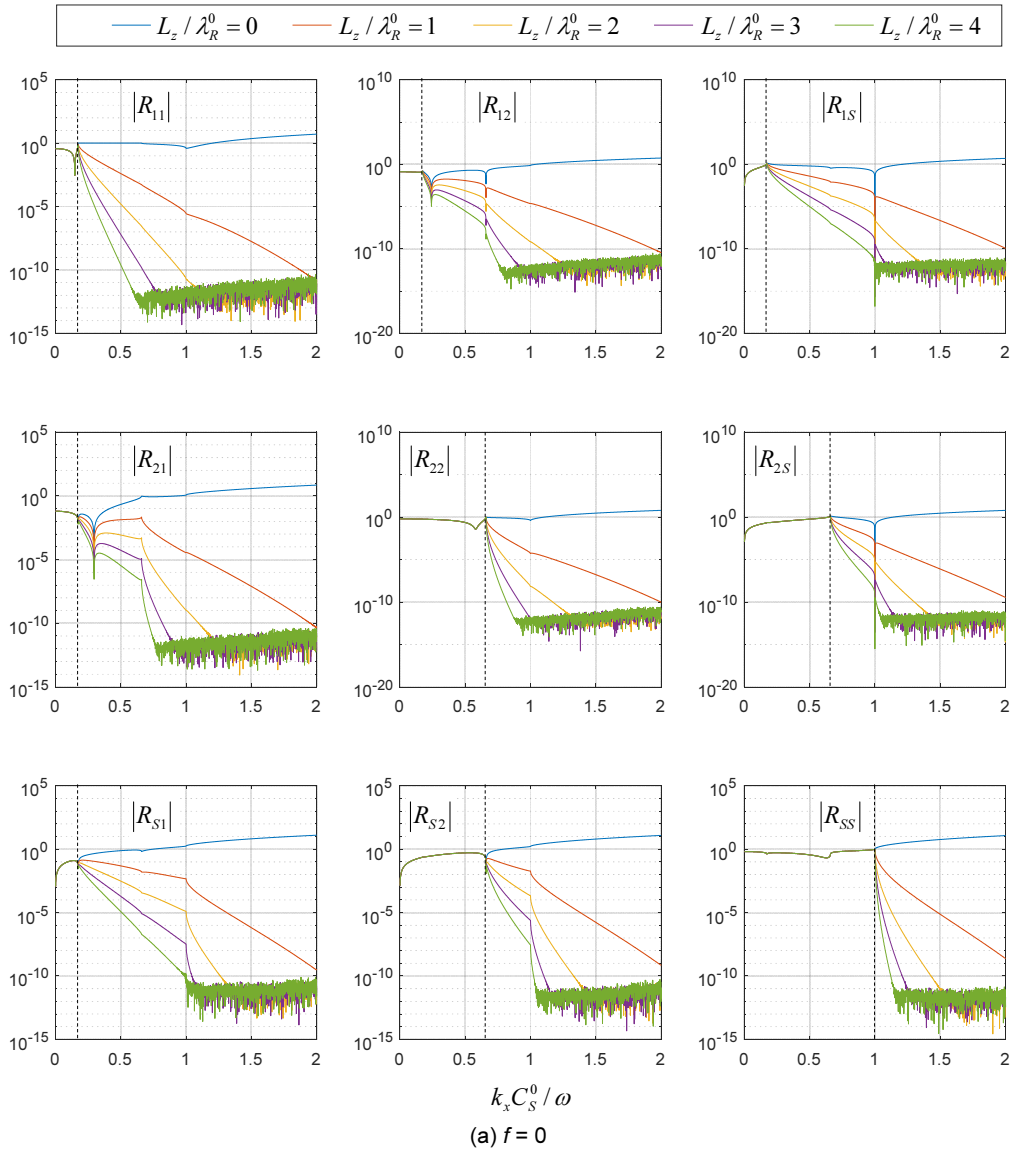


Fig. 3. Reflection coefficients

로, 이 파수에서 반사계수는 정확히 1이고 이는 Fig. 3a에서 관찰할 수 있다. Fig. 3a에서 $k_x C_s^0 / \omega$ 가 이 값들보다 작을 때는 mid-point integrated finite element와 점성경계를 사용하는 경우와 점성경계만 사용한 경우의 반사계수의 차이가 거의 없음을 알 수 있다. 이는 진행파(propagating waves)는 점성경계에 의해서 흡수됨을 의미한다. 반면에, $k_x C_s^0 / \omega$ 가 0.173, 0.659, 1.0보다 커지게 되면, 사용된 mid-point integrated finite elements의 수가 증가할수록 반사계수는 감소함을 확인할 수 있는데, 이는 소멸파(evanescent waves)의 흡수는 mid-point integrated finite element에 의해서 이루어짐을 의미한다. 즉, 점성경계와 mid-point integrated finite element는 각각 진행파와 소멸파의 흡수에 기여한다. 또한, Fig. 3a에서 제안된 수치모형의 효율은 사용되는 mid-point integrated finite element의 수가 증가할수록 증가함을 관찰할 수 있다. 이러한 관찰은 mid-point integrated finite element와 PMDL을 사용했던 기존 연구에서도 관찰된 사항이다[11].

Fig. 3b는 $f=1/\kappa=9.81 \times 10^7 \text{ kg}(\text{m}^3 \cdot \text{s})$ 일 때의 반사계수를 나타낸다.

Fig. 3a와 비교하여 R_{i2} 와 R_{2i} ($i=1, 2, S$)에서 큰 변화를 관찰할 수 있는데, 이는 $f \neq 0$ 일 때 P2파의 속도가 크게 변하기 때문이다[11]. 그림에도 불구하고, 제안된 수치 모형은 여전히 입사파를 잘 흡수할 수 있음을 확인할 수 있다.

3.2 다공성 탄성 지반에서의 파전파

제안된 수치모형을 사용하여 다공성 탄성 지반에서의 파전파 문제(Fig. 4)를 풀고자 한다. 지반의 깊이 $H=40$ m이다. 지표면은 자유 표면이고 불투수성 강체 기반암을 가진다. 지반은 수평방향으로 무한하다. 지반의 재료 성질은 다음과 같다. Lamé 상수는 $\lambda=1439 \text{ Mpa}$ 이고 $\mu=719.8 \text{ Mpa}$ 이다. Biot 상수는 $Q=5678 \text{ Mpa}$ 이고 $\alpha=0.9$ 이다. 밀도는 $\rho_s=2000 \text{ kg/m}^3$ 이고 $\rho_w=1000 \text{ kg/m}^3$ 이다. 공극율은 $n=0.3$ 이고 투수계수는 무한대, 즉, $f=0$ 이다.

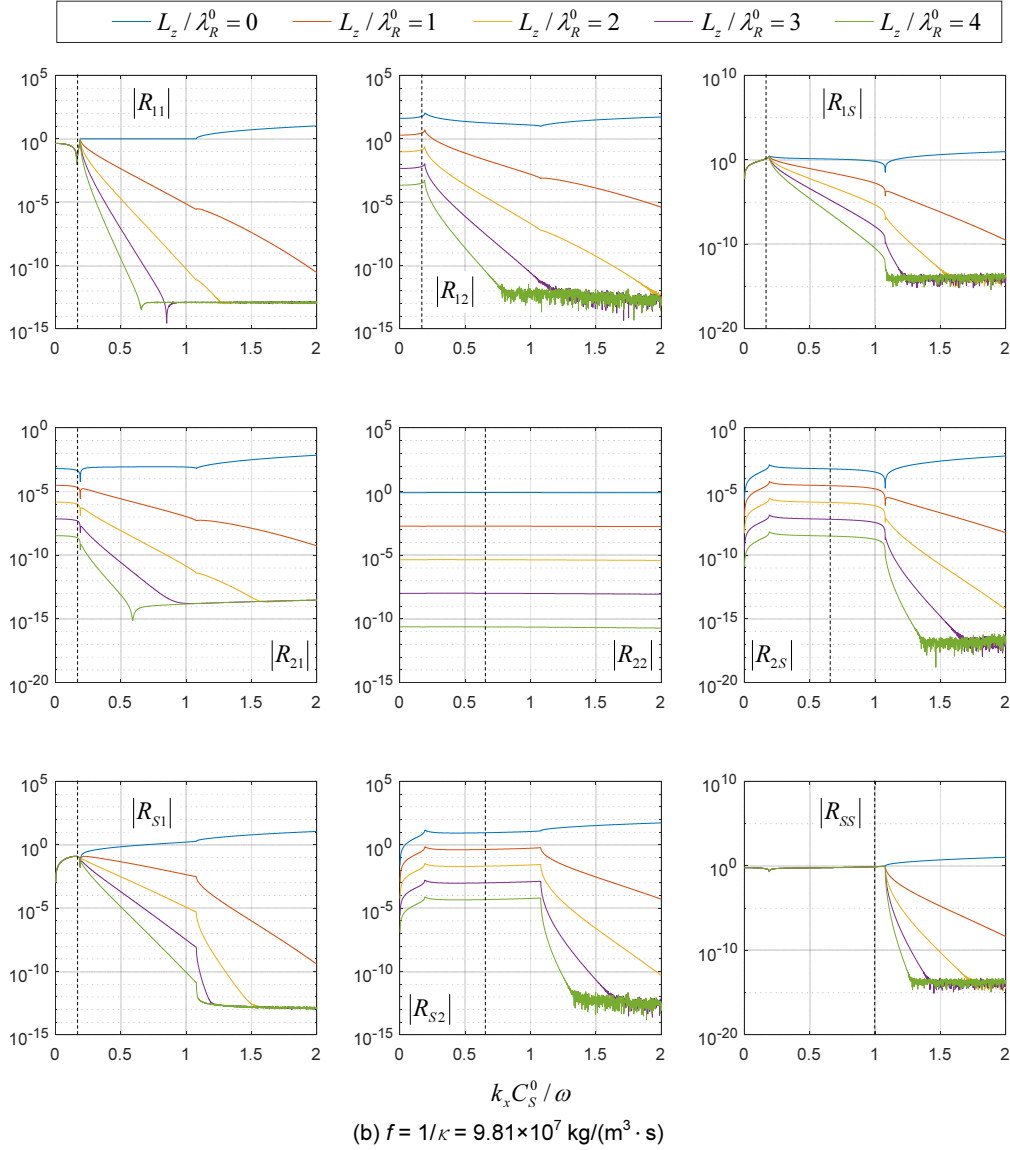


Fig. 3. Reflection coefficients (continued)

이 예제에서는 식 (13)의 Gaussian 펄스를 초기 조건으로 사용한다.

$$u_x(0, z, t) = 0 \quad (14a)$$

$$u_x(x, z, 0) = \frac{x}{10} \exp[-x^2 - (z - 30)^2] \quad (13a)$$

$$\tau_{xz}(0, z, t) = 0 \quad (14b)$$

$$u_z(x, z, 0) = \frac{z}{10} \exp[-x^2 - (z - 30)^2] \quad (13b)$$

$$w_x(0, z, t) = 0 \quad (14c)$$

$$w_x(x, z, 0) = w_z(x, z, 0) = 0 \quad (13c)$$

$$\dot{u}_x(x, z, 0) = \dot{u}_z(x, z, 0) = \dot{w}_x(x, z, 0) = \dot{w}_z(x, z, 0) = 0 \quad (13d)$$

식 (13)의 조건은 $x=0$ 에 대하여 대칭이기 때문에, $x=0$ 에서 대칭 조건을 사용하여 $x \geq 0$ 인 지반만 다루고자 한다. 대칭 조건은 식 (14)에 주어져 있다.

Fig. 4에 보인 바와 같이 지반의 근역은 길이가 1인 유한요소를 사용하여 이산화한다. 지반의 원역은 mid-point integrated finite element와 점성경계를 사용하여 나타낸다. 고려한 원역의 수평 길이는 L_x 이고 mid-point integrated finite elements의 수는 N 이다.

식 (13)의 초기 조건에 의한 동적 응답을 계산하고, 참조해와 비교한다. 참조해는 유한요소망을 $x = 640 \text{ m}$ 까지 확장하여 얻었다. Fig. 5는 식 (15)에 주어진 상대 오차의 변화를 보여준다.

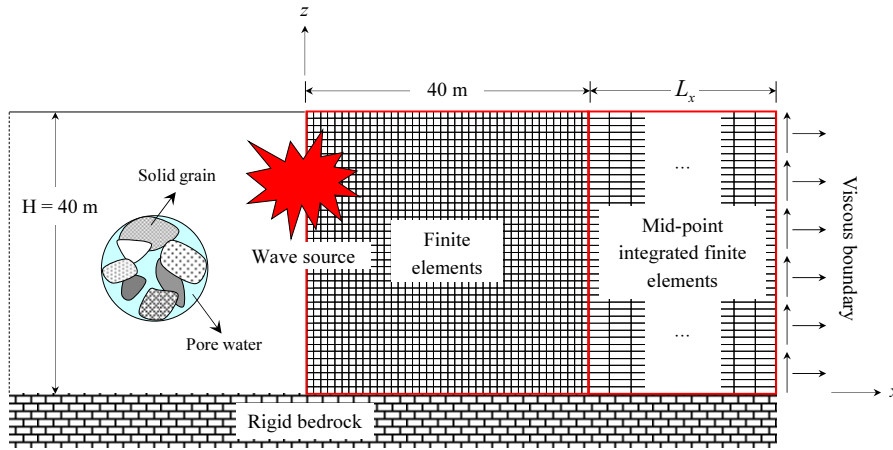


Fig. 4. Wave-propagation problem in poroelastic soil

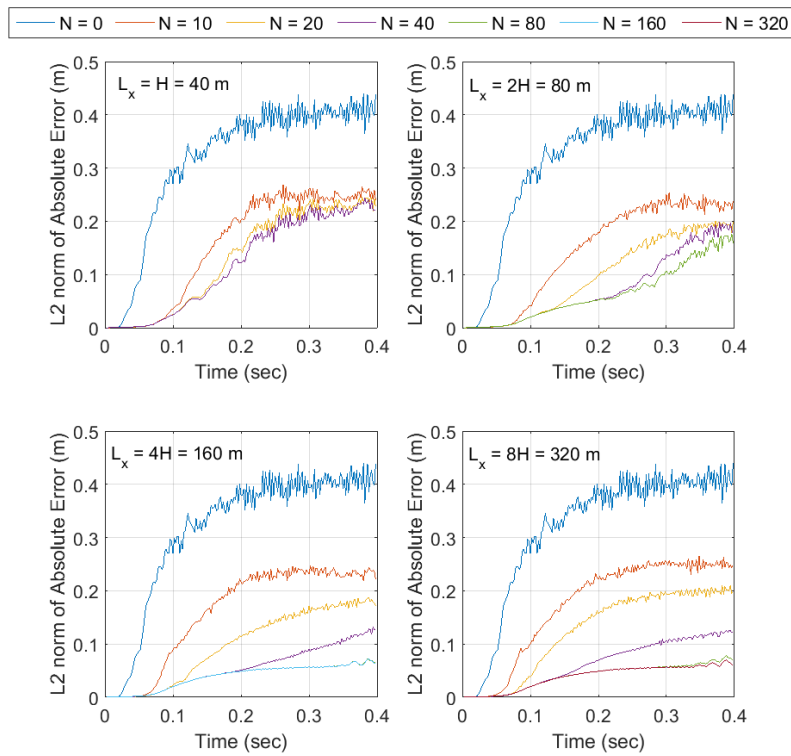


Fig. 5. Variations of L2 norms of errors

$$e(t) = \frac{\sqrt{\int_0^{40} \int_0^{40} |\mathbf{u}(x, z, t) - \mathbf{u}^{ref}(x, z, t)|^2 dx dz}}{\sqrt{\int_0^{40} \int_0^{40} |\mathbf{u}^{ref}(x, z, t)|^2 dx dz}} \quad (15)$$

여기서 $\mathbf{u}^{ref}(x, z, t)$ 는 참조해의 변위를 의미한다. Fig. 5에서 $N=0$ 인 경우는 mid-point integrated finite elements를 사용하지 않고 점성경계만 지반 근역에 직접 부착하여 계산한 경우이다. Fig. 5에서 길이 L_x 와 요소 수 N 가 증가할수록 오차는 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 현재의 수치 모형에서는 $L_x = 160$ m이고 $N = 80$ 일 때 최적의 결과를 얻을 수 있고, 이를 통상적인 유한요소만 사용했을 때의 $N = 160$ 과 비교하여보면 충분한 이득이 있음을 확인할 수 있다. Fig. 6은 $L_x = 320$ m이고 $N = 10$ 일 때 $u_x(x, z, t)$ 의 분포를

보여주고 있다. 결과로부터 아주 적은 수의 mid-point integrated finite element를 사용하더라도 제안된 수치 모형을 사용하면 좋은 결과를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

이 예제와 같은 경계조건을 가지는 waveguide에서의 파전파 문제에 대하여 PML은 무한히 증가하는 결과를 주는 것이 이미 증명되었다[16]. Root-Finding Absorbing Boundary Condition[24]을 제외한 현재까지 개발된 탄성파에 대한 고차 흡수경계조건은 안정한 결과를 얻기 위하여 주기적인 경계조건을 가정하기 때문에, 이 예제와 같은 경계조건을 가지는 waveguide에서의 파전파 문제에 적용할 수 없다[17]. 그러므로, 제안된 접근법의 안정성을 수치적으로 조사하기 위하여, 동적 응답을 500,000 시간 단계동안 계산하였다. 이 논문에 계산 결과를 포함하지는 않았지만, 계산 결과에서 어떠한 불안정성도 관찰되지 않았다. 점성경계의 안정성에 대해

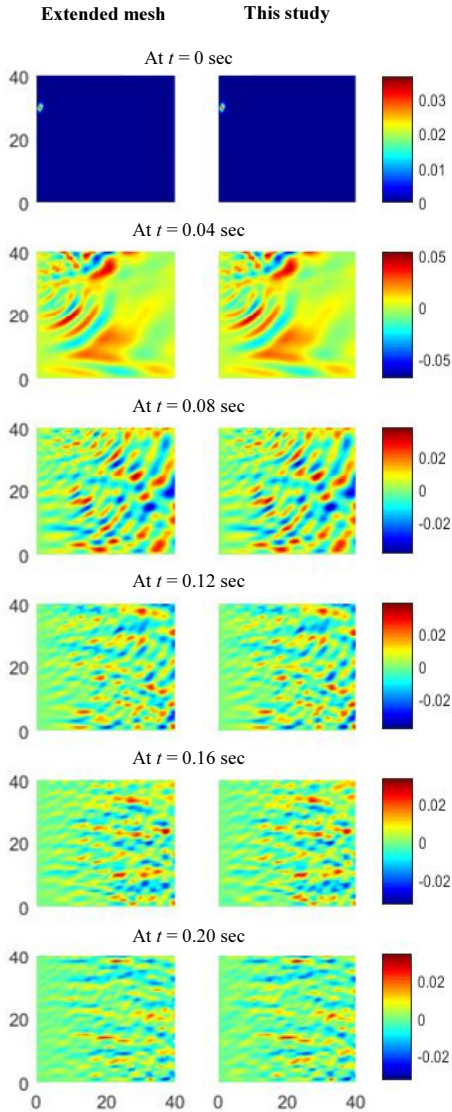


Fig. 6. Wave fields when $L_x = 320$ m and $N = 10$

서는 이미 증명이 된 바이므로[25], 이 연구에서 제안한 모형을 사용하면 파전파 문제에 대해 안정한 결과를 얻을 수 있다.

3.3 다공성 지반에 설치된 케이스 방파제의 지진응답해석

제안된 수치 모형을 사용하여 다공성 지반에 설치된 케이스 방파제(Fig. 7)의 지진응답을 얻고자 한다. 구조적 변형율은 아주 작고 이 해석에서 주요 관심사는 다공성 지반에서의 소성 거동이므로, 구조물은 간단히 강체 질량으로 모사한다. 구조물의 질량은 2500 kg/m^3 이다. 일반적으로 케이스 방파제는 사석 위에 설치되지만, 이 해석에서는 사석은 별도로 고려하지 않는다. 해수의 깊이는 11 m이고 밀도는 1000 kg/m^3 이다. 구조물 양면에 작용하는 동수압력의 효과는 Westergaard의 부가질량[26]으로 모사한다. 이 예제에서 양면에 위치한 질량의 크기는 $7.0583 \times 10^4 \text{ kg}$ 로 계산되었다.

다공성 지반은 강체 기반암을 가지는 것으로 가정한다. 지반의 두께는 40 m이다. 지반의 재료 성질은 다음과 같다. Lamé 상수는 $\lambda = 1439 \text{ MPa}$ 이고 $\mu = 719.8 \text{ MPa}$ 이다. Biot 상수는 $Q = 5678 \text{ MPa}$ 이고 $\alpha = 0.9$ 이다. 밀도는 $\rho_s = 2000 \text{ kg/m}^3$ 이고 $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ 이다. 공극율은 $n = 0.3$ 이고 투수계수는 $\kappa = 1.019368 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \cdot \text{s/kg}$ 이다. 지반의 비선형 재료 거동은 Drucker-Prager 소성 모형을 사용하여 모사한다. 재료의 마찰각과 점착력은 각각 20° 와 0.219 MPa 이다. 지반의 감쇠는 $2\xi_s / \omega_s = 0.003551 \text{ sec}$ 의 상수를 가지는 강성 비례 감쇠를 가정한다. 지반의 기본진동수는 $\omega_s = \pi C_s / 2H = 28.16 \text{ rad/sec}$ 이므로, 전술한 감쇠는 이 기본진동수에 대하여 5% 감쇠($\xi_s = 0.05$)를 부여한다.

Fig. 7은 이 문제의 유한요소망을 보여주고 있다. 지반 근역은 통상적인 유한요소에 의해서 나타내어 진다. 지반 원역은 mid-point integrated finite element와 점성경계에 의해서 나타내어진다. 수치 모형에서 길이 L_x 와 고려한 mid-point integrated finite elements의 수 N 은 각각 320 m와 10이다.

동적 하중이 시스템에 가해지기 전에 정적 조건을 먼저 고려한다. 정적

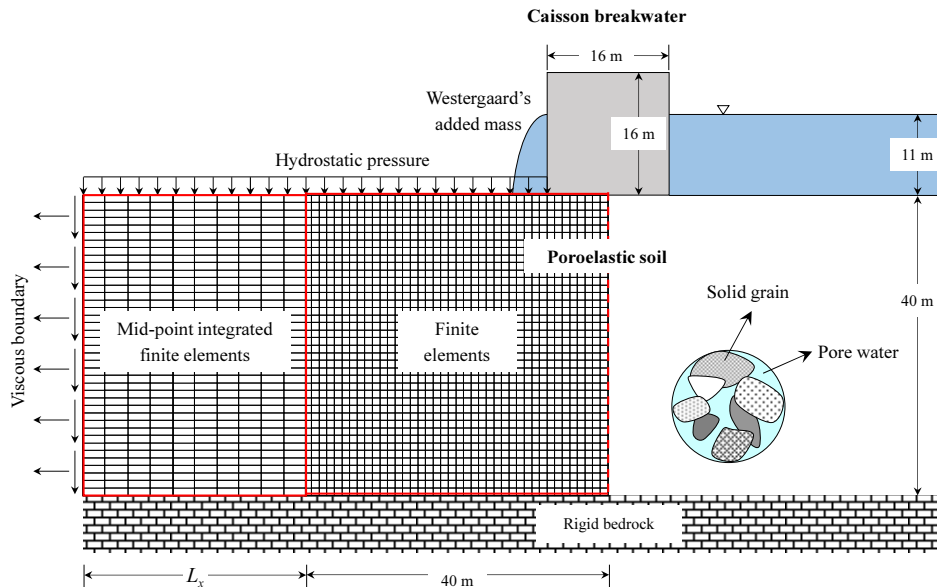


Fig. 7. Caisson breakwater on poroelastic soil

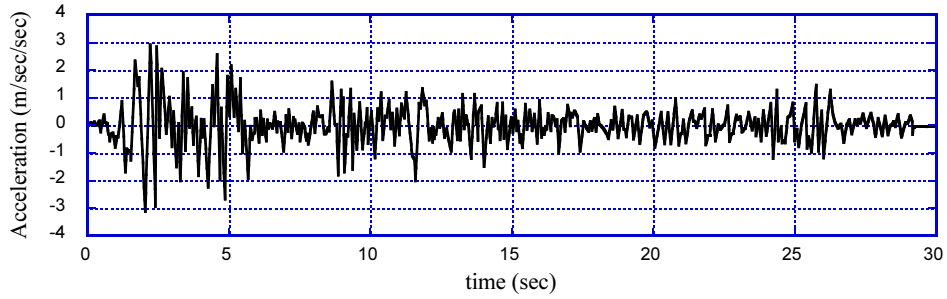


Fig. 8. Input free-field motion (1940 El Centro earthquake, N-S component, PGA=0.319 g)

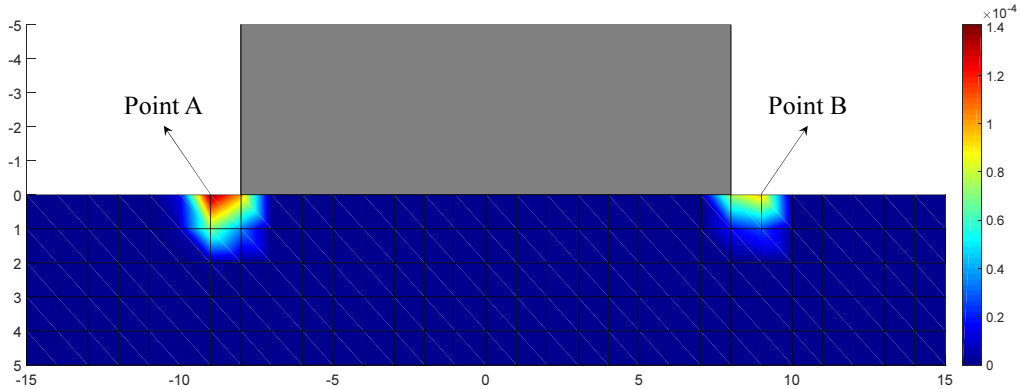


Fig. 9. Equivalent plastic strains in the soil

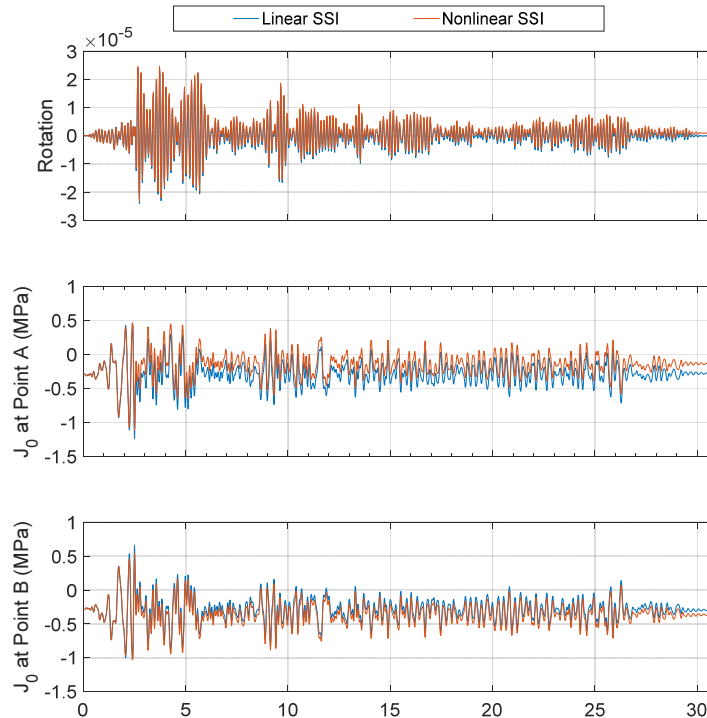


Fig. 10. Earthquake responses in the soil

하중은 구조물과 지반의 자중과 유체의 정수압을 포함한다. 점성경계 없이 mid-point integrated finite element의 강성만을 고려하여 정적 상태를 결정할 수 있다[27]. 그 후, El Centro 지반운동(Fig. 8)을 자유장 지반의 지표면 운동으로 가하고 지배방정식(13)을 풀어서 시스템의 지진 응답을 얻는다. 해를 얻기 위하여 일정 가속도법(constant acceleration method)에 기

반한 해법을 사용한다.

Fig. 9는 계산이 종료한 후의 등가 소성 변형율[28]의 분포를 보여준다. Fig. 10은 구조물의 회전과 Point A와 B에서의 평균 유효 응력의 시간 이력을 보여준다. 이전의 연구[9-11]와 유사한 비선형 지반-구조물 상호작용의 결과를 확인할 수 있다. 응력 집중으로 인하여 구조물 모서리 근방에서 소성

응답이 발생한다. 지반의 부등 소성 변형으로 인하여 비선형 해석이 종료된 후 구조물의 영구 회전이 존재하게 된다. 이러한 영구 회전은 선형 해석에서는 관찰할 수 없다. 영구 회전은 모서리와 가까운 좌우 영역에서 서로 다른 소성 응답을 초래하게 된다. 구조물의 시계방향 회전으로 인하여, Point A에서의 평균 유효 응력이 증가하고 Point B에서의 압축이 심화되며, 결과적으로 인장에 취약한 지반 재료의 특성으로 인해 Point A에서의 응력의 변화가 Point B에서의 변화보다 더 크게 발생한다. 비선형 해석으로부터 얻은 지진응답은 선형 해석의 결과와 다른 것을 관찰할 수 있다. Mid-point integrated finite element와 점성경계를 사용하여 다공성 지반에서의 비선형 지반-구조물 상호작용 해석을 성공적으로 수행할 수 있음을 이 예제에서 확인할 수 있다.

4. 결론

이 연구에서는 무한 다공성 매질의 시간영역 파전파 해석에 사용될 수 있는 정확하고 효율적이며 구현하기 쉬운 수치적 접근법을 제안하였다. 제안된 접근법은 다공성 탄성 매질의 mid-point integrated finite element와 점성경계에 근거하고 있다. 제안된 모형의 동적 거동은 질량, 감쇠, 강성 행렬에 의해서만 표현되므로, 변위 기반 유한요소 정식화를 사용하여 쉽게 구현할 수 있다. 또한 계수 행렬이 상수이므로, 시간 영역 해석을 위해 convolution 연산을 필요로 하지 않는다. 그러므로, 기존 수치해석 코드를 조금만 수정하여 제안된 모형을 쉽게 구현할 수 있다.

제안된 수치 모형은 다공성 지반에서의 파전파 해석에 적용하여 제안된 수치 접근법의 정확성과 안정성을 검증하였다. 또한, 다공성 지반에 놓인 케이스 반파계의 지진응답해석에 적용하여, 비선형 지반-구조물 상호작용 해석에의 활용 가능성을 검토하였다. 적용 예제로부터 변위기반 유한요소 정식화에 의해 쉽게 구현할 수 있는 제안된 수치 모형을 사용하면 다공성 지반에서의 비선형 파전파 문제와 지반-구조물 상호작용 문제에 대하여 정확하고 안정한 결과를 얻을 수 있음을 결론지을 수 있다.

/ 감사의 글 /

이 논문은 2016학년도 부경대학교의 지원을 받아 수행된 연구임(C-D-2017-0052).

/ REFERENCES /

1. Schanz M, Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Review*. 2009;62.
2. Kausel E, Forced vibrations of circular foundations on layered media, Research Report R74-11, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, c1974.
3. Beskos DE, Boundary element methods in dynamic analysis. *Applied Mechanics Review*. 1987;40:1-23.
4. Beskos DE, Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996). *Applied Mechanics Review*. 1998;50:149-197.

5. Astley RJ, Infinite elements for wave propagation: a review of current formulations and an assessment of accuracy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000;49:951-976.
6. Givoli D, High-order local non-reflecting boundary conditions: a review. *Wave Motion*. 2004;39:319-326.
7. Basu U, Chopra AK, Perfectly matched layers for time-harmonic elastodynamics of unbounded domains: theory and finite-element implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*. 2003;192:1337-1375.
8. Basu U, Chopra AK, Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004;59:1039-1074.
9. Lee JH, Kim JK, Kim JH, Nonlinear analysis of soil-structure interaction using perfectly matched discrete layers. *Computers and Structures*. 2014;142:28-44.
10. Lee JH, Kim JH, Kim JK, Perfectly Matched Discrete Layers for Three-Dimensional Nonlinear Soil-Structure Interaction Analyses. *Computers and Structures*. 2016;165:34-47.
11. Lee JH, Nonlinear Soil-Structure Interaction Analysis in Poroelastic Soil Using Mid-Point Integrated Finite Elements and Perfectly Matched Discrete Layers. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018; 108:160-176.
12. Meza-Fajardo KC, Papageorgiou AS, Study of the accuracy of the multiaxial perfectly matched layer for the elastic-wave equation. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2012;102:2458-2467.
13. Guddati MN, Tassoulas JL, Continued-fraction absorbing boundary conditions for the wave equation. *Journal of Computational Acoustics*. 2000;8:139-156.
14. Guddati MN, Lim K-W, Continued fraction absorbing boundary conditions for convex polygon domains. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 2006;66:949-977.
15. Savadatti S, Guddati MN, Absorbing boundary conditions for scalar waves in anisotropic media. Part 2: Time-dependent modeling. *Journal of Computational Physics*. 2010;229:6644-6662.
16. Duru K, Kreiss G, Numerical interaction of boundary waves with perfectly matched layers in two space dimensional elastic waveguides. *Wave Motion*. 2014;51:445-465.
17. Baffet D, Bielak J, Givoli D, Hagstrom T, Rabinovich D, Long-time stable high-order absorbing boundary conditions for elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2012; 241-244:20-37.
18. Astaneh AV, Guddati MN, Efficient computation of dispersion curves for multilayered waveguides and half-spaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016; 200: 27-46.
19. Biot MA, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of Acoustical Society of America*. 1956;28:163-178.
20. Zienkiewicz OC, Chan AHC, Pastor M, Schrefler BA, Shiomi T, *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*. Wiley. c1999.

21. Lewis RW, Schrefler BA, The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media, Wiley, c1998.
22. Lysmer J, Kuhlemeyer RL, Finite dynamic model for infinite media, ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, 1969;95: 859–877.
23. Guddati M, Savadatti S, Efficient and accurate domain–truncation techniques for seismic soil–structure interaction, Earthquakes and Structures, 2012; 3: 563–580.
24. Lee JH, Tassoulas JL, Root–Finding Absorbing Boundary Conditions for Problems of Wave Propagation in Infinite Media, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, c2018.
25. Rabinovich D, Givoli D, Bielak J, Hagstrom T, The Double Absorbing Boundary method for a class of anisotropic elastic media, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017; 315:190–221.
26. Westergaard HM, Water Pressures on Dams during Earthquakes, Transaction ASCE, 1933;98:418–433.
27. Savadatti S, Guddati MN, A finite element alternative to infinite elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010;199:2204–2223.
28. Chen W–F, Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 2: Plasticity and Modeling, Elsevier, c1994.