

가르기와 모으기에서의 0의 취급에 대한 고찰

이화영¹⁾

본 논문은 모으기와 가르기²⁾ 활동에서 0의 처리에 대한 시사점을 찾기 위해 모으기와 가르기 활동을 이론적으로 고찰하고 7개국의 교과서와 5차 교육과정부터 2015 개정 교육과정에 따른 우리나라 수학 교과용 도서를 분석하였다.

모으기는 덧셈과 유사한 정의와 성질을 지니지만, 가르기는 정의하기 어려우며 뺄셈과 유사한 성질을 지닌다고 보기 어렵다. 연산의 의미상으로는 모으기와 가르기는 '부분-부분-전체(part-part-whole)' 상황으로 볼 수 있으나 덧셈과 뺄셈 상황의 일부분에 해당한다고 볼 수 있다. 외국 교과서를 분석한 결과, 싱가포르와 말레이시아 교과서에서는 0을 이미 학습한 후 0을 모으기와 가르기 활동에서 포함하나, 그 밖의 국가들은 0을 모으기와 가르기 활동에서 포함하지 않는 것으로 확인되었다. 우리나라 교과서에서는 0을 포함하지 않도록 일관되게 제시해 왔으나, 교사용 지도서에서는 0의 처리 여부에 대해 일관되지 않음을 확인할 수 있었다. 이에 따라, 학생 수준을 고려하여 모으기와 가르기에서 0을 포함하지 않고 도입하고자 할 때에는 이에 적절한 상황 맥락 제시가 필요하며, 교사용 지도서에서도 보다 일관성 있는 제시가 필요함을 제안하였다.

주제어: 가르기, 모으기, 수의 합성과 분해, 첨가, 합병, 제거, 비교, 부분-부분-전체

I. 들어가며

본 논문은 2009 개정 교육과정에 따른 수학 교과서가 적용되던 2016년의 어느 날, 1학년 학부모로부터 문의 전화로부터 비롯되었다. 7을 가르기 하는 문제에서 반 아이들 중 몇 명이 7과 0으로 가르기 했는데, 담임선생님이 교사용 지도서(교육부, 2015, p.191)에 따라 이를 오답으로 채점한 것이다. 그러나, 이전 단원에서 0과 자연수를 이미 배웠기 때문에 아이가 7과 0으로 가르기 한 것은 자연스러운 것이 아닌가 하는 주장이었다. 문제 상황은 [그림 1]과 같다.

[그림 1]에 따르면, 양 7마리가 모두 한 물통에만 모일 수 있는 가능성도 존재하므로, 7과 0으로 나누었다고 해도 맥락상으로 오답이라고 보기 어렵다. 또한, 학습 순서상으로 보았을 때 학생들은 이미 0을 학습한 후이므로 7과 0으로 가를 수 있는 가능성이 충분히 존재한다. 그러므로 0으로 가르기는 옳지 않다(교육부, 2015, p.191)고 제한하는 것은 오히려

1) 한국과학창의재단, 연구원

2) 우리나라 교과서에서 '가르기와 모으기'로 표현되어 왔으나 2015 수학 교과용 도서(교과서, 교사용 지도서)에서는 덧셈과 뺄셈과 대응되도록 순서를 바꾸어 '모으기와 가르기'로 표현하였다. 본 논문은 이에 따른다.

려 학생들에게 개념적으로 혼동을 일으킬 가능성을 지니고 있다. 김수미(2006)는 ‘0처리 오류’ 즉, 0이 아닌 다른 수의 계산은 제대로 수행하면서 0이 포함된 경우의 계산에서는 적절하지 못한 방법으로 수행하는 경우가 많음을 분석하고 이의 교수학적 처방의 중요성을 언급하였으며, 장혜원·최민아·임미인(2014)도 0의 개념 및 0이 포함된 사칙계산은 학생들이 수학 학습에서 경험하는 어려운 내용 중 하나로 지적한 바 있다.



[그림 1] 2009 개정 교육과정에 따른 교과서의 ‘모으기와 가르기’
맥락(교육부, 2013, p. 76)

모으기(joining)와 가르기(separating)는 초등학교 수학에서 덧셈과 뺄셈의 기초 개념으로 합병(add to), 분리(take away)의 상황과 매우 밀접하게 지도되고 있다. 확인이 가능한 5차 교육과정에 따른 수학 교과서에서부터 최근의 2015 개정 교육과정에 따른 교과서에 이르기까지 모으기와 가르기는 덧셈과 뺄셈에 선행하는 기초적인 활동으로 제시되어 왔으나, 2007, 2009, 2015 개정 교육과정에 따른 교사용 지도서에서는 0의 취급에 대해 서로 일관되지 않은 설명을 제시한다.

우리나라에서 모으기와 가르기에 대한 수학적 의미를 다루거나 이 때의 0의 취급을 다룬 연구는 거의 찾기 힘들다. 자연수 덧셈과 뺄셈의 초기 지도에 대한 연구(박교식, 2014; 이승은, 최경아, 박교식, 2015; 김지원, 2016)에서도 덧셈과 뺄셈의 상황, 덧셈과 뺄셈의 지도 순서에 대해서는 다루지만, 모으기와 가르기에서 0을 포함해야 할 것인지에 대해서는 밝히고 있지 않으며, 0 처리 오류에 따라 교과용 도서를 분석한 연구(장혜원 외, 2014)에서도 덧셈과 뺄셈에서 등장하는 0의 양상을 자세히 분석하였지만 모으기와 가르기에서의 0의 취급에 대한 내용은 포함되지 않았다.

따라서, 본 논문에서는 이론적 고찰을 통해 모으기와 가르기의 덧셈과 뺄셈과의 관계를 밝힘으로써 모으기와 가르기에서 다룰 수 있는 범위에 대해 고찰하고, 여러 나라 수학 교과서를 살펴봄으로써 모으기와 가르기에서의 0의 처리 여부에 대해 시사점을 찾고자 한다.

II. 이론적 고찰

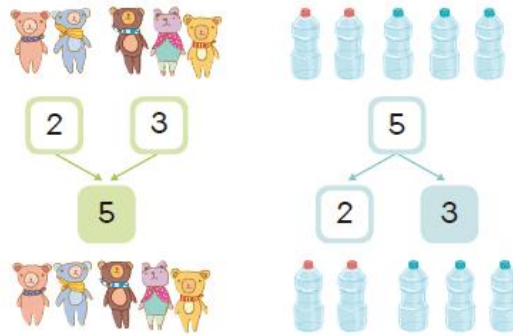
1. 모으기와 가르기 활동의 의미

모으기와 가르기 활동은 수의 합성(joining)과 분해(separating)를 1학년 학생들의 수준에 맞게 교과서에 제시한 용어로, 수 연산 개념 발달에서 가장 기초가 되는 활동이다. 첨가, 합병, 제거, 비교 등 구체적인 덧셈과 뺄셈을 도입하기 이전에 모으기와 가르기 활동을 함으로써 비형식적인 수의 합성과 분해를 경험할 수 있는 기회가 된다. NCTM(2011, p.7)에서도 Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence(NCTM, 2006)을 인용하여 '유치원에서의 활동은 집합을 합성하고 분해하는데 중점을 두어야 한다.'고 강조하였으며, Brownell 외 (2014)도 '집합은 더해지는(합성; joining) 항목들로 변환하거나 분리(분해; separating)되는 항목들로 변환될 수 있다.'를 어린 아이들이 알아야 하는 핵심 개념(big idea)으로 강조하였다. Carpenter & Moser(1984)도 다음과 같이 덧셈과 뺄셈의 기초 활동으로써 수의 합성과 분해 활동의 중요성을 언급한 바 있다.

덧셈과 뺄셈에 대한 이해는 어린 학생들이 상황을 직접적으로 모델링하거나 이어 세기(counting on) 또는 거꾸로 세기(counting back) 등의 세기 전략에 의해 모으고 가르는 문제를 해결할 때 생겨날 수 있다.

우리나라 교과서에서도 모으기와 가르기 활동이 5차 교육과정에 따른 교과서에서부터 2015 개정 교육과정에 따른 교과서에 이르기까지 덧셈과 뺄셈에 앞선 기초 활동으로 제시되어 왔다. 2009 개정 교육과정에 따른 교사용 지도서(교육부, 2013, p.191)에서도 '가르기와 모으기는 덧셈과 뺄셈의 기초가 된다'고 강조했으며, 2015 개정 교육과정에 따른 교사용 지도서(교육부, 2017b, p.177)에서도 아래와 같이 덧셈과 뺄셈에 있어서 수의 합성과 분해 활동의 중요성을 강조하였다.

학생들은 수의 개념에 대한 이해가 발달함에 따라 수가 다양한 묶음으로 합성되고 분해될 수 있다는 것을 인식하기 시작한다. 수의 합성과 분해는 덧셈과 뺄셈을 위한 중요한 기초가 된다. 예를 들면 학생들이 7을 1과 6, 2와 5, 3과 4 등으로 분해되거나 합성될 수 있다는 것을 알고 있다면, 일일이 세지 않고도 3과 4를 더하면 7이 되고, 7에서 4를 빼면 3이 됨을 쉽게 알 수 있다. (하략)



[그림 2] 수의 합성과 분해(교육부, 2017b, p.177)

이와 같이, 모으기와 가르기 활동은 덧셈과 뺄셈 이전에 수의 합성과 분해를 하는 활동을 통해 덧셈과 뺄셈의 개념을 더 잘 이해하도록 하는데 있어서 매우 중요하게 여겨져 왔음을 알 수 있다.

수의 합성은 부분과 부분의 양을 전체의 양으로 인식하는 활동이며, 수의 분해는 전체의 양을 부분과 부분의 양으로 인식할 수 있도록 하는 활동이다. 수의 합성과 분해 활동에서 자주 이용되는 도식은 [그림 2]와 같은 형태와 ‘부분-부분-전체(part-part-whole)’ 모델이 있는데, 미국 Everyday Mathematics 교과서에서 [그림 3]와 같이 제시하고 있다. [그림 2]의 도식은 모으기 상황과 가르기 상황이 각기 서로 뒤집어진 형태로 사용되지만, [그림 3]과 같은 부분-부분-전체 모델은 덧셈이든 뺄셈이든 하나의 모델로 설명이 가능하며, 덧셈과 뺄셈의 상황인 첨가, 합병, 구산, 등화, 구차 등 여러 가지 상황을 설명할 수 있어 덧셈과 뺄셈의 지도에서도 광범위하게 이용되는 것을 관찰할 수 있다.



[그림 3] 부분-부분-전체 모델(McGraw-Hill, 2012, pp.253)

2. ‘모으기와 가르기’와 ‘덧셈과 뺄셈’의 관계

모으기와 가르기를 덧셈과 뺄셈의 기초적인 활동으로서 도입하고 있기 때문에 양쪽의 수학적 맥락과 대수적 성질에 대해 어떤 관계가 있는지 살펴해보도록 한다.

먼저, 덧셈과 뺄셈-모으기와 가르기의 대수적 성질을 비교해 본다. Bassarear(1997)에 따르면, 덧셈을 아래와 같이 정의할 수 있다.

A, B 가 서로소인 집합일 때, 각각 $a = n(A)$, $b = n(B)$ 라면, $a + b = n(A \cup B)$ 이다.

덧셈의 성질은 다음과 같다.

- 항등원 0을 가진다. ($a+0=0+a=a$)
- 교환법칙이 성립한다. ($a+b=b+a$)
- 결합법칙이 성립한다. ($(a+b)+c=a+(b+c)$)
- 연산에 대해 ‘닫혀있다’.

이러한 덧셈의 성질이 모으기 연산에서도 성립하는지 살펴보면, 첫째, 모으기에서 어떤 수 a 와 0을 모으면 그 결과는 a 이고 0과 어떤 수 a 를 모으면 그 결과는 a 이므로 0은 모으기 연산의 항등원이라고 할 수 있다. 둘째, a 와 b 를 모으는 것은 b 와 a 를 모으는 것과 같으므로 모으기에서 교환법칙이 성립한다. 셋째, a 와 b 를 모은 다음, c 를 모으는 것은 a 와 b 와 c 의 모음을 모으는 것과 같으므로 결합법칙이 성립한다. 마지막으로 특정한 두 범자연수를 모은 결과는 특정한 하나의 범자연수이며, 이는 항상 범자연수 집합에서 성립하므로, 모으기에 대해 ‘닫혀있다’고 할 수 있다. 즉, 모으기는 덧셈과 마찬가지로의 성질을 가진다.

뺄셈은 아래와 같이 정의된다.

a 와 b 를 각각 임의의 두 범자연수라 하자. 만일, A, B 가 각각 $a=n(A), b=n(B)$ 이고, $B \subseteq A$ 인 집합이라면 $a-b=n(A-B)$ 이다.

뺄셈은 잘 알려져 있듯이 $a-0=a$ 이지만 역으로 $0-a \neq a$ 이므로 항등원이 존재하지 않으며 교환법칙과 결합법칙 역시 성립하지 않는다. 또한, 연산에 대해 닫혀있지 않다. 가르기는 뺄셈과는 다르게 위와 같은 연산을 정의하기 어렵기 때문에 범자연수 영역에서 항등원 0의 존재 여부나 교환법칙과 결합법칙을 생각하기 어렵다.

즉, 덧셈과 뺄셈-모으기와 가르기의 대수적 성질은 같다고 할 수 없다.

다음으로, 초등학교 수학에서 모으기와 가르기, 덧셈과 뺄셈을 다룰 때의 수학적 맥락을 중심으로 양쪽의 의미를 살펴보도록 한다. 모으기와 가르기는 위 1절에서 언급하였듯이, 말 그대로 두 양을 합하고(joining) 분리하는(separating) 조작을 의미하며, ‘부분-부분-전체’모델로 쉽게 설명된다. 덧셈과 뺄셈의 의미는 일반적으로 덧셈과 뺄셈이 이루어지는 상황으로부터 시작된다. Carpenter & Moser(1982)는 모으기-가르기와 덧셈-뺄셈 상황을 구분하지 않고 합성, 분해, 부분-부분-전체, 비교 상황으로 제시하였고, Reys 외(1988), 교육과학기술부(2013), 교육부(2017b)는, 덧셈이 이루어지는 상황들로 첨가, 합병 상황, 뺄셈이 이루어지는 상황들로 구산, 등화, 구차(비교)를 제시하였다. Beckmann(2008)은 덧셈과 뺄셈의 또 다른 상황으로 부분-부분-전체 상황을 제시하기도 하였다. Carpenter & Moser(1982)는 분해와 합성은 조작과 관련되며 부분-부분-전체와 비교는 조작에 관련되기보다는 양들 사이의 관계에 관련된다고 하였다. 덧셈과 뺄셈에서의 부분-부분-전체 상황(Beckmann, 2008)은 예를 들어 다음과 같다.

<표 1> 덧셈과 뺄셈에서의 ‘부분-부분-전체’ 맥락

연산 구분	제시 맥락	부분-부분-전체 모델링	
덧셈	레이첼은 몇 장의 CD를 가지고 있다. 그 중 몇 장은 힙합 음악 CD이고 나머지는 랩 음악 CD이다. 레이첼은 12장의 힙합 CD와 9장의 랩 CD를 가지고 있다. 레이첼은 모두 몇 장을 가지고 있는가?	전체 ?	
		부분 12	부분 9
뺄셈	레이첼은 12장의 CD를 가지고 있다. 레이첼은 CD 몇 장을 더 얻어 지금은 21장을 가지고 있다. 레이첼이 얻은 CD는 몇 장인가?	전체 21	
		부분 12	부분 ?

위와 같이 덧셈, 뺄셈에 관련된 부분-부분-전체 상황은 모으기·가르기와 유사하게 ‘부분-부분-전체’ 모델로 도식화할 수 있다. 반대로, ‘부분-부분-전체’로 모델링되는 모으기와 가르기는 덧셈, 뺄셈에서 제시하는 정교한 맥락을 가지고 있지는 않다. 다시 말해, 모으기와 가르기의 상황은 덧셈과 뺄셈에서의 필요조건은 되지만, 역으로 덧셈과 뺄셈의 상황들은 모으기와 가르기에서의 충분조건은 되지 않는다.

한편, 교육부(2015)에서는 다음과 같이 모으기와 가르기가 각각 덧셈과 뺄셈과 완전히 동일한 것은 아니므로 가르기를 뺄셈, 모으기를 덧셈으로 고정시켜 인식시키지 않게 유의하도록 하고 있다.

..... 가르기 활동을 뺄셈, 모으기 활동을 덧셈으로 고정시켜 인식시킬 필요는 없다. 가르기 활동은 얼핏 뺄셈처럼 보이지만 감수와 피감수의 개념이 정해지지 않았으므로 뺄셈으로 볼 수 없다. 모으기 활동도 가수와 피가수의 개념이 정해진 것이 아니므로 덧셈으로 볼 수 없다. (하략) (교육부, 2015, p.191)

결국 모으기와 가르기는 덧셈과 뺄셈과 대수적인 성질이나 수학적 맥락에서 일부분에 해당된다는 것을 알 수 있다. 가르기는 덧셈과 대수적 성질이 유사하다고 할 수 있으나 가르기는 뺄셈과 대수적 성질이 유사하다고 말할 수 없으며, 수학적 맥락에 있어서도 모으기와 가르기는 덧셈과 뺄셈의 여러 맥락 중 일부에 해당한다고 할 수 있다. 예컨대 가르기는 단지 전체의 양에 대해 부분과 부분의 양으로 분리하는 것 뿐, 제거되었다거나 비교하는 상황과는 맥락상 다르며, 모으기도 덧셈의 합병 상황과는 유사하나, 첨가 상황으로는 설명할 수 없다.

이를 통하여, 모으기와 가르기는 덧셈과 뺄셈의 지도에 앞서 가장 원형적인 맥락의 수의 합성과 분해를 경험하는 기초 활동으로서 적합하나, 덧셈과 뺄셈과 동일시하여 취급할 수는 없다는 판단을 할 수 있다. 따라서 모으기와 가르기에서 덧셈과 뺄셈에서처럼 세부적이고 추상적인 내용을 다루는 것에 대해 신중해야 할 것이며, 0을 취급하는 것도 이와 같은 견지에서 신중히 접근되어야 한다고 본다.

III. 교과서 관련 내용 분석

교과서에서 0이 포함된 모으기와 가르기에 대해 다루는 경향을 알아보기 위해 여러 나라 교과서에서 관련 내용을 분석하였다. 중국, 일본, 말레이시아, 싱가포르, 홍콩, 미국, 독일 7개국이 사용하는 초등학교 1학년 교과서 7종 및 우리나라 교과서를 분석하였다. 중국 교과서는 人民教育出版社(2012)에서 출판된 数学(一年级上册), 일본 교과서는 學校圖書(平成27年)에서 출판된 さんすう1, 말레이시아 교과서는 Marshall Cavendish Education(2016)에서 출판된 Discover Maths 1A, 싱가포르 교과서는 Marshall Cavendish Education(2015)에서 출판된 Shaping Maths 1A이다. 홍콩 교과서는 Pan Lloyds Publisher Ltd(2010)에서 출판된 Effective Steps 1A, 미국 교과서는 Mc Graw-Hill Wright Group(2007)에서 출판된 Everyday Mathematics Student math Journal Vol. 1, 독일 교과서는 Cornelsen(2012)에서 출판된 JO-JO Mathematik 1이다. 우리나라 교과서는 5차 교육과정에서 따른 수학 교과서(이하 5차 교과서, 6차 교과서, 7차 교과서 등)에서부터 2015 개정 교육과정에 따른 수학 교과용 도서(교과서, 교사용 지도서)(이하 2015 교과서, 2007 교과서, 2009 교과서 등)를 살펴보았다. 분석 내용은 모으기와 가르기의 학습 내용 포함 여부, 이 때 0을 포함하는가의 여부, 그리고 모으기와 가르기를 학습하기 이전에 0을 배우는가의 여부이다. 또한, 모으기와 가르기의 도입 맥락을 비교하였다.

1. 외국 수학 교과서 분석 결과

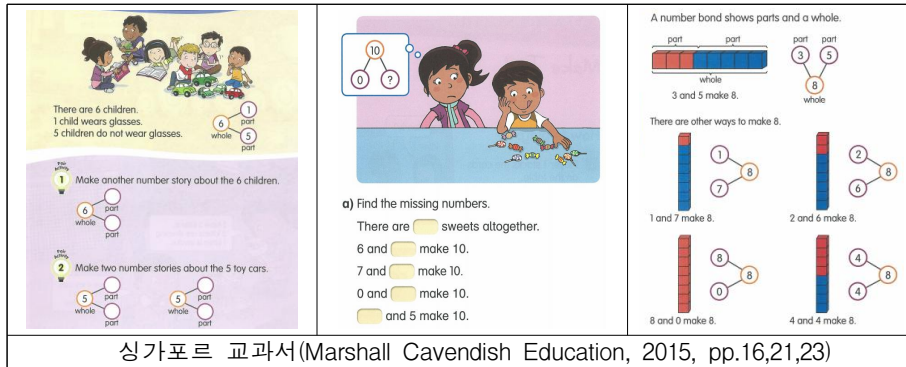
먼저, 중국, 일본, 말레이시아, 싱가포르, 홍콩, 미국, 독일의 총 7개국이 사용하는 교과서에서 모으기와 가르기 학습 내용 포함 여부, 이 때 0을 포함하는가의 여부, 그리고 모으기와 가르기를 학습하기 이전에 0을 배우는가의 여부를 분석하여 정리한 표는 아래와 같다.

<표 2>에 의하면, 조사한 7개국의 나라 모두 모으기와 가르기 활동을 교과서에 포함하고 있었다. 모으기와 가르기에서 0을 포함하는 나라는 말레이시아, 싱가포르인데, 이들 나라는 모으기와 가르기를 배우기 이전에 0을 배운다. 일본, 미국, 독일은 모으기와 가르기를 배우기 이전에 0을 배우지만 모으기와 가르기에서 0을 포함하지 않는 것을 알 수 있다. 중국과 홍콩은 모으기와 가르기를 배우기 전에 0을 배우지 않고, 모으기와 가르기에서도 0을 포함하지 않는다. 홍콩 교과서에서는 덧셈의 비형식적 활동으로 모으기는 제시하지만 가르기는 제시하지 않고, 대신 지우기(제거) 활동을 제시한다.

<표 2> 모으기와 가르기, 이 때 0의 포함 여부

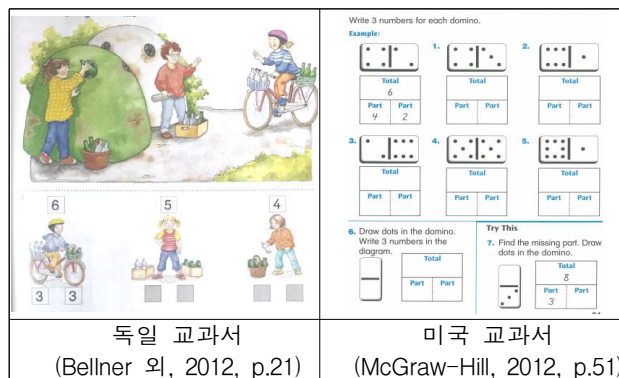
국가명	0의 선수 학습 여부	포함 여부		
		모으기	가르기	0포함
중국	—	○	○	—
일본	○	○	○	—
말레이시아	○	○	○	○
싱가포르	○	○	○	○
홍콩	—	○	—	—
미국	○	○	○	—
독일	○	○	○	—

다음으로, 모으기와 가르기가 도입되는 맥락을 살펴보았다.



[그림 4] 0을 포함하는 모으기로 정교화되는 교과서의 예

싱가포르 교과서는 다른 나라와는 달리 10쪽에 걸친 한 단원 분량으로 모으기와 가르기를 자세하게 다루는데, 0을 포함하지 않는 맥락으로 시작하여 0을 포함하는 맥락으로 정교화되는 특징이 있다([그림 4 참조]). 또한, ‘부분-부분-전체’모형을 따르고 있는 것을 알 수 있다.



[그림 5] 0을 포함하지 않는 모으기와 가르기 도입 맥락(1)

독일 교과서에서는 모으기와 다루기를 1쪽 정도로 간략히 다루며, [그림 5]와 같이 모으기와 가르기를 색깔에 따른 빈 병 분리수거 맥락으로 제시한다. 구체적인 그림을 제시하여 0의 포함 여부가 명확함을 알 수 있다. 미국 교과서에서는 0이 포함되지 않은 숫자 도미노를 이용하여 모으기와 가르기 상황을 제시하며 ‘부분-부분-전체’모델을 제시하였다. 특히 미국 교과서에는 10 이하의 수뿐 만 아니라 두 자리 수에 대해서도 ‘부분-부분-전체’모델을 이용하여 분해와 합성 활동을 제시하는 점이 특이할 만하다.

<p>일본 교과서 (松校圖書, 平成27年, p.p.21, 24)</p>	<p>중국 교과서 (人民教育出版社, 2016, p.22)</p>

[그림 6] 0을 포함하지 않는 모으기와 가르기 도입 맥락(2)

일본 교과서에서는 [그림 6]과 같이 내부가 두 부분으로 분리된 상자에 공을 떨어뜨려보는 일종의 교수 실험의 맥락에서 모으기와 가르기를 제시한다. 공을 상자 속으로 5개, 6개 떨어뜨리는 실험 결과를 다양하게 제시하고 있지만, 한쪽에는 공이 하나도 없는 경우, 예를 들어, (5, 0), (0, 5) 또는 (6, 0), (0, 6)는 배제되어 있어 0의 취급 여부에 대한 불명확함을 내재한다. 중국 교과서에서는 옥수수수를 두 개의 접시에 나누어 담는 맥락을 통해 모으기와 가르기를 도입하고 있는데, 한 쪽 접시에는 옥수수수를 담지 않는 경우는 배제되어 이 역시 0의 취급 여부에 대한 논란의 소지는 있어 보인다.

위의 내용을 종합하면, 0을 선수학습으로 다루는 5개의 국가 중 모으기와 가르기에서 0을 포함하는 경우는 말레이시아와 싱가포르이며, 일본, 미국, 독일은 선수학습으로 0을 다루에도 불구하고 모으기와 가르기에서 0을 포함하지 않는다. 또한, 중국, 홍콩 교과서는 선수학습으로 0을 다루지 않으며 모으기와 가르기에서 0을 포함하지 않는다. 다루는 분량에 있어 싱가포르와 일본은 가르기와 모으기를 한 단원의 분량으로 자세히 다루며 그 외의 국가들은 1~2쪽 정도로 간단히 다룬다. 싱가포르는 0을 포함하지 않는 맥락에서 출발해서 0을 다루는 맥락으로 정교화하여 제시하며, 독일과 미국은 0이 필요 없는 맥락을 제시하는 반면 일본과 중국은 0이 포함되어도 관계없는 상황에서 0이 배제된 경우만을 제시하고 있다는 것을 알 수 있다.

2. 우리나라 수학 교과용 도서 분석 결과

먼저, 우리나라 수학 교과서에서 모으기와 가르기 활동을 제시할 때 0의 포함 여부를 교과서 자료 확인이 가능한 5차 교과서부터 살펴보았다. 그 결과는 아래 표와 같다.

<표 3> 우리나라 수학 교과서 모으기와 가르기 활동에서 0의 포함 여부

개정별	0의 선수 학습 여부	포함 여부		
		모으기	가르기	0포함
5차	○	○	○	-
6차	○	○	○	-
7차	○	○	○	-
2007 개정	○	○	○	-
2009 개정	○	○	○	-
2015 개정	○	○	○	-

<표 3>과 [그림 7] 에서 알 수 있듯이, 우리나라 수학 교과서에서는 모으기와 가르기 이전에 0을 배우지만 대부분 모으기와 가르기에서 0을 취급하지 않았다. 이렇게 모으기와 가르기에서 0을 다루지 않는 것은 2009 교과서와 2015 교과서에서도 마찬가지이다.

그런데, 교사용 지도서에서는 모으기와 가르기에서 0을 다루는 것에 대해 일관되지 않게 변해왔음을 확인할 수 있다. 아래 <표 4>에서, 2007 1학년 1학기 수학 교사용 지도서에는 모으기와 가르기에서 0을 포함하여 다루지 않도록 하되 학생의 수준에 따라 다를 수 있음을 기술하였다가, 2009 교사용 지도서에서는 가르기에서 0을 포함하는 것은 수학적으로 성립하지 않기 때문에 다루지 않도록 명시하며 모으기와 가르기 이후 덧셈과 뺄셈에서 0의 덧셈과 뺄셈을 배우고 난 후에 0을 다루도록 하였음을 알 수 있다. 2015 교사용 지도서(교육부, 2017b)에서는 이를 다시 수업에서 0을 일부러 다루는 것은 바람직하지 않으나 학생이 0을 포함하여 가르기 한 경우에는 인정해 주도록 명시하였다.



[그림 7] 5차~2007 수학 교과서에서의 모으기와 가르기 제시

<표 4> 모으기와 가르기 활동에서 0의 포함 여부에 대한 교사용 지도서 변천

구분	내 용
2007 교사용 지도서	(중략) ... 예를 들어 2는 0과 2로 가릴 수 있지만 여기서는 0으로 가르는 것을 다루지 않는다. 그러나 학생들의 수준에 따라 이것을 다룰 수 있다.(교육과학기술부, 2012, p.175)
2009 교사용 지도서	(중략) ... 초기 가르기와 모으기 활동에서 주의해야 할 점이 있다. 예를 들어 가르기 활동에서 2를 0과 2로 가르는 활동 또는 0과 2를 2로 모으는 활동은 불필요할 뿐만 아니라 개념의 혼란을 가져올 수 있다. (중략) ... 5를 0과 5를 갈랐다고 주장하는 것은 5를 가르지 않았다는 구체적 사실에 위배된다. 그러나 덧셈과 뺄셈의 기초 개념을 배우고 난 뒤 덧셈 형식에 따라 0을 더하는 방법과 뺄셈 형식에 따라 0을 빼는 활동을 배우게 되면 추상화된 수준에서 계산이 가능하다(교육부, 2015)
2015 교사용 지도서	5를 0과 5로 가르기 하는 것은 부자연스럽고 추상적인 사고를 요구하는 것이므로 이 단계에서는 다루지 않는 것이 바람직하다. 다만 학생이 답으로 5와 0의 가르기를 찾은 경우 정답으로 인정한다(교육부, 2017b, p.186).

위를 통해 보았을 때, 우리나라 교과서에서는 일관되게 모으기와 가르기에서 0을 다루지 않도록 제시하였으나, 학생이 0을 포함한 가르기를 한 경우에는 이를 인정하는가에 대해서는 2007, 2009, 2015 교사용 지도서에서 일관되지 않게 변해왔음을 알 수 있다.



[그림 8] 2009 및 2015 교과서에서의 모으기와 가르기 제시

다음으로, 모으기와 가르기의 도입 맥락에 대해서 2007, 2009, 2015 교과서를 중심으로 살펴보았다. [그림 8]과 같이, 2007 교과서에서는 들판의 소와 염소를 특별한 상황 없이 '두 수로 갈라 보시오'라는 지시문과 가르기 해 볼 수 있는 두 개의 빈 칸을 제시하였다. 2009 교과서에서는 '양 7마리가 물을 사이좋게 나누어 마시고 있어요. 양이 몇 마리씩 모여 물을 마실 수 있는지 알아보시다'로 이야기 맥락을 제시하면서 7을 다양하게 가

르기 해 볼 수 있는 두 개의 빈 칸을 여러 번 제시하였다. 2015 교과서에서는 나들이를 가기 위해 두 개의 배낭에 5개의 물병을 나누어 담은 상황을 제시하고 5를 가르기 해 볼 수 있는 두 개의 빈 칸을 제시하였다. 이 세 교과서는 공통적으로 한쪽은 0이 되도록 두 수로 가르더라도 어색하지 않은 맥락을 제시하고 있으나, 2009 교사용 지도서에서는 한쪽이 0이 되는 가르기를 할 경우 성립하지 않음을 강하게 명시하고 있는 점이 2007, 2015 교사용 지도서와 다르다.

마지막으로, 우리나라 교과서에서 모으기와 가르기는 2007 교과서의 경우 8쪽, 2009 교과서는 관련 놀이 차시와 '이야기 마당'까지 포함하여 총 8쪽, 2015 교과서는 4쪽을 할애하고 있음을 확인할 수 있다.

정리하면, 우리나라 수학 교과서에서는 전통적으로 모으기와 가르기에서 0을 다루지 않았으나 교사용 지도서에서는 0을 포함하여 가르기 하는 것에 대해 정당 인정 여부가 변해왔다. 모으기와 가르기의 도입 맥락은 0을 포함하여 가르기 하는 것이 어색하지 않은 맥락으로 도입되어 왔음을 확인할 수 있다.

이와 같이 보았을 때, 학생의 수준을 고려하여 모으기와 가르기에서 0을 포함하여 다루지 않는 것이 우리나라 교과서의 일관된 기초라는 것을 판단할 수 있다. 교육 현장에서의 혼란을 줄이기 위해 일관성을 추구하고자 한다면, 학생이 0을 포함하여 가르기 하지 않도록 기왕이면 그에 들어맞는 적절한 상황 맥락의 개선이 필요할 것이며, 교사용 지도서에서 0을 포함한 가르기를 인정할 것인가의 여부에 대해 지속적인 일관된 제시가 필요해 보인다.

IV. 결론 및 제언

본 논문에서는 모으기와 가르기를 할 때 0의 취급에 대한 시사점을 찾기 위해 모으기와 가르기 활동에 대해 이론적으로 고찰하고 7개국의 교과서와 5차 교육과정부터 2015 개정 교육과정까지의 우리나라 수학 교과서를 분석하였다.

II장에서 모으기와 가르기의 의미에 대해 이론적으로 고찰하였다. 모으기와 덧셈은 대수적으로 유사한 성질을 지니지만 모으기는 덧셈이 이루어지는 여러 가지 상황 중 일부분에 해당하며, 가르기는 뺄셈과 대수적으로 성질이 유사하다고 말할 수 없으며 다루는 상황에 있어서도 가르기가 뺄셈 상황 중 일부분에 해당하므로 모으기와 가르기를 덧셈과 뺄셈처럼 추상적으로 다루는 것에는 신중한 접근이 필요할 것이다.

III장에서는 여러 나라의 교과서에서 모으기와 가르기 활동에서 0을 포함하는지의 여부와 모으기와 가르기를 다루는 맥락을 조사하였다. 말레이시아, 싱가포르는 모으기와 가르기 활동에서 0을 다루며, 중국, 일본, 홍콩, 미국, 독일은 이미 0을 학습했음에도 모으기와 가르기에서 0을 다루지 않는 것을 확인할 수 있었다. 우리나라는 5차 교육과정에 따른 교과서부터 2015 개정 교육과정에 따른 교과서와 교사용 지도서까지 살펴본 결과, 대부분 0을 다루지 않고 있으나, 2007과 2015 개정 교육과정에 따른 교사용 지도서에서는 학생 수준에 따라 0을 다룰 수도 있음을 명시하기도 하였다.

위와 같이 고찰한 결과 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 본격적인 연산에 앞서 덧셈과 뺄셈에 대한 학생의 이해를 돕고자 자연수 범위에서만 모으기와 가르기를 다루고자 한다면, 자연수 범위에서만 가르거나 모으는 활동이 가

능한 교수 맥락을 신중히 도입해야 할 것이다.

둘째, 모으기와 가르기에서 0을 취급하고자 한다면 싱가포르 교과서에서처럼 점진적으로 발전하여 0을 다루는 학습 계열을 구성해 볼 수 있다. 이 경우, 이후의 자연수와 0의 합, 자연수와 0의 차를 다루게 될 때 모으기·가르기와 일관성을 보다 확보할 수 있을 것이다.

셋째, 자연수와 0을 배운 이후에 모으기와 가르기를 학습한다면 0을 포함하여 모으기와 가르기를 하는 것이 자연스러울 수 있으므로 교과서에서는 모으기와 가르기 활동에서 0을 일부러 취급하지 않더라도 학생이 0을 포함하여 가르기 한 경우에는 이를 고려하여 정답의 범위에 포함시켜 다루어야 할 것이다.

넷째, 교과서의 모으기와 가르기 활동에서 0을 포함하느냐 제외하느냐 하는 문제는 교육과정이 바뀌더라도 장기적으로 일관성을 가질 필요가 있다. 2007 교과서로 배운 학생, 2009 교과서로 배운 학생, 2015 교과서로 배운 학생이 동일한 맥락에서 어떤 자연수를 두 수로 가르는 문제의 정답이 각각 다르게 취급된다면 그것이야말로 수학 교과서의 큰 문제가 아니라 할 수 없을 것이다. 교사용 지도서에서는 앞으로도 이에 대해 일관성있는 기술이 필요하다.

우리나라에서는 교과서가 교육과정을 구현하는 가장 핵심적인 역할을 하는 교수·학습 자료로 실질적으로 학교 교육의 실행 근간(안병곤, 2015)이며, 교육과정에서 일일이 제시하기 어려운 구체적인 교수-학습 내용에 대한 판단 기준이 되므로 그 영향력과 파급력이 절대적이다. 따라서 교과서의 제시 내용이 애매함을 내재하는 경우 수학을 가르치는 교사들에게나, 학습하는 학생들에게 수학은 교과서에 제시된 대로만 답해야 한다는 오해를 불러일으킬 수 있으며 이는 나아가 교육현장에서의 '분쟁'을 야기할 수 있다. 교과서란 학생들의 수학 학습을 돕기 위해 마련한 것인데 교과서로 인해 자유로운 학생들의 사고를 제한하지 않는지 경계해야 할 것이다. Reys 외(1988)는 '아동이 알고 있는 것을 조직하고 간극을 매우도록 하는 학습을 구성하며, 학습 과정 중에 의미를 개발하도록 돕는 것은 교사의 과제'라고 하였다. 교과서 내용 구성 시, 학생들이 앞서 배운 내용을 자세히 살피고 이를 연결하여 그 다음의 내용을 조직하는 치밀함이 중요하다. 교육 현장에서도 교과서와 교사용 지도서에만 의존하여 학생들의 사고에 대한 정오를 판단할 것이 아니라, 학생들의 사고가 해당 학습 내용에서의 핵심 개념을 포함하고 있는지를 판단의 근거로 삼을 수 있도록 핵심 개념에 대한 숙고가 무엇보다 중요해 보인다.

참 고 문 헌

- 교육부(1989). 산수 1-1. 대한교과서(주).
- 교육부(1995). 수학 1-1. 대한교과서(주).
- 교육인적자원부(2006). 수학 1-가. (주) 천재교육.
- 교육과학기술부(2012). 초등학교 교사용 지도서 수학 1-1. 두산동아(주).
- 교육과학기술부(2013). 초등학교 수학 1-1 교사용 지도서, (주) 천재교육.
- 교육부(2015). 초등학교 수학 1-1 교사용 지도서, (주) 천재교육.
- 교육부(2017a). 초등학교 수학 1-1, (주) 천재교육.
- 교육부(2017b). 초등학교 수학 1-1 교사용 지도서, (주) 천재교육.
- 김수미(2016). 0처리 오류의 기원 및 0의 지도. *학교수학*, 8(4), 397-415, 대한수학교육학회.
- 김지원(2016). 초등학교 수학 교과서에 제시된 자연수 덧셈과 뺄셈의 초기 지도 순서에 관한 소고. *학교수학*, 18(1), 대한수학교육학회.
- 박교식(2014). 우리나라와 일본의 초등학교 1학년 수학 교과서 비교 연구: <수와 연산> 영역을 중심으로. *한국학교수학회논문집*, 17(2). 한국학교수학회.
- 장혜원, 최민아, 임미인 (2014). 0처리 오류에 기초한 교과용 도서 분석 및 활동 구성. *한국초등수학교육학회지* 18(2), 한국초등수학교육학회.
- 안병곤(2015). 현행 초등 수학 교과서에 대한 개선점과 개선 방향. *한국초등수학교육학회지*, 19(3), 289-304, 한국수학교육학회.
- 이승은, 최경아, 박교식 (2015). 우리나라 초등학교 1학년 수학 교과서 <수와 연산> 영역의 지도 내용 검토. *한국학교수학회논문집*, 18(1), 한국학교수학회.
- McGraw-Hill(2012). *Everyday Mathematics, The University of Chicago School Mathematics Project Student Math Journal Volume 1, Grade 1*, McGraw-Hill.
- Bassarear, T.(1997). *Mathematics for Elementary School Teachers*. Houghton Mifflin Company. Boston & New York.
- Beckmann, S.(2008). *Mathematics for Elementary Teachers*. Pearson Education, United States of America.
- Bellner, I., Peters, Hl., Thöne, G., Fischer, R., Friedl, M., Goigner, H., Scholler, L., Ueberschaar, H., Weber., H.(2012). *JO-JO Mathematik 1 Grundschule Bayern*, Crnelsen Verlag, Berlin.
- Brownell, J. O., Chen, J. Q., Ginet, L.(2014). *Big Ideas of early mathematics: what teachers of young children need to know*. The Early Math Collaborative Erikson Institute. Pearson.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M.(1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Cartenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg(Eds.).

- Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M.(1984). The Acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for research in mathematics education*, 15:179-202.
- Marshall Cavendish Education(2015). *Shaping Maths Coursebook 1A*. Singapore.
- Marshall Cavendish Education(2016). *Discover Maths 1A Textbook*. Malaysia.
- NCTM(2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*. Reston, Va.: NCTM
- NCTM(2011). *Developing Essential Understanding of Addition & Subtraction Pre-K-Grade 2*. Reston, Va.: NCTM.
- Pan Lloyds Publisher Ltd(2010). *Effective Steps 1A*, Hong Kong
- Reys, R. El, Suydam, M. N., Lindquist, M. M., Smith, N. L.(1988). *Helping children learn mathematics*. (5th ed.) Boston: Allyn and Bacon. 강문봉, 강 완, 김남희, 김수환, 나귀수, 박경미, 박영배, 백석윤, 송상현, 유현주, 이경화, 이중권, 임문규, 임재훈, 장혜원, 정동권, 정영옥, 정은실, 허혜자 역.(1999). **초등 수학 학습지도의 이해**. 양서원. 서울.
- 人民教育出版社(2012). 义务教育教科书 数学 (一年级 上册). 人民教育出版社. ISBN 978-7-107-24487-7.
- 一學 信, 岡田 禎雄(平成27年). *さんすう1ねん*. 松校圖書. ISBN978-4-7625-5461-2.

<Abstract>

A Study on Separating and Joining Including Zero

Lee, Hwayoung³⁾

In this paper, I theoretically considered joining and separating activities and revisited the textbooks from 7 countries and Korean mathematics textbooks from 5th revised curriculum to 2015 revised curriculum to find implication for the treatment of 0 in the joining and separating activities.

The 'joining' has definition and properties similar to addition, but the 'separating' is difficult to define and is not considered to have properties similar to subtraction. In the sense of computation, joining and separating can be seen as 'part-part-to-whole' situations, but are just part of the addition and subtraction situations. The analysis of textbooks from 7 countries showed that Singapore and Malaysia textbooks already studied zero and then included it in joining and separating activities, but other countries did not include it as joining and separating activities. The textbooks of South Korea have consistently suggested not to include zero, but teacher's guide has shown that there is a little consistency in the treatment of zero.

As a conclusion, I suggested that it was necessary to propose a proper context of the situation in order to introduce joining and separating without including 0 in terms of student level and to propose that a more consistent presentation of zero handling in the teaching in the teacher's guide.

Key words: separating, joining, adding, removing, comparing, part-part-whole

논문접수: 2018. 04. 01

논문심사: 2018. 05. 07

게재확정: 2018. 05. 18

3) hylee@kofac.re.kr