

국내 초기 대수 교육 연구의 동향과 과제 : 초등 수학을 중심으로¹⁾

한채린²⁾ · 권오남³⁾

본 연구는 국내에서 이루어진 초등 수학을 중심으로 초기 대수 교육 관련 연구의 동향을 파악하고 향후 과제를 도출하기 위하여 국내 주요 수학교육 학술지 6곳에 게재된 초기 대수 교육 관련 연구논문들을 분석하였다. 2000년부터 2017년까지 18년간 6개 학술지에 게재된 관련 논문 89편을 연구시기 및 학술지별, 연구 주제별, 연구 대상별로 범주화하고 경향을 확인하였다. 그 결과, 국내 초기 대수 교육 연구는 2000년부터 전반적으로 증가하였으며 2000년대 후반부터는 특정 연구자 그룹의 논문 편수가 큰 비중을 차지하고 있었다. 초기 대수 교육은 초등 수학 교육 분야임에도 불구하고, 초등 수학 교육 전문 학술지보다는 이외의 학술지에 더 많은 논문이 게재되었다. 연구 주제별로는 대부분의 연구가 대수적 사고의 비례 추론 내용 영역에 초점을 맞추고 있었다. 연구 대상은 학생 또는 교과서가 가장 많았고, 학생인 경우에는 초등 고학년을 대상으로 하는 연구가 가장 많았다. 이러한 연구 결과를 토대로 국내 초기 대수 교육 연구에 관한 향후 시사점을 제언하였다.

주제어: 초기 대수 교육, 초등 수학, 연구 동향

I. 서 론

초등 수학에서 중등 수학으로의 이행에 있어 대수는 관문의 역할을 하는 것으로 여겨진다. 그러나 이 관문은 새로운 수학적 세계로 열어주는 문(gate)의 의미이기보다는, 이후에 학업의 기회를 제공받을 만한 지를 걸러내는 문지기(gatekeeper)의 의미에 가깝다. 학생들이 산술에서 대수로의 이행에 어려움을 겪는 것은 한국만의 현상은 아니다. Radford (2009)는 유럽 수학 교육 학회(European society for Research in Mathematics Education, 이하 ERME)의 정기총회 CERME (Congress of ERME) 6의 기초강연에서 학생들이 산술에서 대수로 넘어가며 마주하게 되는 어려움을 “전설적인 어려움”으로 칭하며, 이에 대한 해결을 촉구한 바 있다. 초등의 산술 위주의 수학에서 추상 개념을 포함하는 중등 대수로의 갑작스러운 전환은 “산술 다음에 대수(arithmetic-then-algebra)”라는 역사발생적 기원에서 비롯되었다(Stephens et al., 2017). 인류 역사에서 출현한 순서에 근거하여 산술과 대

1) 이 논문은 2016년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원(NRF-2016S1A3A2925401)을 받아 수행된 연구임.

2) [제1저자] 서울 신곡초등학교, 교사

3) [교신저자] 서울대학교, 교수

수를 차례로 교육하지만, 조작적인 과정과 구조적인 대상이라는 존재론적 간격(Sfard, 1991), 인지적 차이(Herscovisc & Linchevski, 1994), 교수학적 단절(Fillooy & Rojano, 1989) 등으로 인하여 실제 학습자들은 산술과 대수의 원활한 연결에 곤란함을 겪게 되는 것이다.

산술과 대수의 연결에서 겪는 어려움을 해결하기 위하여 ‘초기 대수(early algebra)’를 학교 수학에 도입하려는 움직임이 등장하였다. 초기 대수에서는 어린 학생들의 일상적인 경험에서부터 나온 다양한 사례를 통해 그들의 발달 수준에 적합한 형태의 대수 추론 경험의 기회를 제공함으로써 학생들이 대수로 원활하게 이행하는 데에 도움을 줄 수 있다고 주장한다. 이에 대한 근거는 다음과 같다. 첫째, 초기 대수를 역사적인 배경에서 문제해결로 바라보면 초등 수학에서 초기 대수는 충분히 지도 가능하다. 둘째, 인식론적인 관점에서 과정 중심적인 산술의 대상과 그 조작을 강조함으로써 초기 대수의 논의가 가능하다. 마지막으로 심리적인 측면에서 대수의 기호 측면이 아닌 추론을 강조한다고 하면, 피아제의 심리발달단계가 대수 학습에서의 결정적인 조건이 아니라는 점에서 초등 수학에서 초기 대수 지도가 가능하게 된다(김성준, 2003a). 이와 같이 초기 대수는 대수를 단순히 초기(early)에 배우는 것이 아니라는 점에서 대수와 구분된다(Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008).

초기 대수에 대한 논의 배경에는 ‘대수적 사고’가 있다. 대수적 사고란 “양 사이의 관계를 일반화하고 표현하며 정당화하는 것뿐만 아니라 다양한 표현으로 나타난 일반성을 추론하는 것(Blanton et al., 2011, p.1)”으로 1984년 제5차 세계 수학 교육 대회(International Congress on Mathematical Education, 이하 ICME)에서 Herscovics에 의해 처음 제기된 개념이다(Davis, 1985). 대수 학습에 있어 대수적 사고를 강조함으로써 초등 수준에서도 대수적 특징과 연결된 사고를 가르치는 것이 가능해졌고, 이의 가능성은 여러 현장 연구들에 의해 뒷받침되었다(예를 들어, Brito-Lima, 1996; Schifter, 1998, Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2000; Britt & Irwin, 2011). ERME의 대수적 사고 분과에서는 초기 대수 대신 대수적 산술(algebraic arithmetic)이라는 용어를 제안하기도 하였다(Hodgen, Oldenburg, & Stromskag, 2018).

국내에서도 여러 연구자들이 초기 대수 교육에 관심을 가지고 꾸준히 연구를 진행해왔다. NCISLA (National Center for Improving Student Learning and Achievement mathematics and science)가 지원하는 Early Algebra Research Group의 논의에 주목하여(예를 들어, Kaput & Blanton, 2000, 2001) early algebra라는 용어를 김성준(2003a)이 초기 대수로 번역하여 국내에 소개한 전후로, 초등학교 수학에서의 비와 비율, 등호 개념, 패턴 인식, 함수적 관계, 곱셈적 사고, 문자 이해 등에 관한 다양한 연구들이 진행되었다. 이 연구들은 초기 대수라는 용어를 전면에 내세우지는 않지만, 초등학생 수준의 대수적 사고에 관한 논의이므로 초기 대수 교육 연구의 하나로 볼 수 있을 것이다. 또한 초기 대수 교육의 대표 연구자인 Kaput (2008)이 대수적 사고의 프레임을 사고의 핵심 양상과 내용 갈래의 두 가지로 나누어 제시한 이래로 초기 대수 교육 관련 연구가 국외뿐만 아니라 국내에서도 급격히 증가하였다. 이에 국외의 초기 대수 연구 동향을 고찰한 연구(예를 들어, 김성준, 2003a; 이화영과 장경윤, 2010)가 등장하였으나 국내에서 실행된 초기 대수 교육 관련 연구를 종합적으로 분석한 연구는 아직까지 실시되지 않았다.

이에 본 연구에서는 초기 대수 교육 연구의 동향을 파악하고 향후 연구의 과제를 제안하기 위하여 2000년부터 2017년까지 18년간 6개의 국내 수학 교육 전문 학술지에 게재된 초기 대수 교육 관련 연구논문들을 분석하고 범주화하였다. 전미 수학 교사 협의회

(National Council of Teachers of Mathematics, 이하 NCTM)는 2000년에 발표한 「학교수학을 위한 원리와 기준」에서 아동들의 대수적 추론을 잠재적으로 기를 수 있는 활동을 초등학교 입학과 동시에 시작해야 한다고 권고하며 초기 대수 교육의 분기점을 마련한 바 있다. NCTM의 영향을 주로 받은 국내 연구의 특성을 고려하여 2000년을 기점으로 이후의 연구들을 분석의 대상으로 삼았다. 이러한 작업은 개별 연구 결과들을 통합하여 지금까지의 초기 대수 교육의 진보와 지식을 축적함으로써, 연구자들에게 해당 영역에 대한 보다 포괄적이고 거시적인 안목을 제공해준다(Cai, (Ed.), 2017). 본 고에서는 국내 초기 대수 교육 연구의 동향과 그 특징을 확인하고 되돌아봄으로써 그간의 성과를 정리하고, 국외 초기 대수 교육 연구 동향과의 비교를 통해 우리나라 초기 대수 교육 연구의 향후 과제를 도출할 것이다.

II. 이론적 배경

초기 대수 교육에 관한 연구 동향을 살피기 위해서는 우선, 초기 대수의 의미를 살펴볼 필요가 있다. 초기 대수의 의미는 본 연구의 대상인 논문들의 주제를 보다 명확하게 드러낼 것이다. 이어 국외 초기 대수 교육 연구 동향에 대한 고찰을 통하여 국내의 초기 대수 교육 연구 경향 분석을 위한 토대를 마련한다.

1. 초기 대수의 의미

초기 대수 교육은 중등학교 대수 학습에서 어려움을 겪는 학생들에 관한 문제의식으로부터 시작되었다. 1990년대부터 다수의 연구자들은 학생들이 산술에서 대수로 이행하는 데에 겪는 어려움을 해결하기 위하여 대수적 사고를 진작하는 형태의 대수 활동을 탐색해왔다(예를 들어, Kieran, 1992; Linchevski, 1995; Wagner & Kieran, 1989; Rojano & Sutherland, 2001). 이러한 대수적 사고를 강조하는 움직임으로부터 중등학교 이전이라 하더라도 대수적 사고가 충분히 지도될 수 있으며, 산술과 대수를 인위적으로 구분하기 보다는 초등 수준에서 시작하여 중등과정으로 이어지면서 대수적 사고가 점진적으로 개발되어야 한다는 초기 대수 교육에 대한 주장이 대두되었다. 동시에 초기 대수의 가장 유의미하고 두드러진 특징 가운데 하나는 중등학교의 대수 과목에서 다루는 대수 유형과 전혀 유사하지 않다는 점이다(Blanton et al., 2011). 예를 들어, 덧셈과 뺄셈 학습의 연장선에서 “두 수를 어떤 순서로도 더할 수 있다”와 같은 일상 언어로 표현되는 초기 대수는 $a+b=b+a$ 라는 중등학교에서 다루는 대수식과 동일한 대수적 사고이면서도 그 형태가 전혀 다르다. 중등에서의 대수가 등식을 해결하거나 식을 단순화하기 위한 기술 및 절차와 관련된 변형적 양상에 초점을 둔 형식적 대수라면, 초기 대수에서는 산술, 함수적 사고, 수학적 모델링, 양적 추론을 이끌어내는 다양한 진입점(point of entry)에 초점을 둔다(Carraher & Schliemann, 2007).

초기 대수와 대수의 명확한 구분은 초기 대수와 대수의 공통분모인 대수적 사고에 대한 의문으로 이어진다. 초기 대수와 대수적 사고는 어떠한 관련성을 가지고 있는가. 대수적 사고는 유치원에서 고등학교 3학년에 이르기까지 학교 수학에서 패턴과 관계에 관한 자연적이고 비형식적인 직관으로부터 형식화된 수학적 사고로 이르는 모든 사고 과정을 포괄하는 개념이다(NCTM 2000, 2006; NGA & CCSSO, 2010). NCTM의 핸드북(Cai (Ed.), 2017)

에서는 초기 대수를 초등학교 혹은 중학교 수준에서 이루어지는 대수적 사고라고 보았고, ERME의 핸드북(Dreyfus et al. (Eds.), 2018)에서는 6~12세를 대상으로 하는 대수적 사고로 보았다. 우리나라에서는 2015 개정 수학과 교육과정의 중학교 1~3학년 문자와 식 영역에서 ‘문자를 통해 수량 사이의 관계를 일반화함으로써 산술에서 대수로 이행(교육부, 2015, p.30)’한다고 서술하고 있음을 고려하여 볼 때, 초기 대수라 함은 유아부터 중학교 이전까지의 수준에서 이루어지는 대수적 사고라고 정의할 수 있다.

Kieran (2004)은 초등학교 수준에서 요구되는 대수적 사고는 문자-기호적인 대수의 활용 여부에 상관 없이 문자-기호적인 대수를 도구로써 활용할 수 있는 활동뿐만 아니라 양 사이의 관계를 분석하기, 식의 구조를 분석하기, 변화에 대해 알아보기, 일반화하기, 문제 해결하기, 모델링하기, 정당화하기, 증명하기, 예측하기와 같이 문자-기호적인 대수를 활용하지 않는 활동에서도 발달이 이루어진다고 하였다. 초기 대수 교육 연구에 있어 핵심 연구자라고 할 수 있는 Kaput은 2008년 「Algebra in the Early Grades」라는 책에서 대수적 사고⁴⁾의 프레임을 <표 1>과 같이 제시하였으며 이는 현재까지 초기 대수 교육 연구에서 가장 큰 영향력을 가진 프레임이라고 할 수 있다(Stephens et al., 2017).

<표 1> 대수적 사고 프레임(Kaput, 2008, p.11)

대수적 사고의 핵심 양상
(A) 규칙성과 제한점을 일반화시키는 과정을 체계적으로 기호화하는 것
(B) 관습적인 기호 체계에서 표현되는 일반화 과정을 구문으로 안내된 추론으로 수행하는 것
대수적 사고의 핵심 양상 (A)와 (B)가 구체적으로 나타나는 세 가지 내용 갈래
일반화된 산술과 양적 추론에서의 계산, 관계를 추상화한 구조와 체계에 관한 학습으로서의 대수 함수, 상관관계, 공변에 대한 학습으로서의 대수
수학의 안팎에 적용되는 모델링 언어군으로서의 대수

Kaput (2008)은 대수 학습으로 이어지도록 하는 초등 수준에서 가능한 대표적인 대수적 사고를 일반화하기라고 보고, 일반화하기의 과정을 대수적 사고의 핵심 양상으로 제시하였다. 핵심 양상은 기호의 사용에 따라 일반화시키는 과정을 기호화시키는 사용의 측면과 관습적인 기호 체계를 따라 일반화의 과정을 수행하는 측면의 두 가지로 구분되었다. 이와 같은 기호의 사용은 기존의 초기 대수 연구가 대수적 사고 능력의 핵심으로 변수의 사용을 보았던 데에서 나아가, 도식을 포함하는 기호의 사용으로 확장해줌으로써 더욱 어린 학생들의 대수적 사고 가능성을 확장해주었다. 또한 그는 학교 수학에서 대수적 사고의 핵심 양상이 나타날 수 있는 세 가지 내용 갈래를 더불어 제시하였다. 첫 번째 갈래인 일

4) Kaput (2008)에서 프레임의 명칭은 ‘algebra의 핵심 측면과 갈래(Core Aspects and Strands of Algebra)’로 대수 프레임으로 번역할 수 있다. 그러나 그는 각주에서 “When we use the work “algebra,” we mean both senses of algebra (p.10).”라고 밝히고 있다. 즉, 프레임에서 사용하는 “대수”라는 명칭은 역사적으로 문자의 사용으로서 정의되어온 대수와 더불어 그가 새롭게 확장하고자 하는 다양한 기호적인 활동 및 기호 시스템을 뜻하는 대수적인 감각을 함께 의미한다는 것이다. 이에 혼돈을 피하기 위하여 본 고에서는 그가 새롭게 제안한 프레임에서 사용한 ‘algebra’라는 용어를 대수가 아닌 대수적 사고로 의역하여 사용한다.

반화된 산술과 양적 추론에서의 계산, 관계를 추상화한 구조와 체계에 관한 학습으로서의 대수는 추상 대수로, 두 번째 갈래인 함수, 상관관계, 공변에 대한 학습으로서의 대수는 미적분학 및 해석학과 연결된다. 세 번째 갈래인 수학 학습 안팎에 적용되는 모델링 언어 군으로서의 대수는 변수가 미지수, 변수, 혹은 매개변수로 취급되는지 여부에 따라 두 번째 갈래에 포함되기도 하며, 주로 문제 상황의 모델링을 통한 문제 해결과 관련이 있다. 이러한 세 번째 내용 갈래는 많은 연구에서 프레임의 첫 번째와 두 번째 내용 갈래에 관한 다양한 문제 상황에 포함되는 것으로 본다(Kieran et al., 2016).

Blanton et al. (2011)은 Kaput (2008)의 프레임을 정교화하였다. 대수적 사고의 과정을 일반화하기, 표현하기, 정당화하기, 수학적 구조와 관계를 추론하기의 네 가지로 분류하였고, 내용 영역으로는 대수적 사고를 위한 맥락으로서의 산술, 등식, 변수, 양적 추론, 함수적 사고의 5가지 갈래로 분류하였다. 그녀는 다섯 가지 내용 영역을 대수적 사고의 핵심 아이디어라고 제시하며 대수적 사고를 심도 있게 이해하기 위해서는 핵심 아이디어를 아는 것뿐만 아니라 아이디어들이 어떻게 서로 관련되는지를 인식해야 한다고 주장하였다(Blanton et al., 2011). 이후 Blanton et al. (2015)은 미국의 초등학교 3학년 학생들을 대상으로 대수적 사고의 학습 기회를 제공하는 교수 개입(intervention)의 효과를 분석하기 위하여 선행 연구들을 바탕으로 대수적 사고 측정 평가도구를 개발한 바 있으며, 그 내용은 <표 2>와 같다.

<표 2> 대수적 사고의 지도 및 평가 프레임(Blanton et al., 2015)

사고 과정	내용 영역
수학적 관계를 일반화하기	동치·식·등식·부등식에 대한 이해
표현하기	일반화된 산술에 대한 이해
정당화하기	변수에 대한 이해
추론하기	함수적 사고에 대한 이해
	비례 추론에 대한 이해

한편, 대수적 사고의 발달에 있어서 학생들이 사용하는 일상 언어는 핵심적인 역할을 한다. Kaput (2008)도 그의 프레임에서 세 번째 내용 갈래인 모델링 언어를 통해 대수적 사고의 발달이 일어날 수 있음을 언급하였으나, 미국의 후속 연구자들은 대수적 사고의 언어적인 측면보다는 사고 과정의 구성 요소에 집중하여 연구를 진행해왔다. 반면, 유럽에서는 기호학을 기반으로 하는 연구자들이 대수적 사고에 관심을 가져왔다. 그들은 학생들이 대수와 관련된 상황에서 특정 표현을 사용하고, 그 표현에 의미를 부여하는 방식을 이해하기 위해서는 언어에 관심을 가져야 한다고 보았다(Radford, 2000). 이들은 산술적인 관계나 성질, 일반화된 패턴 구조 등을 표현하기 위하여 학생들이 사용하는 일상 언어가 대수적 사고를 개발하고 표현하는 핵심이자, 장기적으로 표상의 alphanumeric⁵⁾ 모드를 구성하게 하는 매개의 역할을 한다고 보았다(Malara & Navarra, 2003; Radford, 2000). 그러나 alphanumeric 모드 자체가 대수적 사고를 특징짓는 것은 아니다. 사고란 물질적이고 관념

5) 사전적으로는 ‘글자와 숫자를 쓴’이라는 의미로 영숫자 혹은 문자숫자식으로 번역되고 있으나, 표상을 나타내는 데에 글자와 숫자를 혼용하여 사용한다는 뜻의 마땅하고 간결한 한국어를 찾지 못하여 영어로 표기한다.

적인 구성요소의 동적인 통합이므로 일상 언어 사용 및 공간적인 설명이나 제스처 전반에서 대수적 사고가 드러날 수 있다는 것이다. Radford (2011)는 초등학교 2학년 학생들의 일상 언어 사용 및 공간적인 설명이나 제스처를 통해서 드러난 대수적 사고의 특징을 다음과 같이 제시한 바 있다.

- 가. 불확정성 : 정해지지 않은 수를 다룬다.
- 나. 지시성 : 확정되지 않은 미지의 수는 제스처, 단어, alphanumeric 기호, 혹은 이들의 조합과 같이 다양한 방식으로 명명되거나 상징화된다.
- 다. 분석성 : 확정되지 않은 미지의 양들은 마치 기지의 숫자처럼 취급된다.

Radford (2012)는 대수적 사고의 발달을 살펴보기 위해서는 대수적 사고의 구성요소 하나하나에 초점을 맞추기 보다는 사고의 물질적이고 관념적인 구성요소(예를 들어 지각, 제스처, 발화) 사이에서 새롭고 체계적으로 구조화되는 관계 및 관계가 재조직되는 방법을 살펴야 한다고 주장하였다. 본 고에서 연구 대상으로 선정한 국내 초기 대수 연구 논문들 중 Radford의 이론을 기반으로 하는 연구는 찾을 수 없었으므로, 연구 주제 분류를 위한 준거에서는 제외하였다.

2. 국외 초기 대수 교육 연구의 동향

이 절에서는 국내 초기 대수 교육 연구 동향과의 비교를 위하여 국제적인 초기 대수 교육 연구의 성과를 정리한 국외의 최신 핸드북들을 중심으로 연구 흐름을 살펴본다. 주로 북미와 유럽에서 영향력 있는 초기 대수 교육 연구가 이루어져 왔으므로 북미와 유럽에서 발간된 핸드북을 선택하였다. 대학 수학 교육 연구의 동향과 과제를 살펴보았던 권오남, 주미경의 연구(2003)에서도 외국 대학 수학 교육 연구의 동향을 살펴기 위하여 인지도가 높은 국외 대표 학술지를 선정하여 분석한 바 있다. 본 연구에서는 NCTM의 핸드북 『Compendium for Research in Mathematics Education』 (Cai (Ed.), 2017)을 중심으로 북미의 연구 동향을, ERME의 핸드북 『Developing Research in Mathematics Education』 (Dreyfus et al. (Eds.), 2018)을 중심으로 유럽에서 이루어진 초기 대수 교육 연구의 동향을 살펴본다. 또한 ICME에 참여했던 연구자들을 중심으로 저술된 『International Handbook of Mathematics Education』 (Clements et al. (Eds.), 2012)과 ICME-13의 『Topical Surveys—Early Algebra』 (Kieran et al., 2016)도 함께 살펴본다. 북미와 유럽의 연구자들이 함께 참여하는 ICME 후속 저술들은 좀 더 포괄적인 관점으로 국제적인 연구 동향을 살펴도록 해주었다. 이를 통하여 국내 초기 대수 교육 연구 방향에 관한 논의의 토대를 마련하고자 한다.

가. 북미에서의 초기 대수 교육 연구 동향

북미에서의 초기 대수 교육 연구는 Kaput과 Blanton 등이 소속된 교육 기술 연구 센터(Technical Education Research Centers, 이하 TERC)의 다양한 대수 준비(algebra readiness) 연구 프로젝트의 영향을 받아왔다. 최근 10년간의 수학 교육 연구를 정리한 NCTM 핸드북(Cai (Ed.), 2017)의 초등학교와 중학교 수준의 대수적 사고 관련 챕터가 대표적인 사례이다. 해당 챕터를 집필한 Stephens et al. (2017)은 Kaput (2008)의 프레임을 기

반으로 챕터를 구성했는데, 대수적 사고의 핵심 양상의 첫 번째와 두 번째 갈래에서 드러난 세 가지 내용 영역-일반화된 산술, 함수적 사고, 비례 추론-에 따라 선행연구들을 분류하였다.

2001년 호주 멜버른에서 열린 국제 수학 교육 위원회(International Commission on Mathematical Instruction, 이하 ICMI)의 연구 컨퍼런스(study conference)에서 대수 교육에 대한 관점 전환을 요구한 Kaput의 발언 이후로 북미의 초기 대수 교육 연구는 학생들이 할 수 없는 것들에 대한 논의에서 학생들이 할 수 있는 대수가 무엇인지에 대한 논의로 초점이 이동하였다. 전술한 바와 같이 이 과정에서 Kaput (2008) 및 Blanton et al. (2015)의 프레임이 등장하여 어린 학생들이 할 수 있는 대수적 사고와 내용을 구분하였고, 이를 규명하는 후속연구들이 이어졌다.

그 중 일부인 일반화된 산술을 살펴본다. 일반화된 산술의 토대가 되는 수학적 동치의 경우, 전통적이지 않은 순서로 제시된 등호가 포함된 산술 문제를 접했던 7, 8세 학생들의 이후 동치에 대한 이해를 살핀 연구(McNeil et al., 2011) 등을 바탕으로 등호에 대한 이해 수준을 구분하고자 시도하는 연구들이 이어졌다. Matthews et al. (2012)은 수학적 등가의 지표로써 등호 기호에 대한 지식의 수준을 4단계로 나누어 제시하였고, Stephens et al. (2013)은 등호 기호의 의미를 조작적, 관계적, 관계-구조적으로 보는가에 따라 수학적 동치에 대한 학생들의 이해를 구분하였다. Stephens et al. (2017)은 이를 통해 등호를 비롯한 관계적 기호들은 적절한 교실 개입을 통해 모든 나이의 학생들에게 가르쳐질 수 있다고 주장하였다. 이러한 논지는 초기 대수 연구는 초등학생 이전인 5, 6세의 아동까지 확장 가능하며, 이들도 수준에 적절한 활동이 제공된다면 충분히 일반화하거나 추론하기가 가능하다는 주장으로 이어졌다. 이와 같은 확장성은 초등학교와 중학년 학생들도 수학적 형식에 따라 패턴을 추론하고 일반화하는 것이 가능하다는 주장과 맞닿는다. 변수의 지도에 있어서도 변수 개념을 학생이 준비가 되었을 때까지 기다렸다가 가르칠 것이 아니라 초등 저학년 수준에서 그들의 수준에 적절하게 가르친다면 학생들은 변수에 대한 적절한 인식을 충분히 가질 수 있다고 보게 된 것이다. 또한 초등학교 및 중학교 학생들도 논증을 통해 일반화의 과정에 대한 정당화를 충분히 배울 수 있음을 증명하는 연구들이 이어졌다(예를 들어, Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Stylianides, 2007; Knuth, Choppin, & Bieda, 2009).

이를 통하여 미국의 초기 대수 교육 연구는 Kaput (2008)의 프레임 안에서 그 저변을 확대하는 데에 초점을 맞추고 있음을 알 수 있다. 초기 대수 교육을 위한 교수 설계 및 효과 검증 자체에 초점을 맞추기 보다는 초기 대수 교육을 어느 나이 대까지, 어떤 내용까지 확장할 수 있을지에 집중하는 경향이 있었다. Carraher & Schliemann (2007)이 지적한 바와 같이 학생들이 대수적으로 사고한다는 것이 어떤 것인지, 그리고 학교 대수 지도에 있어 특별한 교수학적 개입이 그러한 대수적 사고를 어떠한 식으로 발달시켜주는 지에 대한 보다 실제적인 연구가 요구되는 시점이라고 할 수 있다.

나. 유럽에서의 초기 대수 교육 연구 동향

유럽에서도 역시 북미와 유사하게 보다 낮은 학년의 수학 교육과정에서 대수적 아이디어를 도입해야 한다는 논의가 진행되어 왔다(Clements et al. (Eds.), 2012). 이를 위한 연구의 초점은 주로 대수적 사고의 본질을 규명하는 기초 연구에 맞추어졌다. 다수의 연구에서 Kaput (2008)과 Blanton et al. (2015)의 프레임이 지배적으로 인용되는 북미와는 달리,

유럽에서는 다양한 이론적 프레임이 공존하고 있었다. Bergsten (1999), Dörfler (2007), Radford (2009) 등은 기호학적인 관점에서 대수적 사고 관련 프레임을 제안하였고, Schwartz, Dreyfus, & Herschkowitz (2009)는 추상화의 발생 과정을 대수적 사고의 프레임으로 제안하였다.

Hodgen et al. (2018)이 집필한 ERME 핸드북의 대수적 사고 챕터의 경우, 초기 대수 교육 연구는 대수적 사고 연구의 일부로만 다루어지고 있었다. 이들은 초기 대수를 대수적 사고 챕터 내의 한 절에서 소개하였는데 주요 내용은 다음과 같다. 초기 대수와 산술과 대수 간의 변환 혹은 관계는 활발하게 논의되는 주제이며, 초기 대수의 한 갈래를 초등학교 수학 교실에서 적용하여 그 효과를 논의한 연구들이 있다. 초기 대수에서 담화의 역할을 탐색한 연구도 있었으며, Dooley (2011)는 때때로 “모호한”언어가 대수적 추론의 발달을 촉진시켜준다고 주장하였다. 전통적인 산술의 긍정적인 효과도 함께 살려줄 수 있는 대수적 산술이라는 단어를 제안한 연구(Pittalis, Pitta-Pantazi, & Christou, 2015)도 있었다.

이를 통하여 볼 때, 유럽의 수학교육계에서는 대수적 사고를 발달시키는 데에 있어 언어의 사용에 좀 더 집중하고 있으며, NCTM의 핸드북에서는 비중 있게 다루지 않았던 추상화의 과정에 비추어 대수적 사고를 바라보고 있음을 알 수 있다. 또한 소수 연구자 그룹의 프레임이 지배적인 미국과는 달리 다양한 이론적 프레임이 공존하고 있었다. 초기 대수 교육에 대한 연구물의 수는 많지 않지만 미국에 비해 비교적 다양한 관점의 연구가 진행되고 있음은 주목할 만하다.

III. 연구 방법

1. 분석 대상

이 연구에서는 우리나라 수학 교육 학계의 주요 학술단체인 한국수학교육학회, 대한수학교육학회의 학술지와 초등 수학 교육 전문 학술단체인 한국초등수학교육학회의 학술지에서 2000년부터 2017년까지 게재된 논문 중 초기 대수 교육 관련 논문들을 분석 대상으로 삼는다. 한국수학교육학회에서 발간되는 다섯 가지의 학술지 중 초등 수학 교육 관련 연구가 게재되는 3개의 학술지 <시리즈 A-수학교육>, <시리즈 C-초등수학교육>, <시리즈 E-수학교육논문집>을, 대한수학교육학회에서 <수학교육학연구>, <학교수학>을, 한국초등수학교육학회에서 <한국초등수학교육학회지>를 선택하였다. 이상의 6개 학술지는 모두 한국연구재단의 한국학술지인용색인(KCI) 등재지이다. 이 외에도 KCI 등재지인 한국학교수학회와 한국수학사학회의 학술지에도 초등 수학 교육 관련 연구가 실리고 있으나 그 수가 적고, 초기 대수 교육 관련 연구는 거의 게재되지 않고 있으므로 본 연구의 분석대상에서 제외하였다.

연구의 대상은 위에서 언급한 6종의 학술지를 발간하는 기관의 홈페이지에서 2000년부터 2017년까지 게재된 모든 논문의 제목을 기초로 선정하였다. ‘초기 대수 교육’ 혹은 초등학생을 대상으로 한 ‘대수 교육’이라는 키워드 이외에도, ‘등호’, ‘변수’, ‘비례 추론’, ‘함수’, ‘패턴’ 등의 대수적 사고의 핵심 내용 관련 키워드가 포함되고 유아나 초등 교육과정 혹은 초등학교와 중학교의 연결 관점에서 연구가 진행된 경우 연구의 대상으로 포함하였다. 단순히 사칙연산의 개념 및 지도에 관한 연구(예를 들어, 강문봉, 2011; 진성현, 박만규, 2016)는 산술의 영역으로 보고 포함하지 않았지만, 사칙연산에서 연

산 사이의 관계 및 연결에 관한 연구(노은환, 정상태, 김민정, 2015)는 대수적 사고를 위한 맥락으로서의 산술로 판단하여 연구 대상으로 포함하였다.

<표 3> 학술지별 분석 대상 논문 편수

발행기관	학술지명	논문편수
한국수학교육학회	<시리즈 A-수학교육>	5
	<시리즈 C-초등수학교육>	9
	<시리즈 E-수학교육논문집>	3
대한수학교육학회	<수학교육학연구>	31
	<학교수학>	24
한국초등수학교육학회	<한국초등수학교육학회지>	17
합계		89

이와 같은 기준에 따라 논문을 선정한 결과 총 89편을 선정할 수 있었다. 발행기관 및 학술지에 따른 분석 대상 논문의 수는 <표 3>과 같다. 2000년부터 2017년까지 6개의 학술지에 게재된 논문의 편수가 총 2,702편임을 고려해보면, 89편이라는 숫자는 상당히 적은 편이라 할 수 있으며, 이 중 초기 대수(혹은 조기 대수, 초등 대수, 대수적 사고)를 전면으로 내세우고 있는 연구는 9편에 불과하였다(김민정, 이경화, 송상헌, 2008; 최지영, 방정숙, 2011b; 이화영, 장경윤, 2012; 김성준, 2002b, 2002c; 김성준, 2003a; 송상헌 외, 2007; 이혜민, 신인선, 2011; 방정숙, 최인영, 2016).

2. 분석 기준

학술지는 해당 학문 분야에 대해 문제의식과 개념을 공유하는 연구자들이 학문적으로 교류하는 토대를 제공함으로써, 학문의 형성과 발전에 있어 핵심적인 역할을 한다(박경미, 2013). 그러므로 학술지에 실린 논문들을 분석하여 경향을 살피는 일은 수학 교육 연구 공동체에서 현재 이루어지는 논의들을 거시적 관점에서 조망하게 해주며, 현재의 논의가 기반하는 과거를 살펴보고, 미래의 논의를 예측할 수 있는 효과적인 수단을 제공해준다. 연도 및 학술지별 분석은 통시적 관점에서 초기 대수 교육 관련 연구를 바라보며 과거의 연구들이 현재의 논의에 어떻게 기여했는지를 확인할 수 있게 해줄 것이다. 연구 주제별 분석의 경우, 현재 국내 수학 교육 연구 공동체에서 초기 대수 교육 관련 연구를 초기 대수 교육의 주요 내용 요소별로 분석함으로써 초기 대수 교육 전체를 거시적 관점에서 조망하게 해줄 것이다. 연구 대상별 분석은 대수 교육 중에서도 유아 및 초등학생을 대상으로 하는 초기 대수 교육의 정체성을 보여주면서, 동시에 초기 대수 교육 연구의 초점이 학교 수업의 개선 혹은 교사 교육 연구를 향하는지 그 성격도 함께 보여줄 수 있을 것이다.

이에 본 연구에서는 연도 및 학술지, 연구 주제, 연구 대상을 분석 기준으로 설정하였다. 먼저, 89편의 논문을 연도 및 학술지별로 분석한 뒤, 연구 주제별, 연구 대상별로 분석하고, 연구 주제 및 연구 대상의 범주 안에서 연도 및 학술지별 경향을 탐색하고자 하였다. 각 기준에 대한 내용은 다음과 같다.

가. 연도 및 학술지

2000년부터 2017년까지 <표 3>에 제시된 여섯 가지 학술지에 게재된 논문들을 1년 단위로 학술지별로 분류하였다. 각 학회의 홈페이지에서 2017년의 마지막 호인 <수학교육> 2017년 4호(11월), <초등수학교육> 2017년 4호(10월), <수학교육논문집> 2017년 4호(11월), <수학교육학 연구> 2017년 4호(11월), <학교수학> 2017년 4호(12월), <한국초등수학교육학회지> 2017년 3호(8월)까지를 분석 대상으로 보고 그 경향을 찾고자 하였다. 연도에 따른 논문편수의 경향을 살피기 위해 2000년대 초반(2000년~2005년), 2000년대 후반(2006~2009년), 2010년대(2010~2017년)로 나누어 각 기간의 두드러진 특징 및 그 원인을 찾아보았다. 학술지별 논문 편수의 경향의 경우, 개별 학술지별로 그 특징을 찾기보다는 발간 학회별로 그 특징을 찾아보고, 제안을 제시하였다.

나. 연구 주제

대수적 사고에 관한 핵심아이디어들은 초기 대수 교육을 바라보는 주요 렌즈가 된다. 이에 본 연구에서는 이론적 배경에서 소개한 바 있는 Blanton et al. (2015)의 대수적 사고 프레임의 내용 요소에 따라 연구 주제를 분류하였다. Blanton et al. (2015)의 프레임은 Kaput (2008)의 프레임을 정교화하고 실질적인 맥락에서 세분화한 것이다.

내용 요소는 동치·식·등식·부등식, 일반화된 산술, 변수, 함수적 사고, 비례 추론에 대한 이해로 분류된다. Blanton et al. (2015)에 의하면 각각의 내용은 다음과 같다. 첫째, 동치·식·등식·부등식에 대한 이해는 등호 기호에 대하여 관계적으로 이해하는 것, 기호적인 형태로 식과 등식을 표현하고 추론하는 것, 일반화된 양 사이의 관계를 표현하는 것이다. 둘째, 일반화된 산술에 대한 이해는 산술적 관계를 일반화하는 것, 수와 연산의 기본 성질을 이해하는 것, 식을 산술로 계산하기 보다는 식의 구조를 추론하여 해결하는 것을 포함한다. 셋째, 변수에 대한 이해는 수학적 아이디어를 간결하게 표현하는 언어적 도구으로써 기호적 표기를 이해하는 것과 변수가 서로 다른 맥락에서 쓰일 때 그 역할이 달라짐을 이해하는 것을 포함한다. 넷째, 함수적 사고는 공변하는 양 사이의 관계를 일반화하는 것과 자연 언어, 대수적 표기, 표, 그래프를 통하여 공변하는 양 사이의 관계를 표현하고 추론하는 것을 포함한다. 마지막으로 비례 추론은 일반화된 두 양들을 서로의 비와 관련하여 대수적으로 추론하는 것을 포함한다. 이 때의 추론하기는 두 양의 관계를 탐색한다는 점에서 대수적 사고 과정의 추론하기와는 구분된다.

초기 대수 교육의 연구 동향을 분석하거나, 대수적 사고 전반에 관한 연구 등은 기타의 범주로 분류한다. 본 연구에서 사용하는 연구 주제별 분석 범주는 <표 4>와 같다.

<표 4> 연구 주제별 분석 범주

연구 주제	하위 요소
대수적 사고의 내용 영역	동치·식·등식·부등식, 일반화된 산술, 변수, 함수적 사고, 비례 추론
기타	연구 동향 분석, 대수적 사고 전반 분석 등

다. 연구 대상

초기 대수 교육의 태동이 학생들이 대수 학습에서 겪는 어려움을 해결하기 위함에서 비롯되었음을 고려해볼 때 초기 대수 교육 연구의 상당수가 학생을 대상으로 할 것은 쉽게 예측할 수 있다. 실제로 초등 수학 교육 연구 논문을 메타분석한 여타 연구들에서는 분석의 범주로 연구 대상을 학생, 교사, 그리고 그 외 기타로 분류하고 있었다(예를 들어, 하수현, 방정숙, 주미경, 2010; 김유경, 방정숙, 2017). 본 연구에서도 연구 대상별 분석의 범주에 있어 학생, 교사, 기타를 기본 골자로 하였다. 학생의 경우는 유아, 초등학교 1학년~6학년, 그리고 영재교육대상자를 별도로 분류하였다. 영재교육대상자 경우 대부분이 5~6학년이었기에 영재교육대상자의 학년 구분이 분석결과에 별다른 함의를 주지 못할 것으로 판단하여 영재교육대상자의 학년은 구분하지 않았다. 교사의 경우에는 예비교사와 현직교사로 분류하였으며, 교사 대상 연구의 수가 적어 현직교사의 경력을 따로 분류하지는 않았다. 한편 수학 수업과 밀접한 관련을 갖는 초기 대수 교육의 특성상 교과서를 분석한 연구가 많았기에 교과서를 별도의 범주로 설정하였다. 연구 대상별 분석의 범주는 <표 5>와 같다.

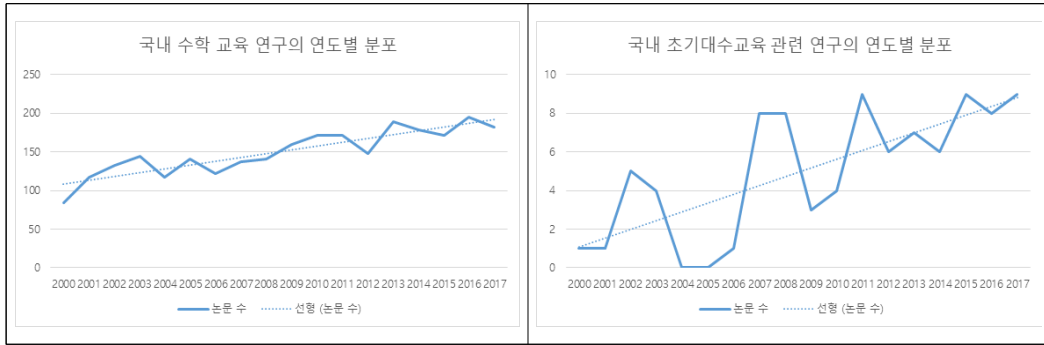
<표 5> 연구 대상별 분석 범주

대상 유형	연구 대상
	유아
학생	1학년, 2학년, 3학년, 4학년, 5학년, 6학년 영재교육 대상자(5~6학년)
초등교사	예비교사, 현직교사
교과서	교과서
기타	문헌 등

IV. 연구 결과

1. 연도 및 학술지별 동향 분석

2000년부터 2017년까지 6개의 학술지에 게재된 국내 수학 교육 논문 및 초기 대수 교육 관련 논문의 연도별 추세는 [그림 1]과 같다. 국내 수학 교육 연구 논문의 수는 2000년부터 상기의 6개 학술지에 게재된 논문의 총 편수이다. [그림 1]의 추세선에서 확인할 수 있듯이 2000년부터 국내의 초기 대수 교육 관련 연구는 많은 수는 아니었지만 수학 교육 연구 논문의 증가 추세에 비하여 더욱 급격한 증가 추세를 보였다. 또한 2011년 이후로는 매년 6편 이상의 초기 대수 교육 관련 논문이 꾸준히 게재되고 있었다. 이는 초기 대수 교육 연구가 수학 교육 학계에서 여타 분야에 비하여 보다 연구자들의 주목을 받고 있는 분야임을 의미하며, 국내 초기 대수 교육 연구의 동향과 과제를 살펴야 할 근거를 제공해 주었다.



[그림 1] 국내 수학 교육 연구 및 초기 대수 교육 관련 연구의 연도별 분포

2000년대 초반과 후반, 2010년대로 크게 3개의 기간으로 나누어 시기별 논문분포를 살펴본다. 2000년대 초반에서는 2002년의 논문편수가 이전 해에 비해 두드러지게 높게 나타났다. 이는 특정 연구자의 논문이 해당 시기에 많이 게재되었기 때문으로 보인다(김성준 2002a, 2002b, 2002c). 이는 이후 등장한 대수적 사고를 주제로 한 박사학위 논문(김성준, 2003b)과 깊은 관련을 가지고 있는데, 이는 국내에서도 초기 대수 교육을 포함하는 대수 교육을 주된 연구 분야로 하는 연구자의 등장이라는 의미를 갖는다. 2000년대 후반의 경우, 2007년과 2008년 사이에 논문편수가 높게 나타났다. 이 시기는 제 7차 교육과정에서 2007 개정을 거쳐 2009 개정 수학과 교육과정으로 나아가는 과도기적 시기로, 연구자들이 초기 대수 교육의 필요성을 제기하고 이를 교육과정 및 교과서 개선안에 반영하는 연구에 집중했던 것으로 여겨진다.

한편 2000년대 후반부터 2010년대에 들어서는 특정 연구자가 주저자(방정숙, 최지영, 2011; 방정숙, 선우진, 2016a, 2016b; 방정숙, 최인영, 2016; 방정숙, 선우진, 2017; 방정숙, 선우진, 김은경, 2017; 방정숙, 이유진, 2017; 방정숙, 조선미, 김정원 2017) 혹은 공동저자(강소희, 방정숙, 2008; 김정원, 방정숙, 2008, 2013; 안숙현, 방정숙, 2008; 최지영, 방정숙, 2008, 2011a, 2011b, 2012, 2014; 윤민지, 방정숙, 2009; 전형옥, 이경화, 방정숙, 2009; 최병훈, 방정숙, 2011, 2012; 김유경, 방정숙, 2014; 김정원, 방정숙, 최지영, 2016; 김정원, 최지영, 방정숙, 2016; 서은미, 방정숙, 이지영, 2017)인 논문이 총 25편으로 같은 시기(2008년~2017년)에 게재된 초기 대수 교육 관련 논문 69편 중 3분의 1 이상을 차지하였다. 이는 국내 초기 대수 교육 연구 논문의 편수가 특정 연구자에 의해 크게 영향을 받는다는 문제점을 나타내기도 하나, 특정 연구자 그룹에서 지속적으로 초기 대수 교육 관련 연구를 수행한다는 점만으로도 그 전문성을 담보하기에 충분할 것으로 보이며, 향후 초기 대수 교육 연구가 이들에 의해 질적으로 성장하는 계기가 될 것으로 기대된다.

학술지별로 분석 대상 논문의 편수는 <표 6>과 같다. 2000년부터 2017년까지 한국수학 교육학회에서 발간된 학술지 3곳에는 초기 대수 교육과 관련하여 총 17편의 논문이, 한국 초등수학교육학회에서 발간하는 학술지에도 17편의 논문이 게재된 반면, 대한수학교육학회에서 발간하는 학술지 2곳에는 총 55편이 게재되어 초기 대수 교육 관련 연구 논문들이 <수학교육학연구> 및 <학교수학> 학술지에 집중적으로 게재되고 있었다. 이에 대해서는 두 가지 상반된 제안을 생각해볼 수 있다. 첫째로는, 초기 대수 교육 관련 이슈들을 더 많은 수학 교육 연구자들과 공유할 수 있도록 더욱 다양한 수학 교육 학술지에 초기 대수 교육 관련 논문이 게재될 필요가 있다는 것이다. 둘째로는, 초기 대수 교육의 정체성을 분

명히 하고 관련 연구들의 축적과 종합이 이루어질 수 있도록 초등 수학 교육 연구를 전문으로 다루는 <초등수학교육> 또는 <한국초등수학교육학회지>에 집중적으로 게재하여 독자적인 논의의 장을 마련을 고민하는 것도 필요가 있다는 것이다. 두 가지 상반된 관점에 대한 고민이 필요할 것으로 보인다.

<표 6> 학술지별 분석 대상 논문 편수

학술지명	연도별 논문편수																	계	
	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16		17
수학교육	1	.	.	.	2	.	.	1	.	.	1	5
초등수학교육	.	.	.	1	.	.	.	1	1	1	.	1	1	.	.	.	2	1	9
수학교육논문집	1	.	1	1	3
수학교육학연구	.	.	4	2	.	.	1	4	2	1	2	2	2	3	1	3	3	1	31
학교수학	1	.	1	1	.	.	.	2	4	.	1	2	3	2	2	2	1	2	24
한국초등수학교육학회지	.	1	1	.	1	.	2	2	4	2	4	17
계	1	1	5	4	0	0	1	8	8	3	4	9	6	7	6	9	8	9	89

2. 연구 주제별 동향 분석

2000년부터 2017년까지 6개 주요 학술지에 게재된 초기 대수 교육 관련 연구 89편의 연구 주제를 분석한 결과, 대수적 사고의 특정 내용 영역에 초점을 맞춘 연구가 75편으로 84%, 연구 동향 및 대수적 사고 전반을 분석한 연구가 14편인 16%로 나타났다. 연구 주제별 하위 요소에 따라 보다 자세히 살펴보면 다음과 같다.

대수적 사고의 내용 영역에 관한 연구의 분포에 있어서는 <표 7>과 같이 5가지의 영역 중에서 비례 추론 영역의 연구가 집중적으로 이루어졌음을 알 수 있었다. 다른 4가지 영역과는 달리 초등학교 수학 교과서에서 비와 비율이 독립된 단원으로 존재해왔고, 학생들이 비와 비율 단원에서 특별히 어려움을 겪어왔음이 수차례 보고되었던 관계로 관련연구가 많이 이루어진 것으로 짐작된다. 초등학교 6학년 학생들이 비례 추론에서 겪는 어려움을 살피고, 지도 프로그램을 개발하여 비례적 추론에 대한 학생들의 개념 변화를 살핀 김경선, 박영희의 연구(2007) 등이 그 예이다. 한편, 곱셈적 사고에 관한 연구(한은혜, 류희수, 2008; 김유경, 방정숙, 2014) 또한 배의 개념을 활용하여 비례 추론적 사고로 나아간다는 관점을 취하므로 비례 추론 영역의 연구로 분류하였다.

비례 추론 영역 다음으로 동치·식·등식·부등식에 관한 연구가 많이 나타났는데, 우리나라 4학년 학생들을 대상으로 등호에 대한 이해와 여러 가지 유형의 등식에 대한 학생들의 문제 해결 정도를 분석한 연구(기정순, 정영옥, 2008) 또는 초등학교 2~6학년 학생들의 등호 이해 실태를 조사한 연구(김정원, 최지영, 방정숙, 2016)가 이에 해당된다. 다양한 식보다는 기호로써 ‘=’이라는 등호 개념에 관한 연구가 주를 이루고 있었다. 이는 등호가 초등학교 수학과 교육과정에서 순서상 가장 먼저 제시되고, 가장 보편적으로 사용되는 기호문자이기 때문으로 보인다.

일반화된 산술 및 함수적 사고에 대한 연구도 그 편수가 적었지만, 유독 변수에 대한 연구가 적었음에 주목해볼 필요가 있다. Kaput (2008)과 Blanton et al. (2015) 등 많은 초

기 대수 연구자들이 초기 대수 교육에서 변수를 가르쳐야 한다고 주장하고 있음에도 불구하고, 변수는 초등학교 학생들이 이해하기에는 너무 추상적이어서 중등 수학에서 다루어야 한다는 주장도 여전히 존재하기 때문에 여기진다. Brizuela et al. (2015)은 초등학교 1학년 학생들을 대상으로 한 변수 표기 연구를 통해 저학년에서도 변수 학습이 가능하며 변수에 대한 지속적인 탐구의 기회를 제공하여야 한다고 주장한 바 있다. Fujii (2003)는 숫자를 유사변수로 사용함으로써(예를 들어, $78-49+49=78$. 여기서 49는 어떤 숫자여도 그 값에 상관없이 없는 유사변수의 역할을 한다) 모든 수준의 학생들에게 문자 기호 형태의 선행 지식 없이도 대수적으로 사고할 수 있는 기회를 제공할 수 있다고 하였다. 이러한 관점에서 일반화된 수, 고정된 미지수, 변화하는 양, 매개 변수, 자리지기로서의 다양한 변수의 역할을 해석하고 적절히 활용하는 변수에 대한 다양한 연구가 초기 대수 교육의 범주 안에서 실행될 수 있을 것으로 보인다.

<표 7> 대수적 사고의 내용 영역별 대상 논문 편수

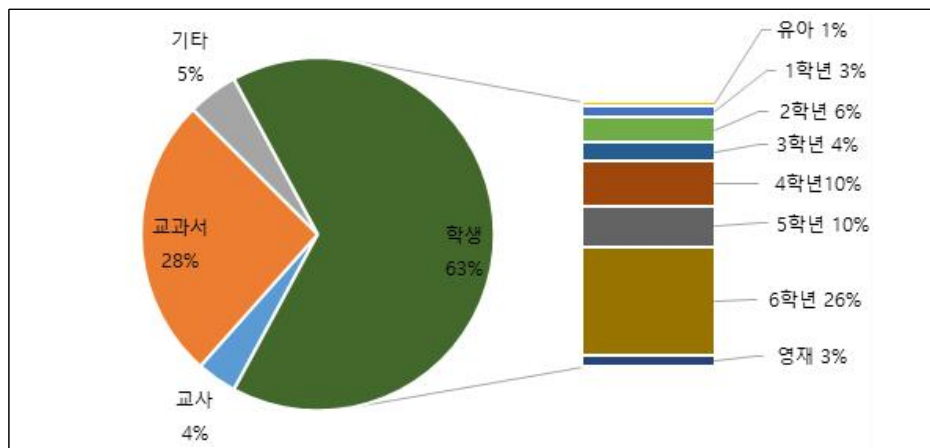
내용 영역	연도별 논문편수																	계	
	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16		17
동치·식·등식·부등식	·	·	·	1	·	·	·	1	1	·	·	·	·	2	1	1	1	·	8
일반화된 산술	1	1	·	·	·	·	2	·	1	·	·	4	2	2	1	1	1	·	16
변수	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	1	·	·	1	·	·	·	4
함수적 사고	·	·	·	·	·	·	·	·	1	·	·	1	1	·	1	·	1	3	8
비례 추론	·	·	1	2	·	1	·	3	3	3	3	1	3	4	1	6	4	4	39
계	1	1	1	3	0	1	2	4	7	3	3	7	6	8	5	8	7	8	75

한편, 초기 대수 교육과 관련된 모든 연구가 대수적 사고의 특정 요소만을 다루지는 않았다. 초기 대수 교육의 이론적 배경에 관한 연구(김성준, 2003a; 이화영, 장경윤, 2010) 및 산술과 대수의 연결로써의 초기 대수를 다룬 연구(김성준, 2002a; 이혜민, 신인선, 2011), 그리고 대수적 사고의 전반을 다룬 연구(김성준, 2002b; 우정호, 김성준, 2007; 방정숙, 최인영, 2016; 방정숙, 선우진, 김은경, 2017), 수학과 교육과정의 규칙성 영역 전반에 관한 연구(서경혜, 유솔아, 정진영, 2003; 권성룡, 2007) 등은 좀 더 거시적인 관점에서 초기 대수 교육 및 대수적 사고에 관한 고찰을 보여주었다.

분석 준거로 포함시키지는 않았지만 대수적 사고 프레임에서 사고 과정과 관련하여 대다수의 연구가 일반화하기와 관련이 있었다. Mason (2005)도 초기 대수에 관한 대부분의 연구들이 일반화하기 사고 과정에 초점을 맞추며, 이는 초기 대수를 포함한 모든 수학적 활동에는 일반화하기가 내재되어 있기 때문이라고 지적한 바 있다. 그러나 대수적 사고 과정의 발달 자체를 주제로 한 국내 연구가 거의 없어, 그 분포가 유의미한 값을 나타내지 못할 것으로 예상되어 분석 준거에 포함시키지는 않았다. 다만 이를 통하여 대수적 사고 과정의 발달에 초점을 맞춘 연구가 더 많이 진행될 필요에는 주목해볼 수 있다. Kieran et al. (2016)은 근래의 초기 대수 교육 관련 연구들의 경향이 내용 중심의 대수에 대한 강조에서 이동하여 발달수준에 적합한 활동을 통해 발달시킬 수 있는 사고 과정에 대한 강조로 옮겨가고 있다고 밝힌 바 있다. 국제적인 연구 동향에 비추어볼 때도 그러하지만, 국내 수학과 교육과정도 내용 중심에서 역량 중심의 교육으로 변화해나가고 있음을 고려해볼 때, 앞으로 대수적 사고의 사고 과정의 발달에 관한 연구가 보다 활발하게 이루어질 필요가 있다.

3. 연구 대상별 동향 분석

[그림 2]와 같이 초기 대수 교육 관련 연구 논문 중 연구 대상이 학생인 논문은 전체의 63.4%, 교사가 대상인 논문은 3.57%, 교과서를 대상으로 하는 논문은 27.7%, 기타가 5.35%로, 전술하였던 바와 같이 학생 대상 연구가 가장 높은 비중을 차지하였다. 복수의 학년을 대상으로 하거나, 교사와 학생 모두를 대상으로 하는 연구의 경우에는 그 수를 중복하여 세었다(예를 들어, 안숙현, 방정숙, 2008; 최지영, 방정숙, 2011a; 이화영, 장경윤, 2012; 최병훈, 방정숙, 2012; 최지영, 방정숙, 2012; 유미경, 류성림, 2013; 김유경, 방정숙, 2014; 강향임, 최은아, 2015; 김정원, 최지영, 방정숙, 2016; 정영옥, 정유경, 2016).



[그림 2] 초기 대수 교육 관련 연구의 연구 대상별 비중

연구 대상별 논문 편수의 경우 <표 8>과 같이 학생 대상의 연구 71편 중 55편이 4학년 이상의 고학년을 대상으로 하고 있었으며, 그중에서도 6학년을 대상으로 한 연구가 29편으로 가장 많았다. 반면 유아 및 1학년을 대상으로 한 연구논문 편수가 특히 적었으며, 유아나 1학년을 대상으로 한 경우에도 해당 학년을 단독으로 연구하기보다는 유아, 1, 2학년 혹은 2, 4, 6학년을 대상으로 하거나 1~6학년 전체를 대상으로 하는 것과 같이 고학년과 함께 연구 대상으로 선정하여 연구를 실시하고 있었다. 그러나 서론에서 언급하였던 바와 같이 NCTM에서는 이미 2000년에 초등학교 입학 시기부터 초기 대수 교육을 실시할 것을 권고해왔고, ICME-13 「Topical Surveys book」 시리즈 중 초기 대수 편(Kieran et al., 2016)에서도 만 6세부터를 초기 대수 교육의 대상으로 삼고 있음을 볼 때, 낮은 학년 군을 대상으로 하는 연구에도 관심을 가질 필요가 있을 것으로 보인다. 또한 실제 학생을 대상으로 한 연구가 2006년 처음 등장한 후, 폭발적으로 증가하였는데, 이를 통하여 근래 우리나라 초기 대수 교육 연구의 초점이 주로 학생에게 맞추어져 있음을 알 수 있다.

2000년대 후반 이후로 수학 교사 교육에 대한 연구의 주제가 다양화되고 연구의 양도 증가하고 있는 추세임에도 불구하고(방정숙, 선우진, 2014), 초기 대수 교육에 있어 교사 대상의 연구의 수는 2014년 이래로 4편에 불과하였다. 2000년부터 2017년까지 6개 학술지에 게재된 89편의 논문 중에서 예비교사를 대상으로 한 초기 대수 교육 관련 연구는 한 편도 없었다. 수업이 교사-학생-내용 간 복잡한 상호작용의 구조로 얽혀있음을 고려해볼

때(Lampert, 2003), 내용 및 학생에 주로 초점이 맞추어진 국내 초기 대수 교육에서 이를 지도하는 교사에 관한 연구는 반드시 필요하며, 교사 교육에 대한 관심이 높아지고 있는 국내 수학 교육 학계의 분위기를 고려해보면 충분히 가능할 것으로 보인다.

<표 8> 초기 대수 교육 관련 연구 논문의 연구 대상별 논문 편수

연구 대상	연도별 논문편수(중복)																	계	
	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16		17
유아	1	1
1학년	1	1	1	3	
2학년	2	2	.	1	.	1	1	7	
3학년	1	.	.	.	1	1	.	.	2	.	5
4학년	1	.	2	.	.	2	3	.	1	1	2	.	12
5학년	2	.	.	1	3	1	1	.	2	1	11
6학년	1	3	3	3	1	4	5	1	1	2	4	1	29
수학영재 5,6학년	1	1	1	3
현직교사	1	1	.	2	4
예비교사	0
교과서	.	.	3	2	.	.	.	3	.	.	2	2	.	4	2	6	3	4	31
기타	1	1	2	1	1	6

한편, 2000년대 초반에 주로 실시되었던 선행 연구들을 대상으로 한 메타 연구는 2010년 이후부터는 거의 이루어지지 않았던 반면, 교과서를 분석하거나, 다른 나라 교과서와 비교하고, 개선안을 제안하는 등의 연구는 2010년 이후로 비교적 활발하게 진행되었다. 실제로 이러한 연구 결과들이 개정 교육과정의 수학과 교과서에 반영되기도 하고(예를 들면, 방정숙, 선우진, 2016a, b), 건설적인 비판을 하는 연구들도 함께 등장하는 것을 통해 볼 때 국내 초기 대수 교육 연구 분야에 있어서 교과서에 관한 담론의 장이 비교적 활성화되어 있음을 알 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 2000년부터 2017년까지 6개의 국내 주요 수학 교육 학술지에 게재된 논문 중 초기 대수 교육 관련 연구 89편을 선정하여 연도 및 학술지별, 연구 주제별, 그리고 연구 대상별로 동향을 분석하였다. 같은 기간 게재된 수학 교육 연구 논문 수에 비하여 초기 대수 교육 연구 논문의 증가 추세가 보다 높았다. 이는 국내 수학 교육 학계에서 초기 대수 교육 연구가 빠르게 성장하고 있는 분야임을 의미하며 초기 대수 교육 연구에 주목해야 할 타당성을 제공해준다. 연도별 분포로만 보았을 때에는 2000년대 후반부터 논문의 수가 다소 증가하였으나, 특정 연구자 그룹의 연구물이 많은 수를 차지하여 초기 대수 교육 연구의 저변이 확대되었다고 보기는 어려웠다. 본 연구 결과를 통해 2000년 이후 초기 대수 교육 연구의 동향을 다음과 같이 확인할 수 있었다.

연도 및 학술지별 동향 분석 결과, 그 동안의 초기 대수 교육 연구는 특정 연구자 그룹의 연구가 국내 연구에서 상당한 비중을 차지하고 있었으며, 이로 인해 해당 연구자 그룹

에서 주로 게재하는 학술지에 집중적으로 초기 대수 교육 관련 논문이 게재되고 있었다. 특정 연구자 그룹에 의하여 논문 편수에 급격한 변동이 존재할 수 있다는 사실은 우리나라 초기 대수 교육 연구의 저변이 그만큼 얕다는 의미이기도 하나, 한편으로는 전문 연구자 그룹을 통한 질적인 성장을 이루어낼 가능성이 있음을 의미하기도 한다. 또한 초기 대수 교육 연구는 교육과정 개정 시기에 논문편수가 증가하는 경향을 보였는데, 이를 통해 수학 교육과정 및 교과서와 관련한 초기 대수 교육 연구가 활성화되어 있음을 알 수 있었다.

연구 주제별 동향 분석 결과, 대수적 내용 영역 중에서도 수학 교과서에 수록된 단원과 관련된 내용 영역이 집중적으로 연구되고 있었다. 교과서에서 다루고 있었기 때문에 해당 내용 영역에서 학생들이 겪는 어려움이 보고될 수 있었고, 이로 인해 관련 연구들이 풍성해질 수 있었던 것이다. 반면 교과서에서 다루지 않는 내용 영역에 대한 연구물의 수는 비교적 적었다. 초기 대수의 근본적인 아이디어가 후속 대수 학습과의 자연스러운 연결을 위한 것임을 고려해볼 때, 보다 다양한 내용 영역에 대한 연구가 이루어질 필요가 있다. 또한 대수적 사고 과정의 발달에 대한 연구도 이루어질 필요가 있다.

연구 대상별 동향 분석 결과, 초기 대수 교육 연구의 대부분은 학생을 대상으로 하고 있었으며, 그 중에서도 초등 고학년에 집중되어 있었다. 이것은 비례 추론과 같은 대수적 사고의 내용 영역이 초등 고학년 수학 교과서에 주로 실려 있고, 대수의 관문이 시작되는 상급학교로의 진학을 앞두고 수학적 연결성을 직접적으로 고려하는 시기이기 때문인 것으로 보인다. 그에 비해 초등 저학년을 대상으로 한 연구의 비중은 상대적으로 적었다. 교사를 대상으로 하는 연구 또한 그 비중이 적었지만 초기 대수와 관련한 초등 교사의 지식을 분석한 연구(예를 들어 정호정, 최창우, 2014; 강향임, 최은아, 2015; 박슬아, 오영열, 2017; 방정숙, 선우진, 2017)가 근래에 등장하기 시작한 것은 주목할 만하다. 수학 교육 연구에 있어 교사 교육의 중요성을 고려해볼 때 향후 초기 대수 교육과 관련된 교사 지식, 교사 전문성, 교사 전문성 개발 등에 대한 보다 활발한 연구가 진행되어야 할 것으로 보인다.

이를 토대로 향후 국내 초기 대수 교육 연구에 위한 시사점을 제언하면 다음과 같다.

첫째, 국내 초기 대수 교육 연구에서는 초기 대수 교육 실행을 위한 학생 수준 및 교과서 분석 연구에 치중해왔다. 이는 국외의 초기 대수 교육 연구 결과를 빠른 시간 내에 국내에서 적용하고 응용하는 데에 효과적인 전략이 되었지만, 다른 한편으로는 초기 대수 교육의 본질에 대한 논의 없이 기존의 선행 연구를 뒤따라가는 연구에 치중되는 결과를 가져왔다. 이러한 원인으로는 초기 대수 교육 연구에 있어서 장기적이면서도 규모 있는 연구 지원의 부재를 생각해 볼 수 있다. 실제로 Kaput (2008) 및 Blanton et al. (2015)과 같은 대수적 사고의 본질에 대한 기초 연구들은 TERC 주관의 초기 대수 교육 프로젝트의 결과물이자, 오랜 기간 축적된 수학적 사고에 관한 연구로부터 비롯되었다. 초기 대수 교육 연구에 대한 보다 거시적인 관점의 연구 지원을 실시하여 대수적 사고의 정의, 범주, 과정, 산물 등에 대한 면밀한 탐색을 통하여 대수적 사고의 본질을 규명하고, 이를 이론화하여 초기 대수 교육의 발전에 질적으로 기여하는 기초 연구가 이루어질 필요가 있다.

둘째, 초기 대수 교육 연구에서 지배적으로 사용되는 이론적인 프레임에 대한 비판적인 검토가 필요하다. 현재 초기 대수 교육 연구에서 가장 많이 활용되며, 본 연구에서도 연구 주제별 분류의 기준으로 활용하고 있는 Blanton et al. (2015)의 내용 영역 프레임은 대수적 사고의 대상이 되는 내용 영역을 엄밀하게 구분하기 보다는 대수적 사고를 가르치기 위한 필수 이해의 단위로 묶은 것이다. 이들은 자신들의 프레임이 대수적 내용을 구조화하는 유일한 분류는 아니며, 내용 범주들이 서로 배타적인 것은 아니라며 변화 가능성을

시사한 바 있다(Blanton et al., 2015). 별도의 내용 영역으로 제시되고 있는 함수적 사고와 비례 추론의 경우를 생각해 보면, 대수적 이해를 신장시키기 위한 맥락으로서의 함수는 양적인 상황에서의 관계를 이해함으로써(Blanton et al., 2011; Ellis, 2011; Kieran, 1996) 구조에 대한 추론을 학습한다는 의미가 있으므로(Blanton et al., 2011) 비례 추론 또한 함수적 사고에 포함될 여지가 있는 것으로 생각해 볼 수 있다. 그러므로 대수적 사고에 관한 프레임 수동적으로 받아들이지 않고, 주어진 프레임에 대한 비판적인 시각을 견지하며 이를 개선하거나 새로운 프레임을 만들어가는 시도가 필요하다. 이를 통해 우리나라만의 초기 대수 교육 연구의 특색을 가질 수 있을 것이다.

셋째, 보다 장기적인 관점의 초기 대수 교육 연구가 실행될 필요가 있다. 초기 대수 교육의 시작이 중등학교에 진입하는 학생들이 대수 학습에서 겪는 어려움을 해소하기 위한 데에서 비롯하였음을 고려해 볼 때, 초기 대수 교육의 효과는 대수 교육에서의 성과를 통해 입증 될 수 있다. 또한 초기 대수 교육을 받았던 학생들이 대수 교육에 진입한 이후에 드러내는 수행의 차이는 초기 대수 교육 연구에 실질적인 피드백을 제공해 줄 수 있으며, 초기 대수 교육 연구의 필요성을 탄탄하게 지지해 줄 수 있다. Kieran et al. (2016)도 초기 대수 교육 연구의 향후 과제의 하나로 초기 대수가 학생들의 향후 대수 학습에 미치는 영향에 대한 연구를 제시한 바 있다. 이는 초기 대수 교육 연구의 길지 않은 역사로 인하여 국외에서도 아직까지 장기적인 관점의 초기 대수 교육 연구가 부족함을 의미하며, 동시에 장기적인 관점의 국내 연구를 통해 국제적인 초기 대수 교육 연구의 새로운 장을 열어갈 기회가 될 수 있을 것으로 보인다.

넷째, 초기 대수 교육 연구의 대상을 보다 낮은 연령으로 확장할 필요가 있다. 전술한 바와 같이 국내 연구의 경우, 학생을 대상으로 한 초기 대수 교육 연구의 80% 이상이 초등학교 4, 5, 6학년에 집중되어 있었다. 물론, 초등 고학년을 대상으로 하는 초기 대수 교육 연구 역시 향후 대수 교육으로의 이행에 직접적인 영향을 미칠 수 있다는 의의가 있으나, 보다 어린 학생들을 대상으로 대수적 사고의 가능성을 탐색하는 일은 초기 대수와 산술의 불명확한 경계를 탐색하고, 초기 대수를 재개념화하도록 해 줄 수 있다. 실제로 Stephens et al. (2017)은 5, 6세까지 어린 아동을 대상으로 한 초기 대수 연구의 증가로 인하여 K-12 수준의 사고로 보았던 대수적 사고에 대한 재개념화가 진행되는 중이라고 언급하였다. 또한 보다 낮은 연령의 학생들을 대상으로 한 연구를 통하여 대수적 사고와 산술적 사고의 관계를 탐색함으로써 산술 다음에 대수라는 역사발생적 순서를 재검토하는 장을 마련할 수 있을 것이다.

다섯째, 실제 수업 개선을 통해 초기 대수 교육을 실시 할 수 있는 교수-학습 방안에 대한 연구가 수행될 필요가 있다. 대수적 사고 요소에 대한 학생의 이해와 대수적 사고 함양을 위한 초등 수학 교과서 개선 연구들을 통하여 이제는 교수-학습 방안을 탐색하고 이를 실제 학생에게 적용하여 그 효과를 검증해나가는 연구가 필요한 시점이다. 아울러 이러한 실제적 수업의 효과적 실행을 위해서 무엇보다 중요한 초기 대수 교육을 시행하는 교사의 역량에 대한 연구도 함께 이루어져야 할 것이다. 교사는 교육과정의 추상을 교실 내에서 수업의 실제로 변환시키는 데 중심적인 역할을 하는 실천가이며, 동일한 수학 과제와 교육과정, 내용지식을 갖추고 있더라도 다양한 맥락적 요인들에 의해 실제 수업 실행은 크게 달라질 수 있다(McClain et al., 2009). 현직교사 및 예비교사를 대상으로 한 초기 대수 교육 관련 연구를 통하여 현장에서의 초기 대수 교육의 저변을 확대하는 데에 기여할 수 있을 것이다.

한편 공학 기술의 혁신적인 발전에 따른 새로운 접근의 연구 방법에도 관심을 가져볼

필요가 있다. 싱가포르에서는 자기공명영상장치(Magnetic Resonance Imaging)를 사용하여 성인 대수 학습자의 문제 해결 전략에 따른 인지 과정을 추적하는 연구가 시행되어 주목을 받은 바 있다(Lee et al., 2010). 이와 같은 뇌인지과학적인 접근은 초기 대수 교육 분야에서도 성장하기 시작하고 있는 분야이므로(Kieran et al., 2016), 국내 연구자들에게 초기 대수 교육 연구에 있어 새로운 기회를 제공해 줄 수 있을 것으로 예상된다.

참 고 문 헌

- 강문봉. (2011). 자연수의 나눗셈 지도에 대한 고찰. **수학교육학연구**, 21(1), 1-16.
- 강소희, 방정숙. (2008). 초등학교 6 학년 학생들의 문자 이해에 대한 실태 조사. **학교수학**, 10(2), 139-154.
- 강향임, 최은아. (2015). 비와 비율에 관한 학생의 오류와 어려움 해결을 위해 필요한 교사 지식. **학교수학**, 17(4), 613-632.
- 교육부. (2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호.
- 권성룡. (2007). 초등 수학 교과서의 규칙성과 함수 영역의 활동 고찰. **C-초등수학교육**, 10(2), 111-123.
- 권오남, 주미경. (2003). 대학 수학교육 연구의 동향과 과제. **A-수학교육**, 42(2), 229-245.
- 기정순, 정영옥. (2008). 등호 문맥에 따른 초등학생의 등호 개념 이해와 지도 방법 연구. **학교수학**, 10(4), 537-555.
- 김경선, 박영희. (2007). 초등학생의 비례적 추론 지도에 관한 연구. **학교수학**, 9(4), 447-466.
- 김민정, 이경화, 송상현. (2008). 초등 수학영재의 대수적 사고 특성에 관한 분석. **학교수학**, 10(1), 23-42.
- 김성준. (2002a). 수학 학습에서 이행에 관한 고찰. **수학교육학연구**, 12(1), 29-48.
- 김성준. (2002b). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰. **수학교육학연구**, 12(3), 353-369.
- 김성준. (2002c). 과정-대상 측면에서 본 '대수적 사고'연구. **수학교육학연구**, 12(4), 457-472.
- 김성준. (2003a). '초기 대수'를 중심으로 한 초등대수 고찰. **수학교육학연구**, 13(3), 309-327.
- 김성준. (2003b). **대수적 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 박사학위논문.
- 김유경, 방정숙. (2014). 곱셈적 구조에 대한 2, 4, 6 학년 학생들의 수학적 사고의 연결성 분석. **A-수학교육**, 53(1), 57-73.
- 김유경, 방정숙. (2017). 초등수학교육 연구동향: 최근 7 년간 게재된 국내 학술지 논문을 중심으로. **C-초등수학교육**, 20(1), 19-36.
- 김정원, 방정숙. (2008). 초등학교 3 학년 학생들의 함수적 사고 분석. **C-초등수학교육**, 11(2), 105-119.
- 김정원, 방정숙. (2013). 초등학교 3 학년 학생들의 곱셈적 사고에 따른 비례 추론 능력 분석. **수학교육학연구**, 23(1), 1-16.
- 김정원, 방정숙, 최지영. (2016). Rasch 모델을 통한 초등학교 학생들의 등호 이해 분석. **A-수학교육**, 55(1), 1-19.

- 김정원, 최지영, 방정숙. (2016). 초등학생들은 ‘=’를 어떻게 이해하는가?. **수학교육학연구**, 26(1), 79-101.
- 노은환, 정상태, 김민정. (2015). 초등 수학에서 자연수와 분수의 사칙연산에 대한 개념 익히기 및 연산 사이의 연결 분석. **한국초등수학교육학회지**, 19(4), 563-588.
- 박경미. (2013). 수학교육학과 수학 연구자들의 학술지 선호 경향에 대한 조사 연구. **수학교육학연구**, 23(4), 423-448.
- 박슬아, 오영열. (2017). 비와 비율 지도에 대한 교사의 PCK 분석. **한국초등수학교육학회지**, 21(1), 215-241.
- 방정숙, 선우진. (2014). 수학 교사교육에 관한 국내 연구의 동향 분석. **학교수학**, 16(2), 335-353.
- 방정숙, 선우진. (2016a). 초등학교 수학 교과서에 제시된 패턴 지도방안에 대한 분석. **C-초등수학교육**, 19(1), 1-18.
- 방정숙, 선우진. (2016b). 초등학생의 함수적 사고 성장을 위한 기하 패턴 지도 사례의 분석. **수학교육학연구**, 26(4), 769-789.
- 방정숙, 선우진. (2017). 함수적 사고를 지도하기 위한 초등학교 교사의 지식 분석: 수학 과제 및 수업 전략에 대한 지식을 중심으로. **한국초등수학교육학회지**, 21(2), 343-364.
- 방정숙, 선우진, 김은경. (2017). ‘규칙과 대응’에 대한 2007 개정 및 2009 개정 초등학교 수학 교과서 분석. **학교수학**, 19(1), 117-135.
- 방정숙, 이유진. (2017). 7~9 세 학생들의 관계 파악 및 표현 능력. **한국초등수학교육학회지**, 21(1), 49-72.
- 방정숙, 조선미, 김정원. (2017). 초등학교 수학 교과서 및 익힘책에 제시된 변수 개념에 관한 분석. **A-수학교육**, 56(1), 81-100.
- 방정숙, 최인영. (2016). 초등학교 3 학년 학생들의 대수적 사고에 대한 실태 분석. **C-초등수학교육**, 19(3), 223-247.
- 방정숙, 최지영. (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석-일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. **A-수학교육**, 50(1), 41-59.
- 서경혜, 유슬아, 정진영. (2003). 창의성 관점에서 본 제 7 차 초등 수학과 교육과정: 규칙성과 함수를 중심으로. **C-초등수학교육**, 7(1), 15-29.
- 서은미, 방정숙, 이지영. (2017). 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석. **수학교육학연구**, 27(4), 791-810.
- 송상현, 임재훈, 정영옥, 권석일, 김지원. (2007). 초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석. **수학교육학연구**, 17(2), 163-177.
- 안숙현, 방정숙. (2008). 5, 6, 7 학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사. **수학교육학연구**, 18(1), 103-121.
- 우정호, 김성준. (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방안의 탐색. **수학교육학연구**

- 구, 17(4), 453-475.
- 유미경, 류성림. (2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른 일반화 방법 비교. **학교수학**, 15(2), 459-479.
- 윤민지, 방정숙. (2009). 5, 6 학년 학생들의 이원일차연립방정식 형태의 문장제 해결 과정 분석. **E-수학교육 논문집**, 23(3), 761-783.
- 이혜민, 신인선. (2011). 산술과 대수적 사고의 연결을 위한 분수 scheme 에 관한 사례 연구. **C-초등수학교육**, 14(3), 261-275.
- 이화영, 장경윤. (2010). 초기 대수 (Early Algebra) 의 연구 동향과 접근에 관한 고찰. **수학교육학연구**, 20(3), 275-292.
- 이화영, 장경윤. (2012). 초등학생의 대수 추론 능력과 초기 대수 (Early Algebra) 지도 (1). **학교수학**, 14(4), 445-468.
- 전형옥, 이경화, 방정숙. (2009). 초등학교 6 학년 학생의 양적 추론 사례 연구. **수학교육학연구**, 19(1), 81-98.
- 정영옥, 정유경. (2016). 초등학교 5 학년과 6 학년의 비례 추론 능력 분석. **학교수학**, 18(4), 819-838.
- 정호정, 최창우. (2014). 초등학교 교사의 등호 개념에 관한 지식분석 사례 연구. **한국초등수학교육학회지**, 18(2), 211-236.
- 진성현, 박만구. (2016). 교육과정의 변천에 따른 초등 수학 교과서에서 소수의 곱셈과 나눗셈 지도 순서 및 방법 분석. **한국초등수학교육학회지**, 27(2), 55-75.
- 최병훈, 방정숙. (2011). 초등학교 1 학년 학생들의 수학적 패턴 인식과 사고 과정 분석. **수학교육학연구**, 21(1), 67-86.
- 최병훈, 방정숙. (2012). 초등학교 4, 5, 6 학년 영재학급 학생의 패턴 일반화를 위한 해결 전략 비교. **수학교육학연구**, 22(4), 619-636.
- 최지영, 방정숙. (2008). 초등학교 4 학년 학생들의 대수적 사고 분석. **E-수학교육 논문집**, 22(2), 137-164.
- 최지영, 방정숙. (2011a). 초등학생들의 범자연수 연산의 성질에 대한 이해 분석. **수학교육학연구**, 21(3), 239-259.
- 최지영, 방정숙. (2011b). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색. **학교수학**, 13(4), 581-598.
- 최지영, 방정숙. (2012). 초등학교 2, 4, 6 학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. **학교수학**, 14(3), 275-296.
- 최지영, 방정숙. (2014). 초등학교 6 학년 학생들의 함수적 관계 인식 및 사고 과정 분석. **수학교육학연구**, 24(2), 205-225.
- 하수현, 방정숙, 주미경. (2010). 초등수학교육 연구동향-최근 5 년간 게재된 국내 학술지 논문을 중심으로. **A-수학교육**, 49(1), 67-83.

- 한은혜, 류희수. (2008). 초등에서의 곱셈적 사고 지도. *학교수학*, 10(2), 155-179.
- Bergsten, C. (1999). From sense to symbol sense. In I. Schwank (Ed.), *European research in mathematics education I.II* (pp. 126-137). Osnabrück, Germany.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 방정숙, 최지영, 이지영, 김정원 (역) (2017). 대수적 사고의 필수 이해. 서울: (주)교우.
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87.
- Brito-Lima, A. P. (1996). *Desenvolvimento da representação de igualdades em crianças de primeira a sexta série do primeiro grau*. Master's thesis. Mestrado em Psicologia, Iniversidade Federal de Pernambuco, Recife, Brazil.
- Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 137-159). Heidelberg, Germany: Springer.
- Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34-63.
- Cai, J. (Ed.). (2017). *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Plenary address presented at the *Twenty-second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, Arizona.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Ed.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, M. K., Bishop, A., Keitel-Kreidt, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2012). *Third international handbook of mathematics education* (Vol. 27). Springer

Science & Business Media.

- Davis, R. B. (1985). ICME-5 report: Algebraic thinking in the early grades. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4, 195-208.
- Dooley, T. (2011). Using epistemic actions to trace the development of algebraic reasoning in a primary classroom. *Proceedings of 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 450-459). Rzeszow, Poland.
- Dörfler, W. (2007). Matrices as Peircean diagrams: A hypothetical learning trajectory. In European research in mathematics education. *Proceedings of the 5th congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 852-861). Larnaca, Cyprus.
- Dreyfus, T., Artigue, M., Potari, D., Prediger, S., & Ruthven, K. (Eds.) (2018). *Developing research in mathematics education: twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*. London: Routledge.
- Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationships through quantitative reasoning. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 215-238). Heidelberg, Germany: Springer.
- Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9(2), 19-25.
- Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of a variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 49-65). Honolulu, HI.
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hodgen, J., Oldenburg, R., & Stromskag, H. (2018). Algebraic thinking. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education: twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe*. London: Routledge.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Ed.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2000). *Algebraic Reasoning in the Context of Elementary Mathematics: Making It Implementable on a Massive Scale*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

- Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (Vol 1, pp. 344–352). Melbourne: Australia.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde & A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271–290). Seville, Spain: S.A.E.M. Thales.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. New York: Springer.
- Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K–16 perspective* (pp. 153–170). New York, NY: Routledge/Taylor & Francis Group.
- Lampert, M. (2003). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press.
- Lee, K., Yeong, S. H., Ng, S. F., Venkatraman, V., Graham, S., & Chee, M. W. (2010). Computing solutions to algebraic problems using a symbolic versus a schematic strategy. *ZDM*, 42(6), 591–605.
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *The Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 113–120.
- Malara, N., & Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*. Bologna, Italy: Pitagora.
- Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Sage.
- Matthews, P., Rittle-Johnson, B., McEldoon, K., & Taylor, R. (2012). Measure for measure: What combining diverse measures reveals about children's understanding of the equal sign as an indicator of mathematical equality. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 316–350.
- McClain, K., Zhao, Q., Visnovska, J., & Bowen, E. (2009). Understanding the role of the institutional context in the relationship between teachers and text. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 56–69). New

- York: Routledge.
- McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shiple, H. (2011). Benefits of practicing $4 = 2 + 2$: Nontraditional problem formats facilitate children's understanding of mathematical equivalence. *Child development*, 82(5), 1620–1633.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Council of Chief State School Officers.
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2015). The development of student's early number sense. *Proceedings of 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 446–452). Rzeszów, Poland.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, 42(3), 237–268.
- Radford, L. (2009). Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Proceedings of 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. XXIII–LIII). Lyon, France.
- Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303–322). Heidelberg, Germany: Springer.
- Radford, L. (2012). Early algebraic thinking, epistemological, semiotic, and developmental issues. Regular lecture presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, held in Seoul, Korea, 8 July–15 July, 2012. Retrieved at July 2, 2012. 권오남, 박정숙, 박지현, 박재희, 조경희, 조형미, 오국환, 곽문영 (역) (2016). *사회기호학적 관점의 수학 교수·학습: 대상화이론*. 서울: 경문사.
- Rojano, T., & Sutherland, R. (2001). Arithmetic world–algebraic world. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICME Study Conference: The Future of the Teaching of Algebra and Learning of Algebra* (Vol. 2, pp. 515–522). Melbourne, Australia.
- Schifter, D. (1998). *Developing operation senses as a foundation for algebra I*. Unpublished manuscript.
- Schwarz, B. B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B. Schwartz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds.), *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11–41). London: Routledge.

-
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1–36.
- Stephens, A. C., Ellis, A. B., Blanton, M., & Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), *First Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 173–182.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321.
- Wagner, S. E., & Kieran, C. E. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra, Vol. 4*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

<Abstract>

Domestic Research Trends and Tasks on Early Algebra Education
: Focused on the Elementary School Mathematics

Han, Chaereen⁶⁾; & Kwon, Oh Nam⁷⁾

This research analyzed domestic researches on early algebra education which are published in six major mathematics education journals in Korea. The purpose of this work is to grasp trends of early algebra education in Korea and to draw up future tasks. From 2000 to 2017, 89 papers which are related to early algebra education published in 6 journals. The 89 papers were categorized by research period, academic journals, research topics, and research subjects. As a result, the number of researches on early algebra education in Korea has increased since 2000. Although early algebra education belongs to the field of elementary mathematics education, lots of papers were published in other math education journals than in the math education journals for elementary school mathematics. Most research focused on proportional reasoning across the algebraic content area. The majority of the research subjects were students, especially upper-grade students of elementary school. Based on the results of this study, some implications for early algebra education in Korea were suggested.

Key words: early algebra education, elementary school mathematics, research trend

논문접수: 2018. 04. 11

논문심사: 2018. 05. 07

게재확정: 2018. 05. 18

6) feelgood81@snu.ac.kr

7) onkwon@snu.ac.kr