

한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등 교과서에 제시된 속력 개념의 비교·분석

최은아¹⁾ · 정연준²⁾

본 연구는 한국과 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 수학 교과서의 속력 개념 지도 내용을 비교·분석하여, 초등학교에서의 속력 지도에 대한 시사점을 도출하고자 하였다. 비례관계를 바탕으로 하는 속력 개념의 특성에 대한 이론적 논의와 초등수학에서의 속력에 대한 선행연구를 분석하여 교과서 분석틀을 마련하였으며, 이에 따라 교과서들을 분석하였다. 교과서 분석 결과를 토대로, 우리나라 속력 개념의 지도 개선을 위한 시사점을 제시하였다.

주제어: 속력, 등속 운동, 비례추론, 수학과 교육과정, 초등 수학 교과서, 국제 비교

I. 서 론

최근 수학교육에서 수학적 지식 자체의 전달보다는 지식의 활용 능력이 강조되고 있으며, 학제를 뛰어넘은 수학과 다른 과목의 융합 프로그램의 개발과 지도가 활발하게 모색되고 있다. 운동 현상을 설명하는데 기본이 되는 속력 개념은 비와 비율 개념이 정의에 포함되어 있다는 점에서 수학적 지도의 대상이 되면서 동시에 과학과에 속하는 주제이기도 하다. 곧 속력 개념은 수학과 과학이 맞닿아 있는 제재이면서, 초등수학과 초등과학에서 전통적으로 지도되어 온 내용인 것이다. 이러한 점에서 볼 때, 최근의 수학적 지식의 활용과 학제 간 융합을 강조하는 흐름은 초등학교에서 속력 개념이 어떻게 지도되고 있는지에 대해 살펴볼 필요성을 제기한다.

최근 우리나라는 초등학교에서의 속력 개념의 지도를 축소했다고 할 수 있다. 2015 개정 교육과정 문서에는 더 이상 속력 개념이 수학과 교육내용으로 명시되지 않고 있다(교육부, 2015). 2009 개정 교육과정에서 ‘타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 예로서 속력을 지도한다’는 <교수·학습상의 유의점>의 내용마저 2015 개정 교육과정에서 삭제된 상태이다(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015). 오히려 ‘비율을 평가할 때 속력을 구하는 문제는 다루지 않는다’는 <평가방법 및 유의사항>이 제시되어 있다(교육부, 2015). 또한 2009 개정 교과서에서 속력은 ‘비와 비율’ 단원에서 한 차시로 지도되고 있었으나(교육부, 2107), 2015 개정 교과서(현장 검토본)에서는 더욱 축소되어, 비율이 사용된 사례를 다루는 차시에서 한 개 문항으로만 제시될 뿐이다(교육부, 2018).

1) [제1저자] 우석대학교 수학교육과, 부교수

2) [교신저자] 한국교육과정평가원, 부연구위원

속력 개념의 학습에는 비와 비율에 대한 이해가 선행되어야 한다. 그런데 비와 비율은 초등수학 내용 중에서 가장 어려운 주제라고 볼 수 있으며, 학생들이 이해하기에 힘든 부분이 많을 수 있다. 또한 2009 개정 교과서에서 속력 개념을 비율이 적용된 사례로서 활용했다기보다는 별도의 학습 내용으로 구현했다는 지적이 있기도 하였다(박경미 외, 2015). 2015 개정 교육과정에서의 속력 개념의 축소가 이와 같은 상황들을 반영한 것일 수 있지만, 초등수학에서 전통적으로 다루어져 온 과학 분야와의 연계 주제이자 실생활에 수학적 개념을 활용하는 맥락이었던 속력이 상당히 약화되었다는 점에서는 아쉬움이 크다고 할 수 있다. 이에 초등학교에서의 속력 지도에 대한 다른 나라의 사례들을 살펴보는 것은 우리나라의 실태를 진단하고 향후 지도 방향 설정에 참고가 된다는 점에서 의미가 있다고 할 수 있다.

본 연구에서는 한국과 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 수학 교과서의 속력 개념 지도 내용을 비교·분석하여, 우리나라 초등학교에서의 속력 지도에 대한 시사점을 도출하고자 한다. 비례관계를 바탕으로 하는 속력 개념의 특성과 초등수학에서의 속력에 대한 선행연구를 분석하여 교과서 분석을 틀을 개발하고, 이 틀을 이용하여 한국, 일본, 싱가포르, 미국의 교과서를 분석할 것이다. 그리고 교과서 분석 결과를 토대로 우리나라 초등학교 속력 지도에 대한 개선 방안을 제시하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 속력 개념과 비례관계

빠르게 움직이는 물체는 느린 물체보다 동일한 시간에 더 많은 거리를 이동할 수 있다. 운동의 빠르기를 이와 같이 표현하고자 한 시도는 고대 그리스까지 거슬러 올라간다. 아리스토텔레스에 의하면, 움직이는 물체를 더 빠르게 움직이게 하면 같은 시간에 더 먼 거리를 이동하며 같은 거리를 더 짧은 시간에 이동한다(Lindberg, 2009: 468). ‘같은 시간’을 주어진 것으로 보고, 이동한 거리와 빠르기를 연결하거나, ‘같은 거리’를 주어진 것으로 보고 이동에 소요된 시간과 빠르기를 연결시킨 것이다.

학교수학에서 속력은 일반적으로 ‘이동 시간에 대한 이동 거리의 비’ 또는 ‘단위 시간에 간 거리’로 정의된다. 이러한 정의는 이동에 걸린 시간과 이동한 거리 사이에 성립하는 관계를 비를 이용하여 압축적으로 제시한다. ‘이동 시간에 대한 이동 거리의 비’ 또는 ‘단위 시간에 간 거리’와 같은 정의는 얼핏 서로 다르게 보이지만 본질적으로 같은 의미를 가진다. 비는 두 양에 대한 곱셈적 구조에 기반한 비교이다. 예를 들어 사과 2개와 귤 6개가 있을 때, 사과를 기준량으로 하여 비교하고자 하는 귤의 개수가 기준량인 사과 개수의 몇 배인지를 나타내어 비교하는 것이다. 그런데 시간과 거리라는 서로 다른 양 사이의 비인 속력은 서로 동일한 양의 비인 곱셈적 비교 관계로 설명되지 않는다. 예를 들어, ‘4시간은 2시간의 두 배’이지만 ‘거리 4km는 2시간의 두 배’라는 것은 성립하지 않는다. 이에 Freudenthal(1983)은 전자를 내적비, 후자를 외적비로 설명한 바 있다. 외적비의 경우에는 ‘A는 B의 몇 배’가 아니라, ‘단위당 얼마’라는 의미를 가지면서 합성단위로 두 양을 결합하는 것으로 해석하는 것이 자연스럽다(Lobato & Ellis, 2010). ‘이동 시간에 대한 이동 거리의 비’로서의 속력은 새로운 합성단위(km/시)로 시간과 거리를 결합시킴으로써 ‘단위시간당 이동한 거리’라는 외적비의 개념으로 해석된다.

여기에서 비와 비율, 비례관계의 개념 구분을 통해서 속력 개념을 음미할 필요가 있다. 곱셈적 구조를 기반으로 두 양을 비교하는 '비'가 두 양의 한 쌍의 크기를 한 번만 비교하는 것에 제한되지 않는다는 점에 주목해야 한다. 비는 두 양의 다수의 쌍에서 동일하게 나타나는 관계를 설명한다. 예를 들어, $1:2=2:4=3:6=\dots$ 등과 같은 비례관계에서 두 양 사이에 성립하는 공통 성질 혹은 불변성에 해당한다(우정호, 2017). 속력은, 하나의 운동에서 생성될 수 있는 다양한 이동 거리와 이동 시간으로 구성된 순서쌍들이 공통적으로 지니고 있는 관계를 나타내는 비의 값, 곧 비율이다. 따라서 속력을 비의 속성을 가진 개념으로 이해하는 것에는 운동의 시간과 거리, 두 양의 공변성과 비의 일정성에 대한 이해가 수반되어야 하는 것이다. 주어진 운동의 시간이 변하면 거리도 변하고, 거리가 변하면 시간도 변한다는 공변성을 이해하는 것이 필요하며, 주어진 상황을 넘어서는 경우에서도 그러한 관계가 일정하게 유지된다는 사실을 인식하는 것이 필요하다. 다시 말하면, '단위 시간 동안 이동한 거리'라는 정의는 완결된 운동에 대한 설명이 아니라, 가능한 다른 상황과 연결될 수 있어야 한다. 이러한 점에서 '단위 시간 동안 이동한 거리'와 같은 속력에 대한 정의가 자칫 완료된 운동에 대한 설명으로서 속력을 제한하는 것과, '거리÷시간'이라는 속력 계산 공식이 가능한 운동 상황에 대한 접근을 대체하는 것을 주의할 필요가 있다. "비를 조금씩 묶인 분수로 나타내는 것은 초등수학에서 가장 수학적인 내용인 비에 대한 통찰을 어렵게 하고 그 논리적 지위를 낮추는 것(우정호, 2017)"이라는 지적이 속력의 지도 문제에서도 동일하게 적용될 수 있는 것이다. 속력의 정의와 계산법의 지도가 운동 상황에서 불변적으로 성립하는 시간과 거리 사이의 관계에 대한 접근을 대체해서는 안 될 것이다.

속력의 크기는 단위 시간 당 이동 거리로 측정될 수 있고 따라서 시간 단위와 거리 단위가 속력의 크기에 관여한다. 예를 들어, 단위 시간을 1초로 정할 수도 있고, 1분 또는 1시간으로 정할 수도 있다. 필요에 따라 다양한 단위 시간을 선정하여 사용할 수 있다. 거리 역시 다양한 단위 m, km 등 다양한 단위를 사용할 수 있다. 다양한 시간과 거리의 측정 단위는 하나의 속력을 다양한 방식으로 표현할 수 있게 한다. 일정한 속력으로 움직이는 물체의 경우 1분 동안 이동한 거리는 1초 동안 이동한 거리의 60배가 될 것이며, 1시간 동안 이동한 거리는 1분 동안 이동한 거리의 60배, 1초 동안 이동한 거리의 3600배가 될 것이다. 이와 비슷하게 거리를 m로 표현한다면 km로 표현하였을 때와 비하여 1000배의 수치가 나타날 것이다. 속력은 이동한 거리를 나눈 값이 단위 시간당 이동한 거리에 해당하는 바, 속력의 크기 수치는 이동한 거리의 크기를 이동한 시간의 크기로 나눈 결과에 해당한다. 속력의 크기 값과 거리에 해당하는 값을 시간에 해당하는 값으로 나누는 과정, 그리고 시간, 거리의 단위를 함께 제시하는 방안으로 km/h, km/m, km/s 등이 자연스럽다고 할 수 있다.

그런데 이상과 같은 속력의 크기 표현에서 유의할 부분이 있다. 예를 들어 '시속 60킬로미터'라는 표현은 한 시간 동안 동일한 속력으로 이동하였을 때 60킬로미터를 이동하는 속력을 의미한다. 다시 말하면 단위 시간 동안 이동한 거리의 비로 속력을 나타낼 때, 그 단위 시간 동안 속력이 변하지 않고 일정하게 유지된다는 것이, 곧 등속 운동이 속력의 크기 표현에 전제되어 있는 것이다. 시속 60킬로미터의 속력이란 한 시간 동안 그 속력으로 계속 움직였을 때 60킬로미터를 이동한다는 것이고, 이를 위해서는 매 1분마다 1킬로미터를 이동해야 한다. 이러한 점에서 시속 60킬로미터는 분속 1킬로미터와 동일한 것이 된다.

비례 관계에서 비교되는 두 양 사이에 성립하는 비의 일정성에 대한 이해가 중요한 만큼, 거리와 시간 사이의 비로 정의되는 속력 개념에서도 그러한 비의 일정성에 대한 이해가 중요하다. 특히 속력 개념과 관련된 비의 일정성 또한 앞에서 살펴본 등속 운동과 연결되어 있다. 시간에 비례하여 이동 거리가 증가한다는 것이 빠르기 곧 속력이 일정하다는 뜻이다. 속력의 크기를 수치적으로 나타내는데 필요한 속력의 단위에서도 이 점이 명확하게 드러나 있다. 초속, 분속, 시속 등의 속력 단위는 일정한 단위 시간 동안 속력이 일정하게 유지된다는 것이 전제되어 있다. 따라서 속력 개념의 지도는 속력 계산법의 숙달에 한정되지 않기 위해서는 일정하게 움직이는 운동 상황에서 생성되는 시간과 거리의 관계를 탐색하고 적극적으로 비례관계를 새로운 상황에 확장하여 적용하는 것을 충분히 경험할 필요가 있다.

2. 선행 연구

속력은 비와 비례관계가 적용되는 맥락이지만, 수학교육학계에서 비와 비율, 비례, 비례추론 등에 비해 상대적으로 주목받지 못한 주제였다고 할 수 있다. 정연준과 최은아(2017)는 초등학교에서의 속력 지도에 대한 연구가 주로 과학교육 분야에서 수행되었다고 지적한 바 있다. 이번 절에서는 그동안에 수행된 속력 관련 선행 연구들을 살펴보도록 한다.

신정운(2015)은 과학과 측면에서 속력 개념에 대한 초등학생들의 이해도를 조사하였다. 5, 6학년 학생들 97명을 대상으로 면담 조사를 실시하였는데, 5학년 학생들은 속력 개념을 학습하기 이전이었으며, 6학년은 수학 및 과학 수업에서 각각 속력을 학습한 이후였다. 그룹에도 6학년 학생들의 이해도가 5학년 학생의 이해도와 크게 다르지 않은 것으로 나타났다. 속력의 뜻을 설명하는 과정에서 6학년 학생 한 명만이 속력의 정의를 정확하게 제시하였을 뿐, 대부분의 5, 6학년 학생들은 속력에 대한 설명을 비형식적인 방식으로 제시하였다. 반면에 올바른 속력 계산식을 찾는 문제에 대해서 6학년 학생 중에서 60%, 5학년 학생 중 27%가 정확한 계산식을 찾을 수 있었다. 그러나 학생들은 실제로 초 단위로 시간과 미터 단위로 거리 정보를 제시하고 속력을 계산하도록 하였을 때, 직접 속력을 계산하는 것을 매우 어려워하였으며, 시간과 거리의 단위가 잘못 제시된 계산식을 고치는 것과 단위 변환 문제도 매우 어려워하였다.

정새롭과 조영미(2011), 정연준과 최은아(2017)은 속력과 관련하여 우리나라 초등학교 교육과정과 교과서를 분석하였다. 정새롭과 조영미(2011)은 ‘거리가 같을 때 빠르기 비교’, ‘시간과 거리가 다를 때 빠르기 비교’, ‘빠르기 비교 방법’, ‘시속, 분속, 초속’, ‘평균 시속, 평균 속력’, ‘노트’, ‘속력의 뜻’, ‘시속, 분속, 초속의 상호 관계’, ‘속력을 구하는 공식’ 등을 분석 요소로 선정하여 1차부터 5차 교육과정기에 이르기까지 우리나라 초등학교 수학교과서의 속력 지도 내용을 분석하였다. 이들의 분석 결과에 의하면, 속력을 다양하게 비교하는 것에 대한 내용은 점차 축소되는 반면, 속력의 단위 변환 관련 내용의 분량이 증가하고 있다는 것이 가장 큰 특징이었다. 정연준과 최은아(2017)는 우리나라 1차 교육과정기부터 2009 개정 교육과정기까지 우리나라 초등 수학교과서를 분석하였다. 이들의 분석 결과에 의하면, 우리나라 초등 수학교과서는 시간이 지남에 따라서 이동 시간과 이동 거리 사이의 비례관계를 탐색하는 부분이 축소되는 한편, 이동한 거리를 이동한 시간으로 나누어 계산한다는 속력 계산법의 지도를 보다 강화시켜 왔다. 또한 우리나라 초등수학의 속력 지도는 평균 속력 개념을 바탕으로 하며, 비례 관계에 대한 추론보다는 거리와 시간의 비의 값을 적용하는 측면이 강화되어왔음을 밝히고 있다.

성창근(2015)은 비율 개념의 학습을 강화하였을 때 나타나는 과학과 속력 개념 이해의 변화를 조사하였다. 과학과 ‘물체의 속력’ 단원을 분석하여 학습에 필요한 수학적 내용을 추출하여 이를 단위 학습에 앞서 지도하고, 이후 속력 단위 학습 결과를 분석하였다. 4시간에 걸친 프로그램에서 수학 교과에서 학습한 비율 개념이 과학 교과의 속력 개념에 보장되었을 때, 학생들의 속력 개념에 대한 이해도가 개선되었다고 보고하였다.

요컨대 선행연구들은 초등학교에서의 속력 지도가 속력 개념에 내포되어 있는 거리와 시간 사이의 비례 관계를 탐색하는 기회를 충분히 제공하기보다는 속력을 압축적으로 계산할 수 있는 공식을 제시하는 것에 초점이 있었음을 지적한다. 특히 초등수학에서 속력의 도입이 평균 속력을 가정하고 있음에 주목할 필요가 있다. 이러한 지도 방식은 학생들의 속력 개념 학습에 어려움을 유발해온 바, 비와 비례 관계에 대한 이해를 바탕으로 한 속력 개념 학습의 촉진을 대안으로 이야기하고 있다.

한편 속력 개념의 지도에 대한 개선 방향을 제시할 수 있는 주제들을 논한 연구들이 있다. 속력은 시간에 대한 거리의 비이기도 하지만, 빠르기를 재는 척도이기도 하다. 척도로서의 속력을 지도하기 위해서는 측정 영역에서 강조하고 있는 핵심적인 교수학습요소의 확인이 필요하며, 비율로서의 속력을 지도하기 위해서는 비례추론의 의미와 유형, 전략에 대한 확인이 필요할 것이다.

먼저 초등학교의 측정 지도에서 강조되어야 할 활동을 언급하고 있는 연구들을 살펴볼 수 있다. Shaw와 Cliatt(1989)은 학생들의 ‘측정 감각(measurement sense)’을 강조하고 있는데, 적절한 단위에 대한 지식, 측정 과정에 대한 지식, 어림의 필요성 판단, 어림 전략에 대한 지식이 이에 속한다. 이들은 학생들의 측정 감각을 신장시키기 위해서는 구체적인 조작 활동하기, 측정 과정과 그 결과를 표현하기, 비교하고 어림하고 나서 측정하기, 자신만의 측정 도구를 직접 만들어 보기, 가정과 연계한 측정 과제를 부여하고 이를 중심으로 지도하기 등의 활동이 필요함을 주장하였다. 한편 Reys, Lindquist, Lambdin과 Smith(2009)는 측정 과정을 단계화하여 제시하였으며, 역시 어림 활동을 강조한다. 이들은 측정 과정을 속성 확인하기, 단위 설정하기, 비교하기, 단위 개수를 확인하기, 기록하기 단계로 제시하고 있다. 만약 속력이 빠르기라는 양을 다루는 것이며, 빠른 정도를 재는 측정 활동으로 이해한다면, 빠르기라는 속성을 확인하고 속력의 단위를 이해하고 두 물체의 빠르기를 서로 비교하는 활동 등을 경험하게 하는 것이 필요할 것이다.

한편 속력 개념의 이해와 문제 해결과정에서 가장 중요하게 작용하는 사고라 할 수 있는 비례추론에 대한 연구를 살펴볼 필요가 있다. 일반적으로 비례추론과 관련하여 비례, 곱셈적 비교, 공변성, 비의 일정성, 선형성, 양적 사고, 질적 사고 등이 언급되고 있다. 이에 대해 정영옥(2015)은 ‘비와 비례 개념에 대한 이해를 바탕으로 다양한 비례 상황에서 곱셈적 관계와 공변성과 일정성을 이해하며, 질적·양적 사고에 기초한 적절한 곱셈적 전략과 모델을 이용하여 문제를 해결하고, 비례 상황과 비(非)비례상황을 인식하는 수학적 추론의 한 유형’으로 정의하고 있다. 따라서 ‘단위 시간당 거리의 비율’로 정의되는 속력은 비례추론의 사용과 밀접한 관계가 있을 수밖에 없다.

비례추론 과제를 해결하는 데에는 다양한 비례추론 전략들이 사용된다. 예를 들어, 비례식 전략은 형식적 수준의 전략에 해당되며, 비형식적 전략으로는 단위화 전략, 합성단위 전략, 구성 전략, 단위비율 전략, 조정 전략, 전체-부분 전략, 인수 전략 등이 있다. 이 중에서 구성 전략은 ‘1개에 3달러인 풍선을 4개 구입하는 금액은 3, 6, 9, 12로 더해가면 된다’와 같이 생각하는 방법이다. ‘2개에 6달러인 풍선은 1개에 3달러에 해당하므로, 풍선 3개는 9달러’로 생각하는 것은 단위비율 전략에 해당한다. 만약 ‘풍선 3개는 2개의

1.5배이므로, 지불 금액 또한 6달러의 1.5배인 9달러'로 생각했다면, 이는 인수 전략에 해당한다. 또한 '2개에 5달러, 3개에 8달러인 풍선은 어느 것이 더 저렴한가?'라는 문제에 대해 '2와 3의 최소공배수 6을 이용하여, 풍선 6개에 15달러와 16달러를 비교'한다면, 이는 조정 전략에 해당한다(정영옥, 2015; 최은아, 2016). 그런데 Lobato와 Ellis(2010)는 비례식과 같은 형식적 전략의 사용이 비례적으로 추론한다는 것을 보장하지 않는다는 점을 강조한다. 이는 속력 계산법의 숙달이 비례추론 능력 신장으로 이어지는 것은 아니며, 오히려 장애가 될 수도 있다는 것이다. 따라서 속력 지도시 비형식적 비례추론 전략을 포함한 다양한 비례추론 전략을 속력 계산법과 병행하여 지도할 필요가 있는 것이다.

한편 비례추론을 효율적으로 사용하기 위해서는 적절한 시각적 모델을 사용할 필요가 있다. 서은미와 방정숙, 이지영(2017)과 임재훈과 이형숙(2015)은 우리나라 수학교과서가 비례추론과 관련하여 시각적 모델을 충분하게 사용하고 있지 않다는 점을 지적하면서, 이중 수직선 등 새로운 시각적 모델의 사용 방안을 비례식과 비례배분 단원을 중심으로 검토한 바 있다. 속력 개념을 효율적으로 지도하기 위해서는 운동 상황에 포함된 비례관계를 탐색할 수 있는 시각적 모델의 사용 방안을 구체화할 필요가 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 분석 대상

본 연구는 한국과 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 수학 교과서에서 속력 개념을 어떻게 다루고 있는지를 비교·분석하는 것을 주요 내용으로 한다. 2018년 현재, 우리나라의 경우에는 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 6학년 교과서가 집필은 되었으나 현장 검토를 거치고 있는 중이다. 따라서 2015 개정 6-1 현장 검토분과 현재 6학년 학생들이 배우고 있는 2009 개정 6-1 교과서를 함께 분석 대상으로 선정하였다. 이와 비교 분석할 대상으로 전통적으로 초등학교에서 속력을 지도해오고 있는 국가 중에서 일본과 싱가포르, 미국을 선정하였고, 학습 계열성을 분석하고자 속력 단위뿐 아니라 비율(ratio, rate)을 다루고 있는 해당 학년 교과서들을 함께 선정하였다. 국정교과서 체제인 우리나라와 달리, 일본은 검정교과서, 싱가포르와 미국은 민영교과서 체제이므로, 분석 대상 교과서가 해당 국가의 최근 교육과정을 충실히 반영하고 있는지와 현지에서 널리 사용되고 있는지를 고려하였으며, 또한 최근의 국가 간 교과서 비교 연구에서 자주 언급되고 있는 교과서들을 선정하였다. 일본의 경우에는 2008년 개정된 학습지도요령에 따른 '新編 新しい算數(藤井齊亮 외, 2015)' 5과 6을 선택하였으며, 싱가포르의 경우에는 2012년 싱가포르 교육부가 발표한 교육과정에 따른 'My pals are here! Maths' 5A부터 6B까지를 선정하였다. 또한 미국의 경우에는 2010년에 공포된 Common Core State Standards for Mathematics[CCSSM]를 반영한 'enVision Math grade 6 common core'를 선정하였다.

<표 1> 분석 대상 및 출처

국가	교과서명	출처
한국	수학 6-1	교육부(2017), 교육부(2018)
일본	新編 新しい 算數 5下, 6	藤井齊亮 외(2015a, 2015b)
싱가포르	My pals are here! Maths 5A, 5B, 6A, 6B	Kheong, Soon, & Ramakrishnan(2017a, 2017b, 2018a, 2018b)
미국	enVision Math grade 6 common core	Charles et al.(2012)

2. 분석 기준

II장에서 살펴본 속력 개념의 복합적인 속성, 등속운동의 아이디어, 우리나라 역대 수학 교육과정 분석을 포함한 선행연구에서 쟁점이 되었던 내용들을 중심으로 <표 2>와 같은 분석틀을 설정하였다.

<표 2> 분석 요소 및 분석 내용

분석 요소	분석 내용
성취기준 및 지도 계열	<ul style="list-style-type: none"> · 속력의 지도 시기와 성취기준은 어떠한가? · 속력에 대한 지도 계열은 어떻게 조직되었는가?
속력의 설명	<ul style="list-style-type: none"> · 속력의 뜻은 어떻게 제시되는가? · 비율과 측도 속성을 어떻게 설명하는가? · 속력의 변화를 포괄하는가?
속력의 계산	<ul style="list-style-type: none"> · 속력의 계산법이 어떻게 제시되는가? · 단위 환산 등 문제해결 과정에서 형식적 전략과 비형식적 비례추론 전략을 어떻게 사용하는가?
속력 맥락 및 표현	<ul style="list-style-type: none"> · 비교 상황과 미지값을 구하는 상황이 다양하게 제시되는가? · 시각적 표현은 다양하게 제시되는가?

‘성취기준 및 지도 계열’ 요소에서는 각국의 초등학교 교육과정에 명시된 속력의 지도 시기와 성취기준을 살펴보고, 속력의 선행 개념이라 할 수 있는 비와 비율 단원에서 속력 단원에 이르기까지 지도 계열이 어떻게 조직되어 있는지를 살펴본다. ‘속력의 설명’ 요소는 속력의 의미를 어떻게 설명하고 있는지를 살펴보는 것으로, 기술된 속력의 뜻, 속력의 설명 속에 내포된 비율과 측도 속성, 속력의 변화에 대한 설명을 분석한다. ‘속력의 계산’ 요소에서는 속력의 계산법이 속력의 뜻과 어떻게 연결되어 제시되고 있는지를 분석하고, 단위 환산을 비롯한 문제해결 과정에서 형식적 전략과 비형식적 비례추론 전략의 사용 여부를 분석한다. 마지막으로 ‘속력 맥락 및 표현’ 요소에서는 속력을 비교하는 맥락과 미지값을 구하는 맥락 등 다양한 속력 맥락이 제시되고 있는지, 시각적 표현이 얼마나 다양하게 제시되고 있는지를 살펴볼 것이다.

IV. 분석 결과

1. 성취기준 및 지도 계열

현재 시행되고 있는 한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 교육과정을 살펴본 결과, 우

리나라를 제외한 3국 모두 속력에 대한 성취기준을 교육과정에 명시적으로 제시하고 있음이 확인되었다. <표 3>에서 보는 바와 같이, 일본, 싱가포르, 미국은 시기적으로 6학년(2학기)에 속력 단원을 지도하고 있다. 다만, 편제 영역은 상이하였는데, 일본은 양과 측정 영역에, 싱가포르는 수와 대수 영역, 미국은 비율과 비례관계 영역에 각각 편제하고 있었다. 각 나라마다 내용 영역의 범주와 그 수가 다르기 때문에 당연한 현상이라 할 수 있지만, 일본의 편제 영역은 다소 예외적이다. 미국과 싱가포르의 경우에는 통상 속력의 선행 개념으로 보는 비율이 속한 영역으로 편제하였지만, 일본만은 비율이 속한 수와 대수 영역이 아니라 양과 측정 영역에 편제하고 있기 때문이다. 이는 비율 또는 비례 관계에 의한 접근이 아니라 빠르기의 크기를 잴다는 측면을 강조한다는 의미이므로, 일본 교과서에 측도로서의 속력이 어떻게 구현되고 있는지를 이후 분석에서 자세하게 살펴볼 필요가 있다.

<표 3> 각국 교육과정의 속력 지도 시기와 편제 영역, 성취기준

	지도시기	영역	성취기준(또는 내용)	비고
한국	6학년	규칙성	없음	2015 개정 교육과정 (교육부, 2015)
일본	6학년 2학기	양과 측정	B(4) 속력(빠르기)에 대해서 이해하고, 이를 구할 수 있다.	学習指導要領 (文部科学省, 2008)
싱가포르	6학년 2학기	수와 대수	1.1 속력과 평균속력의 개념 1.2 거리, 시간, 속력과의 관계 1.3 다양한 단위로 속력 나타내기 1.4 속력과 평균속력 관련 문장제 해결하기	Mathematics Syllabus Primary one to six (Ministry of Education, 2012)
미국	6학년 2학기	비율과 비례관계	6.RP.3 실세계와 수학 문제 해결에 비율(ratio, rate) 추론 사용하기 6.RP.3.b 단위 가격과 일정한 속력을 포함한 단위 비율 문제 해결하기	CCSSM (CCSSI, 2010)

정연준과 최은아(2017)에 따르면, 우리나라의 경우도 6차 교육과정까지 속력을 양과 측정 또는 측도 영역에 편제하여 왔다. 7차 교육과정 이후에 속력을 규칙성 영역으로 편제한 것은 속력과 비례 개념과의 연결성을 강화하고자 하는 미국, 싱가포르와 맥을 같이하는 시도였다고 해석된다. 그런데 2009 개정 교육과정에서 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 예로서 지도되던 속력이, 활용의 예보다는 학습 내용으로 구현된 측면이 있을 뿐 아니라 지나치게 어려운 문항으로 평가되고 있다는 지적에 따라, 2015 개정 교육과정에서는 아예 삭제된 상태이다. 이와 같이 우리나라 초등수학에서 속력의 지도는 점차 약화되는 추세라고 할 수 있으며, 이러한 흐름은 속력을 성취기준으로 명시화하여 초등수학의 필수 내용으로 지도하고 있는 다른 나라들과 차이를 보이는 부분이다.

다음으로 속력의 선행 개념이라 할 수 있는 비와 비율 단원에서 속력 단원에 이르기까지의 지도 계열을 분석한 결과를 <표 4>에 나타내었다.

<표 4> 속력의 지도 계열

	학년	학년 및 단원명	학습 내용
한국	6-1	4. 비와 비율	·비 이해하기, 비율 이해하기
			·비율이 사용되는 경우 알아보기
	5年 下	10. 비교하는 방법 생각하기(1)	·단위량당 크기 이해하기 ·단위량당 크기를 사용하여 비교하기
		13. 비교하는 방법 생각하기(2)	·비율 이해하기 ·백분율 이해하기 ·백분율을 사용하여 문제해결하기 ·백분율을 나타내는 그래프 이해하기
일본	6年	8. 비율을 나타내는 방법 생각하기	·비와 비의 값 이해하기 ·동일한 비의 성질 이해하기 ·비를 이용하여 문제해결하기
		10. 빠르기를 나타내는 방법 생각하기	·빠르기를 비교하는 방법 생각하기 ·빠르기를 표현하는 방법 생각하기 ·속력과 시간으로 거리 구하기 ·속력과 거리로 시간 구하기 ·속력이 정해졌을 때 시간과 거리 관계 찾기 ·작업하는 속력 서로 비교하기
싱가포르	5A	7. 비(ratio)	·비 개념과 표현 이해하기 ·동치비 이해하기 ·세 양을 비교하기
	5B	10. 백분율	·백분율 이해하기 ·분수와 소수와 백분율 관계 이해하기 ·양의 백분율 구하기
		12. 비율(rate)	·한 양의 단위당 다른 양의 크기로서의 비율 이해하기
	6A	5. 비(ratio)	·비와 분수 사이의 관계 이해하기 ·비 비교하기
		6. 백분율	·주어진 부분과 백분율 이용하여 전체 구하기
	6B	7. 속력	·속력을 단위로 표현하기 ·이동거리, 시간, 속력 사이의 관계 이해하기 ·평균 속력 구하기
미국	grade 6	12. 비, 비율, 비례	·비(ratio), 동치비, 비례 이해하기 ·비율(rate)과 단위비율(rate) 이해하기 ·비율 비교하기 ·거리, 비율(rate), 시간 관계 이해하기
		13. 비례 문제해결	·비율 표 이용하기 ·단위 비율 이용하기 ·비율 적용하기 ·비율과 그래프 이해하기

* 음영 부분은 속력을 지도하는 단원을 나타냄.

** 한국의 경우는 2015 개정 교과서(현장 검토본)를 기준으로 하였음

일본과 싱가포르 교과서는 5학년에서 6학년에 걸쳐 비와 비율, 백분율, 속력을 단계적으로 지도하고 있었다. 일본 교과서는 비와 비율에 대한 장혜원 외(2017)의 분석과 같이, 단위량당의 크기, 비율, 백분율, 비와 비의 값 순으로 지도하고 있었으며, 속력은 그 이후에 지도하고 있었다. 싱가포르 교과서는 비, 백분율, 비율, 비와 분수, 백분율 활용, 속력 순으로 구성되어 있는데, 장혜원 외(2017)가 분석한 교과서와 달리, 두 양의 크기 비교로서의 비(ratio)와 한 양의 단위당 다른 양의 크기로서의 비율(rate)을 구분하여 지도하고 있는 것이 특징이다. 싱가포르 교육과정의 5학년 내용 중에도 비와 비율을 별도의 하위 영역으로 구분하고 있다는 것이 확인된다. 6학년에서는 하위 영역 ‘비(ratio)’에서 비의 분수 표현과 백분율을 배운 이후에, 하위 영역 ‘비율과 속력’에 편제되어 있는 속력을 배운다. 이와 같이 하위 영역을 달리 구분한 것은 싱가포르 교육과정이 속력을 한 양(시간)의 단위당 다른 양(거리)의 크기인 비율(rate)로 파악하고 있음을 말해준다.

일본과 싱가포르가 속력을 독립된 대단원으로 구성하여 지도하는 것과 달리, 미국 교과서는 ‘비, 비율, 비례’와 ‘비례 문제해결’ 단원의 거의 모든 차시에서 속력을 비율의 사례로서 다루고 있었다. <표 3>에서도 확인한 바와 같이, CCSSM에는 실세계와 수학 문제해결에 비율 추론(ratio reasoning, rate reasoning)을 사용할 것[6.RP.3]과 일정한 속력을 단위 비율의 사례로서 다루는 것[6.RP.3.b]이 포함되어 있다. 미국 교과서는 단위 시간당 이동거리를 뜻하는 속력이 단위 비율에 해당함을 설명하고 있으며, 이후 소단원인 ‘비율의 비교’, ‘거리, 비율, 시간’, ‘비율 표의 이용’, ‘단위 비율의 이용’, ‘비율과 그래프 이해’에서 지속적으로 속력 문제를 다루고 있다.

이상에서 살펴본 일본, 싱가포르, 미국 교과서의 속력 지도계열은 우리나라 경우와 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 우리나라 2009 개정 교과서에서 속력은 ‘비와 비율’ 단원에서 한 차시로 지도된 것이 전부였으며(교육부, 2017), 2015 개정 교과서에서는 비율이 사용된 사례를 다루는 차시에서 한 개 문항으로만 제시될 예정이기 때문이다(교육부, 2018). 이와 같은 속력 지도의 약화는 비와 비율 개념에서 시작하여 여러 학기에 걸쳐 체계적으로 속력 개념에 이르게 하는 일본, 싱가포르 경우뿐 아니라, 비율과 비례를 다루는 거의 모든 차시에서 속력을 반복적으로 제시하고 있는 미국의 경우와도 큰 차이를 보인다고 할 수 있다.

2. 속력의 설명

한국, 일본, 싱가포르, 미국 교과서에서 제시하고 있는 속력의 설명과 그 속에 내포된 비율 또는 측도 속성, 속력의 변화 포괄 여부를 <표 5>에 정리하여 나타내었다. 우리나라의 2015 개정 교과서(현장 검토본)는 속력이라는 용어조차 사용하지 않고 ‘걸린 시간에 대한 간 거리의 비율’이라는 표현을 사용하고 있으며, 2009 개정 교과서는 ‘단위시간에 간 평균 거리를 속력이라고 한다’고 속력을 정의하고 있다. 반면에 다른 나라의 설명 방식은 우리나라와 미묘한 차이를 보이고 있다. 싱가포르 교과서는 속력을 보다 일상적 표현인 ‘얼마나 빨리 이동했는지를 말하는 것’으로 기술하고 있으며, ‘단위 시간당 이동거리로 표현한다’고 속력의 표현 방법을 설명하고 있다. 일본은 별도의 정의 없이, ‘빠르기(속력)는 단위시간에 나아간 거리로 표현한다’라는 속력의 표현방법을 기술하는 형식이다. 반면에 미국 교과서는 정의를 제시하는 방식인데, 이때의 정의는 ‘단위 시간당 거리를 뜻하는 단위 비율’로서 제시된다.

<표 5> 속력의 설명에 나타난 속력의 다양한 의미

		속력의 설명	속성	속력의 변화 포괄
한국	2015 개정	걸린 시간에 대한 간 거리의 비율	비율 (외적비 구분 안함)	확인되지 않음
	2009 개정	단위시간에 간 평균 거리를 속력이라고 한다.	비율 (외적비 구분 안함)	속력의 변화 포괄
일본		빠르기는 단위시간에 나아간 거리로 표현한다.	측도	속력의 변화 포괄
싱가포르		단위 시간당 이동 거리로 표현한다.	외적비	등속 운동 상황 평균 속력 별도
미국		단위 시간당 거리를 뜻하는 단위 비율이다.	외적비	등속 운동 상황 평균 속력 별도

주목할 것은 속력에 대한 설명에 내재된 속력의 속성이다. 우리나라 2015 개정 교과서는 [그림 1]의 ‘~의 비율’이라는 표현에서 알 수 있듯이, 속력을 비율 속성으로 접근하고 있음이 명백히 드러난다. 다만 우리나라는 비율 자체를 내적비와 외적비로 구분하지 않고 지도하고 있기 때문에 외적비의 속성이 드러나지는 않는다. 2009 개정 교과서 또한 ‘단위시간에 간 ~’이라는 표현이 제시되긴 하지만, 비율로서의 속력인 점은 위와 동일하다. 특이한 점은 속력이 외적비임에도 불구하고, ‘기준량’과 ‘비교하는 양’을 찾아보는 문제가 제시되고 있다는 점이다. 외적비인 속력을 ‘비교하는 양을 기준량으로 나눈 값’이라는 비율의 정의 형식에 맞추어 무리하게 해석하는 모양새이다.

2015 개정 교과서	2009 개정 교과서
고속 철도를 타고 2시간 동안 서울에서 광주까지 약 300km를 갑니다. 고속 철도가 서울에서 광주까지 가는 데 걸린 시간에 대한 간 거리의 비율을 알아봅시다.	새마을호 열차를 타고 서울역에서 부산역까지 가는 데 5시간이 걸렸습니 열차는 1시간 동안 평균 몇 km를 갔는지 알아보시오. ● 평균 거리를 구하기 위한 기준량은 무엇입니까? ● 평균 거리를 구하기 위한 비교하는 양은 무엇입니까? ● 새마을호 열차는 1시간 동안 평균 몇 km를 갑니까?

[그림 1] 한국 교과서의 속력 설명에서 나타난 비율 속성

반면에 싱가포르 교과서는 1절에서 살펴본 바와 같이, 속력을 한 양의 단위당 다른 양의 크기를 의미하는 비율(rate) 속성으로 접근한다. 이와 유사하게 미국 교과서는 단위가 다른 두 양을 비교하는 비율(rate) 중에서도 한 양의 1단위에 다른 양을 비교하는 단위 비율(unit rate)의 사례로서 속력을 정의하고 있다. 두 나라 모두 속력을 서로 다른 두 양 사이의 비인 외적비로 접근하고 있다고 할 수 있다. 한편 일본 교과서는 유일하게 속력을 비율이 아닌 측도로 접근하고 있었다. 이에 대한 근거로 ‘수량관계’ 영역으로 편제한 비율과 달리 속력을 ‘양과 측정’ 영역으로 편제한 점들을 들 수 있으며, ‘단위시간당 ~’이라는 비율 표현을 쓰지 않는다는 점과 대단원 전체에서 비 또는 비율이라는 용어를 언급하지 않는다는 점을 들 수 있다.

한편 <표 5>에는 각국 교과서에 제시된 속력의 설명에 속력의 변화 상황이 포괄하여 제시되어 있는지가 정리되어 있다. 우리나라의 2015 개정 교과서에 실린 한 개 문항으로는

판단 자체가 어려운 상태이지만, 2009 개정 교과서가 등속 운동이 아닌 속력의 변화를 전제로 속력을 도입하고 있는 것은 분명하다. 속력의 정의에 평균 속력이라는 용어를 직접적으로 사용하고 있지는 않지만, ‘평균 거리’라는 표현을 사용하고 있기 때문이다. 일본 교과서의 속력 설명에도 속력의 변화가 포함되어 있기는 하다. 하지만 등속 운동을 이용하여 속력이 변화하는 상황에 대처할 수 있다는 점이 [그림 2]와 같이 명시적으로 지도되고 있다.

速さを比べるときには、1秒間あたりに走ったきよりや、1mあたりにかかった時間などの、単位置あたりの考えを使って比べる方法が便利です。

実際は、スタートからゴールまでずっと同じ速さで走ることはいけません。平均して同じ速さで走ったと考えるよ。

속력을 비교하는 방법에는, 1초당 달린 거리나 1m당 걸린 시간 등 단위량을 기준으로 생각하면 편리합니다. 실제로, 시작부터 도착까지 계속 같은 빠르기로 달릴 수는 없지만, 평균적으로 같은 빠르기로 달리고 있었다고 생각해요.

[그림 2] 일본 교과서의 등속 운동을 이용하는 방법에 대한 설명(藤井齊亮 외, 2015b)

한편 싱가포르와 미국 교과서는 속력을 도입한 후에 평균속력을 별도로 지도한다. 이미 1절에서 언급한 바와 같이 미국의 CCSSM의 [6.RP.3]은 단위 비율의 사례로서 ‘일정한 속력(constant speed)’을 다룰 것을 명시하고 있다. [그림 3]에서 보는 바와 같이, 미국 교과서에서는 속력과 평균 속력을 구분하여 지도하고 있다. 속력의 경우 단위 비율로서 처음 도입되는데, 단위 비율이 다루어지는 상황은 단위 비율이 일정하게 유지되면서 물건이 만들어지는 상황, 곧 일정한 속력을 가지고 변화하는 상황에 해당한다. 싱가포르 교과서에서도, [그림 4]와 같이, 속력이 일정한 상황에서의 속력을 먼저 다루고, 이후 속력이 변화하는 상황을 제시하여 평균 속력 개념을 지도한다.

Understanding Rates and Unit Rates

Are there special types of ratios?

A **rate** is a special type of ratio that compares quantities with unlike units of measure, such as $\frac{150 \text{ miles}}{3 \text{ hours}}$. If the comparison is to 1 unit, the rate is called a **unit rate**, such as $\frac{50 \text{ miles}}{1 \text{ hour}}$. Find how far the car travels in 1 minute.

Distance, Rate, and Time

How are distance, rate, and time related?

Leilani is flying from Los Angeles to Honolulu. If the flight takes 6 hours and the distance is 2,574 miles, what is the average speed of the airplane?

A **formula** is a rule that uses symbols to relate quantities. The formula $d = r \times t$ relates distance (d), rate (r), and time (t). Rate in this formula means average speed.

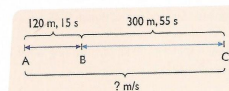
[그림 3] 미국 교과서의 속력과 평균 속력의 구분

Mr Chen is driving from Town A to Town B. In 1 hour, he drove 65 km.
Mr Gopal is also driving in the same direction. In 1 hour, he drove 95 km.



Average Speed

Post A and Post B are 120 m apart. Post B and Post C are 300 m apart. Budin runs from Post A to Post B in 15 seconds. Then he runs from Post B to Post C in 55 seconds. Find Budin's average speed for the distance from Post A to Post C.



[그림 4] 싱가포르 교과서의 속력과 평균 속력의 구분

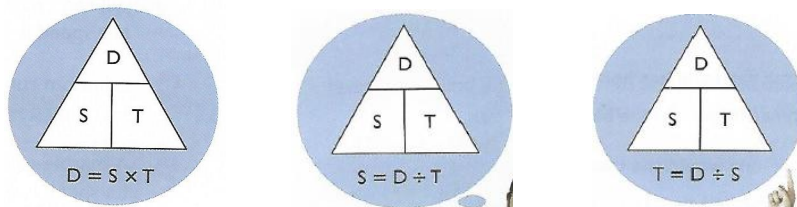
3. 속력의 계산

‘속력의 계산’ 항목에서는 각국 교과서가 속력을 구하는 계산법을 속력의 뜻과 어떻게 연결하여 제시하고 있는지와 단위 환산을 비롯한 문제해결 과정에서 형식적 전략과 비형식적 비례추론 전략의 사용 여부를 살펴보았다.

먼저 속력의 계산법 제시방식에 대해서 각 나라별로 약간의 차이가 있음을 확인하였다. 우리나라 2009 개정 교과서의 경우에는 속력 계산법이 속력의 뜻과 거의 동시에 제시되고 있다. 공식 ‘속력=간 거리÷걸린 시간’은 ‘단위시간에 간 평균 거리’라는 속력 정의에 바로 이어진다. 이러한 제시 방식은 비율로서의 속력의 속성을 숙고할 충분한 시간과 학습 경험을 제공하지 못한다. 정연준과 최은아(2017)의 지적처럼, 결국 속력 문제를 주어진 공식에 수치를 대입하는 절차로만 접근하게 함으로써 속력에 대한 개념 학습을 저해할 우려가 있다. 이렇듯 속력 계산법을 속력의 뜻과 동시에 제시하는 것은 일본 교과서에서도 동일하였다. 반면에 미국 교과서는 속력을 단위 비율로 정의하고 있는 만큼 ‘단위 비율을 구하기 위해서는 이동거리를 시간으로 나눈다’는 일반적인 설명을 제시하고 있다. 다만 유일하게 제시되고 있는 공식은 [그림 3]의 ‘거리=속력×시간’이다. 이 공식을 이용하여 주어진 거리와 시간을 대입한 후 등식의 변형을 이용하여 속력을 구하고 있다.

한편 싱가포르 교과서는 한국, 일본, 미국과 달리, 이동 거리를 구하는 계산법(거리=속력×시간)을 속력 계산법(속력=거리÷시간)보다 먼저 제시하고 있다. ‘속력은 단위 시간당 이동 거리로 표현한다’고 설명한 후에 바로 속력 단위(km/시, m/분, m/초)가 도입되고, 이 속력 단위를 해석하여 일정 시간 동안 움직인 거리를 구하고 있다. 이러한 지도 순서가 속력 계산법을 먼저 제시하는 우리나라와 비교하여 어떤 장점이 있는지, 혹은 어떤 인지적 어려움이 예상되는지를 따져볼 필요가 있다. 한 가지 특징적인 것은 우리나라 2009 개정 교과서와 싱가포르 교과서만이 속력의 단위 기호 km/시, m/분, m/초 등을 사용하고 있다는 사실이다. 일본 교과서는 ‘시속 70km, 초속 10m’와 같은 표현을 사용하는데, 이는 70km/시, 10m/초와 같은 단위 기호를 사용하지 않을 뿐이지 속력 단위를 사용하는 것과 큰 차이가 없다. 반면에 미국 교과서에서는 ‘시간 당 429마일, 1초당 3cm’와 같은 표현이 있을 뿐, 단위 기호 자체를 찾아볼 수 없다. 이러한 미국 교과서의 표현은 ‘단위 시간당 간 거리’라는 단위 비율로서의 속력의 의미를 충실히 전달해준다는 장점이 있다. 속력 단위를 학습하는 한국, 일본, 싱가포르가 속력 계산법을 명시적으로 제시하고 있는 국가와 일치한다는 사실은 속력을 형식화하여 절차적으로 접근하는 것과 단위 기호의 학습이 무관하지 않다는 것을 의미한다.

싱가포르 교과서의 또 다른 특징으로, 속력, 시간, 거리 사이의 관계를 계산 공식뿐 아니라 [그림 5]와 같은 도식으로 제시하고 있다는 점을 들 수 있다.



[그림 5] 싱가포르 교과서의 속력(S), 거리(D), 시간(T) 사이의 관계 도식

이러한 도식은 표면적으로는 속력 계산의 원리에 대한 이해보다 기능의 숙달을 강조하는 것처럼 보인다. 그런데 싱가포르 교과서는 위 도식이 제시된 후에도 상당수의 문제에 대해서 공식을 사용하는 풀이 방법과 비례적 관계를 이용하는 풀이 방법을 동시에 제공하고 있다. 예를 들어, A도시에서 147km 떨어진 B도시를 3시간 동안 달렸을 때 차의 속력을 구하는 문제에 대해, '3h→147km, 1h→147÷3=49km/시'라는 풀이와 '속력=거리÷시간이므로, 147÷3=49km/시'라는 풀이를 둘 다 제시한다. 또한 평균속력 문제에서도 3단위(거리)가 270km일 때 4단위(거리)를 구하는 과정에서 1단위(거리)가 90km임을 사용하는 단위비율 전략을 사용하기도 한다. 비례 관계를 이용하는 형식적 전략과 단위비율을 이용하는 비형식적 전략 모두 비례추론 전략에 해당한다. 이로부터 속력 학습에서 비례추론을 강조하고 있는 싱가포르 교과서의 특징을 파악할 수 있다.

일본 교과서에도 조정 전략과 구성 전략과 같은 비형식적 전략을 사용한 사례를 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 8초에 40m를 달린 학생과 9초에 50m를 달린 학생의 속력을 비교할 때, 40과 50의 최소공배수 200을 구하여 200m에 걸린 시간 40초와 36초를 비교하는 방법을 사용한다. 이는 조정 전략에 해당한다. 또한 시속 70km로 날아가는 제비가 3시간 동안 날아가는 거리를 구할 때, 70, 140, 210과 같이 더해 가는 구성 전략을 사용하기도 한다. 미국 교과서도 구성 전략을 사용하기도 하지만, 주로 사용하는 전략은 싱가포르 교과서와 같은 단위비율 전략인 것으로 확인되었다. 이는 미국 교과서가 속력을 단위비율로 정의하고 있다는 것과 '속력=이동 거리÷걸린 시간'과 같은 계산 공식을 제공하지 않는다는 것과 연결된다.

이상에서 싱가포르, 일본, 미국 교과서가 속력에 대한 형식적 계산만을 강조하고 있는 것이 아니라 조정 전략, 구성 전략, 단위비율 전략과 같은 비형식적 전략을 함께 제시하고 있다는 것을 확인하였다. 이와 같은 경향은 속력 계산을 공식으로 접근하고 있는 우리나라 2009 개정 교과서와 가장 차별화된 부분이다. 더욱이 우리나라 교과서에는 200m를 19.19초에 달리는 선수의 초속을 구하는 문제가 제시되고 있는데, 학생들에게 비례추론의 사용보다는 속력 계산법의 기계적 사용을 유도하고 있는 듯하다. 정연준과 최은아(2017)가 지적하고 있듯이, 자연수가 아닌 19.19라는 숫자는 학생들로 하여금 인수 전략을 비롯한 다양한 비례추론의 비형식적 전략을 사용할 동기를 부여하지 못하기 때문이다.

4. 속력 맥락 및 표현

'속력 맥락 및 표현' 요소에서는 속력을 비교하는 맥락과 미지값을 구하는 맥락이 다양하게 제시되고 있는지와 이 때 사용하고 있는 시각적 표현을 분석하였다. 이 중에서 속력의 비교 맥락과 미지값 맥락은 속력의 비율 속성과 측도 속성을 둘 다 드러내기엔 문제가 없다. 다만 운동하는 물체의 빠른 정도를 비교하는 활동은 측정 감각의 신장에도 연결되는 필수 활동이라는 점에서 비교맥락의 유무에 주목하였다. 우리나라 2009 개정 교과서는 속력 차시가 두 페이지에 불과하여 다양한 맥락이 제시되지는 못한지만, 미지값 맥락 이외에 [그림 6]의 왼쪽과 같은 비교 맥락이 제시되고 있다. 다만 우리나라 교과서는 속력을 비교하는 두 가지 방법에 대한 설명이 빠져 있기 때문에, 학생들은 별다른 고민 없이 속력 계산법, 즉 일정한 시간을 기준으로 하여 간 거리를 비교하는 전략을 사용하여 해결 가능성이 크다.

대화를 보고 속력을 비교해 보시오.



- 태풍 메미의 순간 최대 풍속과 KTX 열차의 속력을 비교하려면 어떻게 해야 하는지 설명해 보시오.
- 태풍 메미의 순간 최대 풍속과 KTX 열차의 속도 중 어느 것이 더 빠릅니까?

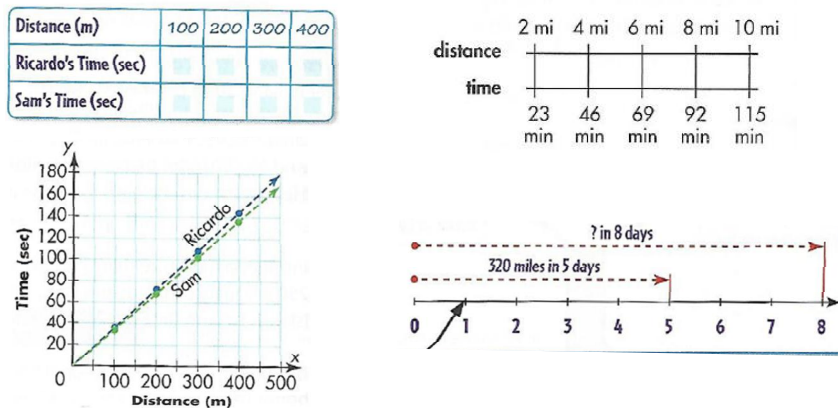
速さを比べるときには、1秒間あたりに走ったきよりや、1mあたりにかかった時間などの、単位置あたりの考えを使って比べる方法が便利です。

속력을 비교하는 방법에는, 1초당 달린 거리와 1m당 걸린 시간 등, 단위량 당 생각을 사용하여 비교하는 방법이 편리합니다.

[그림 6] 비교 맥락의 한국 교과서(좌)와 일본 교과서(우)

반면에 일본 교과서는 세 명의 달리기 속력을 비교하는 맥락을 탐구 활동으로 하여 [그림 6]의 오른쪽과 같은 설명을 제시하고 있다. 즉 속력을 비교하는 방법을 일정한 시간을 기준으로 간 거리를 비교하는 방법과 일정한 거리를 기준으로 걸린 시간을 비교하는 방법으로 나누어 설명하고 있다. 이러한 설명은 싱가포르와 미국 교과서에서도 찾아볼 수 없는 내용이였다. 싱가포르 교과서는 거리를 100cm로 고정하고 둥근 물체를 직접 굴렸을 때 걸리는 시간을 측정하는 실험을 통해 속력을 비교하는 맥락을 제공하고 있었지만, 제시된 표와 질문은 시간을 비교하는 것이 아니라 각각의 속력을 구하여 비교하는 것이였다. 미국 교과서에는 비율을 단위 비율로 바꾸는 것이 비교하기에 쉽다는 설명이 전부였다. 이와 같은 국가 간 차이는 일본 교과서가 속력을 ‘양과 측정’ 영역에 편제하고 있기 때문으로 보인다. 속력의 측도 속성을 부각하고 있는 일본 교과서가 빠른 정도라는 양의 비교 활동을 강조하고 있다는 사실은 상당히 자연스러워 보인다. 비교 활동은 Shaw와 Cliatt(1989), Reys et al.(2009)도 제안했듯이, 길이와 넓이 같은 측정 영역의 여러 가지 양에 대한 학습에서도 일관성 있게 강조되는 활동이기 때문이다.

한편 각국의 교과서가 속도 단원에서 활용하고 있는 시각적 표현을 조사한 결과, 표, 이중 수직선, 직선 그림, 그래프 등이 사용되고 있음을 확인할 수 있었다. 시각적 모델이 전혀 제시되지 않는 우리나라 교과서와 달리, 일본 교과서는 표와 이중 수직선 모델을, 싱가포르 교과서는 평균속력 문제해결에서 직선 그림을 사용하고 있었다.



[그림 7] 미국 교과서에 제시된 시간과 거리 관계의 다양한 시각적 표현

특히 미국 교과서는 [그림 7]과 같은 시각적 표현을 가장 다양하게 제시하고 있었다. 미국 교과서가 다른 나라에 비해 시각적 모델을 다양하고 빈번하게 제시하고 있는 것은 CCSSM의 [6.RP.3] 기준인 ‘실세계와 수학 문제해결에 동치비를 나타낸 표, 띠 그림, 이중 수직선, 방정식을 활용한 비율(ratio, rate) 추론 사용하기’를 교과서에 반영했기 때문으로 보인다. [그림 7]의 표, 그래프, 이중 수직선, 직선 그림은 ‘36초에 100m를 달린 Ricardo와 68초에 200m를 달린 Sam이 400m를 달린다고 할 때, 누가 이길 것인가?’라는 문제 풀이 과정에 등장한다. 이중에서 그래프 표현은 내용 수준이 높아 다른 나라의 초등수학 교과서에서 좀처럼 다루지 않는 내용이다. 그럼에도 그래프 표현이 제시되고 있다는 것은, 미국 교과서가 비율의 일정성을 바탕으로 한 비례관계를 활용한 비례 추론을 상당히 강조하고 있음을 말해준다. 특히, 동치비를 이루는 거리와 시간 관계를 표로 완성하고, 다시 완성된 표를 그래프로 변환하는 활동은 학생들의 비례추론 능력의 신장을 목표로 하고 있다고 판단된다. 이상의 시각적 표현들은 비례관계를 바탕으로 한 다양한 비형식적, 형식적 비례추론 전략을 사용한다는 점에서 의미가 있다. 따라서 학생들의 비례추론 능력의 신장을 위해서는 좀 더 적극적으로 다양한 시각적 표현들을 제시할 필요가 있다.

V. 결 론

최근 우리나라는 초등학교에서의 속력 개념 지도를 상당히 축소하였다. 2015 개정 교육과정 문서에서 속력 개념은 수학과 교육 내용으로 명시되지 않고 있으며, 2009 개정 교육과정의 <교수·학습상의 유의점>에서 ‘타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 예로서 속력을 지도한다’고 진술한 내용마저도 2015 개정 교육과정에서는 삭제된 상태이다. 더욱이 <평가방법 및 유의사항>에서는 ‘비율을 평가할 때 속력을 구하는 문제는 다루지 않는다’고 제시되고 있다. 이에 따라 교과서에서의 비중도 축소된 것으로 확인되었다. 이러한 상황은 전통적으로 수학과 과학의 융합 맥락으로 다루어져 왔던 속력 지도가 수학교육에서 약화되고 있다는 점에서 안타깝다고 할 수 있다.

본 연구에서는 한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 수학 교과서의 속력 개념 지도 내용을 비교·분석하였다. 분석 결과, 다른 세 나라에서는 속력 개념을 수학과 교육과정의 정규적인 내용으로 포함시켜 놓고, 교과서 상에서 일정한 분량을 배정하여 지도하고 있다는 것을 확인하였다. 일본, 싱가포르, 미국 모두 6학년 2학기에 속력을 지도하고 있었으며, 속력에 대한 성취기준이 각각 学習指導要領, Mathematics Syllabus Primary one to six, Common Core State Standards에 명시적으로 제시되어 있었다. 특히 미국의 CCSSM은 [6.RP.3] 기준 ‘실세계와 수학 문제해결에 비율 추론을 사용한다’의 하위 기준 [6.RP.3.b]에서 ‘일정한 속력을 단위 비율의 사례로서 다룬다’를 명시적으로 제시하고 있었다. 일본, 싱가포르, 미국은 이상의 교육과정 근거를 가지고, 속력 관련 내용을 적극적으로 교과서에서 다루고 있었다.

일본과 싱가포르 교과서는 속력을 독립된 대단원으로 구성하여 지도하고 있었으며, 미국 교과서는 대단원 ‘비, 비율, 비례’와 ‘비례 문제해결’의 거의 모든 차시에서 비율의 사례로서 속력을 다루고 있었다. 특히 일본과 싱가포르는 5학년과 6학년 두 개 학년에 걸쳐 비와 비율, 백분율, 속력을 단계적으로 지도하고 있었다. 이와 대조적으로 우리나라 2009 개정 교과서에서 속력은 ‘비와 비율’ 단원의 한 차시에서 지도되고 있었으며,

2015 개정 교과서에서는 더욱 축소되어 비율이 사용된 사례를 다루는 차시에서 한 개 문항으로만 제시될 뿐이다.

이러한 점을 고려할 때, 차후 교육과정 개정 시 속력 개념을 초등수학의 교육 내용으로 명시하고 이를 교과서에 반영하는 것을 검토할 필요가 있다. 정연준과 최은아(2017)에 의하면, 그동안 우리나라는 속력 지도 내용을 축소해왔을 뿐 아니라, 평균 속력을 가정한 속력 개념을 도입하였으며 속력 계산법 중심으로 지도하여왔다. 계산법 위주의 속력 지도 방식은 비와 비례관계가 적용되는 맥락으로서의 속력 개념 지도를 어렵게 한다. 속력이 일정하게 유지되는 상황에서 나타나는 거리와 시간 사이의 비례관계를 다양하게 탐색할 수 있도록 속력 개념을 제시하고 지도할 필요가 있다. 이와 관련하여 다른 나라들의 속력 지도 방안을 참고할 필요가 있다. 일본, 싱가포르, 미국은 속력을 설명하는 방식, 속력의 계산 방법, 속력의 맥락 및 시각적 표현 방식에서 우리나라와 의미 있는 차이를 보였다. 각국의 교과서 분석 결과에 비추어 볼 때, 다음과 같은 개선 방안을 제시할 수 있다.

첫째, 초등학교에서 속력은 등속 운동 상황을 통해서 먼저 도입될 필요가 있다. 우리나라 2009 개정 교과서에서의 속력은 ‘단위 시간에 간 평균 거리’라는 표현을 통해 등속 운동이 아닌 속력의 변화를 포함하고 있었다. 싱가포르 교과서가 속력을 도입한 후에 평균속력을 별도로 정의하고 있는 점과 미국 CCSSM의 [6.RP.3] 규준에 ‘일정한 속력(constant speed)’을 다룰 것이 명시되어 있다는 점은, 두 나라가 처음에는 속력을 등속 운동으로 도입하고 있다는 것을 의미하였다. 일본 교과서는 우리나라와 같이 포괄적인 방식으로 속력 개념을 설명하였지만, ‘같은 빠르기로 달리고 있었다고 생각한다’는 설명을 통해 등속 운동을 가정할 것을 명시적으로 설명하고 있었다. 또한 속력의 단위에 기본적으로 등속 운동이 전제되어 있다는 것과 속력 단위의 변환에는 등속 운동에 따른 비례관계가 전제되어 있다는 것은 등속 운동을 전제로 속력을 도입해야 한다는 근거가 된다.

둘째, 속력 계산법은 속력 개념 이해가 충분히 이루어진 후에 제시될 필요가 있으며, 다양한 비례추론 전략과 함께 사용될 필요가 있다. 2009 개정 교과서에는 속력 계산법 ‘속력=간 거리÷걸린 시간’이 속력의 뜻과 거의 동시에 제시되고 있었다. 이러한 방식은 속력 문제를 주어진 공식에 수치를 대입하는 절차로만 접근하게 함으로써 속력에 대한 개념 학습을 저해할 우려가 있었다. 교과서 분석 결과, 싱가포르, 일본, 미국 교과서가 속력에 대한 형식적 계산만을 강조하고 있는 것이 아니라 조정 전략, 구성 전략, 단위비율 전략과 같은 비형식적 전략을 함께 제시하고 있다는 것을 확인하였다. 속력에 대한 개념적 이해를 위해서는 학생들이 속력의 의미를 숙고할 충분한 시간과 학습경험을 제공할 필요가 있으며, 비형식적 전략을 포함한 다양한 비례추론 전략의 사용을 권장할 필요가 있다.

셋째, 속력 지도시 미지값 맥락뿐 아니라 비교 맥락을 제공할 필요가 있다. 운동하는 물체의 빠른 정도를 비교하는 활동은 측정 감각의 신장에도 연결되는 필수 활동이라 할 수 있다. 우리나라 2009 개정 교과서는 비교 맥락이 제시되고 있기는 하지만, 속력을 비교하는 두 가지 방법에 대한 설명이 빠져 있기 때문에 일정한 시간을 기준으로 하여 간 거리를 비교하는 전략, 즉 속력 계산법을 사용할 확률이 높았다. 일본 교과서는 일정한 시간을 기준으로 간 거리를 비교하는 방법과 일정한 거리를 기준으로 걸린 시간을 비교하는 방법으로 나누어 설명하고 있었는데, 이는 일본 교과서가 속력을 ‘양과 측정’ 영역에 편제하고 있기 때문이었다. 속력 지도시 미지값을 구하는 활동뿐 아니라 속력을 비교하는 활동이 병행될 때, 학생들은 비율이자 측도인 속력의 속성을 통합적으로 파악하게 될 것이다.

넷째, 속력 개념의 학습에서 적절하고 다양한 시각적 표현의 사용을 고려해야 한다. 분

석 결과, 각국 교과서에 표, 이중 수직선, 직선 그림, 그래프 등이 사용되고 있음이 확인되었다. 일본 교과서는 표와 이중 수직선 모델을, 싱가포르 교과서는 평균속력 문제해결에서 직선 그림을 사용하고 있었으며, 미국 교과서는 시각적 표현을 가장 다양하게 제시하고 있었다. 미국의 사례는 CCSSM의 [6.RP.3] 기준 ‘실세계와 수학 문제해결에 동치비를 나타낸 표, 띠 그림, 이중 수직선, 방정식을 활용한 비율(ratio, rate) 추론 사용하기’와 관계가 있었다. 이러한 시각적 표현은 비례관계를 바탕으로 한 다양한 비형식적, 형식적 비례추론 전략을 사용한다는 점에서 의미가 있었다. 시각적 모델을 전혀 사용하지 않고 있는 우리나라 경우에 학생들의 비례추론 능력의 신장을 위해서 좀 더 적극적으로 다양한 시각적 표현들을 제시할 필요가 있다.

다섯째, 외적비와 단위 비율로서의 속력의 속성을 드러내는 것을 검토할 필요가 있다. 우리나라 2015 개정 교과서는 내적비와 외적비를 구분하지 않고 속력을 ‘결린 시간에 대한 거리의 비율’로 설명하고 있다. 반면에 싱가포르나 미국은 단위량(시간)당 다른 양(거리)을 비교하는 비율(단위 비율)로서의 속력, 즉 외적비로서의 속력을 설명하고 있었다. 일본 또한 비율이라는 표현을 사용하지 않았지만, ‘단위 시간에 나아간 거리’로 속력을 설명하였다. 일본, 싱가포르, 미국 모두 단위 시간(양)에 거리(양)을 비교하는 단위 비율로서의 속력의 속성을 내포하고 있음을 알 수 있다. 만약 우리나라 교과서가 서로 다른 두 양을 비교하는 외적비를 구분하여 지도했다면, 속력 맥락에서 ‘기준량’과 ‘비교하는 양’을 찾는 문제와 같은 2009 개정 교과서의 자연스럽지 않은 맥락은 제시되지 않았을 것이다.

본 연구는 한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 수학 교과서에 속력 관련 학습요소들이 어떻게 반영되었는지를 비교·분석하고 이에 대한 시사점을 논의하였다. 우리나라는 현재 2015 개정 교육과정에 따른 6학년 교과서가 현장 검토를 거치고 내년부터 새롭게 도입될 예정이다. 이러한 상황에서 차기 교과서의 개발 방향을 언급한다는 것이 시기적으로 아쉬운 면이 있을 수 있다. 그러나 2015 개정 교육과정이 강조하고 있는 수학 교과 역량의 신장 측면에서 속력 지도의 축소는 재고의 필요가 있다. 속력은 수학과 타 교과(과학), 또는 수학과 실생활 경험을 연결·융합하여 문제를 해결함으로써 창의·융합 역량을 신장시킬 수 있는 적절한 주제이다. 뿐만 아니라, 속력은 다양한 운동 현상과 관련지어 수학의 필요성과 유용성을 알게 함으로써 수학에 대한 가치와 긍정적 태도를 신장시킬 수 있는 적절한 주제이기도 하다. 또한 일본, 싱가포르, 미국과 같은 다른 나라의 경우에 속력이 초등수학에서 상당한 비중으로 지도되고 있다는 측면에서도 우리나라의 속력 지도의 축소는 검토될 부분이 있다. 앞으로도 지속적인 활발한 연구와 이를 바탕으로 한 교육과정 및 교과서 개선이 필요한 상황이다. 본 연구가 이후 다양한 속력 관련 후속 연구들의 디딤돌이 되고, 이를 토대로 차기 교육과정에서 속력 개념의 지도가 개선될 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 교육과학기술부 (2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제2011-361호(별책8).
- 교육부 (2017). **수학 6-1**. 서울:천재교육.
- 교육부 (2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호(별책 8).
- 교육부 (2018), **수학 6-1**. 세종:교육부.
- 박경미 외 (2015). 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 II. 교육부, 한국과학창의재단.
- 서은미, 방정숙, 이지영 (2017). 시각적 모델을 활용한 비례 추론 수업 분석: 비표, 이중수직선, 이중테이프 모델을 중심으로. **수학교육학연구**, 27(4), 791-810.
- 성창근 (2015). 수학에서 과학으로의 전이학습프로그램의 효과. **초등수학교육**, 18(1), 31-44.
- 신정윤 (2015). **속력 및 속력 단위 개념에 대한 초등학생의 이해와 어려움 분석**. 청주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 우정호 (2017). **개정판 학교수학의 교육적 기초(중)**. 서울:서울대학교출판문화원.
- 임재훈, 이형숙 (2015). 비례 추론을 돕는 시각적 모델에 대하여: 초등 수학 교과서의 비례식과 비례배분 실생활 문제를 대상으로. **수학교육학연구**, 25(2), 189-206.
- 장혜원, 임미인, 유미경, 박혜민, 김주숙, 이화영 (2017). 비와 비율에 대한 초등 수학 교과서 비교 분석. **한국초등수학교육학회지**, 21(1), 135-160.
- 정새롬, 조영미 (2011). 초등학교 수학에서 속력 지도 방안 연구. **교육논총**, 48(1), 33-46.
- 정영옥 (2015). 초등학교에서 비례 추론 지도에 관한 논의. **수학교육학연구**, 25(1), 21-58.
- 정연준, 최은아 (2017). 우리나라 초등학교 수학교과서의 속력에 대한 고찰. **한국초등수학교육학회지**, 21(4), 599-620.
- 정은실 (2013). 초등학교 수학교과서에서의 비례추론에 대한 연구. **수학교육학연구**, 23(4), 505-516.
- 최은아 (2016). 초등예비교사의 비례추론과제에 대한 전략 분석. **한국초등수학교육학회지**, 20(4) 167-183.
- 文部科学省 (2008). **小学校学習指導要領解説算数編**.
- 藤井齊亮 외 (2015a). **新編 新しい算數 5-下**. 東京:東京書籍.
- 藤井齊亮 외 (2015b). **新編 新しい算數 6**. 東京:東京書籍.
- Charles, R. I., Caldwell, J. H., Cavanagh, M., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Murphy, S. J., Sammons, K. B., Schielack, J. F., & Tate, W. (2012). *enVision Math Grade 6 common core*. Pearson.
- Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics(CCSSM)*.
http://www.corestandards.org/ssets/CCSSL_Math%20Standards.pdf

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2018a). *My pals are here! Maths 5A (3rd ed)*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2018b). *My pals are here! Maths 5B (3rd ed)*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2017a). *My pals are here! Maths 6A (2nd ed)*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2017b). *My pals are here! Maths 6B (2nd ed)*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Ministry of Education. (2012). *Mathematics Syllabus Primary one to six*. Singapore: Curriculum Planning & Development Division, Ministry of Education.
- Lindberg, D. C. (2009). **서양과학의 기원들 : 철학·종교·제도적 맥락에서 본 유럽의 과학 전통**, BC 600~AD 1450 (이종흡 역). 파주 : 나남. (원저 1992년 출판)
- Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning. In R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential understandings*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., & Smith, N. L. (2009). *Helping children learn mathematics*. New York: John Wiley & Sons.
- Shaw, J. M., & Cliatt, M. J. P. (1989). Developing measurement sense. In R. T. Paul, & P. S. Albert (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 149–155). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

<Abstract>

A Comparative Analysis of the Speed in Elementary
Mathematics Textbooks of Korea, Japan, Singapore and The US

Choi, Eunah³⁾; & Joung, Youn-joon⁴⁾

In this study, we analyzed the contents of speed concept presented in Korean, Japanese, Singapore, and American elementary mathematics textbooks, and drew implications for the teaching of speed concept in elementary schools. We developed a textbook analysis framework by theoretical discussions on the characteristics of the speed concept based on the proportional relationship and the previous researches on the speed in elementary mathematics. We analyzed the textbooks of four countries and drew some suggestions for improving the teaching of speed concept in Korean elementary schools.

Key Words: speed, uniform movements, reasoning of proportional relation. mathematics curriculum, elementary mathematics textbooks, international comparison

논문접수: 2018. 10. 15

논문심사: 2018. 11. 05

게재확정: 2018. 11. 23

3) eunachoi@woosuk.ac.kr

4) [corresponding author] yjjoung03@kice.re.kr