한국초등수학교육학회지 22(4) 331-368. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 22*(4) 331-368.
2018. 11. 30 *November 30. 2018.*

덧셈 계산 원리의 연결성에 관한 연구

노은환[1] · 김선유[2] · 김정훈[3]

연구자는 원리를 모른 채 덧셈 계산을 수행하는 한 학생을 관찰하며 연구동기를 얻었다. 이 학생의 반응이 어디에 기인한 것인지 알아보기 위해 자연수, 소수, 분수의 덧셈 계산 원리에 관한 교육과정을 분석하였다. 동기의 객관화와 연구자가 제안할 지도방안에 반영할 수 있는 자료를 수집하기 위해 서로 다른 두 개의 초등학교 6학년 46명을 연구대상으로 검사지를 투입하였다. 그 결과 덧셈 계산 원리와 그 연결이 다수의 문제임을 확인함과 동시에 지도방안 제안의 여지가 있음을 확인하였다. 이에 따라 세 가지 수의 덧셈 계산 원리와 그 연결을 강화할 수 있는 지도방안을 제안하였다. 제안된 지도방안의 결론은 자연수와 소수 그리고 분수의 덧셈 계산 원리는 밀접한 관련이 있으며, 수의 범위가 확장됨에 따라 원리의 적용 과정에 미묘한 차이가 있어 이를 감안한 지도가 이루어져야 한다는 것이다.

주제어: 덧셈 계산 원리, 연결성

Ⅰ. 서　론

컴퓨터와 인터넷의 보급으로 가치 있는 정보의 수집과 교환이 쉬워짐에 따라 생산되는 지식과 정보의 양은 기하급수적으로 늘어났다. 방대하게 늘어난 지식과 정보의 양을 어떻게 소화할까에 대한 고민은 4차 산업혁명을 언급하기에 이르렀다. 4차 산업혁명 시대의 핵심 기술이 빠른 속도로 우리 생활 속으로 들어오리라는 것에는 이견이 없는 듯하다. 이 시대의 변화를 이끄는 핵심 아이디어는 정보와 정보, 기술과 기술의 ‘연결’이며, 연결을 통해 새로운 부가가치를 창출하는 사회에서 개인의 연결 능력은 더욱 중요해 지고 있다.

연결 능력은 저절로 키워지는 것이 아니라 잘 조직된 내용을 바탕으로 한 교육을 통해 가능할 것이다. 수학은 유기적인 연결을 경험하기에 적절한 교과인데 이는 수학의 계통성과 밀접한 관련이 있다. 계통성이란 어떤 기초적인 내용을 기반으로 하여 그 위에 다른 내용을 첨가함으로써 발전되고 통합된 새로운 내용을 일관성 있게 이어나가는 것을 의미한다(강문봉 외, 2005).

학생들이 유기적으로 연결된 학습을 경험하는 것은 하나의 아이디어에 대한 다면적 이해와 생각을 확장할 수 있게 하는데(양성현, 이환철, 2012), 그 출발은 학생이 이미 알고 있는 것과 연결하는 것이다. 같은 맥락에서 Skemp(1987)는 우리가 학습하는 거의 모든 것

---

1) [제1저자] 진주교육대학교, 교수
2) 진주교육대학교, 교수
3) [교신저자] 경상대학교 대학원, 대학원생

은 이미 알고 있는 어떤 것에 의존한다고 하였으며, Van de Walle(2004)는 이전에 학습한 지식과 경험에 바탕을 둔 아이디어에서 출발해야 기존의 아이디어가 새로운 아이디어를 창조하는 데 사용된다고 하였다.

그런데 연구자는 초등학교 4학년이 ‘선주는 초콜릿을 $1\frac{4}{5}g$ 먹었습니다. 선주동생은 초콜릿을 $1\frac{3}{5}g$ 먹었습니다. 선주와 선주동생이 먹은 초콜릿은 모두 몇 g입니까?’ 라는 문제에 대해 ‘$1\frac{4}{5}+1\frac{3}{5}=2\frac{7}{5}$이다. 그리고 $2\frac{7}{5}=3\frac{2}{5}$이다.’ 라고 응답한 것을 관찰했다. 여기에서 “왜 덧셈을 사용했니?”, “$2\frac{7}{5}$은 어떻게 얻었니?”, “$2\frac{7}{5}$과 $3\frac{2}{5}$가 같은 이유는 뭐니?” 등을 물을 수도 있으나 더 근본적인 근거를 알아보기 위해 다음과 같은 질문을 하였다.

T: 분수 덧셈의 계산 원리는 무엇이니?
A: 더하기를 하는데 분모끼리는 못 더하고 분자끼리만 더할 수 있다는 것이에요. 만약 $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}$이라는 말이에요.

연구자는 원리를 물었는데 학생은 방법을 이야기했다. 그래서 ‘민재는 토마토를 수확하고 있습니다. 오늘 오전에 79개를 수확하고 오후에는 146개를 수확했다면 오늘 민재가 수확한 토마토는 몇 개입니까?’ 라는 자연수 덧셈 문장제를 제시한 뒤 해결해 보라고 요청하였다. 학생은 ‘79+146=225이다. 그러므로 225개를 수확했다.’ 라는 답변을 하였다. 풀이가 완료된 후 다음과 같이 추가 질문을 하였다.

T: 자연수 덧셈의 계산 원리는 무엇이니?
A: 일의 자리는 일의 자리끼리 십의 자리는 십의 자리끼리 그런 식으로 계속 더하고 받아올림을 해야 하면 그다음 수로 하는 것이에요.
T: 자연수 덧셈의 계산 원리는 분수 덧셈의 계산 원리와 관계가 있니?
A: 예? 무슨 말이에요?
T: 자연수 덧셈의 계산 원리를 아는 것은 분수 덧셈 계산 원리를 아는 것에 도움이 되니?
A: …

이 학생에게서 자연수의 덧셈 연산 수행 능력과 원리에 대한 이해를 확인할 수 있었다. 하지만 분수의 덧셈 계산은 수행할 수 있음에도 불구하고 원리에 대한 이해는 확인하기 어려웠다. 이는 자연수의 덧셈 계산 원리와 분수의 덧셈 계산 원리가 분절적이라는 것으로 해석할 수도 있다. 학생의 이러한 반응으로부터 ‘이러한 현상은 개인의 문제일까? 다른 학생들은 자연수 덧셈 계산 원리를 무엇이라 생각할까?’, ‘자연수의 덧셈 계산 원리가 분수와 소수에 연결될 수 있을까?’, ‘만약 어려움을 겪는다면 어떤 지도방안을 적용할 수 있을까?’ 하는 궁금증을 갖게 되었고 이 연구는 여기에서 출발하였다.

덧셈 연산과 관련된 다양한 선행연구들이 있었지만(방정숙, 이지영, 2009; 장수연, 안병곤, 2010; 김수미, 2012; 박교식, 2013; 장혜원, 2017) 덧셈 계산 원리를 다루는 연구를 찾아보기 어렵다. 또한 연결성과 관련한 기존의 선행연구들은 학생 관련 연구(황석근, 윤정호,

2011; 김성래, 서종진, 2012; 김유경, 방정숙, 2012; 김유경, 방정숙, 2014; 최준영, 2016; 한신혜, 2016), 이론적 논의에 관한 연구(이지현, 홍갑주, 2008; 손홍찬, 2010; 양성현, 이환철, 2012; 임재훈, 2016), 교사의 인식 관련 연구(김유경, 2013), 수업 관련 연구(장윤정, 2010; 김정원, 2017), 교수-학습 자료 개발 관련 연구(정영우 외, 2011), 교과서 관련 연구(임재훈, 2012; 권석일, 임재훈, 2007; 노은환, 정상태, 김민정, 2015), 교육과정에 관한 연구(박교식, 김지원, 2017) 등이 있었다. 하지만 덧셈 계산 원리와 그 연결에 대한 학생들의 반응을 살핀 연구는 찾아보기 어려웠기에 덧셈 계산 원리에 대한 학생들의 반응을 조사해볼 필요가 있다. 또한, 만약 다수의 학생이 덧셈 계산 원리와 그 연결에 어려움을 겪는다면 이를 강화할 수 있는 지도방안도 함께 모색해 볼 필요가 있다. 이러한 필요성에 따라 이 연구에서는 덧셈 계산 원리 관련 교육과정 내용과 학생의 반응을 살펴, 덧셈 계산 원리의 연결성 강화를 위한 시사점을 제공하는 것을 목적으로 한다. 이를 달성하기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제 1: 자연수·소수·분수의 덧셈 계산 원리와 그 연결에 대한 학생들의 반응은 어떠한가?
연구문제 2: 덧셈 계산 원리와 그 연결성 강화를 위해 적절한 지도방안은 무엇인가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 덧셈의 교수학적 변환과 수의 확장

교수학적 변환이란 학문적 지식으로부터 가르치고 배울 지식으로의 변환을 의미한다(강완, 1991). 필연적으로 교수학적 변환을 거친 지식은 학문적 지식과 차이점을 가지기 마련이다. 이러한 차이점은 덧셈에서도 찾아볼 수 있다. 수학적으로 덧셈은 실수 R 위에서의 이항연산으로 다음과 같이 정의된다.

$+ : R \times R \rightarrow R$ 일 때, $(a,b) \in R \times R$에 대하여 함수값 $+(a,b)$를 $a+b$로 나타낸다.

초등수학에서 다루는 덧셈에는 몇 가지 다른 특징이 있다. 먼저 초등수학에서는 덧셈 연산의 선택이 다양한 상황에 의해 결정된다(노은환 외, 2015). 예컨대 ‘초콜릿 15개가 있었는데 어머니께서 초콜릿 3개를 더 주셨습니다. 내가 가지고 있는 초콜릿은 몇 개 입니까?와 같은 구체적인 상황을 덧셈으로 표현하게 되는 것이다. 덧셈과 관련된 다양한 상황을 첨가, 합병 등의 유형으로 구분하기도 한다(교육과정기술부, 2013a).

다음으로 덧셈 계산은 동질한 대상과 동일한 단위끼리 더할 수 있다는 계산 원리를 따른다(김수환 외, 2009). 같은 맥락에서 변희현(2009)는 측정활동을 기반으로 유리수 범위의 자연수, 분수, 소수의 덧셈과 뺄셈을 살펴보면 외양은 다르지만 그 본질은 모두 두 양 또는 두 수의 공통단위를 드러내어 합과 차에 포함된 공통단위의 개수를 파악하는 것이라 하였다. 예컨대 ‘초콜릿 15개가 있었는데 어머니께서 초콜릿 3개를 더 주셨습니다. 내가 가지고 있는 초콜릿은 몇 개 입니까?’라는 문장제 상황을 15+3으로 나타내었을 때 계산의 문제는 여전히 존재한다. 이때 단위를 10개 묶음 1개, 낱개 5개와 낱개 3개 즉, 10개 묶음 1개, 낱개 8개와 같이 공통단위의 개수를 파악함으로써 그 결과 18과 같이 나타낼 수 있다.

수의 범위가 자연수에서 유리수 범위로 확장됨에 따라 여러 가지 변화된 모습이 나타난다. 특히 이 변화는 1보다 작은 부분을 어떻게 표현했는지에 따라 그 차이가 있다. 자연수는 십진기수법의 원리를 따른다. 즉 10은 새로운 모임을 결정하는 값으로 한 단위에는 0에서 9까지의 숫자를 사용하여 표현한다. 이때 왼쪽에 표기된 1은 바로 오른쪽 단위 10개가 모였다는 것을 의미한다.

수의 범위가 소수의 형태로 확장될 때에도 자연수에서 사용한 십진기수법의 원리는 유지된다. 그런데 표기에 따른 의미 해석에 새로운 문제가 발생한다. 예컨대 100이 5개, 10이 3개, 1이 2개인 532와 1이 5개, 0.1이 3개, 0.01이 2개인 532의 구분이 필요하다. 따라서 일의 자리와 소수 첫 번째 자리 사이에 '.'을 표기함으로써 단위를 구분하였는데, 이를 소수점이라고 한다.

수의 범위가 분수의 형태로 확장될 때는 소수와 달리 1보다 작은 수의 단위에서는 십진기수법의 원리가 적용되지 않을 수도 있다. 단위분수는 상황에 따라 달라질 수 있고 그 상황이 반드시 $\frac{1}{10}$일 필요는 없기 때문이다. 단위분수의 해석에 따라 단위 1의 해석이 달라지는데, 이때 단위분수를 결정짓는 상황에 따라 진법이 달라진다. 예컨대 $35\frac{3}{7}$에서 35는 십진기수법을 따르나, $\frac{3}{7}$은 $\frac{1}{7}$이 7개가 모여야 단위 1이 되므로 7진법을 따른다.

수학적인 관점에서의 덧셈은 이항연산과 공리적 접근을 따른다. 그런데 학교수학에서는 교수학적 변환에 따른 덧셈의 원리를 별도로 언급할 수밖에 없으며, 수의 확장에 따라 덧셈 계산 원리의 적용 과정이 조금씩 변하게 된다. 이 연구에서는 여기에 초점을 맞추어 자연수, 소수, 분수 덧셈 연산의 연결에 대해 논하고자 한다.

2. 구체물 사용과 자릿값 판

구체적 조작 자료는 실생활 문제 상황과 추상적 알고리듬 사이의 다리가 되어 기호에 의한 표현이 실제 사물과 활동을 나타낸다는 것을 점차적으로 인식하도록 도와준다(Reys 외, 2009). 교사용 지도서(교육부, 2017)에서도 초등학교 수학 학습 지도에서 유의할 사항 중 하나로 구체적인 것에서부터 추상적인 것으로 진행해야 할 것을 강조하며, 구체적 조작물과 모델의 사용 및 개념적 이해를 바탕으로 한 형식적 표현 도입 등을 명시하고 있다.

그런데 구체적 모델과 기호적 표현의 연결은 자연스럽게 이루어지는 것이 아니라 두 표현 사이의 연결하는 다리를 여러 번 왔다 갔다 해야 한다(Reys 외, 2009). 즉 구체물의 조작과 형식적 표현의 도입 사이에는 학생들이 느낄 수 있는 큰 간극이 존재할 수 있는데, 이를 극복하기 위해서는 매개물이 필요하다는 것이다. 이때 고려해 볼 수 있는 매개물이 자릿값 판이다. 자릿값 판이란 단위를 구분하는 세로줄이 그어진 판을 말하는데, 위 칸에는 단위를 기록하고 아래 칸에는 각 단위가 몇 개 인지를 기록한다. 자릿값 판의 이러한 특성 때문에 구체물 사용이 어떻게 기호화 되어 가는지 그 과정을 자세히 나타낼 수 있다.

이 연구에서는 기호로 표현되는 자연수, 소수, 분수 각각의 덧셈 계산 원리의 연결을 강화하는 도구로 구체물과 자릿값 판을 사용하고자 한다.

3. 패턴 찾기와 일반화

수학은 규칙성과 논리적인 질서인 패턴을 가진 학문인데, 그 규칙이나 질서를 발견하고

탐구하며 이해하는 것이 진정한 수학적인 활동이라 할 것이다(Van de Walle. 2004). 모르는 것을 알아가기 위해 선택할 수 있는 하나의 방법은 대상을 관찰하고 그 속에 내재된 패턴을 탐구하는 것이다. 수학교육에서도 학생 스스로 수학을 만들어가는 귀납적 탐구방법을 통해 원리와 법칙을 발견할 수 있는 발견학습이 사용되기도 하는데, 알고리즘의 발견이나 수학적 명제의 발견과 같은 내용에 효과적이다(남승인, 2011).

일반화란 수학적 지식을 적용하고 그것이 발전해 가는 과정에서 나타나는 특성으로 추상화된 개념을 보다 확장된 넓은 범위에 적용하는 과정을 말한다(교육부, 2017). 그런데 규칙을 찾는 것에는 상당한 어려움이 따를 수 있다. 이때 학생들은 패턴을 탐구하는 과정에서 패턴을 서술하는 일반적인 규칙을 찾게 되는데, 이 과정에서 교사는 일상 언어에서 점차 형식적으로 표현하는 방법을 요구할 수도 있다(강현영, 2007).

자연수, 소수, 분수에서의 덧셈 계산 원리에 대한 형식적인 구조가 일관되게 유지되기 때문에 이것은 일반화 또는 연결이라고 말할 수 있다. 이 연구에서는 자릿값 판과 기호에서 패턴 찾기를 사용하여 자연수, 소수, 분수 각각의 덧셈 계산 원리를 강화하는 도구로 사용하고자 한다.

4. 덧셈 계산 원리의 연결성

이 절에서는 2009개정 교육과정[4] 속 덧셈 계산 원리에 관한 내용을 연결성 측면에서 살펴볼 것이다. 이는 이 연구의 관점과 견주어 볼 수 있는 기초 자료로써 학생들의 반응을 파악하는 데 활용 할 수 있을 것이다. 양성현, 이환철(2012)는 선행연구를 메타 분석함으로써 수학적 연결성을 외적･내적, 내용적･형식적으로 구분하였다. 덧셈 계산 원리의 연결은 수학 내적 연결과 관련이 있다. 교육과정에서 내용적 측면은 '무엇을 가르칠 것인가?'와 관련되어 '학습목표'를 통해 확인할 수 있을 것이며, 형식적 측면은 '어떻게 가르칠 것인가?'와 관련되어 '해당 차시의 교과서 내용'을 통해 확인할 수 있을 것이다.

가. 덧셈 계산 원리의 내용적 연결

덧셈 계산 원리의 내용적 연결 측면을 살펴보기 위해 초등학교 교육과정 중 차시별 학습 목표에서 덧셈 계산 원리가 등장하는 것을 추출하고 수의 범위에 따라 순서대로 정리하여 <표 1>을 얻었다.

4) 2009개정 교육과정을 살펴본 것은 선정된 연구대상이 이수한 교육과정을 살피기 위함이었다.

<표 1> 덧셈 계산 원리 관련 학습목표

수의 범위	해당 단원 차시	학습목표
자연수	1-2-3-2	(몇십)+(몇)의 계산 원리를 이해할 수 있다.
	1-2-3-3	받아올림이 없는 (몇십 몇)+(몇)의 계산 원리를 이해할 수 있다.
	1-2-3-4	(몇십)+(몇십)의 계산 원리를 이해할 수 있다.
	1-2-3-5	받아올림이 없는 (몇십 몇)+(몇십 몇)의 계산 원리를 이해할 수 있다.
	2-1-3-2	받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 덧셈 계산 원리를 이해할 수 있다.
	2-1-3-4	일의 자리에서 받아올림이 있는 두 자리 수끼리의 덧셈 계산 원리를 이해할 수 있다.
	2-1-3-5	십의 자리에서 받아올림이 있는 두 자리 수 끼리의 덧셈의 계산 원리를 이해할 수 있다. 일의 자리와 십의 자리에서 모두 받아올림이 있는 두 자리 수끼리의 덧셈의 계산 원리를 이해할 수 있다.
소수	4-2-1-7	소수 한 자리 수의 덧셈 계산 원리를 이해할 수 있다.
	4-2-1-8	소수 두 자리 수의 덧셈 계산 원리를 이해할 수 있다.
	4-2-1-9	1보다 큰 소수 두 자리 수 범위의 덧셈 계산 원리를 이해할 수 있다. 1보다 큰 소수 두 자리 수 범위의 덧셈을 능숙하게 할 수 있다.
이분모 분수	5-1-4-2	받아올림이 없는 이분모 진분수의 덧셈 계산 원리를 이해할 수 있다.
	5-1-4-3	받아올림이 있는 이분모 분수의 덧셈 원리를 이해할 수 있다.
	5-1-4-4	받아올림이 있는 이분모 대분수의 덧셈 원리를 이해할 수 있다.

〈표 1〉을 통해 다음과 같은 해석이 가능하다. 첫째, 교육과정에서는 덧셈 계산 원리라는 하나의 아이디어를 중심으로 내용적 연결을 추구하고 있는 것으로 보인다. 수의 범위는 자연수, 소수, 이분모 분수의 순서로 확장되고 있는데, 1학년에서부터 5학년까지 지속적으로 등장하는 것을 확인할 수 있다. 둘째, 동분모 분수의 덧셈에서는 덧셈 계산 원리를 다루고 있지 않다. 교육과정의 계열 상 동분모 분수의 덧셈이 4학년 1학기 '4. 분수의 덧셈과 뺄셈' 단원에서 등장하지만 덧셈 계산 원리라는 아이디어는 학습목표로 다루지 않는다. 셋째, 수의 범위 내에서는 자릿수의 확장과 받아올림을 통해 내용을 세분화하고 있다. 받아올림이 없는 것에서부터 받아올림이 있는 것으로, 단순한 자릿수에서부터 복잡한 자릿수로 확장되는 것을 확인할 수 있다.

나. 덧셈 계산 원리의 형식적 연결

덧셈 계산 원리의 형식적 연결 측면을 살펴보기 위해 각 단원의 소개에 제시된 주요내용과 형식화 과정을 대표적인 차시 내용을 통해 살펴보고자 한다. 2009개정 교육과정을 보면 수 개념의 제시는 자연수, 분수, 소수 순서를 따르지만 차시별 학습목표를 기준으로 보았을 때 덧셈 계산 원리를 다루는 것은 자연수, 소수, 분수 순서이다. 연구자의 관심은 덧셈 계산 원리에 있기 때문에 자연수, 소수, 분수의 순서로 내용을 살펴볼 것이다.

1) 자연수의 덧셈 계산 원리

자연수의 덧셈 계산 원리는 1학년 2학기 '3. 덧셈과 뺄셈(1)' 과 2학년 1학기 '3. 덧셈과 뺄셈' 에서 등장한다. 1학년 2학기(교육과학기술부, 2013a) '3. 덧셈과 뺄셈(1)' 은 덧셈 계산 원리를 이해하고 형식화하는 것을 학습하는 단원이다. 2차시에서는 '(몇십)+(몇)의 계산 원리를 이해할 수 있다.' 라는 학습목표를 달성하기 위해 내용이 제시되는데, 그 출발은 생각열기에서 덧셈 계산 상황을 확인하는 것이다. 이를 바탕으로 활동 1에서는 '칸막이 수만큼 빈칸에 ◯를 그려보시오.', '사자 우리를 만드는데 사용된 칸막이의 수를 덧셈식으로 나타내어 보시오.' 와 같은 지문을 통해 사자 우리를 만드는 데 사용된 칸막이가 모두 몇 개인지 알아본다. 활동 2에서는 수모형을 사용하여 계산하고 이를 형식화한다. 교사용 지도서에서는 형식화에 관한 교사와 학생의 담화 예시를 다음과 같이 제시하고 있다.

교사: 20+4를 세로 형식으로 나타내려면 낱개 모형 4는 십 모형 20의 2와 0 중에서 어느 숫자와 줄을 맞추어 써야 할까요?

학생: 0과 나란히 줄을 맞추어 세로로 써야 합니다.

교사: 0과 4를 나란히 한 줄로 맞추어 써야 하는 이유를 생각해 보세요.

학생: 둘 다 일의 자리 숫자이기 때문입니다. 같은 자리의 숫자끼리 맞추어 계산해야 하기 때문입니다.

3차시부터 5차시까지는 생각열기, ◯를 그려 알아보기, 덧셈식으로 나타내고 계산하기, 수모형을 사용한 계산 및 형식화 순서로 2차시와 유사한 전개 양상을 보인다. 다만 받아올림이 없는 (몇십 몇)+(몇), (몇십)+(몇십), (몇십 몇)+(몇십 몇)처럼 유형을 다양하게 구분하여 알아본다.

2학년 1학기(교육과학기술부, 2013b) '3. 덧셈과 뺄셈' 은 두 자리 수의 범위에서 받아올림이 있는 덧셈의 계산 원리를 이해하고 계산 형식을 익히는 단원이다. 2차시에서는 '받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 계산 원리를 이해할 수 있다.' 라는 학습목표를 달성하기 위해 생각열기에서 덧셈 계산 상황을 확인하는 것으로 출발한다. 활동 1에서는 '두 사람이 모은 붙임 딱지는 모두 몇 장입니까?', '두 사람이 모은 붙임 딱지는 모두 몇 장인지 식으로 나타내어 보시오.' 와 같은 방법으로 두 사람이 모은 붙임 딱지가 모두 몇 개인지 알아본다. 활동 2에서는 수모형을 사용하여 계산하고 이를 형식화하고자 한다. 교사용 지도서에서는 형식화와 관련해 '수모형 조작 활동을 통해서 직접 덧셈 계산 원리를 터득하도록 한다.' 고 강조하고 있다. 수모형 사용과 관련해 '낱개 모형 10개를 십 모형으로 바꿔 보시오.' 와 같은 받아올림에 대한 교과서 지문에 따라 교사와 학생의 담화에 대한 예시를 교사용지도서에서 제시하고 있는데 그 내용은 다음과 같다.

교사: 15+7을 세로셈으로 나타내려면 어떻게 해야 할까요?

학생: 일의 자리 수 5와 7을 한 줄에 나란히 놓아야 합니다.

교사: 일의 자리 수 5와 7을 더하면 12가 되는데 어떻게 나타내면 좋을까요?

학생: 수모형으로 알아본 것처럼 일의 자리 수의 합이 10이거나 10보다 크면 십의 자리에 더해 줍니다.

3차시부터 5차시까지는 생각열기, ◯를 그려 알아보기, 덧셈식으로 나타내고 계산하기, 수모형 사용과 형식화 연결 짓기의 순서로 2차시와 유사한 전개 양상을 보인다. 다만 받아올림이 있는 (몇십 몇)+(몇), (몇십)+(몇십), (몇십 몇)+(몇십 몇)처럼 다양한 유형을 구분하여 알아본다.

2) 소수의 덧셈 계산 원리

소수의 덧셈 계산 원리는 4학년 2학기(교육과학기술부, 2014) '1. 소수의 덧셈과 뺄셈'에서 등장하며, 소수의 덧셈 계산 원리를 이해하고 계산을 능숙하게 하는 것을 학습하는 단원이다. 7차시에서는 '소수 한 자리 수의 덧셈 계산 원리를 이해할 수 있다'는 학습 목표를 달성하기 위해 생각열기에서 덧셈 계산 상황을 확인하는 것으로 출발한다. 활동 1에서는 눈금이 있는 컵 그림을 통해 눈금을 읽어 더하거나 이어서 색칠하는 방식으로 덧셈을 수행하도록 한다. 활동 2에서는 소수 한 자리 수의 덧셈 원리를 발견하도록 하기 위해 눈금이 있는 우유병 그림을 통해 덧셈 계산을 하도록 한다. 이때 0.9는 0.1이 몇 개 입니까? 0.5는 0.1이 몇 개 입니까? 0.9+0.5는 0.1이 몇 개입니까? 라는 단계별 질문을 통해 계산하도록 한다. 또한 계산하는 여러 가지 방법으로 수직선과 세로셈을 제시하고 있다. 이와 관련하여 교사용 지도서에서는 '소수의 덧셈을 세로로 쓸 때 소수점끼리 맞춘다고 생각하면 자연수의 계산과 혼동되지 않는다.'와 같은 주의사항과 함께 교사와 학생의 발문 예시가 다음과 같이 제시된다.

교사: 여러 가지 방법으로 계산해 보세요.

학생: 소수점끼리 맞추어 세로로 쓰고 같은 자리 수끼리 더합니다.

8차시와 9차시에서는 상황이나 모델은 달라졌지만 최소 단위의 개수를 세어 이를 형식화하는 방법은 동일하다. 다만 소수 두 자리 수 범위의 덧셈, 1보다 큰 소수 두 자리 수 범위의 덧셈과 같이 다양한 유형을 구분하여 알아본다.

3) 분수의 덧셈 계산 원리

5학년 1학기(교육과학기술부, 2015) '4. 분수의 덧셈과 뺄셈'은 이분모 분수의 덧셈에 대한 계산 원리를 이해하고 계산 방법을 학습하는 단원이다. 2차시에서는 '받아올림이 없는 이분모 진분수의 덧셈 원리를 이해할 수 있다.'는 학습 목표를 달성하기 위한 이분모 분수의 덧셈 상황에서 출발한다. 활동 1에서 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$만큼 색칠하고 계산하기, $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$을 통분하고 색칠하여 계산하기를 통해 진분수의 덧셈을 수행하도록 한다. 활동 2에서는 막대형 그림을 이용하여 통분하고 $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$을 계산하는 것으로 구성되며, 그림의 통분 과정을 수식과 연결시키고 있다. 활동 3에서는 $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$를 서로 다른 방법으로 계산하는 방법에 대해 알아본다. 교사용 지도서에의 답변 예시로 분수 연산의 계산 절차와 관련된 '분모의 곱을 이용하여 통분하여 계산하기', '분모의 최소공배수를 이용하여 통분하여 계산하기'가 제시된다. 두 방법은 모두 통분을 하는 방법과 관련 있다.

3차시에서는 '받아올림이 있는 이분모 분수의 덧셈 원리를 이해할 수 있다'는 학습목

표를 달성하기 위해 스토리텔링을 통한 생각열기로 도입된다. 활동 1에서는 $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{3}$를 통분하여 색칠하는 방법을 통해 받아올림이 있는 이분모 분수의 덧셈을 수행하게 한다. 활동 2에서는 $\frac{7}{10}+\frac{5}{6}$를 '분모의 곱을 이용하여 통분한 후 계산하기'와 '분모의 최소공배수를 이용하여 통분한 후 계산하기' 두 방법으로 해결해 보고 각각 어떤 점이 좋은지 이야기 해 보게 한다. 이와 관련한 교사용 지도서의 담화 예시로 아래와 같이 제시하고 있다.

교사: 두 방법을 비교하여 각각 어떤 점이 좋은지 이야기해 보세요.
학생: 분모의 곱을 이용하여 통분하면 공통분모를 구하기 간편합니다. 분모의 최소공배수를 이용하여 통분하면 분자끼리의 덧셈이 간편합니다.

4차시에서는 '받아올림이 있는 이분모 대분수의 덧셈 원리를 이해할 수 있다.'는 학습목표를 달성하기 위해 스토리텔링을 통한 생각열기로 도입된다. 활동 1에서는 $1\frac{4}{5}+1\frac{1}{2}$을 통분하여 색칠하여 계산하고 그 방법을 이야기해 보도록 한다. $1\frac{4}{5}+1\frac{1}{2}$을 계산하는 방법에 대해 교사용 지도서에서는 '자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 더합니다.'와 같은 예시답변을 제시하고 있다. 활동 2에서는 $2\frac{5}{6}+3\frac{1}{4}$을 계산하는 방법에 대해 설명하도록 요구한다. 이에 대해 '방법 1 : 자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 더해서 계산한다.'와 '방법 2 : 대분수를 가분수로 고쳐서 계산한다.'라는 예시 답변을 제시하고 있다. 두 방법의 장점에 대해서는 '방법 1은 자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 계산하므로 분수 부분의 계산이 편합니다.', '방법 2는 대분수를 가분수로 고쳐서 계산하므로 자연수 부분과 분수 부분을 따로 떼어 계산하지 않아도 됩니다.'와 같이 밝히고 있다.

Ⅲ. 연구방법

이 연구에서는 연구동기의 객관화를 위한 반응 분석과 덧셈 계산 원리와 그 연결성 강화를 위한 지도방안 제안이라는 두 가지 연구문제를 설정하였다. 이 장에서는 먼저 연구동기의 객관화를 위한 연구대상, 검사지, 자료수집 및 분석방법에 대해서 기술할 것이며, 다음으로 덧셈 계산 원리와 그 연결성 강화를 위한 지도방안을 체계적으로 제안하기 위해 그 목적과 기준을 명확히 할 것이다.

1. 동기의 객관화

연구자는 한 학생의 반응을 통해 연구의 동기를 얻었다. 동기에서 얻은 문제가 한 학생의 문제인지 다수의 학생이 가지는 보편적인 문제인지 확인할 필요를 느껴 이에 필요한 연구대상과 검사지를 선정하였다. 이후 연구대상자에게 검사지를 투입하여 그들의 반응을 분석하였다. 동기의 객관화를 위한 구체적인 연구대상, 검사지, 자료수집 및 분석방법은 다음과 같다.

가. 연구대상

이 연구에서는 다양한 학생들의 반응을 확인하고자 경남 Y시 소재 초등학교 두 개를 선정하였다. A학교는 구시가지에 위치한 소규모 학교이며, B학교는 신도시 조성에 따른 대규모 학교로서 두 학교 간 학력의 차이가 있다. 이 연구에서는 두 개 학교 6학년 중 각각 임의로 1개 학급씩을 선정하여 총 46명을 연구대상으로 삼았다.

나. 검사지

이 연구에서는 덧셈의 계산과 계산 원리에 관한 6개의 문항을 네 개의 검사지로 구성하였다. [검사지 1], [검사지 2], [검사지 3]은 자연수, 분수, 소수 각각에 대한 계산과 덧셈 계산 원리에 대한 연구대상자의 이해 정도를 확인하기 위한 것인데, 검사문항의 소재는 해당 차시의 교과서에 제시된 것을 차용·변형한 문장제로 연구자가 만들었다. 자연수에서는 받아올림이 있는 (세 자리수)+(세 자리수) 문장제를 제시했다. 분수에서는 분모가 다르며 받아올림이 있는 이분모 (대분수)+(대분수)를 제시했는데, 이는 1보다 작은 단위 분수를 어떻게 처리하는지 확인하고자 하였기 때문이다. 소수에서는 받아올림이 없는 (소수 한 자리 범위의 혼소수)+(소수 두 자리 범위의 순소수) 유형의 문제를 제시했다. 이때 수의 범위가 다른 두 소수에서 동일 단위끼리 계산하여 그 결과를 올바르게 나타내는지에 대해 중점을 두고자 받아올림을 포함시키지 않았다. 왜냐하면 이 연구의 관심은 원리이므로 수의 범위가 확장됨에 따른 어려움으로 인해 문제를 해결하지 못하는 것을 방지하고자 하였기 때문이다. [검사지 4]는 자연수와 분수, 자연수와 소수, 분수와 소수 각각의 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 연구대상자들의 이해 정도를 확인하기 위한 것이다. [검사지 4]에서 초점은 같음과 다름이라는 이분법적 구분과 더불어 그렇게 생각하는 이유를 확인하고자 하였다. 자세한 검사지 내용은 [그림 1]과 같다.

[검사지 1] 삐루삐루 우주선에서는 아이스크림을 생산합니다. 매일 오전에는 아이스크림을 346개 생산하고 오후에는 아이스크림을 217개 생산한다고 합니다. 삐루삐루 우주선에서 매일 생산되는 아이스크림은 몇 개인가?
①식을 쓰고 계산하시오.
②자연수 덧셈의 계산 원리는 무엇입니까?

[검사지 2] 선주는 레몬에이드를 만드는 데 설탕을 $1\frac{4}{5}g$넣었습니다. 맛이 싱거워 설탕을 $1\frac{1}{2}g$ 추가 하였습니다. 레몬에이드를 만드는 데 들어간 설탕은 모두 몇 g입니까?
①식을 쓰고 계산하시오.
②분수 덧셈의 계산 원리는 무엇입니까?

[검사지 3] 마루는 핫초코를 $1.3L$가지고 있습니다. 마루가 핫초코 $0.42L$를 더 샀다면 마루가 가지고 있는 핫초코는 모두 몇 L입니까?
①식을 쓰고 계산하시오.
②소수 덧셈의 계산 원리는 무엇입니까?

[검사지 4]
①자연수 덧셈의 계산 원리와 분수 덧셈의 계산 원리는 같은가? 다른가? 그 이유를 쓰시오.
②자연수 덧셈의 계산 원리와 소수 덧셈의 계산 원리는 같은가? 다른가? 그 이유를 쓰시오.
③분수 덧셈의 계산 원리와 소수 덧셈의 계산 원리는 같은가? 다른가? 그 이유를 쓰시오.

[그림 1] 네 가지 검사지 내용

다. 자료수집 및 분석방법

1) 자료수집방법

[검사지 1]을 투입하되 연구대상자들의 문제 풀이 속도를 고려하여 개별적으로 문제 풀이가 끝났다는 의사표시를 하면 수거하고, [검사지 2]와 [검사지 3]도 같은 방법으로 적용하였다. 세 개의 검사지를 독립적으로 제시한 것은 이전 문항의 간섭효과를 최소화하기 위함이었다. [검사지 4]를 투입하기 전 각 연구대상자에게 자신이 작성한 세 개의 검사지를 돌려주어 [검사지 4] 작성에 참고할 수 있도록 하였다. 이는 연구대상자가 덧셈 계산 원리를 알고 있을 수도 있고 모르고 있을 수도 있는데, 자신이 기록한 내용을 바탕으로 연결된 원리를 발견할 수 있는 기회가 될 수도 있다고 생각하였기 때문이다. 이때 작성이 완료된 검사지에 대한 수정은 불가함을 미리 고지하였다. A학교 한 개 반은 담임교사의 협조를 얻어 연구자가 직접 위 과정으로 자료를 수집하였으며, B학교는 자료 수집 과정을 상세히 안내 후 담임교사가 위 과정을 거쳐 자료를 수집하였다.

2) 자료분석방법

연구의 목적을 달성하기 위해 수집된 자료를 덧셈 계산, 덧셈 계산 원리, 덧셈 계산 원리 사이의 연결이라는 세 가지 관점으로 범주화 하여 얻은 분석틀은 다음 <표 2>와 같다. 각 범주에 따른 자연수·소수·분수 덧셈 계산 결과에 대한 분석, 덧셈의 계산 원리에 대한 반응 분석 그리고 자연수·소수·분수 덧셈 계산 원리 사이의 연결에 대한 반응 분석은 Ⅵ장에서 자세히 다룬다.

<표 2> 분석틀

범주	내용
덧셈 계산	·자연수, 소수, 분수 덧셈 계산의 정답 여부와 그 연결양상은 어떠한가?
덧셈 계산 원리	·자연수의 덧셈 계산 원리에 대한 응답은 어떠한가? ·소수의 덧셈 계산 원리에 대한 응답은 어떠한가? ·분수의 덧셈 계산 원리에 대한 응답은 어떠한가?
덧셈 계산 원리 사이의 연결	·자연수·분수 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 응답과 이유는 무엇인가? ·자연수·소수 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 응답과 이유는 무엇인가? ·분수·소수 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 응답과 이유는 무엇인가? ·자연수·소수·분수의 덧셈 원리에 대한 응답의 연결양상은 어떠한가?

2. 지도방안 제안

덧셈 계산 원리와 그 연결성을 강화하기 위한 지도방안을 객관적이고 체계적인 방법으로 제안하기 위해 먼저, 관련 교육과정 및 선행연구를 검토하였다. 교육과정 및 선행연구 검토의 결과는 Ⅱ장에서 상세히 다루었다. 다음으로 연구의 동기, 교육과정 및 선행연구 검토 결과를 바탕으로 구체적인 지도방안 제안의 목적과 기준을 설정하였다.

가. 지도방안 제안의 목적

자연수, 소수, 분수의 덧셈 계산 원리와 그 연결성 강화를 목적으로 한다.

나. 지도방안 제안의 기준

지도방안 제안의 목적을 달성하기 위해 다음과 같은 두 가지 기준을 마련하였다. 첫째, 실생활 맥락에서 출발하여 형식적 표현까지 유기적으로 연결 가능한 자연수의 덧셈 계산 원리 지도방안을 제안할 것이다. 이때 실생활 맥락과 형식적 표현의 매개로 구체물과 자릿값 판을 사용할 것이며, 자릿값 판과 형식화된 표현에서 패턴 찾기를 시도하여 덧셈 계산 원리를 강화하는 도구로 활용하고자 한다. 둘째, 자연수의 덧셈 계산 원리가 소수와 분수의 덧셈 계산 원리로 확장될 수 있는 지도방안을 제안할 것이다. 덧셈 계산 원리라는 내용적 측면의 연결을 고려함과 동시에 자연수의 덧셈 계산 원리를 지도하는 형식적 측면이 소수와 분수에도 일관적으로 적용될 수 있도록 할 것이다.

이러한 목적과 기준을 바탕으로 충분한 전문가 협의[5]를 거쳐 구체적인 지도방안을 수립하였으며, 최종 확정된 지도방안의 실제는 Ⅳ장의 2절에서 자세히 다루도록 한다.

Ⅳ. 연구의 실제

이 장의 1절에서는 덧셈 계산과 그 원리에 대한 연구대상자들의 반응을 첫째, 자연수・소수・분수의 덧셈 계산에 대한 연구대상자들의 반응을 분석하고 둘째, 자연수, 소수, 분수 각각의 덧셈 계산 원리에 대한 반응을 분석하고, 셋째, 자연수・소수・분수 덧셈 계산 원리의 연결에 대해 분석할 것이다. 그리고 2절에서는 자연수・소수・분수 덧셈 계산 원리의 연결성을 강화할 수 있는 지도방안을 제안할 것이다.

1. 덧셈의 계산과 원리에 대한 반응 분석

연구대상자들의 반응 분석은 두 가지 목적을 갖는다. 하나는 동기의 객관화 작업이고, 다른 하나는 연구자가 제안할 지도방안에 반영할 수 있는 자료수집이다.

가. 자연수·소수·분수 덧셈 계산 결과 분석

자연수・소수・분수 덧셈 계산의 정답 여부 및 연결양상을 살펴보기 위해 연구자는 덧셈 계산 결과에 대한 연구대상자의 반응을 정답과 오답을 기준으로 분류하였다. 자연수의 계산 결과를 기준으로 소수와 분수의 계산 결과를 차례대로 정리하여 <표 3>을 얻었다.

5) 수학교육 박사과정 대학원생 3명과 연구자로 이루어진 수학교육 세미나를 의미함.

<표 3> 자연수·소수·분수 덧셈 계산 결과

	자연수	소수	분수	코드
계산 결과	T(95.6%)	T(80.5%)	T(56.5%)	TTT
			F(23.9%)	TTF
		F(15.3%)	T(6.5%)	TFT
			F(8.6%)	TFF
	F(4.3%)	T(2.1%)	T(-)	FTT
			F(2.1%)	FTF
		F(2.1%)	T(-)	FFT
			F(2.1%)	FFF
정답률	95.6%	82.6%	63%	

〈표 3〉을 통해서 다음과 같은 해석을 할 수 있다. TTT의 경우는 자연수와 소수의 덧셈보다 분수의 덧셈을 어려워 한다는 정보를 준다. TTF의 경우는 자연수와 소수의 덧셈 계산을 잘 수행함에도 불구하고 분수의 덧셈 계산에 실패한 경우를 나타낸다. 이를 통해 상대적으로 분수의 덧셈이 어렵다는 정보와 더불어 덧셈 계산 간의 연계가 쉽지 않다는 해석도 가능하다. TFT와 FTT의 경우는 분수가 꼭 어렵다는 것은 아니라는 정보도 주지만, 이는 TFF와 FTF와 함께 덧셈 계산 사이의 연계가 쉽지 않다는 해석 역시 가능하다.

나. 덧셈의 계산 원리에 대한 반응 분석

자연수, 소수, 분수 덧셈의 계산 원리에 대한 연구대상자들의 반응을 알아보기 위해 수집된 자료를 분류할 필요가 있었다. 이때 자연수, 소수, 분수 덧셈 계산에 대한 정답 여부를 1차 기준으로 삼았다. 연구대상자의 검사지 반응에서 핵심어를 추출한 뒤, 그것을 2차 분류 기준으로 연구대상자의 응답을 유형에 따라 분류하고 높은 비율 순서로 정리하여 〈표 4〉, 〈표 5〉, 〈표 6〉을 얻었다. 이후 분석할 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 반응을 해석하는 기초 자료로 활용하고자 연구대상자의 반응을 최대한 존중하여 기술하였다.

<표 4> 자연수의 덧셈 계산 원리에 대한 반응 결과

결과	원리에 대한 답변	인원(명)	비율(%)	코드
정답	합치거나 더함	22	47.8	N1
	같은 자릿수끼리 더함	6	13	N2
	같은 자릿수끼리 더함 및 받아올림	5	10.8	N3
	받아올림	4	8.6	N4
	세로셈	3	6.5	N5
	일의 자리부터 차근차근 풀기	2	4.3	N6
	세로, 가로 계산해도 답이 같음	1	2.1	N7
	더할 수의 수가 높아지는 것	1	2.1	
오답	오전과 오후의 값을 합치면 하루의 값이니깐	1	2.1	
	모름	1	2.1	

〈표 4〉를 보면 전체 연구대상자 중 47.8%는 ‘합치거나 더함’, 13%는 ‘같은 자리끼리 더하는 것’, 10.8%는 ‘같은 자리끼리 더함 및 받아올림’, 8.6%는 ‘받아올림’, 6.5%는

‘세로셈’, 4.3%는 ‘일의 자리부터 차근차근 풀기’를 자연수 덧셈 계산 원리라 응답하였다. N7의 경우처럼 계산의 정·오답과 관계없이 기타로 분류된 연구대상자도 다수 있었다. N2와 N3의 경우와 같이 완벽하지는 않지만 자연수 덧셈 계산 원리의 한 부분인 ‘같은 자릿수끼리 더함’을 언급하는 연구대상자들은 23.8%이다. 이 해석이 조르단 효과[6]의 우를 범하지 않았으면 좋겠다. 이 중에서 10.8%의 연구대상자가 응답한 N3은 덧셈 계산 원리와 십진기수법의 원리가 혼재되어 있음을 의미한다. 구체물 활용과 관련하여 같은 자리의 숫자끼리 맞추어 계산해야 한다는 교사용 지도서의 내용을 고려했을 때, 왜 같은 자리의 숫자끼리 맞추어 계산해야 하는지에 대해 덧셈 계산 원리와 관련된 지도가 필요하다는 것을 의미한다. 또한 교사용지도서에서 제시하고 있는 “같은 자리 수 끼리 맞추어 계산해야 하기 때문입니다.”, “일의 자리 수의 합이 10이거나 10보다 크면 십의 자리에 더해 줍니다.”라는 자연수 덧셈 계산의 형식화 방법과 연결 지어 해석해 볼 때, 형식화 방법이 학생들에게 강력한 영향을 미치고 있음을 확인할 수 있다.

<표 5> 소수의 덧셈 계산 원리에 대한 반응 결과

결과	원리에 대한 답변	인원(명)	비율(%)	코드
정답	소수점에 맞춰서 계산	16	34.7	D1
	같은 자릿수끼리 계산	9	19.5	D2
	합치거나 더함	6	13	D3
	분수로 바꾸어 통분하여 계산 후 소수로 바꿈	3	6.5	D4
	같은 자릿수끼리 계산 및 받아올림	1	2.1	D5
	소수점 자리	1	2.1	
	소수점의 자리가 다른 소수의 덧셈	1	2.1	
	분수를 숫자로 바꾸어 계산하기	1	2.1	
오답	계산하면 소수점이 계산하는 소수점만큼 이동	1	2.1	
	계산 후 소수점 찍기	1	2.1	
	소수 앞 자리가 100이 넘으면 그 수를 소수 앞자리로 넘김	1	2.1	
	소수를 무시하고 더함	1	2.1	
	소수점을 뒤로하고 소수점에 맞춰서 계산	1	2.1	
	계산식 답에서 답이 앞에 0이 있는 소수가 0이 앞으로 감	1	2.1	
	소수점	1	2.1	
	모름	1	2.1	

〈표 5〉를 보면 전체 연구대상자 중 34.7%는 ‘소수점에 맞춰서 계산’, 19.5%는 ‘같은 자릿수끼리 계산’, 13%는 ‘합치거나 더함’, 6.5%는 ‘분수로 바꾸어 통분하여 계산 후 소수로 바꿈’을 소수의 덧셈 계산 원리라고 응답하였다. D5의 경우처럼 정·오답과 관계없이 원리에 대한 답변에 한 명씩 응답한 연구대상자도 다수 있었다. D2와 D5의 한 사례의 경우와 같이 완벽하지 않지만 ‘같은 자릿수 끼리 계산’과 같이 덧셈 계산 원리의 한 부분을 언급하는 연구대상자들이 21.6%였다. 그 중 2.1%의 연구대상자가 ‘같은 자릿수끼리 계산 및 받아올림’이라 응답한 것은 덧셈 계산 원리와 십진기수법의 원리가 혼재되어 있음을 의미한다. 34.7%의 연구대상자들은 소수점에 맞춰서 계산이라 응답하였다. “소수점

6) 학생의 우연한 행동을 보고 그 의미를 지나치게 과장되게 해석하는 것을 의미한다.

끼리 맞추어 세로로 쓰고 같은 자리 수끼리 더합니다.”와 같이 기계적으로 소수점에 맞춰 계산하는 방법을 제시하고 있는 교과서와 교사용지도서를 고려했을 때, 연구대상자들의 응답은 어느 정도 이해 가능하다. 소수의 덧셈을 계산하는 방법과 원리는 구분되어야 할 필요가 있다. 따라서 왜 소수점을 맞추는지에 대해 덧셈 계산 원리와 관련된 지도가 필요하다.

<표 6> 분수의 덧셈 계산 원리에 대한 반응 결과

결과	원리에 대한 답변	인원(명)	비율(%)	코드
정답	통분 후 더함	17	36.9	F1
	통분 후 분자를 더함	10	21.7	F2
	합치거나 더함	1	2.1	F5
	분모가 다른 분수의 덧셈	1	2.1	
	약분, 통분, 최대공약수, 최소공배수	1	2.1	
오답	자연수는 자연수끼리, 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 더함	3	6.5	F3
	통분하여 분모를 없애고 분자끼리 더함	3	6.5	F4
	분모와 분자의 자리를 바꿔 통분 후 더함	1	2.1	F5
	합치거나 더함	1	2.1	
	대분수를 가분수로 바꿔 계산	1	2.1	
	통분하여 더함	1	2.1	
	분수로 덧셈한 값이 나오는 것	1	2.1	
	분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 계산	1	2.1	
	가분수를 대분수로 만들어 분자와 분모의 자리를 바꿔 약분	1	2.1	
	등분한 조각의 개수를 더하는 것을 분수로 나타낸 것	1	2.1	
	대분수를 가분수로 고침	1	2.1	
	모름	1	2.1	

<표 6>을 보면 전체 연구대상자 중 36.9%는 분수의 덧셈 계산 원리를 ‘통분 후 더함’, 21.7%는 ‘통분 후 분자를 더함’을 분수의 덧셈 계산 원리라고 응답하였다. F1과 F2를 구분지어 분류한 이유는 F3와 F4의 응답을 고려했을 때 더하는 대상을 명확히 한 F2와 그렇지 못 한 F1을 구분할 필요가 있었기 때문이다. 덧셈 계산을 바르게 수행하지 못했지만 연구대상자 중 6.5%는 ‘자연수는 자연수끼리, 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 더함’, 6.5%는 ‘통분하여 분모를 없애 분자끼리 더함’을 분수의 덧셈 계산 원리라 응답하였다. F5의 경우처럼 계산의 정·오답과 관계없이 원리에 대한 답변에 한 명씩 응답한 연구대상자도 다수 있었다. 연구대상자의 반응 중 덧셈 계산 원리와 관련한 응답은 한 건도 나타나지 않았다. F1과 F2의 경우에서 보듯이 58.6%의 연구대상자가 ‘통분 후 더함’과 같이 통분을 통한 분수의 덧셈 계산 방법을 원리라 응답을 하였다. “최소공배수로 통분한 후 계산”, “자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 계산”, “대분수를 가분수로 고쳐 계산” 등과 같은 응답은 교과서에서 제시된 계산 방법에 대한 예시 답변 내용과 일치한다. 이는 두 가지 해석을 가능하게 한다. 하나는 잘된 예시가 학생들의 학습에 도움이 될 수 있다는 것이고, 다른 하나는 통분을 통한 분수의 덧셈 계산 방법과 원리는 구분되어야 필요가 있으며 통분을 왜 하는지에 대해 덧셈 계산 원리와 관련된 지도가 필요하다는 것이다.

다. 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 반응 분석

자연수, 분수, 소수 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 반응을 세 가지 방법으로 살펴볼 것이다. 첫째, 자연수·소수·분수의 덧셈 계산 원리에 대한 연구대상자의 답변을 같음과 다름을 기준으로 분류한 표를 만들어 분석할 것이다. 둘째, 자연수, 소수, 분수의 덧셈 계산 원리의 같음과 다름에 대한 이유를 분류한 표를 만들어 분석할 것이다. 셋째, 자연수·소수·분수의 덧셈 계산 원리에 대한 연구대상자의 답변을 순서대로 연결 짓고, 그 결과를 교차 분석할 것이다. 교차 분석은 앞선 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 반응과 비슷한 듯 보이지만 각각 원리에 대한 응답을 연결 지어 해석해 봄으로써 '같음' 이라는 연구대상자의 응답이 정말 의미 있게 연결된 것인지에 대한 해석을 가능하게 할 것이라는 차이가 있다.

1) 덧셈 계산 원리의 연결

연구자는 [검사지 4]를 통해 얻은 자연수 · 분수, 자연수 · 소수, 분수 · 소수 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 연구대상자의 응답을 같음과 다름을 기준으로 분류하고 차례대로 정리하여 다음과 같은 <표 7>을 얻었다.

<표 7> 덧셈 계산 원리의 연결에 대한 반응 결과

<table>
<tr><th></th><th>자연수와 분수</th><th>자연수와 소수</th><th>분수와 소수</th><th>코드</th></tr>
<tr><td rowspan="9">덧셈 계산 원리의 연결에 대한 반응</td><td rowspan="4">같음 36.9%</td><td rowspan="2">같음 28.2%</td><td>같음 26%</td><td>OOO</td></tr>
<tr><td>다름 2.1%</td><td>OOX</td></tr>
<tr><td rowspan="2">다름 8.6%</td><td>같음 2.1%</td><td>OXO</td></tr>
<tr><td>다름 6.5%</td><td>OXX</td></tr>
<tr><td rowspan="4">다름 60.8%</td><td rowspan="2">같음 23.9%</td><td>같음 15.2%</td><td>XOO</td></tr>
<tr><td>다름 8.6%</td><td>XOX</td></tr>
<tr><td rowspan="2">다름 36.9%</td><td>같음 19.5%</td><td>XXO</td></tr>
<tr><td>다름 17.3%</td><td rowspan="2">XXX</td></tr>
<tr><td>무응답 2.1%</td><td>무응답 2.1%</td><td>무응답 2.1%</td></tr>
<tr><td>'같다' 는 응답률</td><td>36.9%</td><td>52.1%</td><td>62.8%</td><td rowspan="2">-</td></tr>
<tr><td>'다르다' 는 응답률</td><td>60.8%</td><td>45.5%</td><td>34.5%</td></tr>
</table>

<표 7>에서 자연수와 분수의 '같다' 는 응답률이 낮은 것은 두 덧셈 계산 원리를 별개의 것으로 인식하는 연구대상자가 많다는 정보를 준다. 분수와 소수의 덧셈 계산 원리를 '같다' 고 응답한 연구대상자가 상대적으로 많은 것은 소수를 분수로 바꿔 계산하는 방법에 기인하는 것으로 보여 진다.

OOO의 경우는 자연수, 소수, 분수의 덧셈 계산 원리가 관련이 있다고 응답한 경우이다. 이러한 반응은 대단히 고무적인 결과로 보인다. OOX, OXO, XOO의 경우는 덧셈 계산 원리를 연결 지어 생각한다고 보기 어렵다는 정보도 준다. 예를 들어 OOX의 경우 자연수와 분수, 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리가 관련이 있다고 응답하였는데 추이율을 적용하면 분수와 소수의 덧셈 계산 원리도 관계있어야 함에도 불구하고 연구대상자들은 관련이 없다고 응답하였다. 이는 연구대상자들의 사고 과정에 논리적인 문제가 있음을 확인할 수 있는 증거이다. OXX, XOX, XXO의 경우는 자연수, 소수, 분수의 덧셈 계산 원리를 연결 지어 생각한다고 보기 어렵다. 특히 XXX는 자연수, 소수, 분수의 덧셈 계산 원리가 모두 독립적인 것으로 생각하고 있다는 것을 의미한다. 그러나 <표 7>의 응답이 합리적이고 명백한 근거를 두고 내린 판단인지 더 확인해 볼 필요가 있다.

2) 덧셈 계산 원리의 연결 이유

자연수・소수・분수 덧셈 계산 원리의 같음과 다름에 대한 이유를 검사지 반응에서 핵심어를 추출하고, 그것을 유형에 따라 분류하여 높은 비율 순서로 정리해 다음과 같은 <표 8>, <표 9>, <표 10>을 얻었다.

<표 8> 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리 연결의 이유에 대한 반응 결과

원리의 연결	이유	인원 (명)	비율 (%)
자연수-소수 같음 (36.9%)	같은 자릿수끼리 더하기 때문	9	19.5
	소수점의 차이는 있지만 같은 덧셈이기 때문	6	13
	합치거나 더하기 때문	4	8.6
	대분수를 둘 다 가분수로 만들기 때문	1	2.1
	같은 자릿수끼리 더하고 받아올림하기 때문	1	2.1
	소수와 자연수를 따로 계산할 뿐 덧셈 원리는 같기 때문	1	2.1
	소수는 자연수가 작은 수로 나타낸 것이기 때문	1	2.1
	소수와 덧셈은 계산이 똑같기 때문	1	2.1
자연수-소수 다름 (60.8%)	소수는 소수점에 맞춰야하기 때문	7	15.2
	소수점이 있기 때문	7	15.2
	자연수는 자릿값에 맞춰 계산하면 되지만 소수는 소수점에 맞춰서 계산하기 때문	3	6.5
	자연수 덧셈은 자연수끼리 더하는데 소수 덧셈은 소수가 있기 때문	1	2.1
	수를 통일시켜야 하는 소수와 그럴 필요가 없는 덧셈임	1	2.1
	소수는 분수로 고쳐 계산하고 덧셈은 분수로 고쳐 계산할 수 없기 때문	1	2.1
	세로셈과 가로셈의 차이	1	2.1
무응답(2.1%)	-	1	2.1

<표 8>을 살펴보면 21.6%의 연구대상자는 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리가 같은 이유를 '같은 자릿수 끼리 더하기 때문'이라고 응답하였다. 이 반응은 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리에 관한 의미 있는 연결이 이루어졌다는 것을 의미한다. 연구대상자 중 13%는 '소수점의 차이는 있지만 같은 덧셈이기 때문', 8.6%는 '합치거나 더하기 때문'이라는 이유로 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리가 같다고 응답하였다. 이는 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리가 같다는 응답 결과가 덧셈 계산 원리에 대해 잘 연결 지어 알고 있다는 것을 의미하는 것은 아니라는 정보를 준다. 많은 연구대상자들은 숫자가 갖는 특징인 소수점을 근거로 공통점이나 차이점에 대해 말하고 있는데, 이는 자연수와 소수 덧셈 계산 원리의 연결을 방해하는 요인으로 작용할 수 있다는 증거이다.

<표 9> 자연수와 분수 덧셈 계산 원리 연결의 이유에 대한 반응 결과

원리의 연결	이유	인원(명)	비율(%)
자연수-분수 같음 (52.1%)	합치거나 더하는 것이기 때문	6	13
	자연수를 분수로 만들어 계산할 수 있기 때문	4	8.6
	같은 덧셈이기 때문	3	6.5
	받아올림을 하기 때문	2	4.3
	덧셈 계산 하는 방법이 같기 때문	1	2.1
	같은 자릿수끼리 더하기 때문	1	2.1
자연수-분수 다름 (45.5%)	통분시켜야 하기 때문	19	41.3
	자연수와 분수는 다르기 때문	3	6.5
	분수 덧셈은 자연수는 자연수끼리 분모는 분모끼리 분자는 분자끼리 더해야 하기 때문	2	4.3
	자연수는 분자, 분모, 통분, 약분이 불필요함. 분수의 종류에 따라서 덧셈 방법이 달라지기 때문	1	2.1
	분수는 최소공배수로 바꾸고 계산하지만 자연수는 그냥 더함	1	2.1
	문제가 다르기 때문	1	2.1
	가로셈과 세로셈의 차이가 있음	1	2.1
무응답(2.1%)	-	1	2.1

〈표 9〉를 살펴보면 13%의 연구대상자는 '합치거나 더하는 것이기 때문', 8.6%는 '자연수를 분수로 만들어 계산할 수 있기 때문', 6.5%는 '같은 덧셈이기 때문', 4.3%는 '받아올림을 하기 때문'이라는 이유로 자연수와 분수의 덧셈 계산 원리가 같다고 응답하였다. 2.1%는 '같은 자릿수끼리 더하기 때문'이라는 의미 있는 응답을 한 경우도 있었다. 연구대상자의 41.3%는 '통분시켜야 하기 때문', 6.5%는 '자연수와 분수는 다르기 때문'이라는 이유로 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리가 다르다는 반응을 보였다. 41.3%의 연구대상자가 분수의 덧셈에서 알고리즘으로 등장하는 통분을 근거로 차이점을 언급하고 있는데, 이는 자연수와 분수의 덧셈 계산 원리의 연결을 방해하는 요인으로 작용할 수 있다는 증거이다.

<표 10> 분수와 소수 덧셈 계산 원리 연결의 이유에 대한 반응 결과

원리의 연결	이유	인원(명)	비율(%)
분수-소수 같음 (62.8%)	분수는 소수로 소수는 분수로 바꿀 수 있기 때문	13	28.2
	소수는 분수로 고쳐서 더할 수 있기 때문	4	8.6
	합치거나 더하기 때문	4	8.6
	분수를 소수로 바꿔서 계산할 수 있기 때문	3	6.5
	같은 자릿수끼리 더하기 때문	1	2.1
	덧셈의 원리와 소수 덧셈은 양식이 같기 때문	1	2.1
	분수도 계산하면 소수로 답이 나오기 때문	1	2.1
	둘 다 점을 옮기기 때문	1	2.1
	답이 같음	1	2.1
분수-소수 다름	분수는 통분을 해야 하기 때문	3	6.5
	소수는 소수점에 맞춰 더해야 하고 분수는 통분해 더하기 때문	2	4.3

	분수 덧셈은 더하여 답은 그대로인데 소수 덧셈은 소수점에 의해 값이 달라지기 때문	1	2.1
	분수는 최소공배수로 바꾸고 소수는 소수점에 맞춰야 하기 때문	1	2.1
	분수는 통분해야 하지만 소수는 자릿수끼리 계산하기 때문	1	2.1
	소수는 소수점을 맞추기 때문	1	2.1
	분수는 통분 후 자연수, 분모, 분자를 각각 더해야 하지만 소수 덧셈은 세로식으로 점을 맞춰 계산하기 때문	1	2.1
	분수는 분모와 분자를 각각 계산하지만 소수는 있는 그대로 계산하고 점을 찍기 때문	1	2.1
(34.5%)	분수는 분자와 분모를 각각 더하지만 소수는 소수점을 기준으로 더하기 때문	1	2.1
	분수는 분자와 분모를 각각 더하지만 소수는 같은 자릿수끼리 더하기 때문	1	2.1
	소수 덧셈은 받아올림을 하면 되지만, 분수 덧셈은 통분해야 하고 받아올림 개념이 없기 때문	1	2.1
	분수의 덧셈은 분모 때문에 소수 덧셈처럼 하나의 숫자로 쭉 더할 수 없고 분수모의 덧셈은 분모 때문에 더하는 수가 달라질 수 있기 때문	1	2.1
	그냥 더하는 분수와 점이 내려오는 소수의 계산이 다르기 때문	1	2.1
무응답(2.1%)	-	1	2.1

<표 10>을 살펴보면 소수점과 통분에 관한 응답이 다양하게 제시되는데, 이러한 이유로 분수와 소수 덧셈 계산 원리 연결의 이유를 분류하는 것은 자연수와 소수, 자연수와 분수보다 상대적으로 까다로웠다. 분수와 소수의 덧셈 계산 원리가 같다고 응답한 연구대상자는 62.8%로 다르다는 응답률보다 높다. 43.3%의 연구대상자들은 분수와 소수의 상호 전환에 의한 계산 방법을 그 이유로 들고 있다. 분수 곱셈의 한 방법으로 배운 상호 전환에 의한 계산 방법에 대한 내용이 워낙 강렬해서 덧셈 계산의 원리를 적는데 영향을 미친 것으로 보인다. 한편, 같고 다름에 대한 연구대상자의 응답과 관계없이 원리의 연결에 대한 답변에 한 명씩 응답한 연구대상자도 다수 있었다.

3) 덧셈 계산 원리에 대한 교차분석

연구자는 [검사지 4]를 통해 원리의 연결에 대한 연구대상자들의 답변을 얻고 분석하였다. <표 4>, <표 5>, <표 6>에서 연구대상자들이 각각의 원리라고 기록한 자료를 토대로 연결에 대한 교차 분석을 시도하는 것 역시 의미 있는 일이다. 왜냐하면 원리가 무엇인지에 대한 답변과 원리가 서로 연결되느냐는 답변을 통해 연구대상자들의 사고를 읽을 수 있을 것이기 때문이다. 앞선 <표 8>, <표 9>, <표 10>의 분석에서 이미 연구대상자들의 '같음'이라는 응답이 의미 있는 연결이 아닐 수 있다는 해석을 할 수 있었다. 따라서 연구대상자들이 실제 어떤 연결을 했는지 교차분석해 보는 것은 그들이 실제 덧셈 계산 원리에 대해 어떤 연결을 하는지에 대한 정보를 줄 것이다. <표 4>, <표 5>, <표 6>을 통해 얻은 원리에 대한 답변을 근거로 자연수, 소수, 분수의 순으로 연결 지어 다음과 같은 [그림 2]를 얻었다.

자연수	◬ (22)												⊽ (6)						◎ (5)					⊗ (4)				⧇ (3)			⟐ (2)		⊠ (4)	
소수	○ (6)		◇ (4)			□ (6)			☆ (1)	▽ (5)			○ (3)			◇ (2)		▽ (1)	○ (2)		◇ (2)		☆ (1)	○ (1)	☆ (1)	▽ (1)		○ (1)	▽ (2)		○ (1)	◇ (1)	○ (2)	▽ (2)
분수	● (3)	◆ (3)	● (2)	◆ (1)	★ (1)	● (2)	◆ (1)	▼ (3)	● (1)	● (2)	■ (1)	▼ (2)	◆ (1)	★ (1)	▼ (1)	● (1)	■ (1)	▼ (1)	★ (1)	▼ (1)	● (1)	◆ (1)	◆ (1)	● (1)	● (1)	● (1)	▼ (1)	■ (1)	● (1)	▼ (1)	▼ (1)	● (1)	◆ (1)	◆ (1)
코드	N1D1F1	N1D2F2	…									…																					…	

◬(N1), ⊽(N2), ◎(N3), ⊗(N4), ⧇(N5), ⟐(N6), ⊠(N7), ○(D1), ◇(D2), □(D3), ☆(D4), ▽(D5), ●(F1), ◆(F2), ■(F3), ★(F4), ▼(F5)

그림에서 괄호 안의 숫자는 해당 도수를 뜻함

[그림 2] 덧셈 계산 원리 연계 분석 결과

[그림 2]를 통해 의미 있는 세 가지 측면을 살펴보고자 한다. 먼저 N2D2F1, N2D2F3, N3D2F1, N3D2F2는 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리를 '같은 자릿수끼리 더함'과 같이 덧셈 계산 원리와 관련된 응답을 하였다. 이는 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리를 연결 지어 이해할 가능성이 높다는 것을 의미한다. 하지만 분수에서는 덧셈 계산 원리와 관련된 응답을 하지 않았다. 이는 자연수·소수·분수의 덧셈 계산 원리를 연결 지어 이해하는 연구대상자가 없다는 것을 의미한다. 이것은 <표 7>의 OOO와 상반되는 결과를 보여주고 있다.

다음으로 [그림 2]에서 분수 덧셈 계산 원리에 대해 의미 있는 답변이 없다. 이것은 <표 7>에서 36.9%가 자연수와 분수의 덧셈 계산 원리가 같다고 응답한 결과와 큰 차이가 있으며, <표 7>에서 62.8%가 소수와 분수의 덧셈 계산 원리가 같다고 응답한 결과와도 큰 차이가 있다.

마지막으로 <표 8>에서 21.6%의 연구대상자는 '같은 자릿값끼리 더함'과 같이 의미 있는 응답을 하였다. 그런데 [그림 2]에서는 자연수에서 덧셈 계산 원리와 관련된 응답을 보이는 연구대상자들이 소수의 원리에서 어떤 반응을 보이는지 N2와 N3를 기준으로 하여 D2를 살펴보면 21.6%보다는 현저히 낮다. 실제로 N2와 N3에 대응하는 D2는 8.6%이다. 이는 <표 8>의 응답과 많은 차이를 보이는 결과이다.

한편 [그림 2]에서 소수와 분수를 기준으로 분석할 수 있으나, 결과는 서로 간의 연결이 원활하지 못하다는 것이었다. 따라서 자세한 내용은 생략하기로 한다.

2. 덧셈의 계산 원리와 그 연결에 대한 지도방안

앞서 1절에서 덧셈 계산 원리와 그 연결에 대한 연구대상자의 반응을 분석함으로써 동기의 객관화를 자연스럽게 달성함과 동시에 지도방안에 반영할 수 있는 몇 가지 자료를 수집하였다. 2절에서는 앞서 설정한 지도방안의 목적 및 기준 그리고 객관적으로 얻은 자료를 토대로 덧셈 계산 원리와 그 연결을 강화할 수 있는 지도방안을 제안하고자 한다.

이 연구에서는 학생들이 어려움을 겪을 수 있는 대표적인 문장제에서 출발할 것이다. 학습은 학생이 현재 알고 있는 비형식적 지식에서 출발하는데, 연구자는 구체물을 제시할 것이다. 구체적 조작 자료는 기호에 의한 표현이 실제 사물과 활동을 나타낸다는 것을 점차적으로 인식하도록 도울 수 있기 때문이다(Reys 외, 2009). 문장제가 제시될 경우 학생이 가지고 있는 비형식적 지식은 여러 개의 구체물 중에서 하나를 선택하고 활용하는 방

법에 영향을 미칠 것이다. 이것이 1단계이다. 모델에는 비례적 모델과 비비례적 모델이 있는데 여기에서는 비례적 모델의 활용을 다룰 것이다.

구체물의 조작활동과 지적활동의 유기적인 관련성을 확보하는 것은 추상성을 근간으로 하는 수학학습에서 중요하다. 특히, 문제해결의 과정은 가르치는 대상이 아니라 교사가 하는 것을 학생이 보고 배우게 되는 것이다(Van de Walle, 2004). 구체물 조작활동을 지적영역으로 끌어들이기 위한 매개체는 매우 중요한데, 연구자는 자릿값 판을 활용할 것이다. 학생들의 구체물 조작활동 방법에 따라 자릿값 판에 표현한 내용이 달라질 것이다. 이것이 2단계이다.

주어진 문장제 풀이의 완성은 2단계에서 끝난다. 3단계에서는 대수적 추론의 핵심이라고 할 수 있는 패턴 찾기를 통한 알고리즘 완성을 목표로 한다. 새로운 문장제를 주고 풀어보라고 요구하면 대부분의 학생들은 앞에서의 1단계와 2단계 절차를 따를 것이다. 문제해결에 성공했다면 P1: 새로운 문장제를 주고 구체물 없이 자릿값 판을 사용하여 해결하라고 요구한다. P1도 성공했다면 P2: 새로운 문장제를 주고 구체물과 자릿값 판 없이 해결하라고 요구한다. P2에 성공했다면 패턴 찾기에 성공했을 가능성이 높다. 한 학생이 이렇게 찾은 패턴은 자신이 찾은 알고리즘과 연동될 수 있을 것이다. 이를 정리하면 다음과 같다.

1단계. 구체물을 활용한 계산
2단계. 1단계를 자릿값 판에 나타내어 계산
3단계. 패턴 찾기를 통한 알고리즘 완성

여기에서는 교과서에서 덧셈 계산 원리를 제시하는 자연수, 소수, 분수 순서로 위 단계에 따라 구체적인 지도방안의 예를 제시할 것이다. 편의상 구체물은 자연수에서 활용하기가 용이한 바둑돌, 소수에서 활용하기가 용이한 십진블록, 분수에서 활용하기가 용이한 연결수막대 세 가지를 제공한다. 사실, 활용이 용이하다는 것은 이미 덧셈 계산 원리의 개념을 형성하고 있는 사람들의 생각일 뿐 학생들의 생각은 아니다. 따라서 구체물의 선택은 학생의 자유의지에 맡길 필요가 있다.

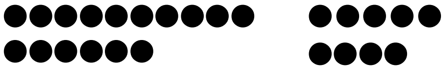
가. 자연수의 덧셈 계산 원리 지도방안

‘근우는 사탕 16개를 가지고 있었다. 청소를 열심히 해 어머니께서 사탕 9개를 더 주셨다면 근우가 가지고 있는 사탕은 모두 몇 개 인가?’ 라는 문제를 제시할 때, 학생은 가지고 있는 비형식적 지식으로 구체물을 선택하고 활용해 계산할 것이고 이것이 1단계에 해당한다. 예컨대 바둑돌을 활용하는 방법(이후 ‘바둑돌1’ 이라 칭함)을 생각해 볼 수 있다.[7]

‘바둑돌1’ 조작	사고 방법
●●●●●●●● ●●●●●●●● ●●●●●●●● ●	낱개 16개와 낱개 9개의 바둑돌을 놓고 하나씩 세어 낱개 25개를 얻었다.

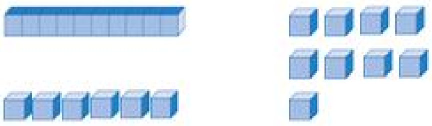
7) 자연수에서는 구체물의 조작과 사고 방법을 구체적으로 그림과 함께 나타내고, 이를 바탕으로 소수와 분수에서는 사고 방법에 대해 자세히 기술하고자 한다.

다른 방식으로 바둑돌을 활용하는 방법(이후 ‘바둑돌2’라 칭함)도 생각해 볼 수 있다.

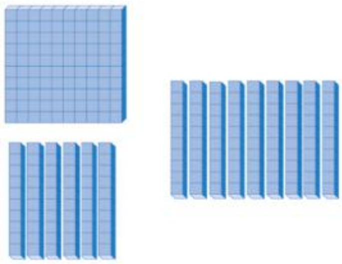
‘바둑돌2’ 조작	사고 방법
	16개를 바둑돌 10개 묶음 1개와 낱개 6개 그리고 낱개 9개로 놓고, 낱개 6개와 낱개 9개를 세어 낱개 15개를 얻은 후 다시 10개 묶음 하나와 낱개 5개로 나타낸다. 그 결과로 열 개 묶음 2개와 낱개 5개 즉, 25를 얻는다.

‘바둑돌2’에서 낱개 15개를 다시 묶을 수 있는 근거는 바둑돌 10개 묶음과 낱개를 구분할 수 있기 때문이다.[8)]

십진블록을 활용하는 방법(이후 ‘십진블록1’이라 칭함)도 생각해 볼 수 있다.

‘십진블록1’ 조작	사고 방법
	단위블록 한 개를 단위 1로 택하여, 16을 막대블록 1개와 단위블록 6개로 나타내고, 9를 단위블록 9개로 나타낸다. 단위블록 6개와 단위 블록 9개를 세어 단위블록 15개를 얻은 후 다시 막대블록 1개와 단위블록 5개로 나타낸다. 그 결과로 막대블록 2개와 단위블록 5개 즉, 25를 얻는다.

다른 방식으로 십진블록을 활용하는 방법(이후 ‘십진블록2’라 칭함)도 생각해 볼 수 있다[9)].

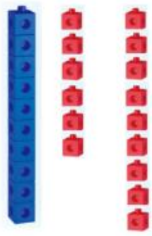
‘십진블록2’ 조작	사고 방법
	막대블록 한 개를 단위 1로 택하여, 16을 판블록 1개와 막대블록 6개로 나타내고, 9를 막대블록 9개로 나타낸다. 막대블록 6개와 막대블록 9개를 세어 막대블록 15개를 얻은 후 다시 판블록 1개와 막대블록 5개로 나타낸다. 그 결과로 판블록 2개와 막대블록 5개 즉, 25를 얻는다.

8) 지도방안의 내용을 검토하기 위해 학생들에게 26+35를 구체물로 계산해 보라고 요구했더니 다음과 같은 현상을 보였다. 26을 검은 바둑돌 2개와 흰 바둑돌 6개로, 35를 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 5개로 놓았다. 이후 검은 바둑돌 5개와 흰 바둑돌 11개를 얻었으나 흰 바둑돌 10개가 검은 바둑돌 1개로 다시 묶기 가능하다는 것에 어려움을 겪었다. 따라서 자연수 덧셈에서 모델을 비비례적으로 사용할 경우 약속하기 측면이 강조될 필요가 있다.

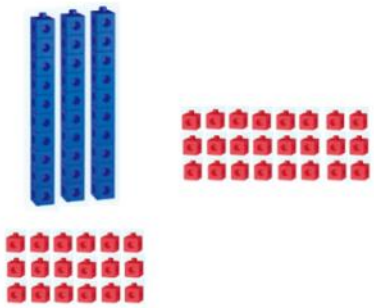
9) 단위블록 1개를 1로 택하여 ‘바둑돌1’와 같은 조작 활동을 할 수도 있으나 여기에서는 동일한 방법으로 보고 설명을 생략함.

만약 모든 학생이 단위블록을 단위 1로 택하고 다른 블록을 단위로 택한 학생이 없을 경우, 교사는 "막대블록을 단위 1로 잡으면 어떻게 될까요?" 라는 발문을 하여 단위 1을 다양한 방법으로 택할 수 있음에 대해 생각할 수 있는 기회를 제공해야 한다. 단위에 대한 유연한 사고는 이후 학습할 소수의 덧셈 계산에 도움이 될 것이다.

연결 수 막대를 활용하는 방법(이후 '수막대1' 이라 칭함)을 생각해 볼 수 있다[10].

'수막대1' 조작	사고 방법
	16을 단위의 10개 묶음 하나와 단위 6개 그리고 9를 단위 9개로 놓고, 단위 6개와 단위 9개를 세어 단위 15개를 얻은 후 다시 단위의 10개 묶음 하나와 단위 5개로 나타낸다. 그리고 그 결과로 단위의 열 개 묶음 2개와 단위 5개 즉, 25를 얻는다.

다른 방식으로 연결 수 막대를 활용하는 방법(이후 '수막대2' 라 칭함)도 생각해 볼 수 있다.

'수막대2' 조작	사고 방법
	수막대 3개를 단위 1로 택하였을 때, 16을 수막대 3개 묶음 6개와 수막대 30개 묶음 1개로 나타내고, 9는 수막대 3개 묶음 9개로 나타낸다. 그 결과로 수막대 3개 묶음 15개와 수막대 30개 묶음 1개를 얻는다. 수막대 3개 묶음 15개를 수막대 30개 묶음 1개, 수막대 3개 묶음 5개로 표현할 수 있다. 따라서 수막대 30개 묶음 2개, 수막대 3개 묶음 5개 즉 25를 얻는다.

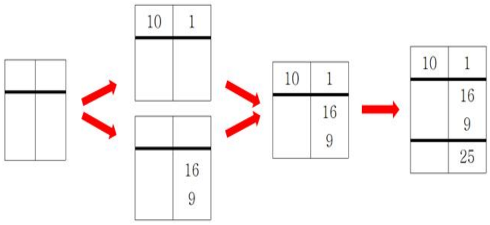
여기에서 예기치 못한 갈등상황이 발생할 수도 있다. 왜냐하면 우리가 일반적으로 알고 있는 3은 단위 1짜리가 3개가 모인 것인데 반해 여기서는 수막대 3개가 모여 단위 1을 결정하고 있기 때문이다.

'수막대2' 의 방법으로 해결한 학생이 없을 경우 교사는 "수막대 3개를 단위 1로 택하면 어떤 일이 벌어질까요?" 와 같은 제안 발문을 통해 단위를 만들어 택하는 방법을 경험할 수 있도록 해야 한다. 단위를 만들어 택할 수 있다는 생각은 이후 학습할 분수의 덧셈 계산에 도움이 될 것이다.

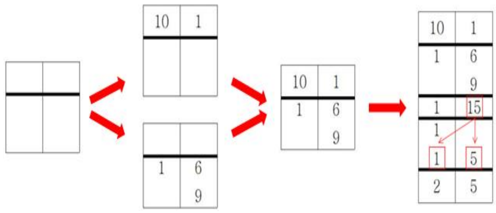
두 번째 단계는 1단계를 자릿값 판에 나타내어 계산하는 단계로써, 구체물을 활용한 방법대로 자릿값 판에 나타내는 것이 중요하다. 자릿값 판에 나타내는 방법은 단위를 먼저

10) 수막대 1개를 1로 택하여 '바둑돌1' 와 같은 조작 활동을 할 수도 있으나 여기에서는 동일한 방법으로 보고 설명을 생략함.

기록하고 필요한 숫자를 적는 경우와 필요한 숫자를 먼저 적고 단위를 기록하는 경우로 나누어 생각해 볼 수 있다. 두 방법은 모두 이후 학습하는 소수와 분수의 내용과 연결될 수 있어 유효하다. 전자는 소수의 덧셈에서 자릿값을 맞추어 계산할 때 도움이 되고 후자는 분수의 덧셈에서 단위분수를 적을 수 없는 경우에 도움이 될 수 있다. ‘바둑돌1’의 방법을 자릿값 판에 나타내면 다음 [그림 3]과 같다. ‘바둑돌2’, ‘십진블록1’, ‘십진블록2’, ‘수막대1’, ‘수막대2’의 방법을 자릿값 판에 나타내면 [그림 4]와 같다.



[그림 3] ‘바둑돌1’을 자릿값 판에 나타낸 결과



[그림 4] ‘바둑돌2’, ‘십진블록1’, ‘십진블록2’, ‘수막대1’, ‘수막대 2’를 자릿값 판에 나타낸 결과

‘바둑돌1’과 ‘바둑돌2’ 답은 같으나 자릿값 판에 나타내는 과정에는 큰 차이가 있다. 교사는 “바둑돌2와 바둑돌1은 어떤 차이점이 있을까?”와 같은 발문을 통해 학생들과 토론을 하고 바람직한 결론을 얻을 수 있도록 도와야 한다. 토론을 통해 얻을 수 있는 결론으로는 자릿값 판의 활용에는 십진기수법의 원리가 함께 해야 한다는 것과 일반적으로 가역적 사고는 쉽지 않지만 구체물 활용과 자릿값 판 사이에는 가역적 사고를 해야 한다는 것 등이 있다.

1단계에서 서로 다른 구체물을 선택한 경우에도 조작 방법에 따라 2단계의 자릿값 판에 나타낸 결과가 같을 수 있다. 이러한 사실에 대해 학생들은 놀라워 할 수도 있지만 일부 학생은 인식하기 어려울 수도 있을 것이다. 이때 교사는 “자릿값 판에는 어떤 공통점이 있을까요?”라는 발문을 통해 서로의 자릿값 판을 비교할 수 있는 기회를 제공하여 자연수 덧셈 계산 원리를 찾는 데 도움을 줄 필요가 있다.

학생들은 1단계와 2단계를 통해 문제 풀이를 완성하였다. 3단계는 패턴 찾기를 통해 알고리즘을 완성하는 단계이다. 즉, 학생이 활용할 수 있는 구체물이나 자릿값 판을 통해 패턴을 찾고 궁극적으로 구체물과 자릿값 판 없이 계산하는 형식화된 알고리즘을 완성하는 것이다. 예를 들어 17+9[7]를 위와 같은 방법을 사용하여 계산해 보라고 요청하면, 구체물과 자릿값 판을 이용하여 해결할 것이다. 이때 교사가 18+8을 구체물 없이 위와 같은 방법을 사용하여 계산해 보라고 요청하면, 학생은 자릿값 판을 이용하여 해결할 것이다. 다음으로 25+7을 구체물과 자릿값 판 없이 해결해 보라고 요청한다. 학생이 알고리즘을 만드는 데 어려움을 겪으면 계속해서 다른 문제 제시를 통해 충분한 연습을 할 필요가 있다. 17+9를 ‘십진블록1’과 같은 방법을 사용하여 자릿값 판에 나타내고, 18+8을 자릿값 판에 나타내어 계산한 결과는 [그림 5]와 같고, 25+7을 구체물과 자릿값 판 없이 계산하는 과정에서 얻은 알고리즘의 예시는 [그림 6]과 같다.

7) 수민이는 연필 17자루를 가지고 있다. 효진이는 연필 9자루를 가지고 있다. 수민이와 효진이가 가지고 있는 연필은 모두 몇 자루 인가?와 같이 문장제로 제시된 문제를 의미한다.

10	1
1	7
	9
1	16
1	
1	6
2	6

10	1
1	8
	8
1	16
1	
1	6
2	6

[그림 5] 자연수 덧셈 자릿값 판 예시

2	5
	7
2	
1	2
3	2

2	5
	7
1	2
2	
3	2

[그림 6] 자연수 덧셈 알고리즘 예

찾은 패턴에 따라 알고리즘을 형식화 시키는 방법은 다양할 수 있다. 만약 학생이 발견한 알고리즘이 교과서에서 제시하는 표준 알고리즘이 아니더라도 스스로 패턴을 찾아 형식화한 알고리즘이라면 충분히 가치가 있다. 예컨대 학생이 형식화한 [그림 6]의 알고리즘은(세 자리 수) + (세 자리 수)에서도 충분히 활용할 수 있는데, 그 예는 [그림 7]과 같다.

3	9	6
2	7	8
5		
1	6	
	1	4
6	7	4

3	9	6
2	7	8
	1	4
1	6	
5		
6	7	4

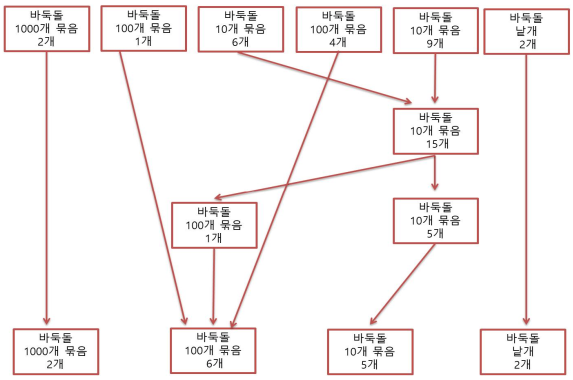
[그림 7] 자연수 덧셈 알고리즘 적용 예시

나. 소수의 덧셈 계산 지도방안

‘재식이는 물통에 $21.6L$의 물을 가지고 있다. 물통에 $4.92L$의 물을 더 넣었다면 재식이의 물통에 있는 물의 양은 얼마 인가?’ 하는 문제를 제시할 때, 1단계에서 자연수에서의 선행 경험과 비형식적 지식을 통해 구체물을 선택하고 활용하여 계산을 수행할 것이고, 이때 시행착오에 의한 단위 선정 과정이 있을 것이다. 예컨대 자연수 덧셈에서 바둑돌을 활용한 학생은 소수의 덧셈에서도 바둑돌을 활용할 가능성이 있다. 이 경우를 이후 ‘바둑돌3’ 이라 칭할 것이다. 자연수에서와 같이 바둑돌 1개를 단위 1로 택할 경우, 21.6에서 21은 표현이 가능하나 0.6의 표현이 불가능하다. 그래서 바둑돌 10개를 단위 1로 택하면 21.6의 각 자리 수를 바둑돌로 표현할 수 있다. 하지만 4.92에서 숫자 2를 바둑돌로 표현하는 것은 불가능하다. 소수에서 단위 1의 선택은 자연수에서 그것과 달리 많은 시행착오[8]를 거치게 된다. 그래서 다시 바둑돌 100개를 단위 1로 택하면 21.6과 4.92의 각 자리 수를 바둑돌로 표현할 수 있다. 즉, 21.6에서 6은 바둑돌 10개 묶음 6개, 1은 바둑돌 100개 묶음 1개, 2는 바둑돌 1000개 묶음 2개로 나타내고, 4.92에서 2는 바둑돌 낱개 2개, 9는 바둑돌 10개 묶음 9개, 4는 바둑돌 100개 묶음 4개로 나타낼 수 있다. 따라서 21.6+4.92는 바

8) 바둑돌 1개를 ‘단위 1’ 로 택하여 주어진 숫자를 표현함에 어려움을 겪을 경우, 바둑돌 1개를 0.1로 택할 수도 있다. 그러나 이는 단위 1에 대한 이해를 약화시키는 결과를 초래하기도 하여 향후 분수의 이해를 어렵게 만드는 요인이 될 수 있다. 따라서 이 논문에서는 “바둑돌 10개를 ‘단위 1’ 로 택한다.” 는 용어를 사용하였다.

둑돌 낱개 2개, 바둑돌 10개 묶음 15개, 바둑돌 100개 묶음 5개, 바둑돌 1000개 묶음 2개를 얻는다. 바둑돌 10개 묶음 15개는 바둑돌 100개 묶음 1개와 바둑돌 10개 묶음 5개로 다시 묶고, 정리하면 바둑돌 1000개 묶음 2개, 바둑돌 100개 묶음 6개, 바둑돌 10개 묶음 5개, 바둑돌 2개를 얻는다. 그러므로 21.6+4.92는 26.52이다. 이러한 활동의 과정을 도식화하면 [그림 8]과 같다.

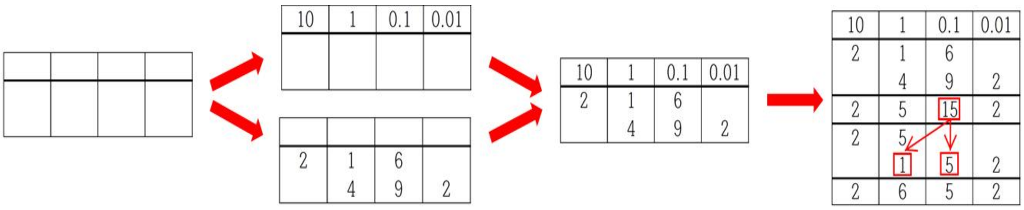


[그림 8] 도식화된 '바둑돌3'의 활동 과정

자연수에서 '십진블록1' 의 방법을 택한 학생은 소수의 덧셈에서 '바둑돌3' 과 같이 심각한 시행착오를 겪을 것이다. '십진블록2' 에서 우연히 막대블록을 단위 1로 택한 학생과 '단위 블록으로 계산했던 것처럼 막대블록을 단위 1로 택하면 어떻게 될까?' 라는 명확한 생각을 가진 학생은 단위 선정에 따른 시행착오에 분명한 차이가 있을 것이다. 후자의 경우 단위에 관한 유연한 생각 때문에 단위 선정의 시행착오에 대해 전자보다 상대적으로 관대할 것이다. 소수의 덧셈에서 십진블록을 활용할 때 단위 선정의 과정이 어떻게 진행되었든지 십진블록을 활용한 방법은 '바둑돌3' 과 유사한 과정으로 진행될 것이므로 자세한 과정은 생략하기로 한다.

자연수의 덧셈에서 수막대를 활용한 학생은 소수의 덧셈에서도 수막대를 활용할 가능성이 있다. 자연수에서 '수막대2' 를 활용한 학생은 시행착오에 확실히 관대할 것으로 예상된다. 소수에서도 이러한 방법으로 접근하는 경우를 이후 '수막대3' 라 칭할 것이다. 수막대 3개를 단위 1로 택하면 21은 표현이 가능하나 숫자 6의 표현이 불가능하다. 그래서 수막대 30개를 단위 1로 택하면 21.6의 각 자리 수를 수막대로 표현할 수 있다. 하지만 4.92에서 숫자 2를 표현하는 것이 불가능하다. 수막대 300개를 단위 1로 택하면 21.6과 4.92 모두 표현할 수 있다. 21.6의 6은 수막대 30개 묶음 6개, 1은 수막대 300개 묶음 1개, 2는 수막대 3000개 묶음 2개로 나타내고 4.92는 2는 수막대 3개 묶음 2개, 9는 수막대 30개 묶음 9개, 4는 수막대 300개 묶음 4개로 나타낸다. 그 결과 수 막대 3000개 묶음 2개, 수 막대 300개 묶음 5개, 수 막대 30개 묶음 15개, 수 막대 3개 묶음 2개를 얻는다. 수 막대 30개 묶음 15개를 다시 묶어, 수 막대 300개 묶음 1개, 수 막대 30개 묶음 5개로 표현할 수 있다. 따라서 수 막대 3000개 묶음 2개, 수 막대 300개 묶음 6개, 수 막대 30개 묶음 5개, 수 막대 3개 묶음 2개를 얻는다. 즉 21.6+4.92=26.52이다. 그런데 우리가 일반적으로 알고 있는 3은 단위 1짜리 3개가 모인 것인데 반해, 여기서는 수막대 3개가 모여 단위 1을 결정하고 있기 때문에 예기치 못한 갈등상황이 발생할 수 있다.

두 번째 단계에서 '바둑돌3' 과 '수막대3' 을 자릿값 판에 나타내면 다음 [그림 9]와 같다.



[그림 9] '바둑돌3', '수막대3'을 자릿값 판에 나타낸 결과

소수의 덧셈에서는 자릿값이 1보다 작은 단위로 확장된다. <표 8>에서의 반응처럼 자릿값 판을 제거했을 때 단위에 대한 혼란이 생길 수 있다. 이러한 불편함을 개선하기 위해 10^0과 10^{-1} 사이에 '.' 을 표기하는데 이를 소수점이라 한다. 이는 자연수와 구분되는 특징이다.

학생들은 1단계와 2단계로부터 문제 풀이를 완성하였다. 3단계는 패턴 찾기를 통해 알고리즘을 완성하는 단계이다. 즉, 학생이 활용할 수 있는 구체물이나 자릿값 판을 통해 패턴을 찾고 궁극적으로 구체물과 자릿값 판 없이 계산하는 형식화된 알고리즘을 완성하는 것이다. 예를 들어 11.8+7.96을 위와 같은 방법을 사용하여 계산해 보라고 요청하면, 구체물과 자릿값 판을 이용하여 해결할 것이다. 이때 교사는 12.4+6.96을 구체물 없이 위와 같은 방법으로 계산해 보라고 요청하면, 학생은 자릿값 판을 이용하여 해결할 것이다. 다음으로 27.3+9.99를 구체물과 자릿값 판 없이 해결해 보라고 요청한다. 학생이 어려움을 겪으면 계속해서 다른 문제 제시를 통해 충분한 연습을 할 필요가 있다. 11.8+7.96를 '수막대3' 과 같은 방법을 사용하고 자릿값 판에 나타내어 계산하고, 12.4+6.96을 자릿값 판에 나타내어 계산한 결과는 [그림 10]과 같고, 27.3+9.99를 구체물과 자릿값 판 없이 계산하는 과정에서 얻은 알고리즘 예시는 [그림 11]과 같다.

10	1	0.1	0.01
1	1	8	
	7	9	6
1	8	17	6
1	8		
	1	7	
1	9	7	6

10	1	0.1	0.01
1	2	4	
	6	9	6
1	8	13	6
1	8		
	1	3	
1	9	3	6

[그림 10] 소수 덧셈 자릿값 판 예시

$$\begin{array}{cccc} 2 & 7. & 3 & \\ & 9. & 9 & 9 \\ \hline 2 & & & \\ 1 & 6 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & & 9 \\ \hline 3 & 7. & 2 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2 & 7. & 3 & \\ & 9. & 9 & 9 \\ \hline & & & 9 \\ & 1 & 2 & \\ 1 & 6 & & \\ 2 & & & \\ \hline 3 & 7. & 2 & 9 \end{array}$$

[그림 11] 소수 덧셈 알고리즘 예시

패턴 찾기를 통해 학생들이 얻은 알고리즘은 다를 수 있다. 하지만 자릿값 판에서 패턴을 찾아 알고리즘을 얻는 과정과 별개로, 얻은 알고리즘에서 패턴을 찾는 과정 역시 필요하다. 왜냐하면 앞 단계와 뒤 단계는 어느 정도의 개념 연결은 되지만 추상화 과정 때문에 차이가 있다. 따라서 그 단계에서 발견할 수 있는 규칙에 대해 이야기 하는 것은 매우 의미 있는 일이다. 교사의 "알고리즘 속에서 발견한 규칙에 대해 이야기해 봅시다." 라는

발문에 대해 “소수점에 맞춰 계산해요.”라는 답변이 나온다면, 그것을 정당화하는 과정에 대해 토론하는 기회를 제공할 필요도 있다. 이는 소수점을 왜 맞춰 계산 하는지를 덧셈 계산 원리와 연계시키는 좋은 방법이 될 것이다.

다. 분수의 덧셈 계산 지도방안

분수의 덧셈 계산 지도방안은 어려움을 겪을 수 있는 대표적인 문제를 동분모 분수와 이분모 분수로 구분하여 알아볼 것이다. 동분모 분수에서 피가수와 가수의 단위 분수가 같아 자연스럽게 더할 수 있는 방법을 이분모 분수에서 사용하고자 하기 때문이다.

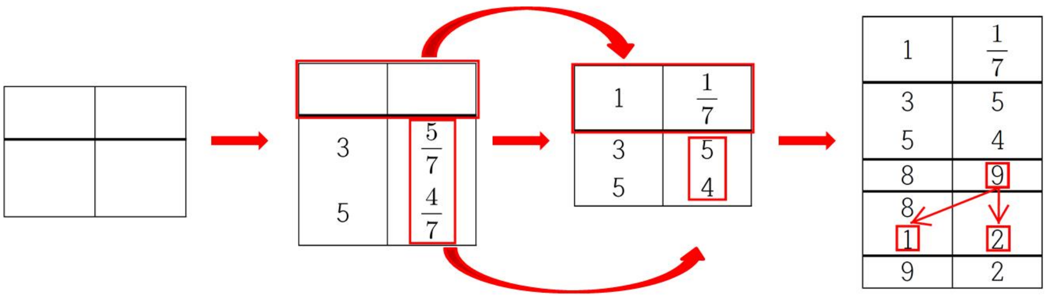
1) 동분모 분수의 덧셈 계산 지도방안

‘나는 초콜릿 $3\frac{5}{7}$개 가지고 있고 동생은 초콜릿 $5\frac{4}{7}$개를 가지고 있다. 나와 동생이 가지고 있는 초콜릿은 모두 몇 개인가?’ 라는 문제를 제시하면 학생은 선행지식과 경험을 바탕으로 구체물을 선택하고 활용할 것이고 시행착오에 의한 단위 선정과정이 등장할 것이다. 이것이 1단계에 해당한다. 예컨대 자연수와 소수의 덧셈 계산에서 바둑돌을 활용한 학생은 바둑돌을 사용해 계산할 수도 있을 것이다. 이 경우를 이후 ‘바둑돌4’ 라 칭할 것이다. 자연수와 같이 바둑돌 1개를 단위 1로 택할 경우, 자연수 부분은 표현할 수 있으나 진분수 부분을 표현할 수 없다. 따라서 진분수 부분을 표현할 수 있도록 단위 1을 택하는 방법을 조정해야 한다. 바둑돌 2개를 단위 1로 택해도 진분수 부분을 표현할 수 없다. 바둑돌 3개, 4개, 5개, 6개를 선택해도 마찬가지이다. 이처럼 동분모 분수의 단위 선택은 피가수와 가수의 진분수 부분을 표현할 수 있는 단위를 선정하기 위해 시행착오를 겪게 된다. 시행착오 결과 바둑돌 7개를 단위 1로 택하면 $3\frac{5}{7}$와 $5\frac{4}{7}$의 각 자리수를 바둑돌로 표현 할 수 있다. $3\frac{5}{7}$는 바둑돌 7개 묶음 3개와 바둑돌 낱개 5개로 표현하고 $5\frac{4}{7}$는 바둑돌 7개 묶음 5개와 바둑돌 낱개 4개로 나타낸다. 그 결과 바둑돌 7개 묶음 8개와 바둑돌 낱개 9개를 얻는다. 바둑돌 낱개 9개를 바둑돌 7개 묶음 1개와 바둑돌 낱개 2개로 다시 묶어 바둑돌 7개 묶음 9개와 낱개 2개를 얻는다. 따라서 $3\frac{5}{7}+5\frac{4}{7}=9\frac{2}{7}$이다.

선행 경험에 의해 십진블록을 활용할 가능성도 있다. 이 경우를 이후 ‘십진블록3’ 이라 칭한다. 십진블록은 서로 다른 모양의 블록이 고정되어 있기 때문에 단위선정에 시행착오를 겪을 것이다. 만약 단위블록 한 개를 단위 1로 택하면 $\frac{5}{7}$와 $\frac{4}{7}$를 나타낼 수 없다. 막대블록, 판블록, 상자블록 한 개를 단위 1로 택해도 마찬가지이다. 따라서 가수와 피가수를 표현할 수 있는 단위 1을 학생 스스로 만들어 택해야 한다. 예컨대 시행착오를 통해 막대블록 7개를 단위 1로 택하면, $3\frac{5}{7}$는 막대블록 7개 묶음 3개와 막대블록 5개로 표현할 수 있고 $5\frac{4}{7}$는 막대블록 7개 묶음 5개와 막대블록 4개로 표현할 수 있다. 그 결과 막대블록 7개 묶음 8개와 막대블록 9개를 얻는다. 막대블록 9개를 막대블록 7개 묶음 1개, 막대블록 2개로 다시 묶어 막대블록 7개 묶음 9개, 막대블록 2개를 얻는다. 따라서 $3\frac{5}{7}+5\frac{4}{7}=9\frac{2}{7}$이다.

자연수에서 ‘수막대2’를 활용했던 학생은 자연수에서 단위 1을 스스로 만들어 택해본 경험 때문에 분수의 덧셈에서 유연하게 생각할 수 있을 것이다. 단위 선택 과정과 관계없이 수막대를 활용한 방법은 ‘바둑돌4’와 유사하게 진행될 것이므로 자세한 과정은 생략하기로 한다.

두 번째 단계에서 ‘바둑돌4’와 ‘십진블록3’의 방법을 자릿값 판에 나타내면 [그림 12]와 같다.



[그림 12] ‘바둑돌4’, ‘십진블록3’을 자릿값 판에 나타낸 결과

[그림 12]를 통해 자연수, 소수의 계산 과정을 자릿값 판에 나타낸 결과와 구분되는 특징 네 가지를 확인할 수 있다.

첫째, 분수에서는 단위 선택의 문제를 넘어 선택된 단위 1을 재해석하는 단위 분수가 등장한다. 단위분수는 단위 1을 등분하여 얻기 때문에 단위분수로 단위 1을 해석할 수 있다. 예컨대 ‘바둑돌4’의 경우 바둑돌 7개를 단위 1로 택하면 선택된 단위 1을 재해석하는 단위 분수가 등장한다. 즉, 단위분수 $\frac{1}{7}$이 7개면 단위 1이 된다는 해석이 가능하다.

둘째, 분수의 덧셈 계산을 자릿값 판에 나타낼 때 숫자를 먼저 적고 단위를 기록하면 단위분수에 따른 진분수 부분의 해석이 요구되며 이에 따라 숫자가 자연수로 바뀌게 된다. 자릿값 판에 단위를 먼저 기록하고 필요한 숫자를 적거나 필요한 숫자를 먼저 적고 단위를 기록하는 두 가지 방법이 모두 적용가능한 자연수, 소수의 자릿값 판과 구분되는 차이점이다.

셋째, 10개씩 묶어 바로 왼쪽 단위 하나로 만드는 자연수, 소수와 달리 분수는 단위분수에 따라 다시 묶기의 기준이 달라진다. 교사는 “자릿값 판 속에서 찾은 특징에 대해서 이야기해 봅시다.”와 같은 발문을 통해 자릿값 판에 대한 토론의 기회를 주어야 한다. 이를 통해 “단위분수 7개가 되면 다시 묶어요.”와 같은 답변이 나온다면 다른 예시를 제시하며 “이런 경우는 어떻게 될까요?”하고 다시 묶기의 기준에 대해 생각할 기회를 주어야 한다.

넷째, 분수 덧셈 계산 결과는 자릿값 판 맨 마지막에 표현된 숫자를 단위 분수로 해석하여 얻는다. 즉, 자릿값 판에 나타낸 결과의 맨 마지막에 표현된 92(이것은 십진기수법에서의 ‘구십이’와 다르다)는 단위 1짜리 9개와 단위분수 $\frac{1}{7}$짜리 2개로 $9\frac{2}{7}$를 의미한다. 이는 자릿값 판의 제일 아래쪽에 표현된 결과를 읽으면 되는 자연수 및 소수와 구별되는 특징이다.

학생들은 1단계와 2단계를 통해 문제 풀이를 완성하였다. 3단계는 패턴 찾기를 통해 알고리즘을 완성하는 단계이다. 즉, 학생이 활용할 수 있는 구체물이나 자릿값 판을 통해 패턴을 찾고 궁극적으로 구체물과 자릿값 판 없이 계산하는 형식화된 알고리즘을 완성하는 것이다. 예를 들어 $1\frac{9}{11}+1\frac{4}{11}$를 위와 같은 방법으로 계산해 보라고 요청하면, 구체물과 자릿값 판을 이용하여 해결할 것이다. 이때 교사가 $1\frac{2}{5}+2\frac{4}{5}$를 구체물 없이 위와 같은 방법으로 계산해 보라고 요청하면, 학생은 자릿값 판을 이용하여 해결할 것이다. 다음으로 $1\frac{5}{7}+1\frac{4}{7}$를 구체물과 자릿값 판 없이 해결해 보라고 요청한다. 학생들이 어려움을 겪으면 계속해서 다른 문제 제시를 통해 충분한 연습을 할 필요가 있다. $1\frac{9}{11}+1\frac{4}{11}$는 '바둑돌 4'와 같은 방법을 사용하고 자릿값 판에 나타내어 계산하고, $1\frac{2}{5}+1\frac{4}{5}$를 자릿값 판으로 나타내어 계산한 결과는 [그림 13]과 같고, $1\frac{5}{7}+1\frac{4}{7}$를 구체물과 자릿값 판 없이 계산하는 과정에 얻은 알고리즘의 예시는 [그림 14]와 같다.

1	$\frac{1}{11}$
1	9
1	4
2	13
2	
1	2
3	2

1	$\frac{1}{5}$
1	2
1	4
2	6
2	
1	1
3	1

[그림 13] 동분모 분수 덧셈 자릿값 판 예시

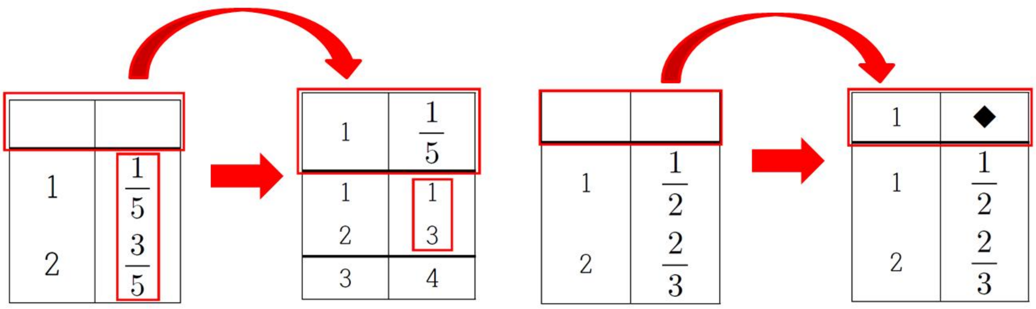
$$\begin{array}{cc} 1 & \frac{5}{7} \\ 1 & \frac{4}{7} \\ \hline 2 & \frac{9}{7} \\ \hline 2 & \\ 1 & \frac{2}{7} \\ \hline 3 & \frac{2}{7} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & \frac{5}{7} \\ 1 & \frac{4}{7} \\ \hline 2 & \frac{9}{7} \\ \hline 1 & \frac{2}{7} \\ 2 & \\ \hline 3 & \frac{2}{7} \end{array}$$

[그림 14] 동분모 덧셈 알고리즘 예시

패턴 찾기를 통해 얻은 알고리즘 속에서 발견할 수 있는 특징에 대해 토론하는 것은 덧셈 계산 원리에 대한 이해를 강화시킬 수 있을 것이다. 교사의 "알고리즘 속에서 발견한 규칙에 대해 이야기해 봅시다."라는 발문에 대해 "자연수는 자연수끼리 분수는 분수끼리 더해요."와 같은 답변이 나온다면, 그것을 정당화하는 과정을 토론하는 기회를 제공할 필요가 있다.

2) 이분모 분수의 덧셈 계산 지도방안

이분모 분수의 덧셈 계산 지도방안을 알아보기에 앞서 동분모 분수와 이분모 분수의 차이점을 밝히고 이분모 분수 덧셈 계산에 동분모 분수의 계산 과정을 활용하기 위한 방법에 대해 알아보고자 한다. 동분모 분수와 이분모 분수의 차이점을 알아보기 위해 $1\frac{1}{5}+2\frac{3}{5}$과 $1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}$의 계산을 자릿값 판에 나타낸 결과는 [그림 15]와 같다.



[그림 15] 동분모 분수와 이분모 분수를 자릿값 판에 나타낸 결과

자릿값 판에 숫자를 먼저 쓰고 단위를 기록할 때, 피가수와 가수의 단위분수가 동일한 동분모 분수의 경우 단위 분수를 $\frac{1}{5}$로 결정하면, 동일 단위끼리 계산할 수 있다. 그러나 피가수와 가수의 단위분수가 다른 이분모 분수 덧셈 계산을 위해서는 피가수와 가수의 진분수 부분을 동시에 해석할 수 있는 단위분수를 찾는 과정이 요구된다. 이는 교육과정에서 말하는 '통분'과 같다.

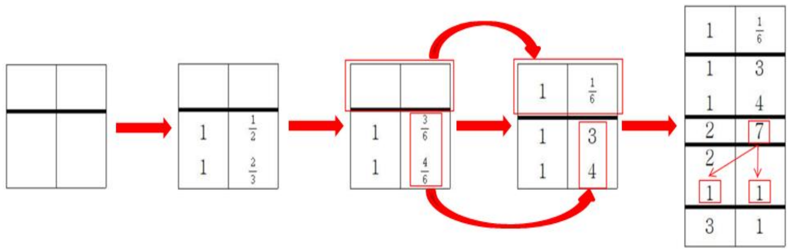
'나는 초콜릿 $1\frac{1}{2}$개 먹었고 동생은 $1\frac{2}{3}$개 먹었다면 나와 동생이 먹은 초콜릿은 모두 몇 개 인가?' 라는 문제를 제시할 때 학생은 비형식적 지식을 통해 구체물을 선택하고 활용할 것이고, 이때 시행착오가 나타난다. 예컨대 앞서 바둑돌을 활용한 학생은 이분모 분수의 덧셈에서도 바둑돌을 활용할 가능성이 있다. 이 경우를 이후 '바둑돌5'라 칭할 것이다. 자연수와 같이 바둑돌 1개를 단위 1로 택할 경우, 자연수 부분은 표현할 수 있으나 진분수 부분을 표현할 수 없다. 그래서 바둑돌 2개를 단위 1로 택하면 $\frac{1}{2}$을 바둑돌로 표현할 수 있지만 $\frac{2}{3}$는 표현이 불가능하다. 그래서 다시 바둑돌 3개를 단위 1로 택하면 $1\frac{2}{3}$는 표현할 수 있지만 $\frac{1}{2}$은 표현이 불가능하다. 또 다시 바둑돌 4개를 단위 1로 택하면 $1\frac{1}{2}$는 표현할 수 있지만 $\frac{2}{3}$는 표현할 수 없다. 바둑돌 5개를 단위 1로 택하면 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$을 표현할 수 없다. 이분모 분수의 덧셈은 피가수와 가수의 진분수 부분을 동시에 표현하기 위한 시행착오를 겪는다. 그래서 다시 바둑돌 6개를 단위 1로 택하면 $1\frac{1}{2}$과 $1\frac{2}{3}$의 각 자리 수를 바둑돌로 표현할 수 있다. $1\frac{1}{2}$은 바둑돌 6개 묶음 1개, 바둑돌 낱개 3개로 나타내고, $1\frac{2}{3}$는 바둑돌 6개 묶음 1개, 바둑돌 4개로 나타낼 수 있다. 그 결과 바둑돌 6개 묶음 2개, 바둑돌 낱개 7개를 얻는다. 바둑돌 낱개 7개는 바둑돌 6개 묶음 1개와 바둑돌 낱개 1개로 다시 묶어 바둑돌 6개 묶음 3개와 바둑돌 낱개 1개를 얻는다. 즉, $1\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$는 $3\frac{1}{6}$이다.

선행 경험에 의해 십진블록을 활용할 가능성도 있다. 이 경우 십진기수법의 원리에 따

라 만들어진 십진블록의 특성 때문에 심각한 시행착오를 겪을 수 있다. 단위블록 한 개를 단위 1로 택하면 $1\frac{1}{2}$과 $1\frac{2}{3}$를 나타낼 수 없다. 막대블록, 판블록, 상자블록 한 개를 단위 1로 택해도 마찬가지이다. 즉, 학생들은 단위 1을 스스로 만들어 택해야 한다. 단위 1을 택하는 시행착오의 과정은 '바둑돌5'와 유사할 것이므로 자세한 과정은 생략한다.

한편 자연수와 소수의 덧셈에서 수막대를 활용한 학생은 분수의 덧셈에서도 수막대를 활용할 가능성이 있다. '수막대2'와 '수막대3'의 방법을 활용한 학생은 스스로 단위를 택하여 활용한 경험이 있기 때문에 시행착오에 관대할 것이다. 단위를 택하는 시행착오의 과정은 '바둑돌5'와 유사하게 진행될 것이므로 자세한 과정은 생략하기로 한다.

두 번째 단계에서 '바둑돌5'의 방법을 자릿값 판에 나타내면 [그림 16]과 같고, 세 번째 단계에서 패턴 찾기를 통해 얻은 알고리즘의 예시는 [그림 17]과 같다.



[그림 16] '바둑돌5'를 자릿값 판에 나타낸 결과

$$
\begin{array}{cc}
1 & \frac{1}{2} \\
1 & \frac{2}{3} \\
\hline
1 & \frac{3}{6} \\
1 & \frac{4}{6} \\
\hline
2 & \frac{7}{6} \\
\hline
2 & \\
1 & \frac{1}{6} \\
\hline
3 & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

[그림 17] 이분모 분수 알고리즘 예시

Ⅴ. 결론 및 제언

이 연구는 덧셈 계산 원리 관련 교육과정 내용과 학생의 반응을 살펴, 덧셈 계산 원리의 연결성 강화를 위한 시사점을 제공하는 것을 목적으로 하였다. 연구목적을 달성하기 위해 덧셈 계산 원리와 그 연결에 대한 연구대상자들의 반응을 분석하였으며, 덧셈 계산 원리의 연결성을 강화할 수 있는 지도방안을 제안하였다. 이상의 과정을 통해 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 연결양상을 살핀 결과 TTT를 제외한 43.5%의 연구대상자들에게서 덧셈 계산 간의 연계가 쉽지 않음을 확인할 수 있었다. 정답률로 자연수와 소수의 덧셈 계산보다 분수의 덧셈 계산이 상대적으로 어렵다는 것을 확인할 수 있었다. 또한, 연결양상으로 일부 연구대상자의 경우 꼭 분수의 덧셈 계산이 어렵다고 보기는 어려운 경우도 있었다.

둘째, 덧셈의 계산 원리에 대한 반응 분석 결과 원리를 알고리즘으로 인식하고 있음을 확인할 수 있었다. 소수의 덧셈 계산 원리에 대해 34.7%의 연구대상자는 '소수점에 맞춰서 계산'이라는 알고리즘 방법을 덧셈 계산 원리라 응답하였다. 분수의 덧셈 계산 원리에 대해 58.6%의 연구대상자가 '통분 후 더함'과 같이 분수 연산의 계산 절차인 통분을 덧셈 계산 원리라 답하였다. 기계적인 방법을 제시하고 있는 교과서와 교사용 지도서를 고려했을 때 연구대상자들의 반응은 어느 정도 이해 가능하다. 그런데 통분과 관련한 연구대상자의 응답 중 "최소공배수로 통분한 후 계산", "자연수는 자연수끼리, 분수는 분수끼리 계산", "대분수를 가분수로 고쳐 계산" 등과 같이 교과서에서 활동의 예시로 제시하는 내용과 정확히 일치하는 연구대상자의 반응을 통해 잘된 예시가 학생들의 학습에 도움이 될 수 있다는 정보도 얻을 수 있었다.

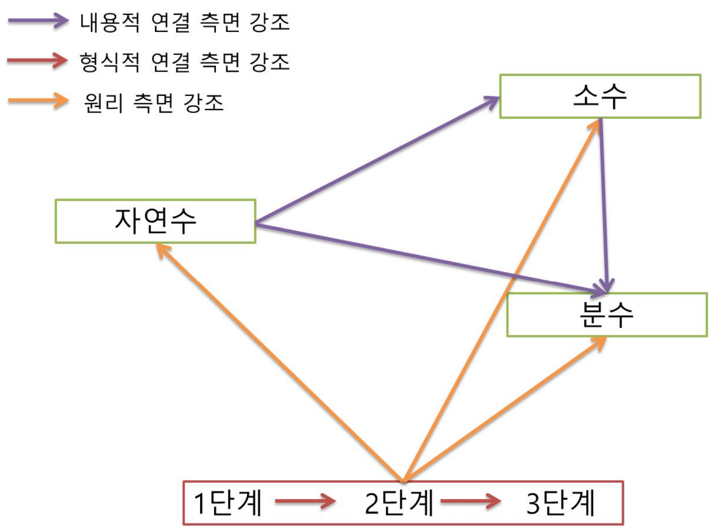
셋째, 덧셈 계산 원리 사이의 연결에 대한 분석 결과 자연수·소수·분수의 덧셈 계산 원리를 의미 있게 연결하는 데 다양한 방해요인이 있음을 확인할 수 있었다. 자연수와 소수 덧셈 계산 원리의 연결에 대해 다수의 연구대상자들은 숫자가 갖는 특징인 소수점을 근거로 공통점이나 차이점을 말하고 있다. 이를 통해 숫자가 갖는 특징인 소수점이 덧셈 계산 원리의 연결을 방해하는 요인으로 작용할 수 있다는 정보를 얻을 수 있었다. 자연수와 분수의 덧셈 계산 원리의 연결에 대해 41.3%의 연구대상자가 분수의 덧셈에서 알고리즘으로 등장하는 통분을 차이점의 근거로 언급하고 있으며, 이는 자연수와 분수의 덧셈 계산 원리의 연결을 방해하는 요인으로 작용할 수 있음을 의미한다. 분수와 소수의 덧셈 계산 원리가 같다고 응답한 연구대상자는 62.8%로 다르다는 응답률보다 높은데, 분수와 소수의 상호 전환에 의한 계산 방법을 그 이유로 들었다. 이는 곱셈에서 다루는 상호 전환에 방법이 연구대상자들에게 강렬히 남아 분수와 소수의 덧셈 계산 원리의 연결을 방해하는 요인으로 작용할 수 있다는 정보를 얻을 수 있었다.

넷째, 덧셈 계산 원리에 대한 교차 분석 결과 덧셈 계산의 연결에 대해 연구대상자의 응답과 실제 의미 있는 연결을 한 연구대상자 간의 차이가 분명함을 확인할 수 있었다. 자연수와 소수의 덧셈 계산 원리에 대해 '같다'고 응답한 연구대상자는 21.6%였으나, 원리에 대한 응답을 연결하여 분석한 결과 8.6%의 연구대상자들만 의미 있는 연결을 하였음을 확인하였다. 특히 자연수·소수·분수의 덧셈 계산 원리 연결에 대해 46명의 연구대상자가 35개의 다양한 유형으로 분석된다는 것은 놀라운 일이었는데, 이는 실제 덧셈 계산 원리의 연결이 이루어지지 못하고 있을 가능성이 높다는 증거이다.

연구자는 연구대상자들의 반응 분석을 통해서 덧셈 계산 원리와 그 연결이 다수의 문제임을 확인함과 지도방안 제안의 여지가 있음을 확인하였다. 이후 교유과정 및 선행연구 검토 결과와 반응 분석을 통해 객관적으로 얻은 자료를 토대로 덧셈 계산 원리와 그 연결을 강화할 수 있는 지도방안을 제안하였다.

제안된 지도방안에서는 내용적 연결 측면을 강조하기 위해 덧셈 계산 원리라는 핵심 아이디어를 기준으로 수의 범위를 자연수, 소수, 분수로 확장해 다루고자 하였다. 형식적 연결 측면을 강조하기 위해 지도방안을 3단계로 구성하여 자연수, 소수, 분수에 일관되게 적용할 수 있게 하였다. 1단계는 학생의 비형식적 지식으로 하나의 구체물을 선택하고 활용해 계산을 수행하는 단계이다. 이때 바둑돌, 십진블록, 연결수막대를 제시한 것은 학생이 스스로 비형식적 지식을 이용해 구체물을 택할 수 있도록 하기 위함이었다. 2단계는 구체물 조작활동과 정신활동의 유기적 관련성을 확보하는 단계이다. 이때 구체물을 활용한 방법대로 자릿값 판에 나타내는 것이 중요하다. 3단계는 패턴 찾기를 통한 알고리즘을 완성하는 단계로써, 구체물과 자릿값 판 없이 계산을 수행하는 과정에서 찾은 패턴을 알고리

즘과 연결시키는 단계이다. 자연수에서 경험한 다양한 구체물 활용 방법과 내용 제시 방법을 소수와 분수에도 적용될 수 있도록 함으로써 일관성 있는 연결을 의도하였다. 3단계의 절차에 따라 자연수, 소수, 분수 순서로 덧셈 계산 원리에 대해 지도할 것을 제안했으며, 이 과정을 시각화 하면 [그림 18]과 같다.



[그림 18] 시각화된 덧셈 계산 원리와 연결성 강화 지도방안

연구대상자의 반응 분석과 지도방안을 모색하는 과정을 통해 덧셈 계산 원리의 연결성 강화를 위한 시사점을 다음과 같이 얻을 수 있었다.

첫째, 형식적 측면의 연결을 강화하기 위해 일관성 있는 내용 제시가 필요하다. 현행 교육과정 속 덧셈 계산 원리의 내용 제시 방법은 자연수에서는 수모형, 소수에서는 눈금 있는 컵, 분수에서는 막대형 그림으로 다양했다. 구체물 사용을 형식화와 연결하는 방법도 제각각 이었다. 자연수에서는 수모형을 세로셈과 연결 짓고, 소수에서는 최소단위가 몇 번 포함 되었는지 세고, 분수에서는 통분을 통한 방법으로 내용을 전개하고 있다. 현행 교육과정을 학습한 학생에게 자연수, 소수, 분수의 덧셈 계산 원리의 연결을 기대하기 어려울 수 있을 것이다. 연결성을 고려한다면 자연수, 소수, 분수 각각의 내용 제시에 용이한 방법을 택할 것이 아니라, 후속학습에서 필요한 방법을 처음부터 경험할 수 있게 해야 한다. 예를 들어 '수막대2' 처럼 단위를 만들어 택하는 방법은 자연수 계산에서 단위와 관련한 예상치 못 한 어려움이 있을 수 있으나 이후 학습 할 분수의 덧셈에 도움이 될 것이다.

둘째, 연결성을 강화하기 위해 패턴을 찾을 수 있는 기회를 충분히 제공해야 한다. 모르는 것을 탐구하기 위해 구체물을 사용하는 것과 아는 것을 확인하기 위해 구체물을 사용하는 것은 다르다. 연구자는 모르는 것을 알아가기 위한 구체물 사용에 관심이 있다. 즉, 원리에 끼워 맞춰 구체물 조작을 하는 것이 아니라 구체물 사용 속에서 원리를 찾고자 한다. 그러나 구체물 조작활동과 추상화된 정신활동은 자연스럽게 연결될 수 없으며, 둘의 유기적인 관련성을 찾기 위해서는 스스로 패턴을 탐구하는 기회가 필수적이다. 이는 규칙성이나 질서를 발견하고 탐구하며 이해하는 것이 바로 진정한 수학적인 활동이 되어야 한다는 주장(Van de Walle, 2004)과 일맥상통한다. 하지만 현행 교육과정에서는 이것을 여과

없이 제시하고 있다. 따라서 교사가 학생의 행동과 사고에 대해 스스로 패턴을 찾을 수 있는 충분한 기회를 제공하는 것은 연결 능력을 키워 줄 수 있는 좋은 방안이 될 것이다.

셋째, 연결성을 강화하기 위해서 학생들에게 다양한 갈등상황을 제시할 필요가 있다. 생각하는 힘을 키우기 위해서는 새로운 방법으로 해결하게 요구하고, 패턴을 찾도록 요구하고, 자신의 의견에 대해 정당화하도록 요구하는 등 다양한 갈등상황에 노출시킬 필요가 있다. 같은 맥락에서 Van de Walle(2004)은 적극적인 정신활동이 새로운 아이디어와 씨름하고 그것을 기존 조직망에 연결, 통합 시켜 자신과 타인의 아이디어를 의심하고 도전하고 격려하는 것이라 하였다. 이때 교사는 적극적으로 학생의 선행지식과 경험을 확인해야 하며 동시에 적극적인 토론 촉진자가 되어야 한다. 토론을 촉진하기 위해 새로운 가능성을 제안하고, 공통점을 찾을 수 있도록 격려하고, 자신의 말에 대한 정당화를 요구할 필요가 있다.

연구대상자들의 반응 분석과 연결성 강화를 위한 지도방안의 탐색을 통해서 의미 있는 시사점을 얻었지만 다음과 같은 내용을 제언하고자 한다.

먼저 학생들이 모든 것을 다 알 필요는 없지만 다음과 같은 두 가지 측면에서 학생들이 원리를 알고 있는지에 대해 강조한 것이다. 하나는 학습목표는 한 차시 내에서 달성되어야 할 기준인데 덧셈 계산 원리를 이해하는 것은 학습목표에 등장한다. 다른 하나는 이 논문을 읽을 대상이 교사라는 점을 전제한다면 학생을 지도할 때 교사는 반드시 원리를 고려해야 한다. 다음으로 덧셈 계산 원리를 이해했다는 것의 의미에 대해 생각해 볼 필요가 있다. 학생이 알고리즘을 적용해 계산할 수 있고, 왜 그 알고리즘을 적용할 수 있는지에 대해 설명할 수 있다면 이해했다고 할 것이다. 그러나 학생이 얼마만큼 알고 있는지에 대한 문제에 대해서는 다시 고민해 볼 필요가 있다. 마지막으로 검사지에서 덧셈 계산 원리 대신 덧셈 계산 방법을 질문했다면 그 반응은 어떠했을지 고민해 볼 여지가 있다. 그런데 46명의 연구대상자들의 자료를 바탕으로 살펴보면, 덧셈 계산 원리를 묻는 질문에 다양한 방법들을 응답하고 있는 것으로 보아 계산 방법에서도 다르다고 응답하였을 것이라 짐작해 볼 수 있다.

이 연구에서 지도방안을 제안한 것은 덧셈 계산 원리와 연결성에 어려움을 겪는 학생을 만났을 때, 제안된 지도방안으로도 접근해 볼 수 있다는 것이지 교육과정 전반에 대한 대대적인 수정이 필요하다는 것을 의미하지 않는다. 나아가 이 연구에서 제안한 지도방안이 실제로 학생들에게 어떤 효과가 있는지에 대한 실증적인 연구를 제안한다.

참 고 문 헌

강문봉, 강홍규, 김수미, 박교식, 박문환, 서동엽, 송상헌, 유현주, 이종영, 임재훈, 정동권, 정은실, 정영옥 (2005). **초등수학교육의 이해**. 서울 : 경문사

강완 (1991). 수학적 지식의 교수학적 변환. **학교수학, 30**(3), 71-89.

강현영 (2007). 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현: 시각적 패턴을 중심으로. **학교수학, 9**(2), 313-326.

교육과학기술부 (2013a). **초등학교 교사용 지도서 1-2**. 서울 : 천재교육

교육과학기술부 (2013b). **초등학교 교사용 지도서 2-1**. 서울 : 천재교육

교육과학기술부 (2014). **초등학교 교사용 지도서 4-2**. 서울 : 천재교육

교육과학기술부 (2015). **초등학교 교사용 지도서 5-1**. 서울 : 천재교육

교육부 (2017). **초등학교 교사용 지도서 1-1.** 서울 : 천재교육

권석일, 임재훈 (2007). 그림 그리기 전략을 통한 초·중등수학의 연립방정식 지도 연결성 강화. **수학교육학연구, 17**(2), 91-109.

김성래, 서종진 (2012). 중등교과과정에서의 사건 독립에 관한 연구 -수학 개념들 간의 연결을 중심으로-. **한국학교수학회논문집, 15**(1), 199-214.

김수미 (2012). 학년 상승에 따른 초등학생들의 자연수 사칙계산 오답유형 및 오답률 추이와 그에 따른 교수학적 시사점. **한국초등수학교육학회지, 16**(1), 125-143.

김수환, 박성택, 신준식, 이대현, 이의원, 이종영, 임문규, 정은실 (2009). **초등학교 수학과 교재연구**. 경기: 동명사

김유경 (2013). 수학적 연결성 구현에 대한 초등 교사들의 인식과 실태 조사. **한국학교수학회논문집, 16**(3), 601-620.

김유경, 방정숙 (2012). 초등학교 수학 수업에서 나타난 수학적 연결의 대상과 방법 분석. **수학교육, 51**(4), 455-469.

김유경, 방정숙 (2014). 곱셈적 구조에 대한 2,4,6학년 학생들의 수학적 사고의 연결성 분석. **수학교육, 53**(1), 57-73.

김정원 (2017). 수학의 내적 연결성을 강조한 5학년 분수 나눗셈과 소수 나눗셈 수업의 실행 연구. **수학교육학연구, 27**(3), 351-373.

남승인 (2011). 귀납 추론을 통한 수학적 원리·법칙 지도 방안에 관한 고찰. **한국초등수학교육학회지, 15**(3), 641-654.

노은환, 정상태, 김민정 (2015). 초등 수학에서 자연수와 분수의 사칙연산에 대한 개념 익히기 및 연산 사이의 연결 분석. **한국초등수학교육학회지, 19**(4), 563-588.

박교식 (2013). 초등학교 수학에서 사용하는 사칙계산 관련 어휘에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 17**(2), 185-205.

박교식, 김지원 (2015). 유치원 수학과 교육과정과 초등학교 수학과 교육과정의 연계성 분석 연구. **한국초등수학교육학회지, 19**(2), 179-203.

방정숙, 이지영 (2009). 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 285-304.

변희현 (2009). 측정의 관점에서 본 덧·뺄셈의 통합적 이해. **수학교육학연구, 19**(2), 307-319.

손홍찬 (2010). 수학적 추론과 연결성의 교수·학습을 위한 소재 연구 -도형수, 파스칼 삼각형, 피보나치 수열을 중심으로-. **학교수학, 12**(4), 619-638.

양성현, 이환철 (2012). 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면 연구. **한국학교수학회논문집, 15**(3), 395-410.

이지현, 홍갑주 (2008). 교과지식으로서의 유클리드 기하와 벡터기하의 연결성. **학교수학, 10**(4), 573-581.

임재훈 (2012). 초등수학 교과서의 분수 곱셈 알고리즘 구성 활동 분석 : 모델과 알고리즘의 연결성을 중심으로. **학교수학, 14**(1), 135-150.

임재훈 (2016). 분수 포함제와 제수의 역수 곱하기 알고리즘의 연결성. **한국초등수학교육학회지, 20**(4), 521-539.

장수연, 안병곤 (2010). 수와 연산영역의 오류유형에 따른 효과적인 지도 방안. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 355-376.

장윤정 (2010). **초등학교 수학과 좋은 수업에 대한 실태분석 및 수업에서 이루어지는 수학적 연결성에 대한 연구**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.

장혜원 (2017). 교과서 분석에 기초한 연산법칙의 지도 방안 탐색. **한국초등수학교육학회지, 21**(1), 1-22.

정영우, 김부윤, 표성수 (2011). 수학적 연결성을 고려한 수 체계의 지도에 관한 연구. **수학교육논문집, 25**(2), 473-495.

최준영 (2016). **분수의 덧셈에서 MLS 연결에 대한 연구**. 진주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

한신혜 (2016). **초등수학에서 모델 전략과 식세우기 전략의 연결에 관한 연구**. 진주교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

황석근, 윤정호 (2011). 수학적 연결성을 고려한 연속 확률 분포 단원의 지도방안. **학교수학, 13**(3), 423-446.

Reys, R. E., Lindquest, M. M., Lambdin, D. V., & Smith. N. L. (2009). Helping Children Learn Mathematics, 9th Edition. John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 (역) (2012). **초등교사를 위한 수학과 교수법**. 서울 : 경문사.

Skemp (1987). The Psychology of Learning Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates. 황우형 (역) (2000). **수학학습 심리학**. 서울 : 사이언스북스

Van de Walle. J. A (2004). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally, 5th edition. Pearson Education. 남승인, 서찬숙, 최진화, 강영란, 홍우주, 배혜진, 김수민 (역) (2008). **수학을 어떻게 가르칠 것인가?**. 서울 : 경문사

<Abstract>

A Study on Connections about Addition Principle

Roh, Eun Hwan[9]; & Kim, Seon Yu[10]; & Kim, Jung Hoon[11]

This study is derived from a student who can add without knowing the addition principle. To understand where the student's response come from, we came to analyse the curriculum contents of natural numbers, decimals and fractions addition principle. At the same time, we surveyed two different school of forty six sixth grade participants with questionnaires to determine whether it is a problem of the student or an universal one. As a result, we found that there is a room for improvement in the addition and connections of addition. We propose appropriate instructional method regarding connections of addition and addition principle of natural numbers, decimals and fractions. The conclude there is a close relation and differences among the principles of natural numbers, decimals and fractions in the proposed instructional method. Therefore, we need to consider and instruct the differences of the number expansion.

Key words: Addition principle, Connection

논문접수: 2018. 10. 15
논문심사: 2018. 10. 31
게재확정: 2018. 11. 23

9) [First author] ehroh9988@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr
10) sykim@cue.ac.kr
11) [Corresponding author] kjh2451@naver.com