韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2018.32.3.297
제 32집 제 3호, 2018. 9. 297-314

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 32, No. 3, Sep. 2018. 297-314

평면도형 영역에서 Shulman-Fischbein 개념틀을 활용한 학생의 오류에 대한 예비 교사의 지식 분석

김 지 선 (경상대학교 강사)

본 연구는 교사지식 중에서 예비교사의 학생에 대한 지식을 Shulman-Fischbein 개념틀을 이용하여 해석함으로써 우리의 교사교육의 현실에 시사점을 제공하고자 하였다. Shulman-Fischbein 개념틀은 수학의 알고리즘적 SMK, 수학의 형식적 SMK, 수학의 직관적 SMK, 수학의 알고리즘적 PCK, 수학의 형식적 PCK, 그리고 수학의 직관적 PCK의 여섯 가지 요소로 구성되어 있다. 이를 위해 일련의 평면도형 영역의 문제를 다루고 학생의 오개념을 포함한 지필과제를 5명의 예비교사에게 제시하고 그들이 제출한 답변을 분석하였다. 분석 결과 예비교사들은 상당히 강한 SMK를 지니고 있음을 보여주었고, 수학의 형식적 측면을 강조하는 경향을 보였다. 또한 학생들의 오개념 분석 시 학생들의 수준을 깊게 고려하지 않았고, 오개념을 고치기 위한 교수학적 방법을 제안할 때에 구체적이지 못하고 피상적인 답변만을 제시하는 특징을 보여주었다.

Ⅰ. 서론

‘많이 알고 있는 교사가 잘 가르친다.’는 진술은 널리 알려진 사회적 통념이다. 마찬가지로 이 진술의 이(異)인 ‘교사가 많이 알지 못하면 잘 가르치지 못한다.’에 대해서도 많은 사람들이 동의할 것이다. ‘많이 알고 있다’는 진술은 오직 교과 지식에만 국한된 것이 아니다. 가르치기 위해 교사는 단순히 교과지식을 많이 아는 것을 넘어서 다른 여러 가지 역량을 필요로 한다. 수학에 있어서 대학교 수준의 수학을 많이 알고 있는 모든 교사들이 학교 현장에서 수학을 잘 가르칠 것이라고 기대할 수는 없다. 잘 가르치기 위해 교사에게 필요한 역량에는 가르칠 수학에 대한 깊은 이해 뿐 아니라 ‘수학이란 무엇인가’에 대한 교사의 인식론적인 전환, 교육과정에 대한 이해, 수학에 대한 신념, 학생들에 대한 이해 등이 있다(오영열, 2012).

바람직한 교수를 위해 교사가 갖추어야 할 지식에 대해 처음 체계적으로 개념화한 사람은 Shulman(1986)이다. 그는 특정 교과에 국한하지 않고 교과내용지식, 교수학적 내용지식, 교육과정지식의 세 가지 차원으로 교사지식을 개념화하였다. 한편 미국수학교사회(National Council of Teachers of Mathematics, 이하 NCTM)는 Curriculum and Evaluation Standards for School Mathemtics(1989)를 편찬하여 학교수학이 전통적인 수학 교수 · 학습 방법에서 벗어나 현대사회에서 요구하는 능력인 수학적 문제해결, 의사소통, 수학적 연결성, 수학적 표현, 추론 능력 등을 함양하는 방향으로 나아가야 한다고 주장하였다. 이런 목표를 달성하기 위해 NCTM은 Professional Standards for Teaching Mathematics(1991)를 통해 수학 교수에서의 변화를 가져오기 위한 가이드라인을 제공하였다. 그 중에서 Professional Standards는 수학 학습자로서 학생에 대해 아는 것을 강조하였고 학습자로서 학생에 대한 다양한 관점을 예비교사 교육과 지속적인 교사교육을 통해 제공되어야 한다고 강조하였다. Hill et al.(2008)은 수학 교사의 지식을 여섯 개의 영역으로 구분하였다. 그 중 한 영역이 내용과 학습자에

* 접수일(2018년 2월 12일), 심사(수정)일(1차: 2018년 6월 25일, 2차: 2018년 8월 12일), 게재확정일(2018년 8월 21일)
* ZDM분류 : A45
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 교사지식(SMK, PCK) Shulman-Fischbein 개념틀, 학생에 대한 지식

대한 지식(knowledge of conetent and students, KCS)으로 특정 내용에 대해 학습자의 사고, 공통적인 오개념 등에 대해 아는 것을 의미한다.

이렇듯 교사의 학생에 대한 지식은 학생을 잘 가르치기 위해 매우 중요한 요소이지만 이러한 지식이 교사교육을 통해 직접적으로 예비 및 현직교사들에게 길러지고 있지는 않다. Wilson et al.(2005)은 학생에 대한 지식이 훌륭한 교수를 위한 필수 요소라는 교사들의 합의를 도출하고 학생에 대한 지식을 가장 잘 축적할 수 있는 방법이 경험임을 밝혀내었다. 이 주장이 사실임을 가정하면 교직 경력이 거의 없는 예비교사들은 학생에 대한 지식을 쌓을 경험을 거의 하지 못한 채 교직에 나가게 되므로 이는 성공적인 교수를 방해하는 큰 요인이 될 수 있을 것이다.

Hill et al. (2008)은 교사지식의 요소를 확인하기 위해 객관식 문항으로 구성된 검사도구를 개발하여 요인분석을 실시하여 수학 교사의 지식을 6가지로 개념화하였으나, 본 연구에서는 그 영역들 중에서 내용과 학습자에 대한 지식에만 초점을 맞추었다. 교사가 학습자의 사고나 오개념을 접했을 때 이에 대해 평가하고 분석하는 것은 교사가 가지고 있는 지식을 바탕으로 할 것이다. 이런 종류의 교사가 가지고 있는 내용과 학생에 대한 지식을 정성적으로 해석하고 이해하려고 시도한 연구는 많지 않다. Shulman은 교사가 갖추어야 할 지식을 개념화하였고, Fischbein은 수학 지식을 세 가지 요소로 체계화하였다. 이 두 이론은 서로 관련이 없어 보이지만, Tsamir & Tirosh (2008)은 이 두 이론을 결합하여 수학 교사의 지식을 평가하는데 사용하였다. 이들은 자신들의 결과물을 Shulman-Fischbein 개념틀이라 명명하고 분수와 무한 개념에 대해 예비 및 현직교사들에게 제시된 문제를 풀게 하고 문제에 대해 학생들이 범할 수 있는 오류를 나열하게 하였으며 각 오류에 대해 가능한 원인을 제시하도록 하였다. Tsamir & Tirosh는 특정 요소의 교사 지식에 한정하여 예비 및 현직 교사들의 반응을 정량적으로 분석한 것과는 달리, 본 연구자는 학생의 오류를 먼저 제시하고 이 오류에 대한 예비교사의 반응을 이 개념틀을 사용해 정성적으로 분석하려고 시도하였다. 그래서 본 연구의 목적은 예비교사의 지식, 특히 평면도형 영역에서 학생의 오개념과 관련한 지식을 Shulman-Fischbein 개념틀의 여섯 가지 구성 요소로 해석하여 교사가 가지고 있는 지식의 특징을 규명하는 것이다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다:

1. 특정 평면도형 개념에 대하여 교사의 교과내용지식은 어떠한가?
2. 특정 평면도형 개념에서 나타나는 학생 오류에 대하여 교사의 교수학적 내용지식은 어떠한가?

이 해석을 통해 예비교사가 갖고 있는 지식을 특징을 파악하여 예비교사 교육에 시사점을 줄 수 있을 것이다. 또한 이 연구는 Kim(2018)의 미국 예비교사의 사례에 대한 후속 연구로서 미국의 사례와 한국의 사례가 어떤 공통점과 차이점이 있을지에 대한 호기심에서 출발하였다. 본 연구가 평면도형을 포함하는 기하 영역에 한정된 이유는 본 연구의 출발인 미국의 사례에서 기하교육이 다른 나라들에 비해 약하고 많은 연구들이 기하에서 학생들이 보이는 오개념을 제시하고 있기 때문이기도 하지만(Clements & Battista, 1992), 우리나라의 많은 학생들도 기하를 다른 수학영역과 비교했을 때 어려워하고 있기 때문이기도 하다. 기하의 문제들은 개념을 정확히 이해하고 적용해야 하는데 유클리드 기하 교육이 최근 학교 수학에서 약화되어 기하의 공리적 체계를 이해하지 못해 이런 현상이 나타난 것으로 보인다(박혜숙, 2003).

Ⅱ. 이론적 배경

1. Shulman의 교사지식 (교사가 갖추어야 할 지식)

Shulman(1986)은 교사에게 필수적인 내용 지식의 영역을 교과내용지식(subject matter knowledge, 이하 SMK), 교수학적 내용지식(pedagogical content knowledge, 이하 PCK), 교육과정지식(curricular knowledge)의

세 요소로 구분하였다. SMK는 특정 내용 영역에 대한 사실이나 개념에 대한 지식을 아는 것만 아니라 내용 지식의 구조를 실질적이고 통사적인 방법으로 이해하는 것을 필요로 한다. 여기에서 실질적인 구조란 수학에서 특정 주제에 대한 기본 개념과 원리를 조직하는 방법을 의미하고, 반면에 통사적 구조란 문법처럼 수학에서 참 또는 거짓, 유효성 또는 무효성을 구성하는 일련의 법칙을 의미한다.

PCK는 교과내용지식을 넘어서 내용을 지도하는데 필요한 지식을 의미한다. PCK는 특정 과목에 대한 공통 지식, 아이디어를 효과적으로 표현하는 방법, 학생들이 이해하기 쉽도록 도와주는 비유, 설명, 예, 설명, 시연 등과 학습을 쉽게 또는 어렵게 만드는 요인, 다른 연령대와 다른 배경을 갖는 학생들의 개념과 전개념, 학생들의 오개념과 일련의 학습에서 그 오개념들의 영향에 대한 이해를 포함한다(Shulman, 1986).

교육과정지식은 특정 과목과 주제를 가르치기 위해 고안된 프로그램, 그런 프로그램과 관련된 사용가능한 다양한 교수 자료, 특정 교육과정이나 프로그램 자료를 사용할 때 발생할 수 있는 징후나 부작용에 대한 특징을 의미한다. 교육과정지식은 교수를 위한 대안 교육과정에 대한 이해와 특정 과목의 내용과 다른 과목의 아이디어를 연결시키는 일도 필요로 한다(Shulman, 1986).

2. Fischbein의 수학 지식의 세 요소

Fischbein(1994)은 인간 활동으로서의 수학을 알고리즘적(algorithmic), 형식적(formal), 직관적(intuitive) 지식으로 구분하였다. 알고리즘적 측면은 연습을 통해 길러지는 문제해결의 절차와 규칙 같은 절차에 대한 지식을 의미한다. 알고리즘적 지식은 반복 연습을 통해 기억되지만 왜 그 알고리즘과 절차가 성립하는지 그리고 어떻게 유도되는지에 대한 이해가 수반되어야 한다. 알고리즘적 지식은 관련된 수학 개념의 이해와 관계없이 알고리즘을 문제해결 상황에 적용할 수 있다는 측면에서 중요하다. 수학 지식의 형식적 측면은 학생들이 인간 활동으로서 발명하고, 학습하며, 확인하고, 사용해야 하는 공리, 정의, 정리, 증명과 같은 추론 과정에서 필수적인 요소들을 포함한다. 직관적 측면은 어떤 종류의 정당화도 필요하다는 느낌 없이 받아들어지는 일종의 인지를 의미한다. 직관적 지식은 자명하다는 특징이 있고 때로는 논리적으로 정당화 할 수 있는 진리와 양립한다. 하지만 그런 진리와 양립할 수 없는 경우에는 학습과 문제해결에서 학생들에게 인식론적 장애를 일으킬 수 있다(Fischbein, 1994; Tsamir & Tirosh, 2008).

3. Shulman-Fischbein 개념틀

Tsamir와 Tirosh(2008)는 수학 교사의 지식을 해석하는데 도움을 주기 위해 Shulman의 교사가 갖추어야 할 지식의 종류와 Fischbein의 수학 지식의 세 요소를 결합하여 새로운 개념틀을 고안하였다. Shulman은 교사 지식을 수학 교사에 특화하지 않았고, Fischbein은 수학 지식을 교사의 지식에 한정하지 않았다. Shulman의 교사 지식 중 SMK와 PCK를 Fischbein이 제안한 수학 지식의 세 가지 특징인 알고리즘적, 형식적, 직관적 지식과 통합하여 여섯 가지의 수학 교사의 지식 차원이 산출되었다[표 Ⅱ-1]. 특히 본 연구에서는 Shulman이 제안한 PCK 중에서 학생들의 오류에 대한 교사의 지식에 초점을 맞추었다.

수학의 알고리즘적 SMK는 문제해결 절차와 그 절차에 대한 정당화 방법에 대해 교사가 아는 것을 의미한다. 예를 들어, 교사는 분수의 덧셈 알고리즘을 알고 그 알고리즘의 각 단계를 설명할 수 있어야 한다. 수학의 형식적 SMK는 수학에서 핵심 원리들을 교사가 아는 것을 의미한다. 예를 들어, 교사는 보편 명제를 반박하기 위해서는 반례 하나로 충분하지만 존재성을 증명하는 명제에 대해서는 하나의 반례만으로는 충분하지 않음을 알고 있어야 한다. 수학의 직관적 SMK는 형식적 지식이 직관적으로 될 때 형성되는 이차 직관을 의미한다. 예를 들어 교사는 정당화 없이도 두 수의 곱셈이 원래의 수보다 항상 커지는 것은 아님을 알고 있다(Tsamir & Tirosh, 2008, p. 863).

[표 Ⅱ-1] Shulman - Fischbein 개념틀(Tsamir & Tirosh, 2008)

		교사 지식의 두 측면 (Shulman의 이론)	
		SMK	PCK
수학 지식의 세 요소 (Fischbein의 이론)	알고리즘적	수학의 알고리즘적 SMK	수학의 알고리즘적 PCK
	형식적	수학의 형식적 SMK	수학의 형식적 PCK
	직관적	수학의 직관적 SMK	수학의 직관적 PCK

학생의 오류에 대한 수학의 알고리즘적 PCK는 학생들이 문제해결에 적용하는 알고리즘 중 가장 흔하게 잘못 적용하는 알고리즘에 대해 교사가 아는 것을 의미한다. 예를 들어 교사들은 학생들이 부등식의 양변에 음수를 곱하면 부등호 방향이 바뀌어야 함에도 불구하고 바꾸지 않는 오류를 종종 저지른다는 사실을 알고 있다. 수학의 형식적 PCK는 학생들이 종종 범하는 형식과 관련된 오류에 대한 교사의 지식을 의미한다. 예를 들어 교사는 두 짝수의 합은 짝수라는 명제를 증명하기 위해 학생들이 보통 2+4=6과 같은 하나의 예만 제시하면 충분하다고 믿는 학생들의 인식을 알고 있다. 수학의 직관적 PCK는 학생들의 직관적 성향에 대한 교사의 인식을 의미한다. 예를 들어 교사는 학생들이 나눗셈 연산의 결과는 원래 수보다 항상 작아진다고 과도하게 일반화하는 경향을 알고 있다(Tsamir & Tirosh, 2008).

Tsamir & Tirosh(2008)은 자신들이 고안한 이 개념틀을 사용하여 두 가지 연구를 수행하였다. 하나는 분수 개념에 대해 예비 및 현직교사의 수학의 알고리즘적 PCK를 평가하는 연구였고, 다른 하나는 무한 개념에 대해 예비 중등교사의 수학의 형식적 SMK를 평가하기 위한 연구였다. 분수 개념에 대한 연구에서 연구자들은 분수 문제를 제시하고 이를 해결하게 한 후, 각 분수 문제에 대해 학생들이 보일 수 있는 오류를 제시하고 그 오류의 원인을 설명하게 하였다. 무한 개념에 대한 연구에서 연구자들은 여러 쌍의 무한 집합들에 대해 원소의 개수를 비교하게 하고 자신들의 답을 정당화하게 하였다. 두 연구 모두 예비 및 현직교사들의 답변에 대해 공통된 요소로 범주화하고 각 범주에 해당하는 빈도를 제시하였다. 이렇게 연구자들은 연구의 설계 단계에서 문제의 유형을 설정하는데 이 개념틀을 활용하였다. 특정 수학적 개념에 대한 교사의 지식은 복합적으로 존재할 것이다. 즉, 분수의 나눗셈에 대해서 교사는 분수의 나눗셈을 계산하는 알고리즘적 SMK도 갖추고 있지만 그 알고리즘이 어떻게 성립하는지에 대한 형식적 SMK도 알고 있을 것이다. 또한 분수 나눗셈에 대한 학생 오류에 대해 그 학생이 알고리즘의 잘못된 수행으로 오류를 범했는지 아니면 분수 나눗셈에 대한 수학의 형식적 지식의 부재로 그런 오류를 범했는지도 판단할 수 있을 것이다. 이런 측면에서 본 연구에서는 연구 설계 단계에서는 특정 영역에 해당되지 않는 광범위한 교사 지식을 설정한 질문을 던지고 교사의 특정 답변이 Shulman-Fiscbein 개념틀의 어느 영역에 해당하는지를 판단하였다.

4. 교사 지식에 대한 선행연구 고찰

최승현과 황혜정(2008)은 Shulman이 제시한 PCK를 우리나라의 상황과 수학 과목에 적용하여 수학과 PCK 분석틀을 제안하였고, 강현영 외(2011)는 좋은 수학 수업을 위해 필요한 교사 역량과 교사 교육에 대한 현직 교사의 인식을 설문을 통해 조사해 분석하였다. 심상길(2013)은 최승현과 황혜정의 분석틀을 참고하여 설문지를 개발하고 교사 지식에 대해 초임 수학교사들의 인식을 조사하였고, 최윤화 외(2014)도 최승현과 황혜정의 분석틀에서 제시된 PCK 하위 요소 중 8개를 재구성하여 함수단원에 대해 초임교사와 경력교사의 교수학적 내용지

식과 수업 실제를 분석하였다. 우리나라에서는 Hill et al.(2008)이 제시한 여섯 가지 영역의 수학 교사 지식을 바탕으로 예비교사들의 수학교수지식(MKT)을 측정하고 분석하는 도구를 개발하는 시도를 하였고(전미현 & 김구연, 2015), 박경미(2016)는 이 여섯 영역 중에서 '내용과 학습자에 대한 지식(KCS)'에 초점을 맞추어 학습자의 전형적인 오류에 대한 예비 교사의 대응, 학습자의 내용 이해에 대한 예비교사의 해석, 학습자의 발달 계열에 대한 예비교사의 파악에 대해 정성적으로 심층 면담을 통해 분석하였다. 한편 한혜숙(2016)은 Hill et al.(2008) 이 제시한 연구 방법의 한계점을 지적하고 Manizade와 Mason의 PCK 측정 문항 개발을 사용하고 연구에 적용하여 MKT 인식 설문지를 개발하고 Manizade와 Mason이 제시한 MKT 분석과제 중 하나를 사용하여 예비교사들의 MKT를 분석하였다.

이렇게 여러 연구들이 수학에서 예비 및 현직교사의 지식을 분석하려고 시도하였다. 하지만 여러 연구들이 정량적인 분석을 실시하였고, 정성적인 분석을 시도한 연구 중에서도 수학 교사의 지식을 Fischbein이 제시한 것처럼 수학의 특성에 비추어 분석하지는 않았다. 그러므로 교사의 대표적인 지식 영역인 SMK와 PCK를 수학 지식의 세 요소로 분석하는 일은 새로운 시도가 될 것이며, 교사 지식에 대해 수학 과목이라는 영역 특수적인 특성을 드러내는데 적합할 것이다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구는 참여자들에게 연구자가 고안한 일련의 지필 과제를 수행하게 하여 수집된 결과를 Shulman-Fischbein 개념틀을 사용하여 분석하였다.

1. 연구 참여자

이 연구의 참여자들은 서울 소재의 모 사립대학교 4학년에 재학중인 5명(여학생 3, 남학생 2)의 학생들이다. 이들은 수학과 소속으로 추가로 교직이수를 하고 있는 예비교사 자격을 갖춘 학생들이었다. 이들을 앞으로 예비교사라 칭하겠다. 이 대학은 교직이수 자격을 학점이 좋은 학생을 우선으로 했기 때문에 연구에 참여한 예비교사들의 성적은 대체로 좋은 편이었다. 예비교사들은 미적분학, 선형대수, 추상대수학을 비롯한 여러 대학 수학 전공과목을 이수하였고, 교직과목으로 수학교과교육론, 수학교과 논리 및 논술, 수학교과 교재연구 및 지도법 등을 수강한 배경이 있었다. 익명성을 보장하기 위해 예비교사들의 가명을 가연, 나연, 다연, 라윤, 마윤으로 정하였다.

2. 검사도구

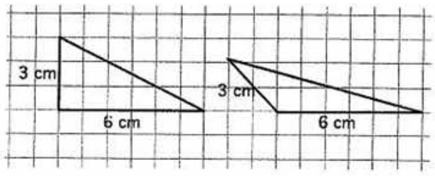
연구에 사용된 지필과제는 Kim(2018)의 논문에서 사용된 과제의 일부를 한국어로 번역한 것이다. 과제에서 제시된 평면도형 내용 영역은 삼각형의 넓이, 넓이와 둘레의 길이의 관계, 삼각형 작도이다. 각각의 과제는 5개의 부분으로 구성되어 있는데, 두 부분은 예비교사들의 SMK를 나머지 세 부분은 학생의 특정 오류에 대한 PCK를 알아보기 위한 것이다. 먼저 예비교사들은 제시된 문제를 직접 해결해보고, 문제를 해결하기 위해 사용될 수 있는 중요한 수학적 아이디어에 대해 서술한다(SMK). 다음으로 옳은 풀이와 오류가 포함된 풀이를 보고 옳지 않은 풀이인 경우 풀이에 나타난 학생의 오개념은 무엇인지 파악하고, 그 오개념의 가능한 원인에 대해서 서술하며, 그 오개념을 수정할 수 있는 지도법에 대해서 서술한다(PCK)[표 Ⅲ-1]. 본 연구에서 사용된 문제들은 [그림 Ⅲ-1]에 제시되어 있다.

[표 Ⅲ-1] 예비교사에게 제시된 과제의 질문

SMK	1. 다음 문제를 해결하여라.
	2. 이 문제를 성공적으로 해결하기 위해 필요한 수학적 지식은 무엇인가?
PCK	3. 이 학생이 범한 오류는 무엇인가?
	4. 이 학생이 범한 오류의 원인은 무엇인가?
	5. 학생이 이 오류를 알아채고 고칠 수 있도록 도울 수 있는 방법은 무엇인가?

<과제 1> 삼각형의 넓이

은지는 아래 그림과 같이 정원을 삼각형 모양으로 꾸미려고 한다. 두 가지 디자인 중에 선택을 하려고 하는데, 넓이가 더 넓은 것으로 택하려고 한다. 어떤 정원 디자인이 더 넓은 면적을 가지는가? 왜 그렇게 생각하는가?



<과제 2> 넓이와 둘레의 길이의 관계

직사각형 I은 직사각형 II보다 둘레의 길이가 더 길다. 그러면 직사각형 I의 넓이가 직사각형 II 보다 더 넓다고 결론내릴 수 있는가? 그 이유를 설명하여라.

<과제 3> 삼각형 작도

스미스 선생님의 수업에서 학생들은 다양한 삼각형을 그렸다. 여기에 학생들이 그린 것들이 있다.

로베르토: 나는 세 개의 예각을 갖는 삼각형을 그렸어.

선남: 나는 1개의 직각을 갖는 삼각형을 그렸어.

알리시아: 나는 두 개의 둔각을 갖는 삼각형을 그렸어.

라쥬: 나는 직각이 없는 삼각형을 그렸어.

각각의 학생들이 그런 것에 대해서 맞는지 틀린지를 확인하여라.

[그림 Ⅲ-1] 연구에 사용된 과제들

[표 Ⅲ-1]에 제시된 질문에서 1번을 제외하고는 Manizade(2006)의 연구 결과를 본 연구의 상황에 맞게 수정한 것이다. Manizade(2006)은 기하와 측정 영역에서 교사의 PCK를 측정하기 위한 검사도구를 델파이 기법을 활용하여 개발하였다. 1번 질문은 Manizade의 연구에는 포함되지 않았지만 연구 검토자 중 한사람인 수학과 교수가 제안하여 추가하였다. 본 연구에서 사용한 학생의 문제 풀이 실례(實例)는 Open-ended Assessment in Math (Cooney, Sanchez, Leatham, & Mewborn, n.d.)의 데이터베이스에서 가져온 것이다.

3. 분석방법

연구문제 1과 2에 대한 분석 모두 Shulman-Fischbein 개념틀에 의해 수행되었다. 즉 연구문제 1에 대한 답은 이 개념틀 중에서 수학의 알고리즘적, 형식적, 직관적 SMK로 분석되었고, 연구문제 2에 대한 답은 수학의 알고

리즘적, 형식적, 직관적 PCK로 분석되었다. 데이터 분석은 연구 참여자들이 제출한 지필과제 결과를 토대로 이루어졌다. 이 연구의 목적이 Shulman-Fischbein 개념틀을 통해 교사의 지식을 해석하고 이해하려는 것이기 때문에, 먼저 예비교사들의 질문에 대한 지필 답안을 읽어보고 Shulman-Fischbein 개념틀에서 제시된 6개의 요소 [표 Ⅱ-1]의 어느 것에 해당되는지를 배치하는 방법으로 코딩을 하였다. 예비교사들이 다양한 관점에서 답을 제시했을 것으로 기대되므로 하나의 답변이 하나 이상의 요소에 해당될 수도 있다. 연구 결과에서 이 코딩을 바탕으로 각 요소에 해당하는 대표적인 사례를 제시함으로써 Shulman-Fischbein 개념틀을 통한 해석을 시도하였다. 본 연구는 Shulman-Fischbein의 개념틀을 활용하여 정성적인 해석에 초점을 맞추었기 때문에 이 개념틀의 각 요소에 해당하는 사례가 몇 가지씩인지 빈도를 조사하는 정량적인 분석을 실시하지는 않았다.

Ⅳ. 연구 결과

본 절에서는 예비교사들이 제시한 구체적인 예를 통해서 교사지식이 Shulman-Fischbein 개념틀을 통해 어떻게 해석될 수 있는지 각각의 요소에 대해 설명한다.

1. 수학의 알고리즘적 SMK

수학의 알고리즘적 SMK는 교사가 공식을 정례적으로 사용하거나 절차적인 방법으로 계산 과정을 보여주는 것을 의미한다. 교사는 어떤 공식이나 그와 관련된 추론을 이해하고 나면 왜 그 공식이 성립하는지 증명하지 않고 공식을 문제해결에 적용시킨다(Tsamir & Tirosh, 2008). 본 연구에서 예비교사들이 보여준 가장 대표적인 수학의 알고리즘적 SMK는 삼각형의 넓이 구하는 공식의 사용이다. <과제 1>의 문제를 해결하기 위해 모든 예비교사들이 삼각형의 넓이를 구하였고 그 과정에서 넓이 공식을 증명 없이 사용하였다. <과제 2>의 넓이와 둘레의 길이의 관계 문제에 대해서도 반례로 제시한 직사각형의 넓이와 둘레의 길이를 구할 때에도 증명 없이 넓이와 길이를 제시하였다. 이들 공식들이 연구 참여자들에게는 기본적인 공식으로 이미 충분히 내면화되어 있기 때문에 증명의 필요성을 느끼지 못하고 사용했다고 볼 수 있다.

2. 수학의 형식적 SMK

수학의 형식적 SMK는 수학의 핵심 원리에 대한 교사의 지식으로, 수학의 공리, 정의, 정리, 증명 등을 아는 것을 의미한다(Tsamir & Tirosh, 2008; Fischbein, 1994). 예비교사들은 <과제 1>의 삼각형의 넓이 문제를 해결하기 위해서는 수학의 알고리즘적 SMK인 삼각형의 넓이 공식을 사용하였지만, 이 문제를 해결하기 위해 사용될 수 있는 중요한 수학적 아이디어로 삼각형의 높이 개념, 공식으로서가 아닌 단위넓이의 개수로서의 넓이 개념 등을 지적하였다.

<과제 2>의 넓이와 둘레의 길이의 관계 문제에 대해서 진술이 성립하지 않는 반례를 제시하여 문제를 해결하는 것도 수학의 형식적 SMK로 간주할 수 있다. 라윤은 이 문제를 풀기 위해 사용될 수 있는 중요한 수학적 아이디어에 대해 “직사각형에 대한 정의와 정사각형도 직사각형의 한 종류라는 인식이 필요하다. 다양한 직사각형을 생각해 해낼 수 있어야 하고, 결론이 틀렸다는 반례를 찾는 것이 필요하다”라고 답하였다. 이는 직사각형의 정의, 사각형의 포함관계, 증명(또는 반박)에 대한 수학의 형식적 SMK를 보여준다고 해석할 수 있다.

<과제 3>의 삼각형 작도 문제를 해결하는데 예비교사들은 삼각형의 내각의 합이 180도라는 형식적 지식을 사용하였다. 또한 문제를 풀기 위해 사용될 수 있는 중요한 수학적 아이디어로 삼각형의 내각의 합에 대한 지식

외에, 예각, 직각, 둔각에 대한 정의를 지적하였다. 이들은 예비교사들이 수학의 형식적 SMK을 갖고 있음을 보여주는 예들이다.

3. 수학의 직관적 SMK

수학의 직관적 SMK는 자명하기 때문에 정당화할 필요성을 느끼지 않고 직접적으로 받아들여지는 수학적 개념, 정리, 성질 등에 대한 지식을 의미한다. 이런 직관적 지식은 수학적 사실과 모순되지 않으면 문제가 되지 않지만, 수학적 사실과 모순될 경우에는 학습 과정에서 인식론적 장애를 일으킬 수 있다(Fischbein, 1994). 본 연구에서 사용한 문제들은 기하 영역에서 출제된 것이었기 때문에 예비교사들은 주로 그림에 의존하는 경향으로 수학의 직관적 SMK를 보여주었다. <과제 1>의 삼각형의 넓이 문제에서 오른쪽에 위치한 둔각 삼각형의 높이는 명시적으로 제시되지 않았다. 하지만 그림이 모눈종이 위에 그려져 있어서 높이가 2cm처럼 보인다. 이 문제는 인접한 두 변의 길이가 같을 경우 둔각삼각형의 높이가 직각삼각형의 높이보다 낮을 뿐 둔각삼각형의 높이를 특정한 숫자로 한정하지 않았다. 삼각형의 넓이를 구해서 다연을 제외한 모든 예비교사들은 이 문제를 해결할 때 모두 오른쪽 둔각 삼각형의 높이를 2cm로 제한하여 넓이를 구하였다. 이렇게 높이가 2cm임을 확인하려는 어떠한 정당화의 노력 없이 그림에 의존하여 직관적으로 높이를 정한 예는 수학의 직관적 SMK로 간주하였다.

4. 수학의 알고리즘적 PCK

학생의 오개념과 관련된 수학의 알고리즘적 PCK는 학생이 문제해결 과정에서 잘못된 공식이나 알고리즘을 사용하는 경향과 그 원인에 대해 아는 지식을 의미한다(Tsamir & Tirosh 2008). <과제 1>의 삼각형의 넓이 문제에서 예비교사들은 삼각형의 넓이 공식을 사용하여 문제를 해결하는 수학의 알고리즘적 SMK를 보여주었다. 이 과제를 제시받고 해결한 학생들의 답에서도 삼각형의 공식을 기계적으로 사용하는 알고리즘적 지식을 볼 수 있었다. 그 중 다음과 같이 잘못된 넓이 공식을 사용한 학생의 답도 있었다.

> 학생 E: 우리는 두 삼각형의 넓이가 같다고 생각할 수 있지만, 그 중 하나는 넓게 펼친 것이고 하나는 진짜 크기이다. 한 변의 길이는 6cm이고 다른 한 변은 3cm로, 둘 다 넓이가 18이기 때문에 넓이가 같다고 할 수 있다.

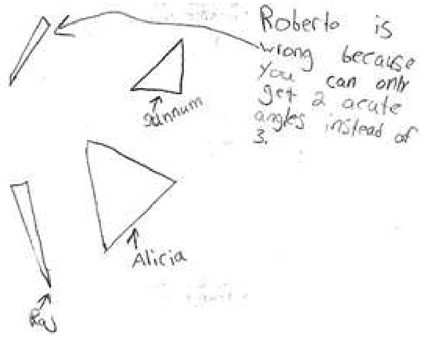
[그림 Ⅳ-1] 삼각형의 넓이 문제에서 학생 E의 답

[그림 Ⅳ-1]의 학생 E는 삼각형의 넓이를 구할 때 2로 나누지 않는 오류를 범하였다. 본 연구자는 대부분의 참여자들이 이 오류를 쉽게 발견할 것이라 기대하였으나, 오직 한 예비교사(가연)만이 이를 지적하였다. 그는 “높이 개념을 모르고, 넓이 개념도 모름. 삼각형의 넓이는 밑변×높이×1/2 인데 삼각형 넓이가 사각형 넓이의 반이 되는 것을 인지하지 못한 상태”라고 언급하였다. 또한 이 오개념의 발생 원인에 대해서 “단순 공식암기로 여러 공식들 간의 헷갈림이 있었을 것 같다. 사각형의 넓이도 정확히 이해하지 못한 채 삼각형 넓이를 배워서 오개념이 생긴 듯”이라고 답하였다. 이는 예비교사의 수학의 알고리즘적 PCK의 예로 해석될 수 있다. 비록 다른 예비교사들이 이 학생의 오류에 대해 지적하지 않았지만, 이는 이들에게 삼각형 넓이 공식 오개념에 대한 수학의 알고리즘적 PCK가 없었기 때문이 아니라 학생 E의 다른 오개념, 즉 두 삼각형의 넓이를 같다고 판단한 것에 더 집중하여 이 오류를 간과했다고 볼 수 있다.

5. 수학의 형식적 PCK

학생의 오개념과 관련한 수학의 형식적 PCK는 수학의 형식과 관련한 학생들의 공통적인 오류에 대해 아는 교사의 지식을 의미한다(Tsamir & Tirosh, 2008). 즉, 학생들이 공리, 정의, 정리, 증명에 대해 갖고 있는 오개념에 대해 교사가 아는 것을 포함한다. <과제 3>의 삼각형 작도 문제는 각의 종류(예각, 직각, 둔각)에 대한 정의와 삼각형의 내각의 합에 대한 수학의 형식적 지식을 요구하는 문제이기 때문에 형식적 오개념을 포함한 학생의 답이 제시되었다. [그림 Ⅳ-2]은 오류를 포함한 학생 A의 답변이다. 이에 대해 연구에 참여한 예비교사들은 다음과 같이 답하였다.

학생 A: 로베르토는 틀렸다. 왜냐하면 세 개가 아니라 예각 두 개만 가질 수 있기 때문이다.



[그림 Ⅳ-2] 삼각형 문제에서 학생 A의 답

- 라윤: 예각에 대한 개념이 잘못되었다. 그림으로 봐도 학생 A는 예각과 둔각을 혼동하고 있다.
- 다연: 예각 삼각형은 세 각 모두 예각이어야 하는데 그것을 잘못 생각한 듯하다. 둔각 삼각형의 경우도 예각을 가질 수 있는데, 이것을 예각 삼각형이라 착각한 듯하다.
- 가연: 예각이 3개이면 삼각형이 성립 안 된다고 생각. 둔각과 예각의 의미 정확히 모름

이 예비교사들은 학생들이 개념 및 정의에 대해 잘못 알고 있는 것을 지적하고 있다. 이는 예비교사들이 수학의 형식적 PCK를 지니고 있음을 보여준다.

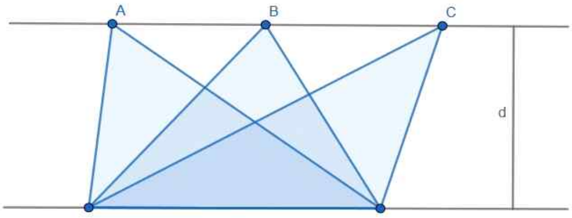
학생 B: 두 삼각형은 같다. 왜냐하면 (3×6)÷2=넓이인데, 삼각형은 직사각형이나 정사각형의 반이기 때문에 2로 나누는 것이다.

학생 C: 두 삼각형은 같다. 왜냐하면 우리는 b×h×1/2인데, 6×3은 18이고 ×1/2=9 이기 때문이다.

[그림 Ⅳ-3] 삼각형 넓이 문제에 대한 학생 B와 학생 C의 답

<과제 1>의 삼각형의 넓이 문제는 높이 개념이라는 형식적 지식과 관련이 있다. 오답을 제시한 학생의 답은 대부분 높이 개념을 제대로 인지하지 못한데서 기인한 경우가 많았다. [그림 Ⅳ-3]는 그러한 학생들의 답이다. 두 학생 모두 오른쪽에 위치한 둔각 삼각형의 높이가 3이라고 생각하고 문제를 해결하였다. 이런 학생의 오답에 대해 모든 예비교사들은 학생들의 잘못된 높이 개념에 대해 지적하였다. 예비교사들 중 가연과 마윤은 높이의 정의를 명확히 제시하지만, 나머지 예비교사들은 학생들이 높이 개념이 잘못되었다고 간단히 언급하였다. 높이에 대한 오개념을 수정하기 위한 방법으로, 대부분의 예비교사들이 정확한 높이 개념의 지도를 촉구하였다. 특히 나

연과 다연은 다양한 삼각형에서 밑변과 높이를 표현해보도록 지도한다고 제안하였고, 마윤은 삼각형의 다양한 형태에 대한 면밀한 검토가 필요하며 특히 모양은 다르지만 넓이가 같아질 수 있는 삼각형을 그림으로 보여준다고 제안하였다[그림 Ⅳ-4].



A, B, C의 넓이가 같음을 보여준다.

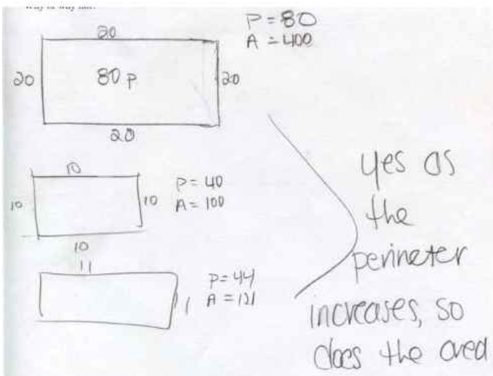
[그림 Ⅳ-4] 마윤이 제시한 오개념 고치기 위한 방안

한편 가연은 학생 B의 답에서 삼각형의 넓이가 직사각형이나 정사각형 넓이의 반이라는 진술에 대해 삼각형을 직각삼각형으로 한정해서 생각하고 있다고 지적하였고, 유사하게 라윤도 학생 B의 오개념이 항상 직사각형이나 정사각형의 반인 삼각형을 접했기 때문에 발생했을 것이라고 추측하였다. 이 오개념을 고치기 위한 방법으로, 가연은 직사각형, 정사각형 이외의 다양한 사각형으로 삼각형을 만들어보는 시간을 가져볼 것을 제안하였다.

가연은 [그림 Ⅳ-3]의 학생 C의 답에서 잘못된 등호의 사용도 지적하였다. 가연은 “(=) 기호를 ~이면 ... 이다로 이해하여 식을 잘못 씀”이라고 언급하면서 이는 등가의 의미를 경험해볼 수 있는 기회를 갖지 못했기 때문에 발생한 오개념이라고 주장하였다. 그리고 이를 고치기 위해서는 “equivalence의 의미를 알 수 있는 경험을 충분히 갖게 도와줘야” 한다고 진술하였다.

예비교사들의 수학의 형식적 PCK는 학생들의 오개념을 수정할 수 있는 방안을 제시하는 데에서 두드러지게 나타났다. 제시된 학생들의 오류가 알고리즘적, 직관적 지식에서 유래한 것들이 많았는데, 이는 수학적 알고리즘이나 공식이 어떻게 유도되었는지 충분히 이해하지 않고 사용했기 때문이고, 학생들이 문제를 해결하는데 사용한 직관이 수학의 형식적 지식과 충돌을 일으켰기 때문이다. 즉, 학생들의 부족한 형식적 지식이 이런 오개념을 낳았다고 볼 수 있다. 그렇기 때문에 이를 해결하기 위해 수학의 형식적 지식의 강조는 자연스러운 일이다.

학생 C: 그렇다. 둘레의 길이가 증가할수록, 넓이도 증가한다.



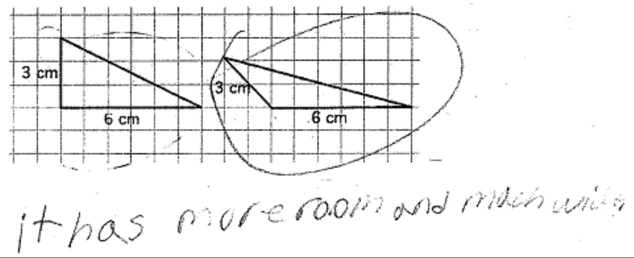
[그림 Ⅳ-5] 넓이와 둘레의 길이 문제에 대한 학생 C의 답

[그림 Ⅳ-5]은 <과제 2>에 대한 학생 C의 답이다. 이 오답에 대한 원인으로 다연은 “(둘레의 길이 증가 → 가로 , 세로 길이 증가) 명제에서 거꾸로 역 명제를 생각한 듯하다”고 답하고 이를 고치기 위한 지도 방법으로 “여러 종류의 직사각형을 주어 둘레의 길이와 넓이를 측정하게 한 뒤, 둘레의 길이가 같은 것, 넓이가 같은 것, 이런 식으로 분류해본다”라고 응답하였다. 나연을 제외한 나머지 예비교사들은 ‘반례’에 대해 언급하였다. 특히 오개념의 원인과 오개념을 고치기 위한 지도방법에서 명확히 지적하였다. 가연은 반례 찾는 경험을 충분히 하지 못했기 때문에 오개념이 발생했으므로 반례 찾아보는 연습을 많이 해보게 해야 한다고 언급하였다. 라윤은 오개념의 원인이 몇 개의 시험을 통해 결론을 유추한 것으로 이를 고치기 위해 다양한 사각형을 예시로 들어 반례를 찾도록 도와주어야 한다고 지적하였다. 마윤은 오개념의 원인으로 반례를 찾아내서 반증하고자 하는 비판적 능력의 부족으로 제시하고 이를 고치기 위해 넓이와 둘레의 일반화된 상관관계가 없음을 다양한 반례를 통해 제시해야 한다고 주장하였다. 예비교사들의 이런 답변은 명제 논리, 반례 등의 수학의 형식적 측면을 강조하고 이를 학생 지도와 연결시켰다는 점에서 수학의 형식적 PCK를 보여주는 예가 된다. 하지만 반례를 찾는 경험에 대해서는 학생의 수준을 충분히 고려하지 않았음을 추측할 수 있다. 이 답변을 한 학생은 미국의 4~6 학년 수준이었고 우리나라에서도 5~6 학년에 제시되는 개념인데 반해, 반례를 찾는 사고는 추상화된 형식적 사고로 4~6 학년 수준에서는 성취되기 힘들다.

6. 수학의 직관적 PCK

학생의 오개념과 관련한 수학의 직관적 PCK는 학생의 직관적 경향에 대해 교사가 알고 있음을 의미한다 (Tsamir & Tirosh, 2008). 학생들은 자명하다고 생각되는 수학적 개념과 성질들을 증명이나 정당화를 하지 않고 받아들인다. 이런 직관적 지식이 수학적 사실과 모순되지 않는다면 아무 문제가 발생하지 않지만, 모순된다면 학생들에게 인식론적 장애를 발생시킬 수 있고 문제해결 과정에서 오류를 범할 수 있다. 그래서 교사는 학생들의 오류와 오개념을 발생시킬 수 있는 직관적 사고에 대해 인식할 필요가 있다(Fischbein 1994).

학생 F: 그것은 더 공간을 많이 차지하고 더 폭이 넓다.



[그림 Ⅳ-6] 삼각형의 넓이 문제에 대한 학생 F의 답

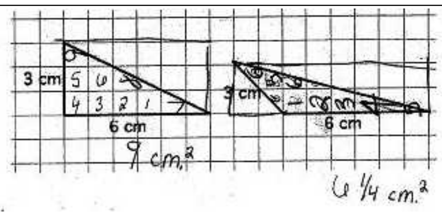
제시된 문제들이 평면도형 영역에 속해서인지 학생의 답변은 그림의 시각적 특성에 의존하는 경향이 있었다. 이런 시각적 의존은 정당화 과정 없이 결론을 내렸고 이는 결국 오답으로 이끌었다[그림 Ⅳ-6]. 학생 F의 답에 나타난 오개념으로 예비교사들은 눈대중(가연, 나연, 다연), 부정확한 넓이 개념(라윤), 관찰력의 부족(마윤)을 지적하였다. 이 오개념을 수정하기 위해 예비교사들이 제시한 방법은 다음과 같다.

- 가연: 삼각형의 높이, 밑변 넓이의 의미를 알게 하고 room의 개수가 같음을 경험하게 한다
- 나연: 블록 또는 모양대로 잘라서 조각을 맞추어본다. 눈보다는 측정을 해야 한다는 것을 알려준다

- 다연: 넓이가 횡축 말고도 종축으로도 상관관계가 있음을 인지시킨다
- 라윤: 직관적으로 생각하기 보다는 논리적으로 생각할 수 있는 기회를 제공해야 한다
- 마윤: 학생에게 폭의 변화만 관찰할 수 있는지 재발문한다. 그래서 그림에서 공간의 크기를 결정하는 변수는 폭만이 아님을 확인시키고 넓이를 결정하는 변수가 무엇인지 학습시킨다

이처럼 모든 예비교사들이 학생 F의 잘못된 직관적 지식인 시각에의 의존을 의식하고 있었다. 하지만 학생의 오개념을 수정하기 위한 방법으로 직관적 방법보다는 형식적 접근에 더 의존하는 경향을 보였다.

한 가지 흥미로운 결과는 예비교사들이 비교적 옳게 대답한 학생에 답에 대해서도 엄밀한 기준으로 평가했다는 점이다. [그림 Ⅳ-7]는 <과제 1>의 삼각형의 넓이 문제를 단위 정사각형의 넓이를 세어서 구한 학생의 답이다. 오른쪽 둔각 삼각형의 넓이를 구할 때에는 약간의 오차는 있었지만, 이 학생은 넓이 개념이 단위넓이의 합이라는 개념을 바탕으로 넓이를 구하려고 시도하여 옳은 결론을 도출하였다. 이 학생의 답에 대해서 모든 예비교사들이 오른쪽 둔각 삼각형의 넓이를 잘못 구했다고 지적하였다. 이들은 학생 G가 눈대중으로 온전하지 않은 정사각형의 개수를 세었다고 판단하는 직관적 PCK를 보여주었다. 특히 가연, 나연, 다연은 이를 학생의 오개념으로 간주하고 이 오개념을 고치기 위한 지도 방법으로 실제로 조각을 잘라 이동시켜 온전한 정사각형이 되도록 만들어보는 활동을 제안하였다. 이 지도 방법은 본 연구에서 예비교사들이 보여준 유일한 직관적인 접근이었다. 학생이 넓이에 대한 올바른 형식적 지식을 갖고 있었고 비교적 적절한 방법으로 넓이를 구했음에도 불구하고 답이 공식을 통해 구한 것과 일치하지 않는다는 이유로 학생의 답이 틀렸다고 판단한 것은 근삿값에 대해 덜 강조하고 항상 수학 문제에서 공식에 의거한 정확한 답만을 요구하는 수학 문화에서 기인한다고 볼 수 있다. 또한 우리나라 수학 교육에서 어림에 대한 중요성이 충분히 반영되지 않아(고정화, 2010), 예비교사들도 어림 전략보다는 공식에 의존한 것으로 해석된다.



왼쪽 삼각형이 더 크다. 왜냐하면 나는 온전한 정사각형의 개수를 세었고, 그 다음에 정사각형의 부분들을 더해 왼쪽 넓이는 9를 얻었고, 오른쪽 것은 6 1/4를 얻었다.

[그림 Ⅳ-7] <과제 1>의 삼각형의 넓이 문제에 대한 학생 G의 답

Ⅴ. 결론

본 연구에서는 일련의 지필과제를 수행한 예비교사 연구 참여자들의 지식을 Shulman-Fischbein 개념틀의 여섯 가지 범주로 해석하였다. 해석 결과 예비교사들의 지식에 대한 몇 가지 특징을 도출할 수 있었고, 이를 본 연구의 선행 연구였던 미국의 사례(Kim, 2018)와 비교해보고자 한다.

첫째, 예비교사들은 본 연구에서 사용된 과제와 관련하여 적절한 알고리즘적, 형식적 SMK를 지니고 있었다. 연구에 참여한 예비교사들 모두 제시된 평면도형 문제들을 옳게 해결할 수 있었고, 문제를 해결하기 위해 필요한 수학적 개념들을 정확하게 지적하였다. 이는 예비교사들이 적어도 이 연구에서 제시된 영역에 속하는 개념들에 대해서는 정확하고 강한 SMK를 지니고 있음을 의미한다. 예비교사들은 넓이 공식과 같은 알고리즘적 지식

뿐 아니라, 높이 개념, 각의 종류, 삼각형의 내각의 합에 대한 성질, 논리, 등과 같은 형식적 지식도 충분히 갖추고 있었다. 이런 결과는 우리나라 교사들이 대체로 내용지식 측면에서는 풍부한 이해를 하고 있다는 Buchholtz et al.(2012; 박경미, 2016에서 재인용)의 결과와 부합한다. 특히 수학의 직관적 지식보다는 알고리즘적, 형식적 측면의 SMK가 더 강한 경향을 보였는데, 이런 특성은 동일한 과제를 수행한 미국의 예비교사들에게서도 유사하게 나타났다(Kim, 2018). 이는 수학의 학문적 특성이 반영된 결과이며 한국과 미국 모두 학교교육에서도 교사교육에서도 수학의 직관적 측면보다는 알고리즘적 측면과 형식적 측면을 강조한 결과로 해석될 수 있다. 교사가 잘 가르치기 위해 정확한 내용 지식을 지녀야 함은 반론의 여지가 없을 것이다. 수학을 정확하게 아는 것이 교수에서 효과적일 것이라 확신할 수는 없지만 수학을 잘못알고 있으면 수학을 제대로 가르칠 수 없다(신현용, 이종욱, 2004). Kim(2018)에 의하면, 잘못된 높이 개념을 갖고 있던 한 예비교사는 학생의 오류를 판단할 때에도 자신의 오류를 깨닫지 못하고, 자신의 잘못된 높이 개념을 고수하였다. 그러므로 교사가 옳고 정확한 SMK를 지녀야 함은 수학 교수에서 매우 중요하다.

둘째, 예비교사들은 수학의 형식적 측면을 많이 강조하였는데, 특히 논리, 수학적 엄밀성, 사용하는 언어의 엄밀성을 강조하는 경향을 보여주었다. 반면에 직관적 지식(특히 수학의 직관적 PCK)은 덜 강조하는 경향을 보였다. 과제에서 제시된 세 문제를 해결하기 위해 사용한 수학적 지식에서 가장 많은 비중을 차지하는 것이 형식적 지식이었다. 심지어 알고리즘적 지식인 넓이 공식을 사용하면 해결되는 <과제 1>의 삼각형의 넓이 문제에서도 높이 개념이나 공식으로서가 아닌 넓이 개념을 제시하였다. 예비교사들은 일련의 과제에 제시된 학생들의 답을 분석할 때에 형식적 측면에서 잘못된 용어, 정의의 사용과 관련된 학생들의 오류를 지적하였고 학생들이 보이는 오개념을 수정하기 위한 방법으로 형식적 지식을 강조하는 경향을 보였다. 심지어 알고리즘적 지식과 관련된 삼각형의 넓이 문제에 대해서도 공식만을 강조하는 것이 아니라 형식적 지식인 삼각형의 높이 개념을 확립할 수 있는 방법과 넓이가 어떻게 유도되는지 설명해야 한다는 언급은 예비교사들이 SMK와 PCK 모두에서 형식적 지식을 중요하게 생각하고 있음을 보여준다.

직관적 지식에 대해서는 학생들이 보이는 오류 중에서 직관과 관련된 것은 예비교사들이 지적할 수 있었지만, 학생들의 오개념을 수정하는 방법에서 직관적인 방법은 드물게 사용하였다. 직관적 지식은 수학적 사실과 모순되면 학생에게 인지적 장애를 일으킬 수 있지만, 효과적으로 사용하면 학생의 이해를 도울 수 있는 장점이 있다(Fischbein, 1994). 수학의 형식적인 측면을 이해하기 어려워 발생한 오개념인 경우 잘 계획된 직관적인 접근 방법이 그런 학생들의 이해를 도울 수 있을 것이다. 예를 들어, 닮음 개념을 지도할 때, OHP를 사용해 삼각형을 그려 OHP를 앞으로 뒤로 움직이면 모양은 변하지 않은 채 크기만 변하는 것을 보여줄 수 있어 직관적으로 닮은 도형이 무엇인지에 대해 학생들이 쉽게 그 개념에 접근할 수 있다. 하지만 연구에 참여한 예비교사들은 직관적인 방법 보다는 보다 형식적인 지식에 초점을 맞추었다. 이런 한국 예비교사들의 특징은 미국 예비교사들의 사례와도 일치한다. Kim(2018)의 연구에 의하면, 미국의 예비교사들도 학생의 오개념을 수정하기 위한 교수학적 방법을 제시함에 있어서 직관적인 접근 보다는 형식적인 방법에 초점을 맞추었다. 이런 경향들은 수학이라는 학문이 형식적 측면이 강한 특징을 보이기 때문으로 보인다. 또한 이대현(2014)의 연구에서 예비교사들이 직관적 수준에서 해결할 수 있는 문제도 알고리즘에 의존해 해결하는 경향이 많았다는 연구 결과도 본 연구에서 예비교사들이 직관보다는 공식 사용과 같은 알고리즘을 더 강조한 결과와 같은 맥락이다.

셋째, 수학의 형식적 PCK 분석을 통해 예비교사들의 학생들의 수준을 덜 고려하는 경향이 드러났다. 이는 수학의 형식적 측면을 강조한 결과와도 일맥상통한다. 학생들의 오개념을 고치는 교수학적 방법을 제안하는 질문에 대한 답을 분석한 결과 예비교사들이 이 개념을 배우고 있는 학생의 수준을 사려 깊게 고려하지 않고 엄밀하고 형식적인 접근 방법을 제시한 경우가 종종 있었다. 본 연구에서 다룬 기하 문제들은 우리나라 뿐 아니라 미국의 교육과정에서 4~6 학년에 해당하는 개념을 바탕으로 하였다. Piaget의 발달이론에 따르면 구체적 조작기(8~12세)를 거쳐 형식적 조작기(13세 이상)에 도달하는데, 이 형식적 조작기에 도달해야만 추상적 사고가 가

능하게 된다(강문봉 외, 2013). 우리나라와 미국의 4~6학년 학생들은 주로 구체적 조작기에 해당하기 때문에 이들이 엄밀하고 추상적인 형식적 사고를 할 수 있을 것이라 기대하기는 힘들다. van Hieles는 기하학적 사고를 5개의 수준(제 0수준~ 제 4수준)으로 제안하였다. 그에 의하면 제 1수준은 시각적 수준으로 외형에 따라 도형의 구성요소와 성질을 파악하고 말할 수 있지만, 그 도형과 성질들을 명확히 관련짓지는 못한다. 제 2수준은 서술적/분석적 수준으로 도형들을 그 성질에 의해 인식하고 특징지을 수 있지만, 그 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다. 제 3수준은 추상적/관계적 수준으로 학생들은 이 수준에서 추상적인 정의를 이해할 수 있고, 명제의 필요, 충분조건을 구분할 수 있으며 명제를 증명할 수 있다(우정호, 2004; Clements & Battista, 1992). 연구에 참여한 예비교사들의 답변은 종종 학생들이 제 3수준에 있을 것으로 가정한 것처럼 보이는 경우가 있었지만, 실제 4~6 학년의 학생들은 주로 제 1, 2 수준에 머물러 있어 예비교사들이 제안한 교수학적 방법을 이해하기 힘들 것이다.

특히 <과제 2>에서 둘레의 길이가 더 긴 직사각형의 넓이도 더 넓다는 진술이 한, 두 가지의 예만으로 옳다고 판단한 학생의 오개념을 수정하기 위해 여러 예비교사들은 반례를 찾는 경험을 갖게 해야 한다고 주장하였다. 하지만 이런 반례를 통한 진술의 반박은 대학생조차도 어려워하는 활동이다(오혜미 & 권오남, 2013). 아직 논리적 추상적 사고가 확립되지 않은 4~6 학년의 학생들에게 수학의 엄밀한 논리성, 형식성, 추상성을 경험하도록 하는 일은 대상 학생의 수준을 충분히 고려하지 않은 것으로 판단된다. 학생들에게 수준 높은 논리성, 형식성을 요구하는 경향은 미국의 사례에서는 나타나지 않았다(Kim, 2018). 최윤화 외(2014)의 연구는 경력교사와 달리 초임교사는 수업에서 학생의 다양한 인지적 수준을 고려하지 않은 개념설명을 제공했다고 보고하였다. 본 연구의 예비교사들이 학생 수준을 덜 고려한 경향도 경험과 경력 부족에서 기인한다고 볼 수 있다.

본 연구는 수학과에 재학 중인 교직이수 학생을 대상으로 하였기 때문에 연구에 참여한 예비교사들은 실제 학생들과 상호작용할 기회가 적었다. 이들은 학생들이 갖고 있는 오개념을 판단하고 이를 고치기 위한 방법을 고안하는 경험도 충분하지 않았다. 그래서 본 연구에서 실시한 과제를 수행하는데 어려움이 있었을 것으로 예상된다. 이러한 경향은 예비교사들은 오개념을 수정하기 위한 교수학적 방법을 제시할 때 피상적으로만 대답한 데에서 발견할 수 있었다. 예를 들면, 예비교사들은 “다양한 예를 제공한다”, “공식을 이해하게 한다(공식이 어떻게 나온 것인지 유도한다)”, “합리적이고 논리적 근거를 통해 결론에 도달하는 방법을 일러준다”, “생각의 깊이와 폭을 넓힐 수 있도록 적절한 발문을 통해 학생으로 하여금 폭넓은 사고를 유도한다”, “주장의 근거를 제시할 때의 방법적 요령을 설명하고 다양한 사례를 통해 학생 스스로 학습하도록 유도한다”, “수학적 언어를 사용하여 일반화된 법칙을 찾을 수 있도록 유도한다”, “반례 찾는 연습을 하게 한다”, “각 개념들이 가지는 의미를 정확하게 알 수 있는 훈련 필요”, “사고의 폭을 넓게 한다” 등과 같이 답하였다. 이러한 답들은 무엇을 어떻게 지도할 것인지에 대한 설명이 충분하지 않다. <과제 2>의 둘레의 길이가 긴 직사각형이 넓이도 더 넓다는 진술이 참이라고 답한 학생들의 오개념을 수정하기 위한 방법으로 예비교사들은 주로 반례 찾는 경험을 제공한다고 답하였으나, 위에서도 언급했듯이 이는 학생들의 수준에서는 어려운 활동일 수 있다. 학생들에게 넓이와 둘레의 길이는 관련성이 없다는 개념을 알려주기 위해 할 수 있는 효과적인 방법은 둘레의 길이를 고정시키고 다양한 넓이를 갖는 직사각형을 만들어보거나 넓이를 고정시키고 다양한 둘레의 길이를 갖는 직사각형을 만들어보는 활동을 해 보는 것이다. 예비교사 중 나연과 다연만이 이 방법에 대해 간단히 언급하였지만, 다른 예비교사들은 반례 찾기에 더 초점을 맞추었다. 유사하게 미국 예비교사들도 피상적인 수준으로 오개념을 수정하기 위한 교수학적 방법을 제시하였다(Kim, 2018). 예비교사들에게는 실제 학생들의 오류나 오개념을 경험할 충분한 기회가 주어지지 않기 때문에, 학생의 오류와 오개념을 파악하고 그에 맞는 피드백을 제공하는 일은 예비교사나 초임교사에게는 어려운 일이고, 경력이 쌓일수록 적절하게 대응한다는 사실이 몇몇 연구에서 밝혀졌다(전미현 & 김구연, 2015; 최윤화 외, 2014). 이처럼 학생에 대한 지식이 예비교사들에게 부족하다는 사실이 용납될 수 있다 하더라도, 많은 교사들이 학생에 대한 지식이 필요하다고 느끼는 만큼 예비교사 교육에 있어서 학생에 대한 지식을 기를 수

있는 기회를 제공할 필요가 있다(강현영 외, 2011; 심상길, 2013).

본 연구는 예비교사들이 특정대학에 국한된 탓에 이 예비교사들이 보여준 결과를 일반화하기에는 무리가 있다. 하지만 이 연구는 교사의 지식을 해석하는 한 가지 방법을 제안하였고 이를 통해 도출된 특징들은 예비교사들의 학생에 대한 지식을 함양하는데 시사점을 줄 것이라 기대한다. 모든 대학에서 실시하는 것은 아니지만 본 연구자가 경험한 미국의 G 주립대학은 예비교사 프로그램에 contents course와 method course를 병행하여 수업을 운영하고 있었다. 두 강좌는 같은 학기에 동시에 개설되며 초 · 중학교 급의 예비교사 준비 프로그램에 등록한 학생들은 이 두 강좌를 동시에 수강해야 할 의무가 있었다. Contents course에서는 학교에서 가르칠 수학 개념을 중심으로 교사가 알아야 할 수학에 대해 학습하는 강좌이고 method course는 contents course에서 학습한 수학 개념을 학교현장에서 적용하기 위한 방법을 위주로 학습하는 강좌였다. 두 수업을 진행하는 강사들은 달랐지만 사전 논의를 통해 수업에서 다루어야 할 내용을 서로 조율하였다. 특히 method course에서 예비교사들은 수학 개념을 관련된 교육과정에서 찾아보고 수업지도안을 작성해보면서, 학생의 수준에 맞는 적절한 교육방법이나 교구 등을 탐색하는 시간을 가졌다. 또한 특정 개념에 대해서 학생들이 흔히 보이는 오개념을 파악하고 이를 고치기 위해 어떻게 도와줄 수 있는지 토론하는 시간도 가졌다. 미국의 예비교사들도 학생과 직접 상호작용하는 기회가 충분하지 않기 때문에, 학생들의 오개념을 분석하고 이를 고치도록 도와주는 일을 쉽게 생각하지 않는다. 하지만 이런 학생에 대한 지식을 탐구해보는 경험은 예비교사들이 학생에 대한 지식이 교육현장에서 필요하다고 인식하는데 도움을 줄 것이다. 비록 이 병행 강좌를 통해서 모든 예비교사들이 완벽한 SMK와 PCK를 갖게 될 것이라고 기대할 수는 없지만, 예비교사 양성 과정에서 SMK 뿐만 아니라 PCK를 함양시킬 수 있는 기회를 제공하는 일은 바람직하다. 우리나라 대학에서 예비교사 양성 교육과정을 설계할 때, 이런 병행 강좌를 도입하지 않더라도 수업에서 SMK와 PCK를 적절히 조화시키고 수학의 알고리즘적, 형식적, 직관적 측면을 균형 있게 제시할 필요가 있을 것이다. 특히 수학의 직관적 측면은 간과되기 쉬운데, 아직 형식적 논리적 사고가 충분히 발달하지 않은 학생들에게 적절한 직관적인 접근은 학생의 이해를 도울 수 있으므로 수학의 직관적 측면에 대한 연구도 필요할 것이다.

참 고 문 헌

강문봉 · 강흥규 · 권석일 · 김수미 · 남진영 · 박교식 · 박문환 · 서동엽 · 송상헌 · 유현주 · 이종영 · 임재훈 · 정동권 · 정은실 · 정영옥 (2013). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

Kang, M. B., Kang, H. K., Kim, S.M., Nam, J. Y., Park, K. S., Park, M. H., Seo, D. Y., Song, S. H., You, H. J., Lee, J. Y., Lim, J. H., Chung, D. K., Chung, E. S. & Chung, Y. Y. (2013). Understanding of elementary school mathematics. Seoul: Kyungmoon Publishers.

강현영 · 고은성 · 김태순 · 조완영 · 이경화 · 이동환 (2011). 좋은 수학수업을 위해 수학교사에게 필요한 역량과 교사교육에 대한 현직교사의 인식조사. 학교수학, 13(4), 633-649.

Kang, H. Y., Ko, E., Kim, T. S., Cho, W. Y., Lee, K., & Lee, D. (2011). Mathematics teachers' perspectives on competencies for good teaching and perspective teacher education. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics,* 13(4), 633-649.

고정화 (2010). 길이 어림과 관련된 교과서 분석 및 대안 모색. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 24(3), 587-610.

Ko, J. (2010). Textbook analysis about length estimation and exploration for an alternatives. *Communications of Mathematical Education,* 24(3), 587-610.

김지선 (2018). Shulman - Fischbein 개념틀을 활용한 예비 교사의 기하 영역에 대한 지식 해석 : 미국 예비교사

들의 사례. 한국학교수학회논문집, 21(2), 113-139.

Kim, J. S. (2018). Interpretation of Teacher Knowledge in Geometry with Shulman - Fischbein Framework: Cases of US Preservice Teachers. *Journal of the Korean School Mathematics Society,* 21(2), 113-139.

박경미 (2016). 예비수학교사의 ‘내용과 학습자에 대한 지식(KCS)’ 탐색 연구. 수학교육학연구, 26(2), 269-285.

Park, K. (2016). An investigation into the pre-service mathematics teachers’ knowledge of content and students. *Journal of Educational Research in Mathematics,* 26(2), 269-285.

박혜숙 (2003). 기하교육에 대한 수학교육학적 고찰: 최근 10년간 <수학교육>에 게재된 논문을 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42(2), 193-202.

Park, H. (2003). The consideration on the papers about geometry education: centered on the papers in <The Mathematics Education> for the recent 10 years. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series A <The Mathematical Education>,* 42(2), 193-202.

신현용・이종욱 (2004). 수학교사의 지식에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 18(1), 297-308.

Shin, H. Y., & Lee, J. W. (2004). Research on knowledge of mathematics teachers. *Communications of Mathematical Education,* 18(1), 297-308.

심상길 (2013). 교사의 지식에 대한 중등 초임수학교사들의 인식 분석. 학교수학, 15(2), 443-457.

Shim, S. K. (2013). An analysis on the perceptions of beginning secondary mathematics teachers about teacher knowledge. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics,* 15(2), 443-457.

오영열 (2012). 수학 교과 전문성 신장에 대한 소고. 한국초등수학교육학회지, 16(3), 389-401.

Oh. Y. (2012). A research on teachers’ professional development of mathematics. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea,* 16(3), 389-401.

오혜미・권오남 (2013). 대학생의 반례 생성과 참 명제 제기 과정에 대한 연구. 한국수학사학회지, 26(5, 6), 401-416.

Oh, H. M. & Kwon, O. N. (2013). The study on the process of undergraduate students’ generating conter-examples and proposing true statements. *Journal for History of Mathematics,* 26(5-6), 401-416.

우정호 (2004). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판부

Woo, J. H. (2004). Principle and method of mathematics learning and teaching. Seoul: Seoul National University Press.

이대현 (2014). 직관적 수준에서 초등 예비교사들의 문제해결 과정 분석. 학교수학, 16(4), 691-708.

Lee, D. H. (2014). An analysis on the elementary preservice teachers’ problem solving process in intuitive stages. *School Mathematics,* 16(4), 691-708.

전미현・김구연 (2015). 예비교사들의 수학교수지식(MKT) 측정 및 분석 연구. 수학교육학연구, 25(4), 691-715.

Jeon, M. & Kim, G. (2015). Measuring and analyzing prospective secondary teachers’ mathematical knowledge for teaching(MKT). *Journal of Educational Research in Mathematics,* 25(4), 691-715.

최승현・황혜정 (2008). 수학과 내용 교수 지식(PCK)의 의미 및 분석틀 개발에 관한 연구. 한국 학교수학회논문집, 11(4), 569-593.

Choe, S. & Hwang, H. (2008). The research on padagogical content knowledge in mathematics teaching. *Journal of the Korean School Mathematics Society,* 11(4), 569-593.

최윤화・최상호・김동중 (2014). 초임교사와 경력교사의 교수학적 내용지식과 수업실제 분석: 중학교 함수단원. 한국학교수학회논문집, 17(2), 251-274.

Choi, Y., Choi, S., & Kim, D. (2014). An investigation of beginning and experienced teachers’ PCK and teaching practices: Middle school functions. *Journal of the Korean School Mathematics Society,* 17(2), 251-274.

한혜숙 (2016). 예비수학교사의 MKT에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 30(1),

101-120.

Han, H. (2016). A study on pre-service mathematics teachers' MKT. *Communications of Mathematics Education,* 30(1), 101-120.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Cooney, T. J., Sanchez, W. B., Leatham, K., & Mewborn, D. S. (n.d.). Open-ended assessment in math. Retrieved March 17, 2018, from http://books.heinemann.com/math/index.cfm

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39(4), 372-400.

Manizade, A. (2006). *Designing measures for assessing teachers' pedagogical content knowledge of geometry and measurement at the middle school level.* Unpublished doctoral dissertation. University of Virginia. [Dissertation Abstracts International]

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathemtics*. Reston, VA: Author.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2008). Combining theories in research in mathematics teacher education. *ZDM Mathematics Education,* 40, 861-872.

Wilson, P. S., Cooney, T. J., & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 8, 83-111.

Interpretation of Pre-service Teachers' Knowledge by Shulman-Fischbein Framework : For Students' Errors in Plane Figures

Kim, Ji Sun
Gyeongsang National University
E-mail : jisunkim79@gmail.com

This article aims at providing implication for teacher preparation program through interpreting pre-service teachers' knowledge by using Shulman-Fischbein framework. Shulman-Fischbein framework combines two dimensions (SMK and PCK) from Shulman with three components of mathematical knowledge (algorithmic, formal, and intuitive) from Fischbein, which results in six cells about teachers' knowledge (mathematical algorithmic-, formal-, intuitive- SMK and mathematical algorithmic-, formal-, intuitive- PCK). To accomplish the purpose, five pre-service teachers participated in this research and they performed a series of tasks that were designed to investigate their SMK and PCK with regard to students' misconception in the area of geometry. The analysis revealed that pre-service teachers had fairly strong SMK in that they could solve the problems of tasks and suggest prerequisite knowledge to solve the problems. They tended to emphasize formal aspect of mathematics, especially logic, mathematical rigor, rather than algorithmic and intuitive knowledge. When they analyzed students' misconception, pre-service teachers did not deeply consider the levels of students' thinking in that they asked 4-6 grade students to show abstract and formal thinking. When they suggested instructional strategies to correct students' misconception, pre-service teachers provided superficial answers. In order to enhance their knowledge of students, these findings imply that pre-service teachers need to be provided with opportunity to investigate students' conception and misconception.

* ZDM Classification : A45
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50
* Key words : teachers' knowledge(SMK, PCK), Shulman-Fischbein framework, teachers' knowledge of students