

A study for Abacus School

아바쿠스 학교에 대한 연구

KHANG Mee Kyung 강미경

The Abacus schools were created by the needs of merchants who had accumulated wealth through trades in Italy during the Renaissance. Teachers in the Abacus school taught practical mathematics mainly used in commerce and trade, and the schools had courses in the fields of management and accounting today. This Abacus school also served as an educational institution, but also provided the opportunity to develop into today's mathematics. In this paper, we investigate about the background and role of the Abacus school.

Keywords: Abacus school, abbaco, abacist; 아바쿠스 학교, 아바키스트.

MSC: 01A40, 01A72, 01A85 ZDM: A30

1 서론

아바쿠스 학교라 함은 르네상스 시대에 이탈리아에 있었던 일종의 상업학교이다.

르네상스 시대는 많이 알려진 대로 유럽 사회의 여러 방면에 걸쳐 커다란 변혁과 발전이 있었던 시기였다. 특히 신 중심의 사고에서 사람 중심의 사고로 바뀌는 것이 가장 중요한 점이었으므로 대부분 실질적인 필요에 따른 발전이나 변혁이 이루어졌다.

이때 여러 가지 많은 변혁은 교육 분야에서도 나타났다. 1300년 이전에는 소수의 학교에 대한 기록만 있었는데 14세기에는 공립 혹은 사립학교에 대한 기록이 많이 나타난다 [2].

교육의 물결이 밀려들어오는 것이 정확히 어느 때부터인지는 명확하지는 않지만 특정 전문 직업군에서 읽고 쓰는 능력의 필요성이 대두됨에 따라 학교라는 개념이 널리 알려졌다. 예를 들어 12-13세기 치오지아¹⁾에서는 판사, 법률가, 행정관, 문관과 승려 중에는 읽기와 쓰기를 모두 못하거나 한 가지만 할 수 있는 사람들도 종종 있었다. 그러나 1333년 치오지아 정부는 판사와 다른 공무원들은 그들의 직무를 수행하기 위하여 읽기와 쓰기를 반드시 할 수

이 논문은 2018학년도 배재대학교 교내학술연구비 지원에 의하여 수행된 것임.

KHANG Mee Kyung: Dept. of Applied Math., Pai Chai Univ. E-mail: mkkhang@pcu.ac.kr

Received on Jul. 20, 2018, revised on Aug. 10, 2018, accepted on Aug. 20, 2018.

1) Chioggia : 베네치아 남부의 해안 도시

있어야 한다는 법령을 제정하였다 [2]. 이를 보면 그 이전보다는 이후에 학교가 많이 생겨난 것으로 보인다.

여러 가지 기록을 살펴보면 도시 국가들 혹은 개별적인 차원에서 교사를 고용하여 여러 가지 교육을 시행했음을 알 수 있었다. 한 예로 피스토리아²⁾의 1304년의 기록에는 라틴어 개인교사가 언급되어 있다. 피스토리아는 1322년에 문법, 논리학, 작문법을 가르치는 공립 교사를 고용하였고 1353년에는 아바쿠스 학교(*maestro d'abbaco*)³⁾도 추가하였다 [2].

르네상스 시대에 이탈리아를 중심으로 성직자를 양성하는 교회학교, 도시국가에서 만든 라틴학교(Latin School 또는 Grammar School)와 아바쿠스 학교가 있었으며 그 이외에도 대학교가 활성화되고 있음을 알 수 있었다.

이 중에서 아바쿠스 학교는 르네상스 시대에 신분의 중요도가 달라진 상공인들을 중심으로 자신들의 아들과 자신들의 사업에 필요한 인력을 키우기 위해 수학을 주로 가르치는 학교의 형태로 나타났다. 이 논문에서는 이 아바쿠스 학교가 나타나게 된 배경과 경과 그리고 수학의 발전에 끼친 영향을 알아보았다.

2 아바쿠스학교의 배경

13세기 초까지 북부 이탈리아의 교육은 주로 상류계급을 위한 교육이었으며 일곱 개의 삼학(문법, 수사학과 논리학)과 4과(산술, 기하, 음악과 천문학)로 이루어졌으며 상류계급의 학생들만이 대학에 입학하여 예술, 약학, 법, 또는 신학을 공부하였다. 학교에서나 대학에서의 수업은 라틴어로 이루어졌으며 교재 또한 라틴어로 되어 있었다.

이것은 1202년 피보나치(Fibonacci)⁴⁾의 산반서(Liber Abaci, Book of Calculation)의 출현으로 바뀌었는데 이로 인하여 그 책에 포함된 지식을 상인과 특권층이 아닌 계급의 학생들에게 가르치는 학교가 출현하였다. 이 새로운 교육체계는 13세기 중엽에 북부 이탈리아에서 나타나기 시작하여 아바키스트(*abbaco*)⁵⁾를 가르쳤다 [6].

14세기에 유럽 경제에 나타나기 시작한 많은 변화들은 궁극적으로 수학에 영향을 미쳤다. 르네상스로 알려진 이후 두세기 동안의 문화적인 흐름은 특히 이탈리아에 충격을 주었기 때문에 우리가 르네상스 수학을 논할 때에는 이탈리아에서 시작해야 한다.

중세 이탈리아의 상인들은 오늘날의 시각으로 보면 벤처 투자가라고 할 수 있다. 그들은

2) Pistoria : 이탈리아 투스카니 지역의 도시

3) 산술전문가를 양성하는 학교라는 의미로 *maestro d'abbaco*를 사용하여 직역하면 산술 전문가 학교가 맞겠지만 이하 계속 '아바쿠스학교'로 표기할 것이다.

4) 그의 원래 이름은 레오나르도 피사노(Leonardo Pisano)인데 여러 책이나 논문에서는 이 이름도 나온다. 이 논문에서는 피보나치로 표기한다.

5) 우리말로 번역한다면 '산술 전문가'라고 하는 것이 옳겠지만 이 용어에 대해서는 표준화된 표기를 찾을 수 없어서 저자의 임의대로 이 용어를 사용하였다. *abbaco*는 이탈리아어에서 유래한 것이지만 책이나 논문에 따라서는 *abacist*라는 말을 같이 사용하고 있었다. 앞으로 이 용어는 새로운 표준표기를 정립하여야 할 것이다.

동쪽의 먼 나라들을 여행하고 그 곳의 상품들을 사가지고 이탈리아에 돌아와서 이익을 남기고 팔았다. 이러한 교역상인(traveling merchant)들은 물건의 값과 항해에 따른 이익을 결정하기만 하면 되므로 수학이 그다지 많이 필요하진 않았다. 14세기 초 십자군의 영향에 따른 상업적 혁명이 퍼져나감에 따라 이러한 상업의 체계에 커다란 변화가 생겼다. 새로운 조선기술과 훨씬 안전해진 해로는 중세의 교역상인(traveling merchant)들을 르네상스의 정착상인(sedentary merchant)들로 바꾸었다. 이 “신인류”는 이탈리아의 집에 있으면서 여러 항구를 여행하며 거래를 하고 대행을 하며 선적을 수행할 사람을 고용하여 무역을 수행하였다. 그리하여 중요한 이탈리아의 도시들에는 국제적인 무역회사가 발달하기 시작하였으며 그들은 그들의 전임자들보다는 더 복잡한 수학이 필요하게 되었다. 이 새로운 회사들은 신용장, 지폐, 약속어음과 이자계산을 다루었다. 다양한 업무의 회계 관리의 방법으로 복식회계가 시작되었다. 사업은 더 이상 단일의 투자로 이루어진 것이 아니고 서로 다른 여러 항구에서 연속적으로 많은 선적에 의한 물류의 흐름이었다. 대부분 물물교환에 바탕을 둔 중세의 경제는 금융 경제로 뒤바뀌게 되었다.

이탈리아의 상인들은 새로운 경제 환경을 다루기 위해서는 수학을 쉽게 습득할 방법이 필요하였으나 그들이 필요로 하는 수학은 대학에서 가르치는 위에서 언급한 4과의 수학이 아니었다. 그들에게는 계산을 하고 문제를 해결할 새로운 도구가 필요하였다. 이러한 필요에 따라 새로운 ‘전문적인’ 수학자들 아바키스트(maestri d'abbaco 또는 abacists)들의 집단이 14세기 초 이탈리아에 등장하였다. 이 전문가들은 위와 같은 목적으로 설립된 새로운 학교에서 상인들의 아들들에게 필요한 수학을 가르칠 교재를 직접 썼다 [3].

피보나치의 책은 대중들의 관심을 끄는 서로 다른 네 가지의 도구들을 가져왔다 [6].

1. 10세기 후반에 베네딕트회의 수도사인 제르베르 도리악(Gerbert d'Aurillac)⁶⁾에 의해 유럽에 알려진 힌두-아랍 숫자(Hindu-Arabic numerals) 1~9
2. 페르시아인 알카리즈미(Al-Khwārizmī)의 9세기 대수학과 그에 포함된 0의 개념
3. 자릿수 개념(일의 자리, 십의 자리, 백의 자리 등...)
4. 주판을 사용하지 않고 계산하는 법(10세기에 유럽에 주판을 소개한 제르베르 도리악의 업적과 반대로)

결과적으로 유럽에서는 처음으로 독자들에게 힌두-아랍 숫자를 어떻게 사용하고 이들을 어떻게 효과적으로 기록하는지 가르쳐주는 책이 만들어진 것이다. 이 산반서를 이용하여 가르치는 사람들을 아바키스트(maestri d'abbaco)라고 칭하였다. 그들의 교수법의 정수는 주판을 전혀 사용하지 않는 그들만의 계산법이였다 [6].

그리하여 피보나치의 산반서를 통해 ‘암산(mental arithmetic)’이 유럽에 소개되었다. 도

6) 그는 후에 프랑스의 첫 번째 교황 실베스터 2세[Sylvester II]가 되었다.

움 없이 복잡한 계산을 수행하도록 아들들을 교육시키는 것의 잇점을 깨달은 상인들은 북부 이탈리아에 아바키스트들이 자신들의 자식들을 가르치도록 학교를 설립하였다. 뿐만 아니라 장인, 공예인, 건축가나 예술가들의 자식들도 피보나치의 산반서를 이용하여 그들의 일을 하였다. 도시 정부도 역시 중간과 하층 계급의 구성원들이 유용하고 실용적인 교육을 받고 이러한 목적으로 또한 학교들을 후원했을 때 그들의 지역사회에 가져올 잇점을 깨달았다. 이후 4세기 동안 만들어진 학교와 그 학교의 선생들이 많아짐으로써 아바쿠스 학교의 학생들의 수가 라틴학교의 학생 수와 비슷해졌다 [2].

3 아바쿠스 학교의 체계

상업적인 아바키스트는 13세기에 나타났는데 1265년 볼로냐(Bologna)에서 처음으로 나타났다. 1277년 베로나⁷⁾ 정부는 최초의 공공의 아바키스트로 알려진 'unum magistri rationis abachi'⁸⁾를 가능한 빨리 임명하기로 결정하였다. 1284년 베로나 정부는 아바키스트에게 연봉 50 베로나 리라(lire veronesi)를 지급하고 집을 무료로 사용하도록 실행하였다 [2].

초기 기록을 보면 일반적인 학교는 후원자와 재정 지원에 따라 세 가지 유형으로 분류된다. 각 정부가 직접 지원하는 공공 학교가 있었다. 정부가 교사를 뽑고 보수를 지급하고 교과과정 에 제한적인 감독을 하였다. 무소속인 교사와 학생들의 부모들이 독립적인 학교를 만들기도 하였다. 이때 교사들은 자기 집이나 빌린 건물에 학교를 열고 수업료를 내는 모든 사람들을 가르쳤다. 다른 독립적인 교사들은 상주하거나 매일 출근하며 가정교사로 가르치기도 하였다 [2].

도시국가의 정부들은 아바키스트들도 고용하였다. 베로나는 1277년과 1284년에는 확실히 고용하였는데 14세기 동안에는 기록이 없어서 아바키스트들을 지원하였는지 확실하지 않다. 그러나 1424년부터 16세기까지는 아바키스트들이 계속 있었다는 기록이 남아있다. 1437년에 베로나는 베로나 사람이고 구두 만들 가족을 잘라서 파는 사람의 아들인 발다사르 디 바피스타를 한 달에 8 베로나 리라를 주는 조건으로 고용하였다는 기록이 있다. 계약은 아바키스트 교육과 장인 및 상인들의 세계 사이에 밀접한 결속을 확립시켜 주었다. 발다사르의 세 아들은 그의 뒤를 이었는데 16세기 초에 베로나는 타 지역의 교사를 고용하는 관례로 돌아갔다. 도시 정부들은 실용적인 이유로 아바키스트들을 후원하였는데 바로 미래의 상인들과 그들의 서기, 회계사, 장인들을 훈련시킨다는 것이다 [2].

돈 많은 상인들은 정부 기관에 대한 실질적인 영향력과 그들의 자식들에게 상업수학을 교육 시키려는 욕구로 인하여 다른 부모들의 후원을 받아 학교를 설립하기 시작하였다. 그리하여 도시 국가 정부는 다른 지역에서도 아바키스트들을 초빙하였는데 이로써 편파성과 분쟁을

7) Verona : 이탈리아 북부의 베네토 지역의 도시. 셰익스피어의 '로미오와 줄리엣'의 무대가 된 도시이다.

8) 실제의 의미를 보면 아바키스트교사이지만 원문의 의미를 살리기 위하여 원문 그대로 적었다.

피하였고 자격, 나이나 임금 수준에 따라 가장 훌륭한 교사를 택할 수 있었다. 그들은 지명된 교사들이 근무할 기간과 가르쳐야 하는 학생의 수에 대하여 계약을 하였고 그 계약 중에는 보수의 특정 비율만큼은 도시에 내기로 하는 규정도 있었다. 계약은 일 년부터 삼 년 사이였으며 보수는 통화가치에 따라 금화 20개부터 30개까지였다. 도시 국가들은 답례로 (전부 혹은 반의) 세금 면제, (수업료와 교재나 학습도구의 값으로 만들어지는) 과외의 수입에 대한 권한과 교사들의 수입 수준보다 높은 관사를 보장하였다 [2].

독립적인 교사들도 도시 국가에 채용되기는 하였지만 훨씬 낮은 임금을 받았다. 대부분의 경우 자유계약직 교사들은 부모들로 이루어진 집단과 도시 국가 협약과 비슷한 방식으로 계약하였는데 가르치는 학생들의 수가 많아지면 자신의 학교를 세우기도 하였다. 교사가 되기 위하여 공부하는 아바키스트 도제(견습생)들은 가정교사를 할 수 있었으며 이를 이용하여 수업료를 계속 낼 수 있었다. 그러나 도제들은 졸업 후에는 기존의 교사들의 학생들과 수입을 빼앗지 않도록 다른 지역에서 가르치도록 되어 있었다 [2].

4 아바쿠스 학교의 영향

중세 후기의 기록에는 계산을 위해 션판을 사용한 기록이 있다고 한다. 형태는 탁자 모양이며 탁자 위에서 카운터라는 도구를 이용하여 계산을 하였다고 한다 [5].



Figure 1. A woodcut describing a counting board(presumed that it made in Strasbourg); 션판이 묘사된 목판화(스트라스부르에서 제작된 것으로 추정). [출처] 위키피디아(https://en.wikipedia.org/wiki/Counting_board).

14세기 이탈리아의 아바키스트들은 상인들을 가르칠 때 ‘새로운’ 힌두-아랍의 십진수체계와 이를 사용하는 방법을 도구로 사용하였다. 대부분의 경우 오래된 전통을 새로운 체계로 바꾸려면 커다란 저항이 있게 마련이다. 오랫동안 회계장부는 여전히 로마수 체계를 고수하였다. 힌두-아랍 수 체계는 변조가 쉽다고 여겨짐에 따라 거대한 상업적 활동에서 힌두-아랍

수 체계만을 사용하는 것은 위험하다고 생각하였다(지금도 수표의 액수를 말로 쓰는 관례는 여기에서 유래한다.)⁹⁾[3].

그럼에도 불구하고 새로운 수 체계의 잇점은 상인들이 처음에 가졌던 의심을 넘어섰다. 기존의 계수 체계는 기록을 위한 판뿐만이 아니라 계수 도구가 들어있는 가방까지 나르는 담당자가 필요하였으나 새로운 체계에서는 펜과 종이만 있으면 되었고 어디에서나 사용할 수 있었다. 더구나 기존의 계수판 체계는 처음의 과정을 지워야 다음 과정으로 넘어가므로 답만 남았다. 그러나 새로운 체계에서는 모든 과정이 보여지므로 계산 후 검산이 가능하였다.(물론 이 잇점이 오늘날과 같이 싼값의 종이가 공급된다는 것을 의미하는 것을 아니다.) 아바키스트들은 이탈리아 중산층의 자녀들에게 이 새로운 계산법을 가르쳤고 이 계산법은 대륙 전체로 퍼져나갔다 [3].

아바키스트들은 학생들에게 힌두-아랍의 수체계의 연산과 더불어 산술과 이슬람 대수를 이용하여 문제를 해결하는 방법을 가르쳤다. 지금까지도 수백 권이 남아있는 아바키스트들이 저술한 교재들은 그들의 해법에 따라 대부분 광범위하게 편집되었다. 이것은 학생들이 자신들의 가업을 잇기 위한 사업적인 문제의 해결뿐만이 아니라 현대의 기초적인 대수 교재에서도 찾아볼 수 있는 형태의 문제를 새로이 만들어내기도 함을 의미한다. 문제들 중에는 기초적인 정수론, 달력 또는 천문 문제를 다루는 것처럼 기하 문제도 있었다. 교재속의 해답은 모든 과정이 아주 자세하게 적혀 있었지만 그러한 과정을 거쳐야 하는 이유도 없었고 특정 방법의 한계를 알려주지도 않았다. 아마도 교사들은 그들의 방법이 문헌으로 남으면 더 이상 자신들이 고용되지 못할 수도 있다는 점이 두려워서 드러내는 것을 원치 않았을 것이다. 어쨌든 이 아바쿠스 교재들은 교실에서 뿐만이 아니라 상인들 자신들을 위한 참고자료의 역할까지 했음이 확실하다. 상인들은 쉽게 찾을 수 있고 특정한 형태의 문제들의 해결방법을 문제의 이면에 포함된 법칙을 이해할 필요 없이 따라 갈 수 있었다 [3].

4.1 아바쿠스 교재에서 나타난 문제의 형태

다음은 아바쿠스 교재들에서 나타난 문제들 중의 일부이다 [3].

- * 루카¹⁰⁾에서 금화의 가치는 5리라, 12솔디, 6디나리이다. 13솔디, 9디나리는 (금화로) 얼마인가? [여기에서 20솔디가 1리라이고 12디나리가 1솔디임을 알아야 한다.]
- * 1리라의 한 달 이자는 3디나리이다. 60리라의 8개월간의 이자는 얼마인가? [이 문제는 단리 문제이다. 복리 문제는 일반적으로 연 단위로 계산할 때 나타난다.]
- * 150피트 길이의 경기장이 있다. 개와 토끼가 양 끝에 있다. 개는 한번에 9피트를 뛰고

9) [1]에서는 이 부분에 대하여 '산판파'와 '필산파' 사이에 몇 세기동안 치열한 싸움이 있었고 16세기가 되어서야 '필산파'가 완전한 승리를 거두었다고 하였다.

10) Lucca : 이탈리아 투스카니 지역의 도시

토끼는 한번에 7피트를 뛴다. 개가 토끼를 잡으려면 몇 번 뛰고 몇 피트를 뛰어야 할까?

이 교재들은 극히 실용적일 뿐만 아니라 수학의 발전에도 중요한 영향을 끼쳤는데 그 이유는 이러한 교재들이 이탈리아 상인 계급에게 수적인 능력을 주입한 것이다. 더 나아가 이 교재들 중의 일부는 이 중간 계급에게 교과과정의 기본으로 이슬람 대수를 가르쳐 주기도 하였다. 14세기와 15세기 동안 아바키스트들은 이슬람의 방법들을 여러 방면으로 확대시켰다. 특히 그들은 복잡한 대수 문제들을 다루는 새로운 방법을 발전시키고 대수 법칙을 이차 이상의 방정식 분야로 확대시킨 약자와 기호들을 소개하였다. 그러나 몇 가지 새로운 기술을 소개한 것보다 더 중요한 점은 실제적인 문제를 해결하는 데 대수가 어떻게 이용되는지를 가르치는 일을 일반화 시킨 것이다. 이러한 아바쿠스 교재를 공부하여 대수적인 능력이 증대된다는 점은 유럽의 학자들로 하여금 여러 고전적인 그리스 수학 교재들을 재발견함으로써 생겨나는 좀 더 이론적인 문제들의 해결에 이러한 기술을 적용하는 시도를 하도록 하였다. 대수와 그리스 기하학의 조합은 17세기의 새로운 해석적인 기술로 이끌었으며 이는 현대 수학의 기초가 되었다 [3].

4.2 아바쿠스 교재에서 나타난 대수적 기호와 기술

이슬람 대수는 수사학적이었다. 미지수를 나타내는 기호뿐만이 아니라 이러한 양들에 행해지는 연산의 기호도 없었다. 모든 것이 말로 적혀 있었다. 이러한 점은 초기의 아바키스트들의 저서와 피보나치의 이탈리아어로 쓰인 초기 저서에서도 마찬가지였다. 그러나 15세기 초 일부 아바키스트들이 미지수에 약자를 쓰기 시작하였다. 예를 들어 *cosa*(thing, 물건), *censo*(square, 제곱), *cubo*(cube, 세제곱), *radico*(root, 제곱근)라는 용어 대신 *c*, *ce*, *cu*, *R*를 사용하였다. 차수가 높아질 경우는 이들을 조합하였다. 그래서 ‘*ce di ce*’ 또는 ‘*ce ce*’는 ‘*censo di censo*’ 즉 네제곱(x^2x^2); ‘*ce cu*’ 또는 ‘*cu ce*’는 ‘*censo di cubo*’와 ‘*cubo di censo*’ 즉 오제곱(x^2x^3); ‘*cu cu*’는 ‘*cubo di cubo*’ 즉 육제곱(x^3x^3)을 나타내었다. 그러나 15세기 말 즈음에는 높은 차수를 표현하는 방법이 바뀌었는데 ‘*ce cu*’ 또는 ‘*censo di cubo*’는 육제곱($(x^3)^2$)을 나타내고 ‘*cu cu*’는 ‘*cubo di cubo*’는 구제곱($(x^3)^3$)을 나타내었다. 오제곱은 ‘*p.r.*’ 또는 ‘*primo relato*’로 칠제곱은 ‘*s.r.*’ 또는 ‘*secondo relato*’로 나타내었다 [3].

15세기 말 무렵 루카 파치올리(Luca Pacioli, 1445–1517)는 플러스(*più*)와 마이너스(*meno*)를 나타내는 기호로 \bar{p} 와 \bar{m} 를 소개하였다. (이런 특정한 약자는 문자가 생략되었음을 표시하기 위하여 글씨위에 바(bar)를 붙여주는 일반적인 사용법에서 유래된 것으로 여겨진다.) 다른 분야의 혁신과 마찬가지로 같은 이름에 같은 약자를 사용하는 것이 모든 저자들에게 커다란 움직임은 아니었다. 이 변화는 느리게 진행되었다. 새로운 기호들은 15, 16세기에 나타났으며 현대적인 대수 기호는 17세기 중반까지도 충분히 형성되지 못했다 [3].

주어진 기호가 충분하지는 못했지만 이탈리아의 아바키스트들은 그들의 이슬람 선배들

과 같이 대수적인 표현의 연산을 다루는 일에 능하였다. 예를 들어 파올로 게라르디(Paolo Gerardi)는 1328년에 그의 저서 'Libro di ragioni' 에서 분수 $\frac{100}{x}$ 와 $\frac{100}{x+5}$ 를 더하는 법칙을 보여주었다 [3].

“100을 쓰고 반대편에 1 cosa[x]를 써라. 그리고 밑줄에는 100을 쓰고 반대편에 1 cosa[x]와 5를 써라. 서로 엇갈리게 곱하라. 즉 1 cosa의 100배는 100 cose이다. 또한 1 cosa와 5의 100배는 100 cose와 500이다. 이제 이들을 더하면 200 cose와 500이다. 그리고 1 cosa와 5의 1 cosa배를 하면 1 censo[x²]와 5 cose가 된다. 이제 200 cose와 500을 1 censo와 5 cose로 나누어라. [$\frac{200x+500}{x^2+5x}$]”

이를 그림으로 표현해 보면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 100 \quad \quad 1 \text{ cosa} \\ \quad \quad \quad \times \\ 100 \quad \quad 1 \text{ cosa } \text{ piu } 5 \end{array}$$

즉 우리가 $\frac{100}{x} + \frac{100}{x+5} = \frac{100x + 100(x+5)}{x(x+5)}$ 와 같이 계산하는 것을 말로 설명한 것이다.

비슷한 방법으로 사인(부호)의 법칙을 말로 설명하였는데 다음은 14세기 후반 작자 미상의 저서에서 나온 것이다 [3]. :

‘음수의 음수배는 양수이다. 이것을 증명하고 싶다면 다음과 같이 하여라: 3과 $\frac{3}{4}$ 을 자신과 곱한다는 것은 4배기 $\frac{1}{4}$ 를 자신과 곱하는 것과 같다. 3과 $\frac{3}{4}$ 에 3과 $\frac{3}{4}$ 을 곱하면 14와 $\frac{1}{16}$ 이다. 4배기 $\frac{1}{4}$ 에 4배기 $\frac{1}{4}$ 을 곱하면 ..., 4와 4를 곱하면 16이고 4와 $-\frac{1}{4}$ 을 양쪽에서 서로 곱하면 각각 -1씩 -2가 되어 이를 16에서 2를 빼주면 14가 된다. 남은 것은 $-\frac{1}{4}$ 와 $-\frac{1}{4}$ 의 곱인데 이것이 바로 $\frac{1}{16}$ 이 된다.’

이 내용을 보면 우리가 오늘날 증명하는 방법과는 많이 다르지만 실제의 예를 보여주는 것으로 설명하였다.

일반적으로 아바쿠스 교재(abacus manuscript)에는 단항식들의 곱하기와 나누기가 쓰여진 목록을 포함하고 있었는데 여기에는 위에서 보여준 것과 같은 미지수의 멱에 대한 약자들을 사용하였다 [3].

4.3 아바키스트

그들의 삶이 자세히 알려진 몇 안 되는 아바키스트들 중의 한 명인 안토니오 드 마징기(Antonio de' Mazzinghi, 1353-1383)는 플로렌스의 성 트리니타 수도원에 있었던 Bottega d'abbaco에서 가르쳤다. 그의 대수 문제는 몇몇의 15세기 교재에 남아있다. 안토니오는 복잡한 문제를 해결하는 기발한 대수적 기술을 만들어내는 재주가 있었다. 특히 그는 이러한 문제에서 서로 다른 두 미지수를 나타내는 다른 두 문자를 사용하였다. 예를 들어 다음을 살펴보자:

‘두 수를 곱하면 8이 되고 두수의 제곱을 합하면 27이 되는 두 수를 찾아라.’

안토니오는 첫 번째 수를 ‘un cosa meno la radice d’alchuna quantità’($x - \sqrt{y}$)라 하고 두 번째 수를 ‘una cosa più la radice d’alchuna quantità’($x + \sqrt{y}$)라 가정하고 해를 구하였다. 여기에서 두 단어 ‘cosa’와 ‘quantità’를 오늘날 우리가 $x - \sqrt{y}$ 와 $x + \sqrt{y}$ 에서 x 와 y 를 사용하는 것과 같이 사용하였다 [3].

이탈리아 아바키스트들의 중요한 혁신중의 하나는 이슬람의 3차 방정식의 풀이 방법을 고차방정식으로 확대시킨 것이다. 일반적으로 아바키스트들은 일차와 3차 방정식의 알파즈라미의 6가지 유형을 알려주고 어떻게 이들의 해를 구할 수 있는지 보여줌으로써 대수를 다루기 시작한다. 그러나 피사의 다르디(Maestro Dardi)는 1344년에 지은 저서에서 이것을 4차 방정식까지 더하여 198가지까지 확대시켰다. 다르디가 새로이 해를 구한 각 경우에서 수치적인 보기와 특정 형태의 방정식의 풀이 과정을 보여주는 하였지만 대부분의 방정식은 표준형의 방정식의 해를 이용하여 해를 구할 수 있다. 예를 들어 그는 방정식 $ax^4 = bx^3 + cx^2$ 은 $\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} + \frac{b}{2a}}$ 라는 해를 갖는다고 하였는데 이는 실제로는 표준형의 방정식 $ax^2 = bx + c$ 의 해와 같다. (여기에서 0은 절대 해로 간주되지 않는다.) 마찬가지로 방정식 $n = ax^3 + \sqrt{bx^3}$ 은 x^3 에 대하여 $\sqrt{x^3}$ 에 대한 이차방정식으로 보고 해를 구할 수 있다 [3].

이 이차방정식들보다 더 흥미로운 예가 있는데 기약 삼차방정식이다. 다르디의 삼차방정식은 $x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000$ 이었다. 우리에게 알려진 그의 해법은 ‘1200을 60으로 나누고 (20을 얻는다), 이를 세제곱하고 (8000을 얻는다), 4000을 더한 후 (12,000을 얻는다), 이의 세제곱근을 구한 후, 마지막으로 1200을 60으로 나눈 몫을 빼라’고 하였다. [3] 다르디의 답은 $x = \sqrt[3]{12000} - 20$ 이다. 실제로 이 답을 주어진 방정식에 대입해 보면 방정식이 성립된다. 즉 맞는 답인 것이다. 그러나 오늘날 우리의 방식으로 표현하면 삼차방정식 $x^3 + bx^2 + cx = d$ 의 해가 $\sqrt[3]{\left(\frac{c}{d}\right)^3 + d - \frac{c}{b}}$ 이라는 것이다.

우리가 알고 있는 삼차방정식의 해를 생각해 보면 틀린 것이라는 것을 쉽게 알 수 있다.

그렇다면 다르디는 이렇게 특별한 경우에만 해당되는 맞는 답을 구하는 방법을 어떻게 만들었을까? 이 질문에 대한 답은 다음의 복리 이자 문제를 생각해 보면 된다 [3].

‘어떤 사람이 100 리라를 빌려주고 3년 후에 원금과 이자를 합하여 150 리라를 받기로 하였다. 이 때 이자는 연단위로 복리로 계산하기로 하였다. 이율은 얼마인가?’

다르디는 1 리라에 대한 한 달 이자를 x 디나리로 정하였다. 그러면 1 리라에 대한 연간 이자는 $12x$ 디나리 또는 $(1/20)x$ 리라이다.¹¹⁾ 그러므로 일 년 후에 값은 총 액수는 $100(1 + x/20)$ 이고 3년 후에는 $100(1 + x/20)^3$ 이다. 그러므로 다르디의 방정식은 $100(1 + \frac{x}{20})^3 = 150$

11) 앞에서 보여준 당시 이탈리아 화폐의 단위를 참고하면 알 수 있다.

또는 $100 + 15x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{80}x^3 = 150$ 또는 $x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000$ 이 된다.

이 방정식의 좌변은 세계곱식에서 나온 것이므로 적당한 상수를 더하여 줌으로써 다시 세계곱식으로 만들 수 있다. 일반적으로 $(x+r)^3 = x^3 + 3rx^2 + 3r^2x + r^3$ 이므로 $x^3 + bx^2 + cx$ 을 세계곱식으로 만들려고 한다면 다음의 두 조건 $3r = b$ 와 $3r^2 = c$ 를 만족하는 r 을 찾아야 하는데 이를 만족하려면 $b^2 = 3c$ 가 되어야 한다. 실제로 다르디의 예에서는 $b = 60$ 이고 $c = 1200$ 이 되어 조건을 만족하고 $r = c/b = 20$ 이 된다.

다르디가 특별한 삼차방정식을 해결하는 위와 비슷한 규칙을 발표하였는데 아바키스트로보다는 화가로 더 알려진 피에로 델라 프란체스카(Piero della Francesca, 1420-1492)는 그의 저서 *Trattato d'abaco*에서 이 규칙을 5차와 6차 방정식으로 확대하였다. 두 아바키스트는 모두 $n = 4, 5, 6$ 인 경우의 $h(1+x)^n = k$ 형태의 방정식의 해를 구할 때 적용할 수 있는 법칙을 정확히 알려주지는 않았다. 같은 시기에 다른 문헌에서는 방정식 $x^3 + px^2 = q$ 는 y 가 방정식 $y^3 = 3\left(\frac{p}{3}\right)^2 y + \left\{q - 2\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}$ 의 해일 때, $x = y - \frac{p}{3}$ 이라고 놓으면 해를 구할 수 있다고 하였다. 이 방법이 맞기는 하지만 실제로는 하나의 삼차방정식을 다른 삼차방정식으로 바꾼 것뿐이다. 이 실제적인 예에서 보여주듯이 그는 새로운 방정식의 해를 구하는 시도를 하였으나 실제로는 원래의 문제를 이용한 것이다. 아바키스트들은 삼차방정식의 완벽한 일반해를 제시하지는 못하였지만 그들의 이슬람 선배들과 같이 그 문제들을 해결하려고 고군분투하여 부분적으로나마 결과를 얻어 내었는데 이는 루카 파치올리(Luca Pacioli, 1445-1517)의 저서에 인용되어 널리 알려졌다 [3].

마지막 아바키스트 중의 한명인 파치올리는 1470년대 프란치스코회 성직자로 서품을 받았고 성직자로의 임무 외에 이탈리아의 여러 곳에서 수학을 가르쳤다. 그는 교사로서 유명하였는데 현재 나폴리 박물관에는 자코포 바르바리가 그린 파치올리의 초상화가 남아있다. 이 초상화는 파치올리의 후원자인 우르비노 공작의 아들 구이도발도로 알려진 젊은이에게 기하를 가르치고 있는 모습을 그린 것이다 [3]. 학생들을 가르치며 파치올리는 학생들을 위하여 세권의 서로 다른 교재를 집필하였다. 그는 약 20년간 수학에 관련된 문제들을 모아서 1494년에 그 시대 거의 완벽하게 수학을 집대성한 교재를 출판하였다. 이는 인쇄되어진 최초의 수학책 중의 하나이다. 이 책들은 산술집성, 기하, 신성비례의 세 권이었다. 이들 중 산술집성은 600여 쪽의 책으로 라틴어가 아닌 토스카나 방언으로 쓰여졌다. 이 책에는 실질적인 계산법 뿐만 아니라 앞에서 언급된 대수문제와 복식부기에 대한 내용도 포함되어 있다. 복식부기에 대한 내용은 처음으로 출판된 것으로 파치올리는 수학자임에도 불구하고 '회계학의 아버지'로 여겨지고 있다 [4].

5 결론

아바쿠스 학교는 르네상스 시대 수학 교육의 한 형태로서 수학의 발전에 큰 역할을 한 것으로 보인다. 그러나 우리에게는 많이 알려져 있지 않아서 아바쿠스 학교에만 초점을 맞추어 알아보았다. 앞으로 이 아바쿠스 학교에 대한 연구가 수학에 끼친 영향을 더 심도있게 알아볼 필요가 있을 것이다.

항해술의 발달로 상업이 번창하고 이로 인하여 부를 쌓은 상인들에 의하여 주도된 아바쿠스 학교는 학교로서의 역할도 중요했지만 아바키스트들에 의하여 이루어진 수학의 발달과 대중화도 우리가 중요하게 보아야 할 부분이다.

또한 수학의 연구가 무엇보다도 중요하지만 이 내용을 누구에게나 교육할 수 있는 환경도 필요한 것으로 보인다.

현재 우리나라의 중, 고교 수학 교과과정을 볼 때 이렇게 교육의 현장이 수학의 발전에 큰 역할을 할 수 있음을 감안하여 먼 미래를 내다 볼 수 있는 혜안이 있어야 할 것으로 보인다.

References

1. Carl B. BOYER, Uta C. MERZBACH, *A History of Mathematics*, 양영오, 조윤동 옮김, 수학의 역사, 경문사, 2000.
2. Paul F. GRENDLER, *Schooling in Renaissance Italy*, The Johns Hopkins University Press, 1989.
3. Victor J. KATZ, *A history of mathematics*, HarperCollins College Publishers, 1993.
4. KIM Sung Sook, KHANG Mee Kyung, Luca Pacioli, *Journal for History of Mathematics* 29(3) (2016), 172–190.
5. Karl MENNINGER, *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl*, 김량국 옮김, 수의 문화사, 열린 책들, 2005.
6. Alan SANGSTER, Giovanna Scataglinibelghitar, Luca Pacioli: The Father of Accounting Education, *Accounting Education: an international journal* 19(4) (2010), 423–438.