韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2018.57.3.289
2018. 08. 제 57권, 제 3호, 289-309.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2018, Vol. 57, No. 3, 289-309.

수학적 모델링 과정을 반영한 교과서 문제 재구성 예시 및 적용

박선영(성균관대학교 대학원)
한선영(성균관대학교)[†]

Ⅰ. 서론

수학적 문제해결력을 향상시키는 학교 교육 과정 및 수업을 위한 구체적인 방안으로서 수학적 모델링에 대한 관심이 지속적으로 증가하고 있다. 우리나라 2015 개정 수학 교육과정에는 문제해결 역량의 하위 요소로 수학적 모델링이 도입되었고(교육부, 2015), 전미수학교사협의회(NCTM: National Council of Teachers of Mathematics)에서 발간하는 저널 『Mathematics Teaching in the Middle School』에서는 수학적 모델링을 2015년의 주제로 선정하여 교사 및 연구자의 다양한 모델링 수업 사례를 다루기도 하였다. 이와 같이 수학적 모델링을 문제해결의 한 방안으로서 교육과정에 반영하려는 노력은 수학 교육의 궁극적인 목표와 관련이 있다. 모든 학생들은 미래의 세계 시민으로서 각자의 일상생활이나 직업 상황에서 부딪히게 되는 다양한 수학적 문제 상황에 대비해야 하며(NCTM, 2000), 그 상황이 수학적 지식을 활용하여 해결할 수 있는 문제임을 스스로 인식하고, 여러 가지 해결 전략 중에서 가장 효과적인 전략을 선택하여 적용할 수 있는 능력을 갖추어야 한다(Sutherland, 2006). 수학적 모델링은 학생들이 실세계 상황에서 문제를 발견하고 수학적으로 탐구하는 경험을 제공함으로써 학생들이 수학의 유용성과 가치를 자연스럽게 인식하도록 도울 수 있다.

삶과 수학을 통합적으로 연결할 수 있는 모델링 문제해결 능력은 교육과정에 다양하게 도입되어야 하며(Niss, Blum, & Galbraith, 2007; Pollak, 2007), 적절한 실세계 문제 제시 및 학습 환경 조성을 통해 학교 교육과정에서 실현 가능하다(신현성, 이명화, 2011). 수학적 모델링이 수학 학습에 효과적임을 밝히는 국내외 연구가 많이 나와 있지만(김민경, 홍지연, 김은경, 2009; Doerr & English, 2003; English & Watters, 2004; Zbiek & Conner, 2006), 수학적 모델링 문제 개발에 관한 국내 연구는 부족한 실정이다. 황혜정(2007)은 수학적 모델링 문제의 특징을 선행지식을 기반으로 보다 고차원적인 인지 활동을 요구하는 문제, 실세계 현상에서 출발하고 종착하는 문제, 수학적 모델 형성에 기초하여 모델링 과정이 전개되며 문제가 해결되는 문제라고 정의하면서, 국내의 수학적 모델링 관련 연구에서 개발된 문제들은 이러한 특징을 잘 반영하고 있지 못함을 지적한 바 있다. 그 이후의 수학적 모델링 관련 연구에서 제시하는 문제들 역시 실생활 소재를 도입하여 활용 문제를 풀이하는 정도에 그치고 있어 수학적 모델링 과정을 경험하는 데에는 한계가 있다. 또한 이러한 연구들은 수학적 모델링이 학생들의 사고력 향상에 도움이 된다는 것을 밝히고 있지만, 제시되는 문제의 특성에 따라 그 영향이 달라질 수 있다는 것을 제한점으로 언급하고 있다(서지희, 윤종국, 이광호, 2013). 김해윤, 강옥기(2015)는 학생들의 수학 학습에 대한 만족도 및 수학적 문제해결력을 향상시키기 위해서는 수학적 모델링 문제를 신중하게 결정하는 것이 중요함을 제언하였고, 교사가 모델링 과정이 학생들의 수학적 사고에 도움이 된다는 것을 알고 있더라도,

---

* 접수일(2018년 7월 30일), 수정일(2018년 8월 24일), 게재확정일(2018년 8월 29일)
* ZDM분류 : D3
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 수학문제해결, 문제해결역량, 수학적 모델링, 교과서 문항
† 교신저자
* 이 논문은 박선영(2017)의 석사논문을 재구성한 것임
* 이 논문은 2017년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2017R1E1A1A03070637)

모델링 문제를 교과서와 별개로 개발해야 한다는 교사의 부담감으로 인해 학교 교실 수업에서 실현하는 데에 한계가 있음을 지적하였다. 이러한 어려움을 보완하기 위하여 Kang & Noh(2012)는 교과서에 수록되어 있는 실생활 문제를 수학적 모델링 수업에 적합한 문제로 변형시키는 사례를 소개하며, 교과서 문제 재구성의 가능성을 언급한 바 있다.

본 연구는 학생들이 수학의 유용성을 인식하고 실생활에서 수학을 활용하는 능력을 향상시킬 수 있도록 돕는 수학적 모델링 과정을 반영하여 교과서 문제를 재구성하고 적용하는 데 그 목적이 있다. 특히, 수학적 모델링 과정의 출발점이자 핵심 활동에 해당하는 변수 찾기, 모델 만들기 단계의 활동을 다룰 수 있는 문제로 재구성하는 방안을 마련하고자 한다. 따라서 본 연구의 연구문제를 다음과 같이 설정하였다.

1) 2009 개정 교육과정 수학 교과서의 실생활 문제는 수학적 모델링 과정의 단계를 어느 정도로 다루고 있는가?

2) 학교 수학 교과서의 문제를 수학적 모델링 과정을 반영한 문제로 재구성하는 방안은 무엇인가?

2-1) 학교 수학 교과서의 문제를 수학적 모델링 문제로 재구성하는 근거 및 예시는 무엇인가?

2-2) 학교 수학 교과서의 문제를 수학적 모델링 문제로 재구성한 예시를 적용한 수업에서 학생들의 문제 해결 과정 및 태도는 어떠한 특징을 보이는가?

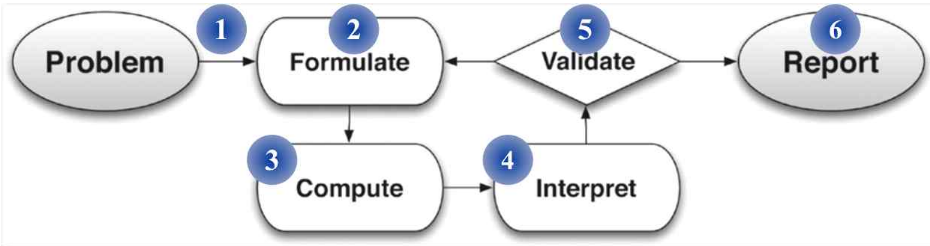
Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 모델링 및 수학적 모델링 과정

Pollak(2007)은 세상을 수학과 그 나머지(the rest of the world)로 구분하여 수학 이외의 나머지 부분을 실세계(real-world)라 칭하였으며, 실세계의 복잡한 상황을 이해하고 예측하는 데 수학을 활용할 수 있으므로 수학과 실세계는 분리되어 독립적으로 존재하는 것이 아니라 서로 밀접하게 관련되어 있다고 보았다. 수학적으로 이해하고자 하는 실제 상황에서부터 시작하여, 상황을 묘사하고, 문제를 형성하여 결론에 이르기까지의 전 과정을 수학적 모델링이라고 부른다(Pollak, 2007). Cirillo, Pelesko, Felton-Koestler, & Rubel(2016)은 수학적 모델링(mathematical modeling)을 수학을 모델링하기(modeling mathematics)와 비교하여 그 의미를 설명하였다. 수학을 모델링하는 것(modeling mathematics)은 수학적 개념이나 아이디어를 표현하기 위하여 수학적 표상을 이용하는 것으로서 구체적인 물건, 조작물, 사진, 그림 등을 활용할 수 있다. 반면, 수학적 모델링(mathematical modeling)은 실생활 상황을 묘사하고, 상황에 관련된 정보를 추론하는 데 수학을 사용하는 것으로서, 실세계의 실제 문제와 수학을 연결하는 것에 초점을 두는 활동이다. 또한, Cirillo et al.(2016)은 학자에 따라 서로 다른 방식으로 수학적 모델링을 정의하고 그 과정을 설명하였더라도, 그들 사이에는 다음과 같은 공통점이 존재함을 밝혔다. 첫째, 수학적 모델링은 복잡한 현실 세계의 비구조화된 상황에서 출발한다. 둘째, 수학적 모델링은 현실 세계의 현상을 설명하고, 향후 상태를 예측하기 위해 사용된다. 셋째, 수학적 모델링은 창의력을 요구하며, 모델링 과정에서 선택하기, 가정하기, 결정하기를 요구한다. 넷째, 수학적 모델링은 순환적 과정으로서 실세계에서 시작하고 실세계에서 끝난다. 다섯째, 수학적 모델을 구성하는 여러 가지 방법이 존재하며, 유일하고 명확한 하나의 방법만 존재하는 것이 아니다. 즉, 수학적 모델을 만드는 것은 유일한 방법(the solution)을 찾는 것이 아니라, 여러 가지 방법 중에서 가능한 하나의 방법(a solution)을 찾는 것이다.

수학적 모델링 과정을 설명하는 도식 및 단계의 구분은 학자에 따라 다소간의 차이가 있으나, 과정의 근본적인 의미는 동일하다고 볼 수 있다(Blum et al., 2007; CCSSM, 2010; NCTM, 2000; Pollak, 2003). 본 연구에서는 수학적 모델링을 교육과정에 반영하여 그 중요성을 강조하고 있는 CCSSM(Common Core State Standards for Mathematics, 2010)의 모델링 과정을 따르기로 하며, 그 도식은 [그림 1]과 같다.

CCSSM(2010)에서는 수학적 모델링 과정을 총 6단계로 구분하였다. 1단계는 실세계의 문제(Problem)에서부터 수학적 모델을 만드는(Formulate) 작은 화살표 위에 존재하며(그림 1 ①), 실세계의 문제에서 수학적 모델을 만들기 위하여 문제 상황에서 필수적인 변수가 무엇인지 찾는 단계이다. 2단계에서는 변수들과 그들 사이의 관계로부터 수학적 모델을 형성한다(그림 1 ②). 3단계에서는



[그림 1] CCSSM(2010)의 수학적 모델링 과정(p.72)
[Fig. 1] The mathematical modeling process of CCSSM

모델을 사용하여 수학적 연산을 수행한다(그림 1 ③). 4단계는 연산의 결과를 원래의 문제 상황인 실세계에서 해석하는 단계이며(그림 1 ④), 5단계는 그 해석을 바탕으로 결론이 유효한지 검증하는 단계이다(그림 1 ⑤). 5단계에서 결론이 유효하지 않으면 다시 2단계로 돌아가 모델을 수정하고, 결론이 유효하면 결론을 보고하여 공유하는 6단계로 나아간다(그림 1 ⑥).

Blum(2015)은 수학적 모델링의 과정 중에서도 1단계—변수 찾기, 2단계—모델 만들기 단계까지가 엄밀한 의미의 수학적 모델링 과정이라고 하였으며, 이는 일반적인 수학적 문제 해결 과정과 구분되는 특징이라고 할 수 있다.

2. 수학적 모델링 문제의 특징

수학적 모델링 문제는 학생들에게 수학과 상황이 어떻게 연결되는지 파악하기 위해 고민할 수 있는 기회를 줄 수 있어야 한다(Cavey & Champion, 2016; Tran & Dougherty, 2014). 그러나 실제 학교 수업에서 다루는 문장제는 대부분 너무 쉽게 해결되거나, 상황의 실제성(authenticity)이 부족한 경향이 있다(Usiskin, 2015). 또한, 현실의 실제성을 반영한 문제에 관한 실질적 연구가 활발하게 이루어지지 않는 것은 '현실적(realistic)', '실제적(authentic)'이라는 용어의 의미를 학자마다 조금씩 다르게 해석하거나 명확하게 정의하지 않으며, 관련 연구를 안내하고 그 결과를 설명할 수 있는 기준이 부족한 것이 하나의 원인이라고 할 수 있다(Palm, 2009). 그에 따라 Palm(2009)은 실제성을 지닌 문제의 특성을 구체화하여 제시하였는데, 실제성을 반영한 사건, 질문, 정보 및 데이터 등이 있다. 실제성을 반영한 사건은 실제로 일어난 사건이나 실제로 일어날 가능성이 있는 사건을 의미한다. 예를 들어, 주머니에서 돌을 끄집어내어 그 색깔을 기록하는 것은 확률 단원의 문장제에서 자주 다루는 사건이지만, 학교 밖 실제 삶에서는 일어날 가능성이 낮은 사건이므로 실세계와 일치하지 않는다. 실제성을 반영한 질문이란, 학교 밖 삶에서도 궁금증이 생길 가능성이 있는 질문을 의미한다. 예를 들어, 원기둥 모양의 롤케익을 판매하는 빵집 주인은 '롤케익의 부피는 얼마인가?'라는 질문보다, '영업을 종료하기 전에 롤케익을 모두 판매할 확률은 얼마인가?'와 같은 질문을 생각할 가능성이 높다고 할 수 있다. 실제성을 반영한 정보 및 데이터는 문제에서 제시하는 값, 조건, 정보 등은 학교 밖 삶에서도 실제로 존재하여 사용할 수 있는 것을 의미한다.

또한, 수학적 모델링 문제의 답은 한 개로 한정되지 않고 여러 가지 경우가 존재할 수 있다(Blum & Ferri, 2016; Maaß, 2010). 실세계의 문제 상황을 단순하게 다듬지 않고, 있는 그대로 제시하여 상황의 실제성을 높이는 수학적 모델링 문제는 학생들이 상황을 해석하고 수학적 모델로 표현하는 과정에서 여러 가지 가정하기, 선택하기, 결정하기를 요구한다. 이러한 가정, 선택, 결정에 따라 수학적 모델이 다르게 만들어질 수 있으며, 모델을 적용한 결과도 다르게 나타날 수 있다. 따라서 수학적 모델링 문제는 해결 과정과 결과가 다양하게 나올 수 있도록 제시되어야 한다.

한편, 현실 상황의 실제성을 반영하고, 여러 가지 해결 방법과 답이 존재하는 열린 문제를 통해 학생들의 문제해결력을 향상시키려면, 문제에서 데이터를 제시하는 방식에 변화가 필요하다(Maaß, 2010; Puchalska &

Semadeni, 1987). 수학적 모델링 문제에서 데이터를 제시하는 방식은 전통적인 교과서 문장제와 다소 차이가 있다. 전통적인 교과서의 문장제에서는 문제를 해결하기 위해서 알아야 하는 값 또는 조건만 제시하며, 문제 해결에 관련이 없는 값이나 조건은 함께 제시되지 않는다. 그러나 실세계 상황에서 일어나는 문제를 수학적으로 해결하고자 할 때에는 어떤 값과 조건이 필요한지 학생들이 스스로 찾고 결정해야 한다. 이러한 실세계 상황에서의 문제해결력을 기르고 수학과의 연결성을 이해할 수 있도록 하려면, 교실의 수학 수업에서 다루는 문제도 어떤 값과 조건이 필요한지 스스로 찾고 결정할 수 있도록 제시되어야 한다.

3. 수학적 모델링 학습의 이점

미국의 CCSSM(2010)과 우리나라 2015 개정 교육과정에서는 학생들이 수학적 문제해결력 및 의사소통 능력을 향상시키고 수학의 유용성을 인식할 수 있도록 수학적 모델링을 학교 수업에 반영하기를 권고한다. Asempapa(2015)는 수학적 모델링 학습의 이점을 네 영역—관련성(relevance), 과제의 인지적 요구 수준(cognitive demand of task), 비판적 사고력(critical thinking skills), 교실 담화(classroom discourse)—으로 구분하여 제시하였다. 네 영역에 따라 수학적 모델링 학습의 이점을 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 수학적 모델링은 실세계의 문제 상황에서부터 출발하므로 수학적 모델링을 경험한 학생들은 자신의 실세계 삶에서 문제를 발견하고, 그것이 수학적으로 해결할 수 있는 문제인지 판단하는 수학적 안목을 기를 수 있다. 수학 교육의 목표는 모든 학생들을 전문적인 수학자로 길러내는 것이 아니라, 개개인의 학생들이 자신의 삶—일상생활 및 직업 상황—에서 수학을 활용하도록 돕는 데 있으므로, 수학을 여러 상황에서 어떻게 이용할 수 있는지를 배우는 것이 수학 교육의 중요한 한 부분이라고 할 수 있다(Blum & Ferri, 2009; Pollak, 2007). 여러 가지 수학적 내용 목표 및 과정 목표를 함께 다루는 수학적 모델링 활동은 문제 해결을 위해 다양한 방식으로 접근할 자유를 갖게 하고, 수학의 가치를 이해하고 즐거움과 만족감을 느끼게 한다는 점에서 수학 학습에 동기를 부여할 수 있다(Blum & Ferri, 2009; Gann, Avineri, Graves, Hernandez, & Teague, 2016).

둘째, 전통적 문장제와 달리 수학적 모델링 과제는 학생들이 높은 인지적 요구 수준을 유지하도록 한다. 인지적 요구 수준이 높은 과제를 통해 학생들은 수학적 개념들 사이의 관계를 스스로 이해할 수 있으며, 자신의 사고 과정을 점검할 수 있다(Stein & Smith, 1998). 수학적 모델링은 실세계의 문제를 해결하기 위하여 상황을 파악하고, 적용 가능한 수학적 개념을 찾아 스스로 수학적 모델을 구성해야 하므로 높은 수준의 수학하기(doing mathematics) 활동에 해당한다. 따라서 수학적 모델링 문제를 통해 학생들은 높은 인지 요구 수준을 유지할 수 있다.

셋째, 수학적 모델링 과제는 그 해결 방법이 구체적으로 정해져 있지 않으므로 학생들이 스스로 자신의 문제 해결 과정을 점검하는 과정에서 비판적 사고력을 신장시킬 수 있다. 수학적 모델링은 정답이 유일하지 않은 복잡한 현실 세계의 문제 상황에 대하여 해결 가능한 하나의 방법을 찾아가는 과정에서 학생들이 필요한 가정을 설정하거나, 변수를 선택하는 등의 여러 가지 판단하기, 결정하기 활동을 요구한다. 그 과정에서 학생들은 자신의 사고 과정을 점검하고, 다른 학생들과의 논리적인 토론 및 합의를 통해 문제를 해결하게 된다. 따라서 수학적 모델링은 학생들이 스스로 필요한 정보를 찾고, 가장 적절한 모델을 구성하는 과정에서 비판적 사고력을 기를 수 있도록 돕는다(신은주, 권오남, 2001).

넷째, 수학적 모델링은 학생들의 의사소통 능력을 향상시키고, 협력적 문제 해결력을 향상시키는 데 도움이 된다. 수학적 모델링 과제는 학생들이 서로 대화, 토론을 통해 능동적으로 학습을 구성해 나가는 수업 방식을 장려하기 때문에(Asempapa, 2015; Pollak, 2007), 협력하고 의사소통하는 능력을 향상시키는 데 도움이 된다. 수학적 모델링 수업에서는 수학적 개념을 교사가 직접 설명하는 대신 학생들이 스스로 개념을 이해하고 찾아가도록 하며, 학급 전체 토론을 통해 학생들이 스스로 개발한 모델을 서로 공유하고, 평가하도록 하는 과정에서 수학적 개념을 더욱 명확하게 이해할 수 있다(Doerr, 2016).

4. 학교 수학과 수학적 모델링

수학적 문제해결력을 강조하는 NCTM의 ‘학교수학의

원리와 규준'에서는 복잡한 현상을 이루고 있는 요소들과 그 사이의 관계를 수학적 모델을 활용하여 분명하게 해석하고 문제를 해결하는 유의미한 수학적 활동을 경험할 수 있도록 전 학년의 내용에 걸쳐 수학적 모델링을 다루도록 권고하고 있다(NCTM, 2000). 우리나라에서도 제7차 교육과정에서부터 학생들이 길러야 할 수학적 역량 중에서 수학적 문제해결력을 가장 강조하고 있다. 최근 2015 개정 교육과정에도 수학과 핵심 역량으로 수학적 문제 해결력이 포함되었으며, 그 하위 요소로서 수학적 모델링을 제시하고 있다. 수학적 모델링을 통해 수학적 문제해결력을 향상시킬 수 있다는 여러 연구 결과를 바탕으로(이대현, 서관석, 2004; 황혜정, 2007; Asempapa, 2015; Blum & Ferri, 2009), 문제해결력을 기르기 위한 한 방법으로서 수학적 모델링을 학교 수업에 도입해야 하는 필요성과 중요성이 강조되고 있다(신은주, 권오남, 2001; 이대현, 서관석, 2004).

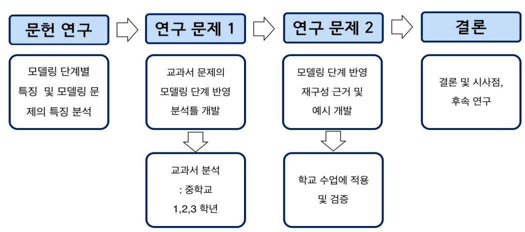
수학과 실세계 사이의 관계에 대한 지속적인 관심과 연구를 바탕으로 학교 수학에서 수학적 모델링과 그 적용이 강조되고 있지만, 그 중요성에 비하여 실제로 일상 수업에서 수학적 모델링을 다루는 사례는 많지 않다(Usiskin, 2015). 성공적인 수학적 모델링 수업을 위해서는 적절한 수학적 모델링 과제와 교사의 능력이 필수적으로 요구되지만(Blum, 2015; Blum & Ferri, 2016), 학교 수업에서 다루는 문장제는 미리 상황을 잘 다듬어서 구조가 잘 드러나는 형태로 제시되는 경우가 대부분이라서 학생들이 수학적 모델링을 경험하기는 어렵다(Blum, 2002; Blum & Ferri, 2009). 순수 수학 문제, 또는 응용 수학 문제를 다루는 수학적 과제(mathematical task)나 답을 찾는데 필요한 모든 정보를 문제에서 제공하는 맥락화된 문제(contextualized problems)와 달리, 수학적 모델링 문제는 상황의 복잡한 현실성을 그대로 반영하여 관련된 변수나 적용 가능한 수학적 방법에 대한 정보를 모두 알려주지 않는다는 차이점이 있다(Groshong, 2016).

따라서 학교 수업에서 수학적 모델링을 다루기 위해서는 기존의 교과서 문장제를 그대로 제시하는 것이 아니라, 문제 해결에 필요한 조건 및 수학적 방법을 모두 알려주지 않으면서 현실성이 풍부한 상황과 함께 문제를 제시해야 한다. 즉, 문제에 주어진 모든 정보를 단순히 종합하는 것만으로 해결되지 않는 형태로 제시되어야 하며 (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000), 주어진 문제 상황에서 무슨 일이 일어나고 있는지 생각해보도록 질문하여 상황을 충분히 이해할 수 있는 기회를 주어야 한다 (Pollak, 2007).

그러나 이러한 수업을 위해서는 교사가 수학적 모델링에 대한 내용적 지식을 갖추고 적절한 수학적 모델링 문제를 선택하거나 개발해야 하며, 문제와 관련된 현실 상황에 대해서도 잘 이해하고 있어야 한다는 점에서 심리적 부담감을 갖게 된다. 실제로 수학 바깥의 현상을 모델링할 때 가장 어려운 점은 그 현상 자체에 대해 깊이 이해해야 하는 것인데, 교사들은 그러한 실세계 지식을 잘 이해하고 있어야 한다는 점과 열린 질문에 대한 학생들의 다양한 반응을 미리 예측할 수 없다는 점에 대해서 부담감을 느낀다(Asempapa, 2015; Maaß, 2010). 그로 인해 수학 교사들은 수학적 모델링을 수업에서 다루지 않고 순수 수학만 가르치게 되는 경향이 있다(Pollak, 2007).

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 학교 교과서의 실생활 관련 문제가 수학적 모델링 과정의 어느 단계를 다루고 있는지 분석한 뒤, 수학적 모델링 단계를 반영하는 문제로 재구성하는 방안 마련에 관한 연구이다. 먼저, 교과서 문제의 수학적 모델링 단계를 파악할 수 있는 문제분석틀을 개발하여 교과서 문제를 분석하였고, 수학적 모델링 단계를 반영하는 재구성 근거 및 예시를 개발하여 학교 수업에 적용한 뒤 관찰하는 질적 사례 연구 방법을 실시하였다. 연구 과정은 다음 [그림 2]과 같다.



[그림 2] 연구 수행 과정
[Fig. 2] Research process

1. 교과서 실생활 문제가 다루는 수학적 모델링 단계 분석

1) 연구 방법

본 연구에서 선택한 2009 개정 교육과정 수학 교과서 1종에 대한 예비 분석을 통해, 수학적 모델 및 모델링을 직접적으로 언급하는 문제가 포함되어 있지 않음을 알 수 있었다. 교과서의 실생활 문제를 수학적 모델링의 관점에서 분석하기 위해서는 각 문제의 발문이 수학적 모델링 과정의 어느 단계에 해당하는지 판단할 수 있는 기준이 제시되어야 한다. COMAP(Consortium for Mathematics and its Applications)에서 개발한 수학적 모델링 교재 <Mathematics: Modeling Our World> 및 국제 고등학생 수학적 모델링 대회 문제와 프로이덴탈 연구소에서 개발한 현실적 수학 교육 교재 <Mathematics in Context>의 발문 형태를 참고하여, CCSSM(2010)의 수학적 모델링 과정의 각 단계를 다루는 발문 형태를 구체화하였다. 이를 바탕으로 2009 개정 교과서의 실생활 문제가 다루고 있는 모델링 단계를 판단할 수 있는 문제분석틀을 추출하였고, 그에 따라 수학적 모델링 과정 각 단계에 해당하는 교과서 문제 수에 대한 빈도 분석을 수행하였다. 빈도 분석은 학년별, 영역별로 구분하여 실시하였다.

2) 연구 대상

본 연구에서는 2009 개정 수학 교과서 1종의 모든 문제 중에서 학생들이 일상생활에서 접할 수 있는 실생활 소재 및 상황을 포함하고 있는 문제를 추출하였고, 추출한 실생활 문제를 수학적 모델링 단계 분석 연구의 대상으로 정하였다. 본 연구에서 재구성 문제 예시를 적용할 학교를 포함하여 대중적으로 많이 사용되고 있는 동아(강) 2009 개정 중학교 수학 교과서를 선택하였고, 1,2,3학년 전 단원의 모든 예제, 유제, 소단원별 확인 문제(스스로 해결하기), 대단원별 확인문제(단원 마무리) 중에서 실생활 소재 및 상황을 포함하고 있는 실생활 문제를 대상으로 수학적 모델링 단계를 분석하였다.

2. 교과서의 실생활 문제에 수학적 모델링 단계를 반영한 재구성 사례 연구

2009 개정 수학 교과서의 실생활 문제의 수학적 모델링 단계 반영 정도를 분석한 결과를 바탕으로, 수학적 모델링 과정 중에서 상황에 영향을 주는 변수 찾기, 수학적 모델 만들기 단계를 다루는 문제로 재구성하고, 실제 수업에 적용하여 학생들의 문제 해결 과정을 관찰하였다.

1) 연구 방법

본 연구는 기존의 교과서 문제에 수학적 모델링 과정을 반영하는 방법을 모색하는데 그 목적이 있으므로, 문헌 분석을 바탕으로 문제 재구성의 근거를 마련한 뒤, 재구성 예시를 제시하였다.. 또한, 제시된 예시 문제를 적용한 수업에서 나타나는 학생의 사고 과정, 행동 및 태도 등을 파악하여 재구성 사례의 적절성을 확인하기 위해서 연구자의 교실 참여 관찰을 통한 질적 사례 연구 방법이 적절하다고 판단하였다. 결과보다 과정에 초점을 두는 질적 사례 연구 방법에 따라 학생들이 재구성된 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 행동 및 사고의 특징을 파악하고, 그 의미를 해석하여 재구성 문제의 적용 가능성에 유의미한 시사점을 도출하였다. 사례 연구는 프로그램, 사건, 사람, 과정 등과 같은 교육에서 제한된 특정 영역 내에서 맥락화된 현상을 탐구하는 질적 연구로서(Merriam, 1988), 연구자가 이해하고자 하는 사례 및 현상을 분석하여 시사점을 도출하는 데 적합한 연구 방법이다. 사례 연구로부터 얻은 결과는 일반화하기에 부적절하다고 알려져 있으나, Stake(1978)에 의하면 연구한 사례 연구에서 다루는 상황은 사례가 포함된 집단 전체로의 일반화가 아니라, 사례로 선택한 특정 상황에 대한 연구로부터 그와 비슷한 상황으로의 일반화가 할 수 있다. 따라서 수학적 모델링 과정의 변수 찾기, 모델 만들기 단계를 다루도록 재구성한 문제를 적용한 중학교 1학년의 일반 교실 수업을 한 사례로 선정하여 관찰한 뒤, 중학교의 일반 교실에서 일반 학생들을 대상으로 하는 수학 수업에 수학적 모델링 관점을 반영하는 방안에 대한 시사점을 제시하려는 본 연구의 취지에 사례 연구가 적합하다고 판단하였다.

2) 연구 대상

본 연구의 대상은 대구광역시 소재 한 공립 중학교의 수학 교사 및 교사의 담임 학급 학생 4명이다. 1학년은 25명 내외의 세 학급으로 구성되어 있고, 수학 학습 성

취 수준은 시 전체의 평균보다 높지 않은 학교이다. 본 연구는 영재 수업 또는 방과 후 수업 등의 특별 수업 사례가 아닌, 일반 학교의 일상 수업에 수학적 모델링 과정을 반영하는 데 그 목적이 있으므로 일반 공립 중학교 교실 수업을 선택하였다.

본 연구에서 적용한 재구성 교과서 문제 사례가 일반적인 수학적 모델링 문제는 아니지만 수학적 모델링 관점과 단계를 반영하고 있으므로, 수학적 모델링 문제를 접해 본 경험이 없는 교사의 경우 수업 진행에 어려움을 느낄 수 있다(Blum & Ferri, 2009). 학생들에게 수학적 모델링 경험을 제공하기 위해서는 교사가 먼저 수학적 모델링에 대해 인지해야 하고(Kaiser & Maaß, 2007), 학생들이 스스로 탐구할 수 있는 학습 분위기를 조성하여 교사의 개입 수준을 낮추는 것이 필요하므로(Blum & Ferri, 2009), 수학적 모델링을 적용한 수업에 대해 기본적인 지식이 있으며 실천 의지가 있는 윤 교사(가명)의 학교 및 수업을 연구 대상으로 선정하였다.

수업 관찰 예비 연구로서 연구자가 제시한 재구성 예시 문제를 윤 교사의 담임 학급 수학 수업에 적용하고, 이를 연구자가 참여 관찰하면서 학생들의 모둠 토론 분위기 및 참여 정도를 파악하였다. 이 때 학급 전체 학생들에게 연구의 목적이 교과서 실생활 문장제의 개선에 있으므로, 문제를 이해하고 해결하는 과정에 솔직하게 반응하기를 당부하며 연구자의 참여 관찰에 동의를 구하였다.

예비 관찰을 바탕으로 윤 교사와의 협의를 통해 수학 학습 성취 수준, 모둠 내·외 의사소통 정도 등을 고려하여 8명의 학생을 연구 대상 후보로 선정하였다. 8명의 학생들 중에서 연구 참여 의사를 밝힌 4명의 학생들과 수학적 성향, 수학에 대한 인식 등을 파악하기 위한 반구조화된 면담을 실시한 뒤, 서면으로 연구 참여에 동의를 구하였다. 수학 학습 성취 수준 상, 중상, 중, 중하, 하에 해당하는 학생들을 고루 연구 대상 후보로 선정하였으나, 중하 및 하에 해당하는 학생 중에서는 참여 의사를 밝히지 않아 연구 대상으로 포함시킬 수 없었고, 참여에 동의한 최종 4명을 대상으로 연구를 진행하였다.

연구 대상 학생들은 학교 수업 이외의 사교육 여부와 관계없이 4명 모두 공통적으로 수학을 어려운 과목으로 인식하고 있었고, 수학 학습의 필요성을 수학 자체의 특성에서 찾기보다 진학, 진로 등의 외적인 목적에서 찾으며, 시험 성적을 위해서는 어렵더라도 공부해야만 한다는 부담감을 가지고 있었다. 본 연구의 예시 문제를 적용한 수업을 실시하기 전에 이루어진 사전 면담에서 4명 중 3명의 학생들이 수학 문장제는 문장을 읽고 나서 스스로 식을 만들어야 하기 때문에 자신 없고 어렵게 느껴진다고 답하였다. 또한, 교과서의 문장제를 실생활에서 실제로 접할 수 있는 상황 및 문제라고 생각해본 경험을 묻는 면담 질문에 대하여 4명의 학생 모두 경험이 전혀 없다고 답하였다. 각 학생들의 구체적인 특성은 다음과 같으며, 모두 가명을 사용하였다.

① 원희 - 여학생

수학 학업성취도는 중간이며, 초등학교 3학년 이후로 수학 학습에 대한 흥미를 잃었고, 점차 수학에 대한 자신감도 떨어지게 되었다. 학교 수학 수업 이외에 학원이나 개인 지도를 받지 않으며, 태권도를 배우고, 심리학, 미술 등에 관심이 있어 관련 분야로의 진로를 생각하고 있다. 일주일에 약 세 번, 30분 정도 숙제를 하기 위해 혼자서 수학 공부를 하며, 시험 기간이 되어도 특별히 수학 공부 시간을 늘리지는 않는다. “나는 수학을 못해”라는 말을 종종 하며, 수학에 대한 자신감이 낮다.

② 은지 - 여학생

수학 학업 성취도는 중상이며, 주 3회 수학 학원을 다니고, 학원 숙제로 수학 문제를 매일 풀이하고 있다. 학교 및 학원의 숙제 이외에 스스로 수학 공부를 하는 시간은 없으며, 시험 기간에는 학원 수업 시간이 늘어나기 때문에 혼자서 공부하는 시간을 따로 만들지는 않는다. 차분한 성격으로 목소리가 크지 않으나, 꼼꼼하게 문제를 분석하고 스스로 해결하려고 노력하는 편이며, 모둠원과의 소통에도 적극적이다.

③ 우성 - 남학생

수학 학업 성취도는 중간이며, 방과 후에는 학원 종합반에서 매일 2~4시간씩 전과목 공부를 하는데, 한 반에 20명 정도의 학생이 함께 공부하여 대부분 강의식 수업을 듣는 형태이다. 시험 기간에는 학원의 수업 시간이 늘어나기 때문에 스스로 수학 공부를 하는 시간은 없다. 복잡하게 생각하는 것과 글씨 쓰는 것을 귀찮아하여 암산으로 해결할 수 있는 문제를 선호하고, 문장제의 문장을 꼼꼼히 읽지 않는 경향이 있다.

④ 영한 - 남학생

수학 학업 성취도가 높고, 수학 학습에 대한 자신감과 호기심이 높은 학생이다. 학교 수학 수업 이외에 학원을 다니거나 개인 지도를 받지 않으며, 매일 혼자서 수학 공부를 꾸준히 규칙적으로 하고 있다. 시험 기간이 다가오면 평소보다 3,4배 정도 더 많은 시간동안 수학 공부를 하고, 시험 결과에 대한 성취욕도 높은 편이다.

3) 자료 수집

본 연구의 자료는 크게 면담 자료와 수업관찰 자료로 나눌 수 있다. 수업 교사와의 면담은 2017년 4월 28일 첫 면담을 시작으로 7월 21일의 마지막 면담에 이르기까지 약 3개월 정도의 기간이 소요되었으며 총 5회의 면담 자료를 수집하였다. 첫 면담을 하기 전에 이메일을 통해 본 연구의 목적 및 재구성 근거, 예시 자료를 공유하였다. 총 5차시의 수업 참여 관찰을 진행하는 동안 각 차시의 수업이 끝난 직후 도서관에서 수업 후 소감, 수업 중 교사로서 어려웠던 점, 수업 중 학생들에게서 발견된 어려움, 재구성 문제의 문제점 및 보완 의견 등을 면담하였다. 학생들과의 사전 면담은 수학적 성향 및 태도, 교과서 문제에 대한 의견 등에 대해 실시하였고, 5차시 수업을 종료한 후 수업에서 느낀 점, 어려웠던 점, 재구성 문제에 대한 소감 등에 대해 면담을 실시하였다. 또한 수업을 관찰하는 동안 드러나는 특정한 행동이나 발언에 대하여 연구자가 비공식적인 면담을 통해 질문하기도 하였다.

수업관찰 자료는 재구성한 교과서 문제를 연구 대상 학급에 적용하는 수업을 진행하는 동안 기록한 참여 관찰 일지, 수업 녹화 동영상, 학생 학습지이다. 연구 참여 대상으로 선정한 4명의 학생이 있는 모둠에 카메라를 설치하여 활동 장면을 촬영하였고, 연구자는 학생들의 상호작용을 관찰 기록하였다. 구성주의 관점의 관찰 연구에서 연구자의 개입은 적절한 수준에서 이루어질 수 있으므로 (Hatch, 2002) 학생들 개인의 사고 과정과 학생들 간의 담론을 방해하지 않는 정도의 개입 수준을 유지하였다. 녹화한 동영상은 전사하여 분석의 대상으로 활용하였다. 또한 수업이 끝난 후 학생 활동지를 수합하였다.

4) 자료 분석

수업 관찰 및 면담에 대한 분석은 수학적 모델링 과정을 반영한 재구성 문제가 학생들의 교과서 문제 해결에 어떤 도움을 주는지 확인하는 방향으로 이루어졌다. 문제 상황 및 질문에 실제성을 반영하고, 변수 찾기 단계 활동을 반영한 문제를 학습하는 동안에 학생들이 문제 상황을 어떻게 이해하는지, 그러한 문제 상황 이해가 기존의 교과서 실생활 문제를 해결할 때 어떻게 작용하는지, 어떤 부분에서 어려움을 느끼는지를 관찰하여 재구성 문제의 적합성을 확인하였다. 수집한 자료의 분석은 매 차시 수업이 이루어진 직후에 실시하였으며, 본 연구에서 제시한 재구성 문제를 실제 수업에서 실현할 때 발견되는 학생들의 사고 과정, 수학에 대한 태도, 어려움에 대하여 (Hatch, 2002)의 귀납적 분석 및 해석적 분석 방법을 적용하여 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 교과서 실생활 문제가 다루는 수학적 모델링 단계 분석 결과

1) 교과서 실생활 문제의 수학적 모델링 단계 분석틀

수학적 모델링 과정을 다루는 외국 교재 분석을 통하여 수학적 모델링 과정 각 단계의 활동에 해당하는 발문 형태를 파악하였고, 이를 바탕으로 2009 개정 수학 교과서 1종의 모든 문항(실생활 관련 문항 및 비관련 문항)에 대한 예비 분석을 실시한 뒤, 우리나라 교과서 문제의 발문 형태를 반영하여 다음 [표 1]과 같이 문제 분석틀을 제시하였다.

[표 1] 교과서 실생활 문제의 수학적 모델링 단계 분석틀
[Table 1] Framework for analyzing mathematics modeling procedure of textbook items

모델링 단계	발문 형태
변수 찾기	…를 구하기 위하여 필요한 값/조건은 무엇인가?
모델 만들기	…를 수/식으로 나타내어라. …를 표/그림/그래프로 나타내어라.
수학적 결과 도출 및 해석하기	…를 구하시오. 구한 결과를 문제 상황의 용어로 답하여라. 구한 결과에 적절한 단위를 말하여라.
모델 검증하기	구한 결과가 뜻에 맞는지 확인 하여라. 두 방법을 비교하여라/어떤 방법이 적절한지 말하여라.
보고하기	문제 해결 과정을 쓰시오.

(1) 변수 찾기 단계: 문제를 해결하기 위하여 필요한 조건을 찾아내는 단계이다. 문제의 답을 구하기 위해서 반드시 알아야 하는 값이나 조건이 무엇인지 발문하거나, 문제의 답을 구하는데 영향을 미치는 변수와 그렇지 않은 변수를 구분하도록 묻는 문제가 해당한다.

(2) 모델 만들기 단계: 변수 및 정보 사이의 관계를 파악하여 주어진 문제 상황을 묘사하거나, 문제를 해결하는 데 필요한 수학적 모델을 형성하는 단계이다. 이때 사용되는 모델은 수, 식, 표, 그래프, 그림 등을 이용한 수학적 표현을 의미한다. 교과서 문제에서 요구하는 모델의 형태에 따라 크게 두 가지 경우로 구분할 수 있는데, '수 또는 식'으로 표현하기와 '표, 그래프, 그림'으로 표현하기이다. '수 또는 식'으로 표현하기는 거듭제곱 표현, 음수 표현 등의 수학적 표현 방법을 이용하여 실생활 상황을 수로 표현하거나, 여러 종류의 식을 사용하여 상황을 표현하고 문제를 해결하도록 묻는 문제를 의미한다. 식으로 표현하도록 묻는 문제에는 '일차방정식으로 나타내시오', '등식으로 나타내시오', 'x를 a, b를 사용하여 식으로 나타내시오'와 같이 어떤 종류의 식(모델)을 사용할 것인지를 미리 정해주는 경우와 'x, y의 관계식을 구하시오'와 같이 사용할 모델을 구체적으로 제시하지 않고, 두 변수 사이의 관계를 파악하여 어떤 식으로 표현할지 스스로 결정하도록 하는 경우가 모두 포함된다. 한편, '표, 그래프, 그림'의 형태로 나타내도록 묻는 문제의 경우, 표를 문제에서 미리 제시하고 표의 빈칸을 채우도록 하는 문제는 제외하였다. 학생이 표를 직접 그리지 않고 주어진 표의 빈칸을 채우는 것은 값을 구하는 것으로서 수학적 결과 도출하기 단계를 다루는 문제에 해당한다(Meyer, 2015).

(3) 수학적 결과 도출 및 해석하기 단계: 수학적 모델링의 수학적 결과 도출하기는 이전 단계에서 만든 모델에 대하여 수학적 연산을 수행하는 것이다. 예비 분석에서 살펴본 교과서의 실생활 관련 문제는 '~의 값을 구하시오', '~를 구하시오'의 형태로 제시되어 있음을 확인하였고, 그에 따라 '구하시오'로 제시되는 문제를 모두 수학적 결과 도출하기 활동을 다루는 문제로 분류하였다. 단, '식을 구하시오'의 경우는 '구하시오'로 제시되었지만, 식(모델)을 묻는 문제이므로 모델 만들기 단계 활동으로 분류하였다. 한편, 결과 해석하기는 도출한 수학적 결과를 원래의 문제 상황에서 다시 해석해보는 단계로서, 구한 결과 값을 상황에서 사용된 실생활 용어로 표현하거나 결과 값에 적절한 단위가 무엇인지 생각해보는 활동을 다룬다. 이를 다루는 발문으로는 '구한 답을 문제 상황의 실생활 용어로 설명하시오', 또는 '구한 답에 적절한 단위는 무언인가' 등으로 구체화될 수 있다. 분석 대상으로 정한 2009 개정 수학과 교과서 1종의 문제는 수학적 모델링을 직접적으로 언급하거나 다루고 있지 않기 때문에 명확한 질문을 통해 해석하기 활동만을 다루는 문제는 없었다. 그러나 교과서의 실생활 관련 문장제는 '몇 개의 모둠을 만들 수 있는지 구하시오', '몇 분이 걸리는지 구하시오', '시각을 구하여라', '최소 얼마의 돈이 필요한지 구하시오' 등의 예시와 같이 원래의 문제 상황에 비추어 적절한 형태 및 단위와 함께 답을 해야 하기 때문에, 우리나라 교과서의 실생활 문장제의 발문 형태는 CCSSM에서 제시한 수학적 모델링 과정의 수학적 결과 도출하기 단계와 결과 해석하기 단계를 명확하게 구분하기 어려운 것으로 판단된다. 그에 따라 본 연구에서는 '수학적 결과 도출 및 해석하기' 로 통합하여 단계를 설정하였다.

(4) 모델 검증하기 단계: 도출한 결과가 타당한지 검증하고 필요한 경우 모델을 수정하는 단계로서, 이것은 모델 만들기 단계에서 만든 수학적 모델의 정교화 및 일반화를 위하여 필수적인 반성 단계라고 할 수 있다. 수학적 결과 도출 및 해석하기 단계에서 구한 결과가 문제 상황에 대한 답으로 적절한 의미를 가지는지 묻는 문제, 문제 해결에 사용된 수학적 방법들을 서로 비교하고 더 적절한 방법이 무엇인지 생각해보도록 요구하는 문제가 이에 해당한다.

(5) 보고하기 단계: 수학적 모델을 사용한 문제 해결 및 결과 검증이 완료되었을 때, 그 과정을 보고하는 단계이다. 프로젝트 과제 형식으로 수학적 모델링 전 과정을 모두 다루는 과제인 경우 문제 해결의 과정 및 결과를 포스터, 안내문 작성 등의 형식으로 제시될 수 있다. 교과서 문제 중에서는 문제 해결의 과정을 서술하도록 요구하는 문제가 보고하기 단계에 해당한다.

2) 교과서 실생활 문제의 수학적 모델링 단계 분석 결과

[표 2] 학년별 실생활 관련 문제의 수학적 모델링 단계 분포: 문제 수 (비율: %)
[Table 2] Distribution of mathematical modeling stages of real-wolrd problems by grade (ratio: %)

학년	실생활 관련 문제 수	변수 찾기 단계	모델 만들기 단계	수학적 결과 도출 및 해석하기 단계	모델 검증하기 단계
1	192	0 (0%)	40 (20.83%)	152 (79.17%)	0 (0%)
2	154	0 (0%)	31 (20.13%)	123 (79.87%)	0 (0%)
3	73	0 (0%)	4 (5.48%)	67 (91.78%)	2 (2.74%)

보고하기 단계에 해당하는 문제는 모든 학년의 단원 마무리 문제에서 일정한 수만큼 포함되어 있었기 때문에, 본 분석에서는 제외하였다. 실생활 관련 문제 중에서 보고하기 단계에 해당하는 문제 수는 1학년 7개, 2학년 6개, 3학년 3개였다.

실생활 관련 문제를 수학적 모델링 단계의 관점에서 분석해 보면, 1학년은 79.17%, 2학년은 79.87%, 3학년은 91.78%의 비율로 결과 도출 및 해석하기 단계를 다루고 있었고, 세 학년의 교과서에서 모두 변수 찾기 단계에 해당하는 문제는 나타나지 않았다 ([표 2]). 모델 만들기 단계에 해당하는 문제 총 75개 중에서 수 또는 식으로 표현하도록 묻는 문제 형태가 62문제로 약 82.7%에 해당하며, 이것은 수학적 모델 중에서도 수식을 사용하는 문제가 다수임을 나타낸다고 할 수 있다. 그중에서도 상황을 식으로 표현할 때 어떤 식(모델)을 사용해야 하는지 구체적으로 알려주는 문제 수가 31개였고, 학생이 스스로 결정하도록 요구하는 문제 수가 31개였다. 모델 검증하기 단계에 해당하는 문제는 3학년에서만 2개를 찾을 수 있었다.

전 학년의 모든 실생활 관련 문제에 대하여 수학적 모델링 단계를 다루는 비율을 영역별로 살펴보면([표 3]) 모든 영역에서 결과 도출하기 및 해석하기 단계를 집중적으로 다루고 있다.

통계 영역과 기하 영역의 경우 결과 도출 및 해석하기 단계에 해당하는 문제가 90%이상이며, 모델 만들기 단계를 다루는 문제 비율이 다른 영역보다 현저히 낮은

[표 3] 영역별 실생활 관련 문제의 수학적 모델링 단계 분포(전학년): 문제 수 (비율: %)
[Table 3] Distribution of mathematical modeling stages of real-world problems by domains (ratio: %)

영역	실생활 관련 문제 수	변수 찾기 단계	모델 만들기 단계	결과도출 및 해석하기 단계	모델 검증하기 단계
수와 연산	33	0 (0%)	5 (15.15%)	28 (84.85%)	0 (0%)
문자와 식	90	0 (0%)	25 (27.78%)	64 (71.11%)	1 (1.11%)
함수	68	0 (0%)	34 (50.00%)	34 (50.00%)	0 (0%)
통계	173	0 (0%)	10 (5.78%)	162 (93.64%)	1 (0.58%)
기하	55	0 (0%)	1 (1.82%)	54 (98.18%)	0 (0%)

것으로 나타났다. 통계 영역은 실생활 관련 문제를 가장 많이 포함하고 있으면서, 그 대부분의 문제가 수학적 연산 활동에 초점을 둔 결과 도출 및 해석하기 단계에 치중되어 있었다. 여러 가지 방정식과 부등식을 다루는 문자와 식 영역은 ‘활용’ 소단원을 포함하여 실생활 관련 문제를 다수 포함하고 있지만, 모델 만들기 단계를 다루는 문제의 비율이 27.78%에 그쳤다.

이와 같이 2009 개정 1, 2, 3학년 수학 교과서의 실생활 관련 문제를 대상으로 수학적 모델링 과정의 각 단계를 어느 정도로 다루고 있는지 학년별, 영역별로 살펴보았다. 학년별로 비교하면 세 학년 모두 변수 찾기 단계를 다루는 문제는 포함하고 있지 않으며, 수학적 결과 도출하기 및 해석하기 단계에 해당하는 문제가 가장 많이 포함되어 있었다. 특히 3학년에서 그 비율이 높게 나타났다. 영역별로 비교하면 수와 연산, 통계, 기하 영역에서 모델 만들기 단계에 해당하는 문제 수 비율이 낮았으며, 특히 통계, 기하 영역은 90% 이상의 문제가 수학적 결과 도출하기 및 해석하기 단계를 다루고 있었다.

학생들의 수학적 문제해결력을 향상시키기 위하여 학교 수학에서도 수학적 모델링 과정이 적극적으로 다루어져야 한다는 필요성이 강조되는 시점에서 그 구체적인 방안을 모색하기에 앞서 현 교과서를 수학적 모델링 단계에 따라 분석한 결과, 분석한 교과서의 실생활 문제는 수학적 방법을 사용하여 답을 구하는 수학적 결과 도출 및 해석하기 단계에 초점을 두고 있음이 드러났다. 교과서의 문제들이 수학적 결과 도출 및 해석하기 단계에 집중되어 있는 것은 변수 찾기 단계와 모델 만들기 단계, 그리고 모델 검증하기 단계에 해당하는 발문이 교사의 몫으로 남겨져 있음을 의미한다고 할 수 있다. 그러나 교과서의 실생활 문제가 실제성이 부족하거나, 해결에 꼭 필요한 정보를 모두 제시하는 경우에는 교사의 추가적인 발문만으로는 실현하기 어렵다. 따라서 교과서의 실생활 문제에 대하여 실제성을 부여하고, 문제 해결에 필요한 정보를 제시하는 방법에 변화를 주는 재구성 과정이 필요하다.

2. 교과서의 실생활 문제에 수학적 모델링 단계를 반영한 재구성 사례 연구 결과

1) 교과서 실생활 문제에 수학적 모델링 단계를 반영하는 재구성 근거 마련

첫째, 여러 가지 문제 해결 과정을 비교하고 장단점을 판단할 수 있도록 정답이나 해결 과정이 유일하지 않은 문제로 재구성한다(근거 A-1). 수학적 모델링 과정에서는 창의성 및 여러 가지 선택하기(making choices), 가정하기(making assumptions), 결정하기(making decisions) 등이 요구되는데, 그 결정에 따라 수학적 모델을 구성하는 방법은 여러 가지 가능성을 갖게 되며, 유일하고 명확한 하나의 답만 존재하는 것이 아니다(Cirillo et al., 2016). 가정하기, 선택하기, 결정하기 등이 요구되고 유일한 해결 방법과 답이 존재하지 않는 것은 수학적 모델링이 다른 수학적 문제 해결과 구분되는 본질적 특징이라고 할 수 있다(Gould, 2016) ([표 4])

둘째, 문제의 실생활 상황에 실제성을 반영하기 위하여 실제로 학생들의 삶에서, 또는 우리 사회에서 일어날 법한 사건인지, 실제로 학생들이나 일반 사람들이 궁금해 할 법한 질문인지를 고려한다(근거 B-1, 2). 수학적 모델링은 실세계의 실제 문제와 수학을 연결하는 것에 초점을 두는 활동이므로(Cirillo et al., 2016), 학생들이 자신의 삶 속에서 부딪히는 실제 상황에서도 그 해결 방법이나 전략을 활용할 수 있도록 하려면 현실적 상황이 지닌 다양한 측면을 사실적으로 충실하게 반영하여 실제 상황의 모사(simulations)로서 문제를 다루어 보는 경험을 제공해야 한다(Palm, 2009).

셋째, 문제에 사용되는 데이터에 실제성을 반영하기 위하여 실제로 존재하는 사실적인 데이터를 사용하고, 경우에 따라 학생들이 직접 데이터를 수집하도록 하는 문제로 재구성한다(근거 B-3). 문제의 실생활 상황이 더욱 현실적이고 사실적으로 받아들여지려면, 문제에서 제시하는 자료 및 데이터가 실제로 존재하는 것이어야 한다(Palm, 2009).

넷째, 수학적 모델링 과정의 변수 찾기 단계를 충분히 다룰 수 있도록 문제 해결에 필요한 데이터를 학생들이 스스로 결정하는 문제로 재구성한다(근거 C-1). 순수 수학 문제나 응용 수학 문제를 다루는 일반적 수학 문제나, 답을 찾기 위해서 필요한 모든 정보를 알려주는 대부분의 맥락화된 문제와 달리, 수학적 모델링 문제는 상황의 복잡한 실제성을 그대로 반영하고 있으며, 상황에 영향을 주는 변수나 수학적 방법에 대한 정보를 모두 알

[표 4] 수학적 모델링 단계를 반영한 교과서 문제 재구성 근거
[Table 4] References for reconstructing textbook problems reflecting mathematical modelin stages

모델링 문제의 특성	재구성 예시 개발 근거	관련 문헌
질문의 개방성	(A-1) 열린 문제 형태로 제공 : 다양한 풀이 방법, 또는 답이 존재하는 문제	Cirillo et al.(2016), Gould(2016)
실제성	(B-1) 사건의 실제성 반영 : 현실에서 실제로 일어날 가능성이 있는 사건	Cirillo et al.(2016), Palm(2009)
	(B-2) 질문의 실제성 반영 : 현실에서 실제로 생겨날 가능성이 있는 질문	
	(B-3) 자료, 정보의 실제성 반영 : 현실에서 실제로 접할 수 있는 자료, 정보	
모델링 변수 찾기 단계	(C-1) 필요한 조건, 정보 찾는 질문 : 학생들이 스스로 문제 해결에 필요한 정보 또는 조건이 무엇인지 판단할 수 있도록 부족한 조건, 정보 제시	Puchalska & Semadeni(1987), Groshong(2016), Maaß(2010)
수업 시기	(D-1) 수학적 개념의 도입 단계에 적용	이대현,서관석(2004), Cavey & Champion(2016), Doerr(2016), Usiskin(2015)
학습 환경	(E-1) 모둠 토론 협동 학습 환경	Gann et al.(2016), Hamilton et al.(2008)

려주지 않는다(Groshong, 2016). 문제 해결에 필요한 데이터가 부족하게 제시되거나, 혹은 필요한 것보다 더 많이 제시될 때 학생들의 문제 해결력을 높일 수 있고 (Puchalska & Semadeni, 1987), 수학적 모델링의 변수 찾기 단계 활동을 경험할 수 있다(Maaß, 2010).

다섯째, 새로운 수학 내용을 도입하는 수업에서 적용할 수 있는 문제로 재구성한다(근거 D-1). 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 수학과 일상생활 사이의 연결성을 강조하므로 학습한 수학적 개념이 어떻게 활용되는지 이해하는데 도움이 될 수 있는데, 그렇다고 해서 수학적 내용을 모두 배운 뒤에 그 활용의 한 예로서 수학적 모델링 문제를 다루어야 하는 것은 아니다. 수학적 모델링은 응용 수학이 아닌 순수 수학 내용을 익히는 데에도 도움이 되고(Usiskin, 2015), 새로운 수학 내용을 학습하는 도구로서 활용될 수 있다(이대현, 서관석, 2004; Cavey & Champion, 2016). 즉, 수학적 모델링 활동은 학생들이 문제를 해결하는 과정 속에서 수학적 개념을 명확하게 이해할 수 있도록 돕는다(Doerr, 2016).

여섯째, 모둠 토론 및 학급 전체 토론 수업 환경을 전제로 한다(근거 E-1). 수학적 모델링 문제 해결은 3, 4명의 협동 학습 상황에서 개별 학습과 그룹 학습을 병행하기에 가장 적절하다(Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008). 협동 학습 환경은 다양한 방식으로 문제 해결에 접근해 볼 수 있는 자유를 주고, 수학의 가치를 이해하고 즐거움과 만족감을 느끼게 하며, 이전에 수학을 어려워하던 학생들도 성공적으로 해낼 수 있는 기회를 준다(Gann et al., 2016).

2) 교과서 실생활 문제에 수학적 모델링 단계를 반영한 재구성 예시 개발

사례연구를 실시할 중학교 1학년 교과서의 실생활 문제에 대하여 문헌 분석을 통해 개발한 재구성 근거를 바탕으로 5차시의 예시 문제를 개발하였다. 그 중 하나를 소개하면 다음 [표 5]과 같다.

[표 5] 재구성 문제 예시 - 일차방정식의 활용 1차시
[Table 5] Example of reconstruction problem - Application

교과서 문제 (두산 동아 (강) 130쪽)	**16** 서술형 희재네 집에서 학교까지의 거리는 $2km$이다. 자전거를 타고 집에서 출발하여 분속 $150m$로 달리다가 늦을 것 같아 속력을 바꾸어 분속 $200m$로 달려 학교에 도착하였더니 11분이 걸렸다. 분속 $200m$로 달린 거리를 구하여라. (단, 풀이 과정을 자세히 써라.) 
재구성 문제 1	1. 민수네 학교의 등교 시간은 오전 8시까지이다. 어느 날 아침, 민수가 눈을 떠보니 7시 40분이었다. 민수는 지각하지 않고 학교에 도착할 수 있을까? (1) 이 질문에 답하기 위해서 알아야 하는 조건을 모두 생각해보세요. (2) 위에서 찾은 조건 중에서, 민수의 지각에 가장 큰 영향을 미치는 것은 무엇인지 생각해보세요.
재구성 문제 2	2. 민수는 7시 45분에 집에서 출발하여 학교로 향하였다. 민수네 집에서 학교까지는 약 $3km$ 정도 거리이다. 평소 민수가 보통 걸음으로 걸으면 $80m/$분 (1분당 $80m$)의 속도로 걷고, 빠른 걸음으로 걸으면 $130m/$분의 속도로 걷는다. 또한 평소 민수가 보통 속도로 자전거를 타면 $200m/$분의 속도로 달리고, 빠른 속도로 자전거를 타면 $300m/$분의 속도로 달린다. 민수가 8시 전에 학교에 도착하는 다양한 방법을 찾고, 그 중에서 가장 좋은 방법을 선택하고 그 이유를 설명하시오.
재구성 문제 3	3. 희재네 집에서 학교까지의 거리는 $2km$이다. 자전거를 타고 집에서 출발하여 분속 $150m$로 달리다가 늦을 것 같아 속력을 바꾸어 분속 $200m$로 달려 학교에 도착하였더니 11분이 걸렸다. 분속 $200m$로 달린 거리를 구하여라. (1) 문장으로 설명된 문제 상황을 그림, 표 등으로 간단히 표현하세요. (2) 다음 문장이 옳은지 아닌지 판단하고 그 이유를 설명하세요. ① 희재는 분속 $150m$으로 $1km$를 달리고, 분속 $200m$로 $1km$를 달렸다. ② 희재가 분속 $150m$으로 달린 시간과, 분속 $200m$로 달린 시간은 같다. (3) 수학적 표현을 사용하여 희재가 분속 $200m$로 달린 거리를 구하는 과정을 설명하세요.

이 교과서 문제는 희재가 집에서 학교까지 자전거를 타고 가는데, 늦을 것 같아서 중간에 속력을 바꾸는 상황을 제시한다. 이 문제의 경우 사건의 실제성(근거 B-1)은 있으나, 분속 200m로 달린 거리를 왜 구해야 하는지에 대한 질문의 실제성(근거 B-2)이 부족하다. 또한 문제 해결에 필요한 모든 정보가 제시되어 있어서 필요한 조건을 학생이 스스로 찾는 경험을 할 수 없다(근거 C-1).

교과서에서는 3단원 '문자와 식'에 해당하는 9개의 소단원 중에서 가장 마지막 소단원으로 일차방정식의 활용을 제시하고 있으나, 본 연구에서는 일차방정식의 의미와 간단한 풀이를 다루는 수업 이후에 재구성 문제를 적용하였다(근거 D-1).

재구성 문제 1번에서는 '지각하지 않고 도착할 수 있을

까?'와 같이 질문의 실제성을 부여하였고(근거 B-2), 교과서 문제의 '희재'를 대신하여 사례 연구 수업을 진행한 학급의 학생 이름 '민수'를 사용하였다. 민수가 일어난 시간과 등교 시간의 차이가 20분이라는 상황만 제시한 뒤, 1-(1)에서 이 질문에 답하기 위해서 알아야하는 다른 조건들이 무엇인지 생각하게 하고(근거 C-1), 1-(2)에서 그 조건들 중에서 가장 큰 영향을 미치는 것을 판단하게 하였다. 재구성 문제 1을 통해 학생들은 '등교와 지각' 상황과 같은 일상생활에서 속력, 거리, 시간이 서로 어떻게 작용하는지 생각하고 이해할 수 있고, 주어진 상황에 영향을 미치는 여러 가지 변수를 찾는 기회를 가질 수 있다. 재구성 문제 1을 통해 상황을 이해한 뒤, 재구성 문제 2에서는 구체적인 조건, 데이터를 함께 제시하여 다양한 해결 방법을 시도해보도록 하였다. 민수가 일어난 시간(7시 45분)과 등교 시간(8시)을 제시하였고, 민수가 일어나는 시간과 관계없이 변하지 않는 값인 집에서 학교까지의 거리(약 3km)를 제시하였다. 지각 여부는 민수가 어떤 속력으로 가느냐에 따라 달라질 수 있으므로, 민수가 선택할 수 있는 여러 가지 속력 중에서 지각을 하지 않을 수 있는 다양한 방법을 고안하도록 하였다(근거 A-1). 재구성 문제 1, 2를 해결한 뒤 원래의 교과서 문제와 동일한 문제 3번을 제시하였고, 문제 상황의 이해 정도를 파악하기 위하여 추가 질문을 포함하였다.

3) 수학적 모델링 단계를 반영하여 재구성한 예시 문제 적용 사례 연구 결과

상황, 질문, 데이터에 실제성을 부여하고, 수학적 모델링의 변수 찾기, 모델 만들기 단계 활동을 구체적으로 다루는 발문을 포함하도록 재구성한 문제를 학교의 일반 수학 수업에 적용한 뒤, 학생들의 문제 해결 과정 및 수학적 태도를 관찰하였다. 재구성 문제의 적용 가능성을 판단하려는 연구 목적에 따라, 선정된 4명의 학생에 대한 관찰 및 면담 자료에서 발견되는 학생들의 문제 해결 과정 및 태도의 특징을 추출한 뒤 공통적인 특징을 범주화하는 귀납적 분석 방법을 적용하였고, 해석적 분석 방법으로 그 의미를 해석하였다.

첫째, 관찰한 4명의 학생들은 수학적 모델링 재구성 문제를 학습하는 동안 수학이 실생활과 연결되어 있다고 느끼고, 이것은 문제 해결에 동기를 부여하였다. 면담에서 학생들은 초등학교 때부터 현재 중학교까지 수학 공부를 하면서 실생활 활용 문제라고 불리는 문장제가 실생활과 관련이 있다고 생각해본 적이 단 한 번도 없었다고 하였으며, 교과서의 문장제를 이전에 학습한 수학적 개념이나 방법을 적용하는 방법을 익히기 위하여 적당히 꾸며진 문제라고 인식하였다. 본 연구에서 적용한 재구성 문제에 대하여 학생들은 자신의 생활 주변에서 쉽게 볼 수 있는 사건, 궁금증이 생길법한 질문이라는 점에 공감하였고, 자신의 실제 경험을 떠올리면서 문제 상황을 머릿속에 구체적으로 이미지화하였다. 학생들은 주어진 문제 상황이 자신의 삶에서도 일어날 수 있는 상황이라는 인식을 하게 되자 흥미를 보였고, 문제 해결이 즉각적으로 이루어지지 않아서 고민하면서도 끊임없이 해결하고자 하는 의지와 욕심을 표현하였다. 학생들이 어려운 수학적 개념을 스스로 발명하기는 어렵더라도 모델링 활동이 수학 학습에 동기를 부여할 수 있다(Gann et al., 2016)는 것을 확인할 수 있었다.

둘째, 관찰한 학생들은 문제에서 요구하지 않아도, 스스로 문제 해결에 대한 반성 활동을 하였다. 본 관찰 연구에서 적용한 재구성 문제들은 수학적 모델링 변수 찾기 및 모델 만들기 단계 활동을 다루는 질문을 포함하고 있으며, 해석하기, 검증하기 단계를 다루는 질문은 포함되지 않았다. 그러나 본 연구에 참여한 학생들은 상황을 충분히 이해하면서 문제를 해결한 뒤에 자연스럽게 결과의 의미를 해석하고, 식을 바르게 구한 것인지 점검하였다. 일차방정식의 활용 재구성 수업 2차시에서 적용한 문제를 해결하여 답을 구한 뒤 우성은 다음 [표 6]과 같이 표현함으로써, 계산 결과를 실제 상황으로 인식하여 결과가 실제로도 말이 되는지 판단하고 있음을 보여주었다.

[표 6] 수업 관찰 - 학생 발화 예시 1
[Table 6] Class observation-Student conversation example 1

우성: 그러면, 거리가 6킬로미터. 음. 왜 이렇게 멀지? 집이... (고개를 끄덕이며) 자전거를 탄다고 하면, 6 킬로미터는 갈 수 있겠네. 근데 나는 차타고(학교) 오는데.

셋째, 관찰 대상 학생들이 재구성 문제를 통하여 문제해결에 꼭 필요한 조건을 스스로 찾아본 경험은 교과서의 실생활 활용 문제를 이해하는데 도움을 주었다. 문자와 식 단원의 '문자를 사용한 식'을 위한 재구성 수업에서 관찰 된 대화 내용은 다음 [표 7]과 같다.

[표 7] 수업 관찰 - 학생 발화 예시 2
[Table 7] Class observation-Student conversation example 2

#문자와 식 재구성 2차시 1번(2)
두 놀이기구 중에서 무엇을 먼저 탈지 결정할 때, 고려해야 할 것은 무엇인가요? 그 중에서 가장 중요한 것은 무엇인가요?
은지: 놀이기구를 탔을 때 한 번에 탈 수 있는 정원이 있지. 예를 들어서 자이로드롭에는 10명이 탈 수 있고, 후룸라이드에는 9명이 탈 수 있다 그러면 줄이 비슷해도..
원희: 아. 그러면 이게(자이로드롭) 더 빨리 나가겠다.
은지: 응. 더 빨리 나갈 수 있는데 차이가 나지.
원희: 대기 시간의 차.
은지: 근데, 최대 정원수가 한 쪽이 더 많다고 해도 너무 운영 시간이 길면 오히려 정원수가 적은 쪽이 더 빨리 끝날 수도 있잖아. (*운영시간: 놀이 기구 1회 운행에 소요되는 시간)
원희: 아. 시간? 음.. 근데 운영 시간은 둘 다 비슷하지 않나?
은지: 근데 5분간의 차이가 보통 나거든. 5분에서 10분정도 차이.
원희: 그럼 그것도 고려해야 될 점에 들어가야 되지 않나.
은지: 응. 운영 시간..
원희: 그러면 운영 시간이 빠르고 최대 정원수가 많은 걸 선택해야 되지. 그게 뭔지는 모르겠지만.
은지: 그러니까 비교해서 해야지.
원희: 이 둘 중에서 선택하는 거지. 우리는 둘 중에 서 무얼 선택해야 하지.
은지: 결정하는 방법이잖아. 방법이니까, 타는 시간이 짧고, 최대 정원이 많은 걸로.
···(중략)···
#문자와 식 재구성 2차시 2번 문제를 받은 후
정우와 지호는 어떤 놀이 기구를 타기 위해 같이 줄을 서기로 했다. 놀이 기구의 설명 표지판을 읽어보니 1회 운행하는데 5분이 걸리고, 한 번에 10명이 탈 수 있다고 적혀 있었다. 정우와 지호가 그 놀이 기구를 타기 위해 얼마나 기다려야 할까?
은지: 나왔네. 운영 시간이랑 정원 나왔네.
원희: 그렇지. 그게 나와야지.
은지: 그렇지. 그게 나와야 풀 수 있지.

위의 대화에서 볼 수 있듯이 학생들은 문제 해결에 필요한 데이터가 부족하게 제시된 1번 문제에서 문제 해결에 영향을 미치는 조건, 고려해야할 사항을 스스로 찾아냄으로써 문제의 상황을 완전히 이해하였다. 그 이후 구체적인 조건을 포함한 문제 2번에서 자신들이 필요하다고 여겼던 데이터가 주어진 것을 확인하고 다소 흥분된 목소리로 "그렇지!"라고 외치는 모습이 관찰되었다. 이후 학생들은 놀이 기구의 대기 시간과 관련된 교과서 문제를 쉽게 이해하였고, 스스로 답을 구하였다.

넷째, 관찰 대상 학생들은 차시가 거듭될수록 문제 해결에 필요한 조건을 스스로 판단하는 것에 어려움을 느끼지 않았고, 문제 해결에 관련이 적다고 판단되는 현실적 고려 사항을 배제하여 최소한의 조건을 찾으려 하였다. 수업 관찰 첫 차시였던 '문자를 사용한 식'의 교과서 문제를 재구성하여 적용한 수업에서, 학생들은 문제 해결을 위해 고려해야 할 사항으로 여러 가지 현실적 조건들을 다양하게 생각하고 기록하였으나, 재구성 문제 해결 경험이 늘어날수록 상황과 문제 해결에 꼭 필요한 조건을 바로 찾아내려는 모습을 보였다.

다섯째, 관찰 대상 학생들은 문제에서 문자가 주어지지 않더라도, 스스로 필요한 문자를 설정하고 식을 만들어냈다. '함수의 활용' 재구성에 사용한 교과서 문제는 '$x$km를 운행하는 데 필요한 전기료가 y원일 때, 관계식을 구하여라.'와 같이 식을 만들 때 사용할 미지수를 미리 정해서 제시해주었다. 그러나 재구성 문제에서는 '이동 거리에 따라 필요한 주유 금액을 구할 수 있는 식을 구하여라.'와 같이 문자를 정해 주지 않았다. 또한 교사는 이 재구성 문제 학습지를 배부하면서 "이 문제는 함수의 활용 문제입니다."와 같이 해당 단원이나 관련 내용에 대한 언급을 전혀 하지 않았다. 학생들은 문제 상황을 이해하고, 문제 해결에 필요한 조건을 파악한 뒤, 그들 사이의 관계로부터 스스로 문자를 설정하고 식을 구성하였다. [표 8]의 대화를 살펴보면, 학생들은 이전에 일차방정식의 활용 문제를 해결할 때 미지수 한 개(주로 x)를 사용하였지만, 이 문제에서는 미지수가 두 개 필요하다는 것을 인지하였고, 그에 따라 x, y를 쓰기로 하였다. 또한, x, y 각각의 의미를 문제에서 정해주지 않았기 때문에, 원희는 x를 금액, y를 거리로 사용한

반면, 우성은 y를 금액, x를 거리로 사용하였다.

[표 8] 수업 관찰 - 학생 발화 예시 3
[Table 8] Class observation-Student conversation example 3

#함수 활용 재구성 1차시 2번
... 다음 정보를 활용하여 휘발유 중형 차량의 이동 거리에 따라 필요한 주유 금액을 구할 수 있는 식을 만들어보세요.

원희: 그러니까 이거(이동 거리, 차종의 정보가 적힌 표를 가리키며) 두 개를 알아야 뭘 할 수 있을 것 같은데.
영한: 식을 만드는 거니까 모르는 거는 미지수를 쓰면 되지.
원희: 필요한 주유 금액이 x인가?
···(중략)···
원희: 주유 금액을 구할 수 있는 식이라.. x가 이동 거리인거야, 주유 금액인거야?
은지: x가 거리.
원희: 둘 다 지금 미지수인데..?
은지: 둘 다 미지수니까...(우성, 영한을 가리키며) 얘네들이 x, y 두 개 사용하지 않았을까?

여섯째, 관찰 대상 학생들은 이미 학습한 수학적 방법(정비례 관계식)이 적용되지 않는 문제를 해결하는 과정에서 새로운 수학적 내용(반비례 관계식)을 이해하였다. '함수의 활용' 재구성 수업에서 정비례 관계를 포함하는 상황과 관련된 문제를 해결한 뒤, 학생들에게 반비례 관례를 포함하는 상황 문제를 제시하였다. 교사는 학생들에게 문제를 제시할 때, '정비례 관계', '반비례 관계'와 관련된 문제임을 언급하지 않았고, 학생들은 이전에 풀이했던 방법처럼 정비례 관계로 식을 세우려고 하였으나, 그렇게 만들어낸 식이 문제의 상황에 맞지 않음을 깨닫고 알고 있는 방법으로 해결되지 않을 때에는 왜 그 방법이 적용되지 않는지 점검하면서 새로운 방법을 탐색하였다.

일곱째, 관찰 대상 학생들은 모둠 내 자유로운 의사소통을 통해 모델 만들기(식 세우기)의 어려움을 극복하였다. 4명의 학생들은 문제 상황을 이해하고, 문제 해결에 필요한 조건을 스스로 찾은 뒤에도 식을 세우기까지 시간이 걸렸다. 조건들 사이의 관계를 파악하는 과정에서 시간이 걸리는 한 이유로서 다음 [표 9]의 예시와 같이 개념이나 단위를 혼동하는 경우가 발견되었다.

[표 9] 수업 관찰 - 학생 발화 예시 4
[Table 9] Class observation-Student conversation example 4

#일차방정식의 활용 재구성 2차시 2번

원희: 식을 어떻게 세워야할지..
은지: 아..나도 잘 모르겠어. 생각하고 있어.
원희: 그런데 일단 이동 거리에 따라 구하는 건데.. 1리터 당 평균 연비 17km라면은 17킬로미터 퍼 아워(km/h)..?
원희: 그럼 이게 킬로미터 퍼 아워라면은... 속력이니까...
은지: (연비 표를 가리키며) 이건 거리 아니야?
원희: 연비가...
은지: 연비가 속력이었어?
원희: 그러니까 1리터에 갈 수 있는 거리.
은지: 그러니까 거리지.

4명의 학생들은 끊임없이 문제를 다시 읽어보거나, 서로에게 자신이 이해한 것이 맞는지 설명하고 확인하면서 점차 개념을 수정해나갔다. 학생들 사이의 원활한 의사소통은 인지적 요구 수준이 높은 모델링 문제를 해결할 때 필수적인 환경이며, 모델링 문제를 해결하는 과정에서 학생들의 의사소통 능력이 더욱 향상되기도 한다(Asempapa, 2015). 본 연구에서 관찰한 학급의 경우, 평소의 수업에서도 모둠별 협동 학습을 해왔기 때문에 재구성 문제에 대한 토론 역시 자연스럽게 이루어진 것으로 보인다. 관찰한 학급에서는 학생들이 자신의 모둠 내에서 문제를 해결한 뒤, 다른 모둠의 친구들이 다른 방법을 생각하였거나 해결에 어려움을 겪고 있을 때, 그 모둠에 가서 의견을 공유하는 모습을 자주 볼 수 있었다. 학생들이 다소 어려움을 느꼈던 함수 활용 재구성 수업 후 면담에서 학생들은 모두 모둠 활동으로 함께 한 것이 문제 해결에 큰 도움이 되었다고 답하였다. 그 이유에 대해서는 "혼자 하는 것 자체가 싫고 지루하다.", "혼자 하고 있으면, 자기가 틀린 것을 자신이 깨닫는 게 어려우니까 옆에서 지적해줄 사람이 필요해요.", "여러 사람이 개인의 생각이 있으니까, 저것도 맞을 수 있겠다..(생각도 들고).. 자기 방법이랑 친구 방법을 활용해서 (문제 해결에) 쓸 수도 있고요."라고 설명하였다.

V. 결론 및 제언

본 연구의 결과로부터 얻을 수 있는 결론과 그에 따른 제언은 다음과 같다.

첫째, 수학 교실 현장에서 변수 찾기 활동을 포함한 수학적 모델링 과정을 제시하는 것이 필요하다. 본 연구 결과에 따르면, 중학교 교과서의 실생활 문제는 수학적 모델링 과정의 첫 번째 단계인 변수 찾기 활동을 전혀 다루고 있지 않았다. 학년별로 50% 이상의 문제가 모델링 과정의 결과 도출 및 해석하기 단계를 다루고 있으며, 검증하기 단계를 다루는 문제는 전 학년 중에서 두 문제에 그쳤다. 또한 수학적 모델링 과정의 가장 중요한 단계인 변수 찾기 및 모델 만들기 단계의 활동이 교사의 몫으로 남겨져 있으며, 그에 대한 교사의 부담감으로 인해 학교 교실 수업에서 수학적 모델링이 실제로 다루어지기 힘들다고 할 수 있다(Asempapa, 2015; Maaß, 2010). 따라서 수학적 모델링 과정의 첫 번째 단계인 변수 찾기 활동을 다룰 수 있는 발문을 교과서의 문제에 반영하는 것이 필요하다. 문제해결에 필요한 값이나 조건을 모두 명확하게 알려주는 문제 제시방식에서 벗어나 학생들이 스스로 필요한 조건을 생각하고 결정할 수 있도록 묻는 문제를 개발하여 포함할 필요가 있다.

둘째, 학생들의 문제상황에 대한 이해를 높이고, 문제해결에 대한 참여를 높이기 위해서는 상황의 사건 및 질문의 실제성을 반영한 수학적 모델링 문제를 제시하는 것이 필요하다. 본 연구에서 학생들은 수업 시간에 다루는 수학 문제가 자신의 현실 삶에서도 실제로 일어날 가능성이 있다고 느껴지는 문제를 대할 때 적극적으로 문제해결에 참여하는 것으로 관찰되었다. 또한 문제의 현실적 맥락을 자신의 경험이나 지식과 연결 지어 이해한 학생들은 문제를 해결하는 과정에서 상황의 실제성을 문제해결과 분리시키지 않으며, 이는 문제를 해결한 뒤에 자발적인 반성 과정으로 이어졌다. 즉 상황의 사건 및 질문의 실제성을 반영한 문제는 학생들의 문장제 해결에 대한 동기를 유발하고, 자신의 문제 해결 과정에 대한 이해를 도우며, 문제 해결 후에는 답이 실제로 말이 되는지 판단하도록 돕는다고 할 수 있다.

셋째, 수학적 모델링 과정의 첫 번째 단계인 변수 찾기 단계를 다루기 위하여 문제 해결에 필요한 조건을 학생들이 스스로 찾도록 재구성한 문제는 기존의 교과서 실생활 문제를 이해하고 해결하는 데 도움을 주었다. 학생들은 교과서 실생활 문제를 어렵다고 인식하고 있었지만, 문제 해결에 필요한 조건을 스스로 찾는 경험을 한 뒤에는 교과서 실생활 문제 상황이 재구성 문제 상황보다 단순하다고 여기며 쉽게 해결하였다.

넷째, 수학적 모델링 과정을 반영한 재구성 문제는 수학 개념의 활용에서뿐만 아니라 새로운 수학적 개념 및 내용의 도입 단계에서도 적용 가능하다. 본 연구에서는 교과서 각 단원의 마지막 부분에 소개되는 실생활 활용문제를 도입 문제로 재구성하여 적용하였다. 문제 해결을 위해 필요한 수학적 개념에 대한 소개를 하지 않은 상태에서도 학생들은 모둠 활동을 통해 문제를 해결하였으며, 문제 상황에서 필요한 수학적 개념이 무엇인지 스스로 찾아나갔다. 이것은 교사가 먼저 새로운 학습 내용을 소개하고 그것이 어떻게 적용되는지 연습하는 순서로 수업이 진행될 때, 학생들은 그 개념의 필요성을 인식하지 못할 가능성이 높다는 문제점을 보완할 수 있는 도입 방법이라고 할 수 있다. 수학적 모델링 과정을 반영한 재구성 문제는 학생들이 스스로 새로운 수학적 개념을 구성해 나가도록 도울 수 있으며, 단원의 도입 단계에서 적용할 수 있다(Cavey & Champion, 2016; Doerr, 2016; Meyer, 2015; Usiskin, 2015).

다섯째, 수학적 모델링 과정을 반영한 재구성 문제를 적용하는 교실 수업에서 자유로운 의사소통 및 소집단 그룹 환경은 필수적이다. 본 연구에 참여한 학생들의 면담에서 모둠 활동이 자신의 문제 이해 및 해결에 큰 도움이 되었다고 답하였으며, 친구들과 함께 하지 않았다면 쉽게 포기하거나 해결하지 못했을 거라고 하였다. 또한 모둠 내에서의 토론을 통하여 학생들이 상황이나 개념을 이해해 나가는 과정을 관찰할 수 있었다. 현대 사회의 시민으로서 요구되는 역량의 하나로 사회적 의사소통 능력의 중요성이 더욱 강조되고 있으며, 학교수업은 학생들에게 이러한 역량을 향상시킬 기회를 제공해야 한다. 학생들이 수학적 모델링 관점을 반영한 문제를 해결하는 과정은 일방적으로 한 학생이 다른 학생에게 풀이 방법을 가르쳐주는 방식이 아니라, 서로의 생각을 공유하고 문제 해결 방법을 함께 고민하고 찾아나가는 협력을 요구하므로, 수학적 의사소통 능력을 향상시킬 수 있

는 기회를 줄 수 있다(Asempapa, 2015).

여섯째, 학생들이 문제를 해결한 뒤, 상황의 현실적 고려 사항에 따라 답이 엄밀하지 않거나 정확하지 않을 수 있다는 것을 이해할 수 있도록 하려면 수학적 모델링 과정을 반영한 문제를 꾸준히 다루어줄 필요가 있다. 수학적 모델링 과정을 반영한 문제는 사건, 질문, 자료에 실제성이 반영되어 있어서 현실 세계의 복잡한 값을 그대로 사용하는데, 문제를 해결하기 위하여 실세계를 단순화시켜 만들어낸 모델을 계산한 결과가 실세계의 상황에 다시 비추어볼 때에는 오차가 생길 수 있다. 본 연구에서 관찰한 학생들은 시간이나 가격을 계산한 결과로 무한 소수가 나왔을 때 어떻게 답해야 할지 망설이는 모습을 보였다. 또한 조건을 어떻게 선택하느냐에 따라 여러 가지 답이 가능한 상황에서도 한 가지 답만 선택하려는 모습이 관찰되었다. 따라서 학생들이 현실과 수학 사이에는 오차가 존재하고, 상황에 따라 여러 가지 답이 존재할 수 있음을 이해하고 받아들이려면, 자료의 실제성을 반영한 모델링 문제 경험을 지속적으로 경험하는 것이 필요하다. 또한 이러한 인식은 교사의 태도 및 교실 분위기에 의해 크게 영향을 받기 때문에 교사가 열린 문제에 대한 일관성 있는 태도 및 관점을 지속적으로 보여주는 것이 요구된다(Gravemeijer, 1997).

본 연구의 제한점은 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 2009 개정 수학 교과서 1종을 선택하여 수학적 모델링 과정의 단계를 분석하였으므로, 다른 교과서에 대한 분석 결과는 다르게 나타날 수 있다. 또한 본 연구의 분석 시점은 2015 개정 교육과정에 따른 교과서가 출간되기 이전이므로, 2009 개정 수학과 교과서를 분석 대상으로 정하였다. 추후 연구 과제로서 본 연구에서 개발한 수학적 모델링 단계 분석틀을 적용하여 다른 2009 개정 교과서 및 2015 개정 교과서에 대한 분석을 실시하고자 한다.

둘째, 본 연구에서는 수학적 모델링 단계를 반영하여 재구성한 문제의 적절성을 판단하기 위하여 학생 4명을 대상으로 사례 연구를 실시하였다. 관찰한 학생들은 수학적 모델링 학습 경험은 없지만, 평소 수학 수업에서 협동 및 토론 학습 경험이 있었다. 따라서 본 사례 연구의 결과를 일반화하여 해석하는 데에는 한계가 있다. 또한 사례 연구의 도구로 적용한 재구성 문제는 문자와 식 영역 및 함수 영역의 실생활 문제를 재구성하였다. 이는 연구 참여 교사와의 사전 협의 과정에서 평소 학생들이 어렵다고 인식하는 '활용' 단원의 실생활 문제에 대하여 적용하고 싶다는 연구 참여 교사의 의견을 반영한 것이었다. 따라서 기하 및 통계와 같은 다른 영역에 대한 재구성 문제 예시 개발 및 적용은 본 연구의 결과와 다르게 나타날 수 있으며, 이는 추후 연구 과제로 다루고자 한다.

참고문헌

강옥기, 권언근, 이형주, 우희정, 윤상혁, 김태희, 김수철, 유승연, 윤혜미 (2015). 중학교 수학 1, 2, 3. 서울: 동아출판.

Kang, O.K., Kwon, U.K., Lee, H.J., Woo, H.J., Yun, S.H., Kim, T.H., Yoo, S.Y., & Yun, H.M. (2015). *Middle School matheamtics 1 2, 3.* Seoul: Donga Publishing.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호.

Ministrary of Education (2015). *Mathematics curriculum.* Ministry of Education announcement #2015-74..

김민경, 홍지연, 김은경 (2009). 수학적 모델링 사례 분석을 통한 초등 수학에서의 지도 방안 연구, 수학교육 48(4), 365-385.

Kim, M.K., Hong, J.Y., & Kim. E.K. (2009). Exploration of teaching method through analysis of cases of mathematical modeling in elementary mathematics, *The Mathematics Education 48*(4), 365-385.

김혜윤, 강옥기 (2015). 수학적 모델링의 적용 사례연구, 수학교육학논총 47(2), 159-163.

Kim, H.Y., & Kang, O.K. (2015). Case study of matheamtical modeling, *Journal of Mathematics Education 47*(2), 159-163.

서지희, 윤종국, 이광호(2013). 중학교 3학년 수학 영재 학생들을 위한 수학적 모델링 교수 학습 자료의 개발 및 적용: 쓰나미를 소재로, 학교수학 15(4), 785-799.

Seo, J.H., Yeun, J.K., & Lee, K.H. (2013). Development and application of teaching-learning materials for mathematically-gifted students by using mathematical modeling: Focus on Tsunami, *Journal of Korea Society Educational Studies in mathematics 15*(4), 785-799.

신은주, 권오남(2001). 탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구, 수학교육학연구 11(1), 157-177.

Shin, E. J., & Kwon, O. N. (2001). A study of exploration-oriented mathematical modeling. *The Journal of Educational Reserach in mathematics 11*(1). 157-177.

신현성, 이명화(2011). 실세계 상황에서 수학적 모델링 과제설정 효과, 한국학교수학회논문집 14(4), 423-442.

Shin, H. S., & Lee, M. H. (2011). The effects of tasks setting for matheamtical modelling in the complex real situation, *Journal of Korean School Mathematics Society 14*(4), 423-442.

이대현, 서관석(2004). 수학 문제 해결의 역사와 모델링 관점, 한국수학사학회지 17(4), 123-132.

Lee, D. H., & Seo, K. S. (2004). The history of mathematical problem solving and the modeling perspective, *The History of Mathematics 17*(4), 123-132.

황혜정(2007). 수학적 모델링의 이해: 국내 연구 결과 분석을 중심으로, 학교수학 9(1), 65-97.

Hwang, H. J. (2007). A study of understanding mathematical modelling, *Journal of Korea Society Educational Studies in mathematics 9*(1), 65-97.

Asempapa, R. S. (2015). Mathematical modeling: essential for elementary and middle school students, *Journal of Mathematics Education 8*(1), 16-29.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education - Discussion document, *Educational Studies in Mathematics 51*(1), 149-171.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?, *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education,* 73-96.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?, *Journal of Mathematical Modelling and Application 1*(1), 45-58.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2016). Advancing the teaching of mathematical modeling: Research-Based concepts and examples. In C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 65-76). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. New York: Springer.

Cavey, L. O., & Champion, J. (2016). Learning secondary school mathematics through authentic mathematical modeling tasks. In C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 131-142). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Cirillo, M., Pelesko, J. A., Felton-Koestler, M. D., & Rubel, L.(2016). Perspectives on modeling in school mathematics. In C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 3-16). Reston, VA: NCTM

Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards initiative,* Author.

Doerr, H. (2016). Designing sequences of model development tasks. In C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Doerr, H. & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data, *Journal for Research in Mathematics Education* 110-136.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004). Mathematical modelling in the early school years, *Mathematics Education Research Journal 16*(3), 58-79.

Gann, C., Avineri, T., Graves, J., Hernandez, M., & Teague, D. (2016). Moving students from remembering to thinking: The power of mathematical modeling. In C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 97-106). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Gould, H. (2016). What a modeling task looks like?. In C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 179-186). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modelling?, *Learning and Instruction 7*(4), 389-397.

Groshong, K. (2016). Different types of mathematical models. In C. R. Hirsch, & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 17-25). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Hatch, J. A. (2002). *Doing qualitative research in education settings*. Suny Press.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Brilleslyper, M. (2008). Model-eliciting activities (MEAs) as a bridge between engineering education research and mathematics education research, *Advances in Engineering Education 1*(2), 1-25.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom—problems and opportunities, *Modelling and Applications in Mathematics Education*, 99-108.

Kang, O. K, & Noh, J. H. (2012). Teaching mathematical modelling in school mathematics, *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* 8-15.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks, *Journal für Mathematik - Didaktik 31*(2), 285-311.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. Jossey-Bass.

Meyer, D. (2015). Missing the Promise of Mathematical Modeling, *Mathematics Teacher 108*(8), 578-583.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P.(2007). Introduction. In W. Blum, & P. L. Galbraith, (Eds.) *Modeling and application in mathematics education* (pp. 1). The 14th ICME study. New-York: Springer.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations, *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*, 3-19.

Pollak, H. (2003). A history of the teaching of modeling, *A History of School Mathematics*, *1* 647-672.

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling—a conversation with Henry Pollak. In W Blum, P Galbraith, HW Henn, & M Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI Study* (pp. 109 - 120). New York: Springer.

Puchalska, E., & Semadeni, Z. (1987). Children's reactions to verbal arithmetical problems with missing, surplus or contradictory dat,. *For the Learning of Mathematics 7*(3), 9-16.

Stake, R. E. (1978). The case study method in social inquiry, *Educational Researcher 7*(2), 5-8.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice, *Mathematics Teaching in the Middle School 3*(4), 268-275.

Sutherland, R. (2006). *Teaching for learning mathematics*. UK: McGraw-Hill Education.

Tran, D., & Dougherty, B. J. (2014). Authenticity of mathematical modeling, *Mathematics Teacher 107*(9), 672-678.

Usiskin, Z. (2015). Mathematical modeling and pure mathematics, *Mathematics Teaching in the Middle School 20*(8), 476-482.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. The Netherlands: Lisse.

Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics, *Educational Studies in Mathematics 63*(1), 89-112.

Reconstruction and application of reforming textbook problems for mathematical modeling process

Park, SunYoung
Graduate School, Sungkyunkwan University, Seoul, Korea
E-mail : fakebarista7@gmail.com

Han, SunYoung†
Sungkyunkwan University, Seoul, Korea
E-mail : sy.han@skku.edu

There has been a gradually increasing focus on adopting mathematical modeling techniques into school curricula and classrooms as a method to promote students' mathematical problem solving abilities. However, this approach is not commonly realized in today's classrooms due to the difficulty in developing appropriate mathematical modeling problems. This research focuses on developing reformulation strategies for those problems with regard to mathematical modeling. As the result of analyzing existing textbooks across three grade levels, the majority of problems related to the real-world focused on the Operating and Interpreting stage of the mathematical modeling process, while no real-world problem dealt with the Identifying variables stage. These results imply that the textbook problems cannot provide students with any chance to decide which variables are relevant and most important to know in the problem situation. Following from these results, reformulation strategies and reformulated problem examples were developed that would include the Identifying variables stage. These reformulated problem examples were then applied to a 7th grade classroom as a case study. From this case study, it is shown that: (1) the reformulated problems that included authentic events and questions would encourage students to better engage in understanding the situation and solving the problem, (2) the reformulated problems that included the Identifying variables stage would better foster the students' understanding of the situation and their ability to solve the problem, and (3) the reformulated problems that included the mathematical modeling process could be applied to lessons where new mathematical concepts are introduced, and the cooperative learning environment is required. This research can contribute to school classroom's incorporation of the mathematical modeling process with specific reformulating strategies and examples.

* ZDM Classification : D3
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key words : mathematical problem solving, problem solving competence, mathematical modeling, textbook item
† Corresponding author