韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
https://doi.org/10.7468/mathedu.2018.57.3.231
2018. 08. 제 57권, 제 3호, 231-246.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A:
The Mathematical Education
August. 2018, Vol. 57, No. 3, 231-246.

Sfard의 구상화(Reification) 이론에 근거한 중·고등학생의 이차방정식 근의 공식 개념 형성 수준 분석

장현석(경북대학교 대학원)
이봉주(경북대학교)[†]

Ⅰ. 서론

국외의 수학교육 학자는 학생의 수학적 개념 형성 과정에 관하여 다양한 연구를 해 왔다(Dubinsky & Mcdonald, 2001; Goodson-Espy, 1998; Sfard, 1991; Wille, 2009; Zerpa, 2016). NCTM(2000)은 학생이 수학을 이해하지 못한 채 학습하는 것을 학교수학 교육의 공통된 모습이라고 지적하며, 학생이 경험과 이전의 지식을 바탕으로 새로운 지식을 능동적으로 구성함으로써 수학을 이해하고 학습해야 한다고 강조하였다. 또한 잘 연계된 개념에 바탕을 둔 생각이 새로운 상황에서 사용될 때 보다 쉽게 응용될 수 있다고 언급하며 개념적 이해를 강조하였다. Hamlyn(1978)은 개념이 학습의 핵심적인 내용이므로 개념을 이해하지 않고서는 학습이 이루어질 수 없다고 보아, 지식과 이해를 획득하는 과정이 개념을 이해하는 과정과 연결된다고 하였다.

개념 형성에 관한 심리학적 연구는 Piaget에 의해서 방대하게 이루어졌고, 국외의 교육학자들도 Piaget 이론을 기반으로 개념 형성 이론을 전개하였다(Zerpa, 2016). 특히 Dubinsky의 APOS 이론과 Sfard의 구상화 이론이 유명하고, 이 두 이론을 이용하여 다양한 영역에서 학생의 수학적 개념 형성에 관한 연구가 이루어지고 있다(Zerpa, 2016). 두 이론은 개념적으로 유사하지만 다소 차이가 있다. APOS 이론은 Piaget 이론의 심리학적 용어를 그대로 사용하고 있어, 수학 개념 학습에서 학습자의 발달적 측면을 강조한다고 볼 수 있다. 이와 비교하여 Sfard의 구상화 이론은 수학의 역사 발생적 관점을 기반으로 한다고 볼 수 있다.

국내에서는 개념 형성에 대한 체계적인 이론적 연구가 미비한 실정이지만 마찬가지로 개념 학습의 중요성을 강조하고 있다. 우정호(2000)는 교육 문제를 성공적으로 극복하기 위해서 관련 개념에 대한 심리적 측면을 먼저 이해해야 하고, 학생이 개념에 부여한 암묵적인 해석, 학생의 직관적인 반응, 학생이 사용하는 직관적인 모델, 새로운 개념 획득의 영향 등이 무엇인지 알아야 한다고 하였다. 또한 수학적 개념의 직관적인 측면과 그 형식적인 구조 사이의 복잡한 관계에 여러 가지 교수학적인 수단이 미치는 영향을 평가해야 한다고 제안하였다. 이는 수학적 개념을 형성하는 과정에서 학생의 인지 심리학적 측면을 고려한 교수・학습과 평가가 이루어져야 한다는 것을 의미한다. 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 수학과의 성격에서 수학과는 수학의 개념, 원리, 법칙을 이해하고 기능을 습득하게 하고, 이것을 통해 문제 해결 능력과 태도를 기르는 교과로 정의하며, 개념 학습을 강조하였다.

학교수학에서 학습해야 할 여러 가지 수학적 개념 중에서 이차방정식은 중학교 문자와 식 영역에서 마지막으로 다루어지는 개념이다. 이차방정식은 중학교 3학년 함수 영역에서 다루는 이차함수를 학습하고 고등학교 1학년 과정에서 다루는 복소수를 도입하는 데 있어서 토대가 된다(이새샘, 2015). 특히 이차방정식의 근의 공식 개념은 중학교 대수의 기본적인 내용, 즉 유리수와 무리수의 계산을 포함하여 문자 개념을 복합적으로 평가할 수

＊ 접수일(2018년 7월 16일), 수정일(2018년 8월 21일), 게재확정일(2018년 8월 27일)
＊ ZDM분류 : C33, C34
＊ MSC2000분류 : 97C30
＊ 주제어 : Sfard의 구상화 이론, 이차방정식의 근의 공식, 개념 형성 수준, 중・고등학생
† 교신저자

있는 개념이고, 이차방정식의 근의 공식에 대한 개념 형성은 고등학교에서 다루는 복소수, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식과 부등식, 원과 직선 등의 학습에 중요한 역할을 한다.

이차방정식에 관한 국내 선행연구를 살펴보면, 김경자(1999)는 중학교 3학년 과정에서 이차방정식이 중학교 수학과 고등학교 수학과의 연결에서 비중이 큼을 강조하며 이차방정식의 해법에서 학생들이 범하기 쉬운 오류 유형을 분석하고 그 지도법을 연구하였다. 서현정(2009)은 Hoch와 Dreyfus(2004)의 연구를 기반으로 이차방정식의 해를 구하는 과정에서 학생의 구조 감각을 분석하여 이차방정식을 구조적 관점에서 다룰 수 있는지 조사하였다. 이정미(2009)는 이차방정식의 문장제 해결 과정에서 실패 원인을 분석하고 그에 대한 대안적 교수법을 탐색하였다. 이새샘(2015)은 고등학교 수학 학습에 기초가 되는 이차방정식 개념 학습의 중요성을 강조하고, 중학교 3학년 학생의 수학 학습 부진아 지도 연구에서 이차방정식의 개념 이해를 지원하기 위한 보충학습 자료를 개발하였다. 이와 같이 국내 선행연구 분석 결과 학생의 이차방정식 근의 공식 개념화 수준에 관한 연구는 거의 없는 것으로 확인되었다.

이에 이 연구에서는 Sfard의 구상화 이론을 적용하여 중학교 3학년과 고등학교 1학년 학생의 이차방정식 근의 공식 개념 형성 수준을 분석하고, 수준 상승을 위한 시사점을 탐색하고자 하였다. 이를 위해 Sfard의 구상화 이론에 Piaget 이론의 조작의 성질 중 가역성을 반영하여, 학생의 이차방정식 근의 공식 개념 수준 분석틀을 개발하고, 중·고등학생에게 적용하였다. 더불어 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준이 낮은 학생에게 나타나는 오류를 분석하고, 가상 오류 보정에 따른 수준의 상승 정도를 살펴보았다.

Ⅱ. 이론적 배경

이 장에서는 구상화 이론에 관한 상세한 논의를 통해 교육 현장에 실질적 적용상의 문제점을 밝히고, Sfard 구상화 이론의 국내외 선행연구를 살펴본 다음, 마지막으로 구상화 이론의 내용 구분 기준으로서 Piaget 이론의 가역성을 도입하고자 한다.

1. Sfard의 구상화 이론

Sfard(1991)는 Piaget의 인식론을 바탕으로 학생의 수학적 개념 형성 과정을 내면화(Interiorization), 대상화(Condensation), 구상화(Reification)의 세 수준으로 정립하였다. Sfard는 수 개념의 형성 과정과 함수 개념의 생성 및 발달 과정을 면밀히 분석함으로써 개념 형성의 구체적인 과정에 관하여 다음과 같이 언급하고, 세 수준으로 구분하였다.

> 수와 함수의 예에서 같은 현상이 반복되었다: 다양한 과정이 전체로서 하나의 대상이 되고, 상위 이론의 기본 단위가 되었다(p. 16).

내면화 수준은 수학적 개념의 과정에 익숙해지는 단계로서, 이 단계에서는 전체 내용을 피상적으로 이해하고, 과정의 세세한 내용을 인지하면서, 행동을 수행한다. 이 단계의 특징은 문제 해결에 시간이 걸리고, 과정 전체를 한눈에 인식하지 못하므로, 절차적인 문제 해결의 정확도가 아직 부족하다고 할 수 있다.

대상화 수준은 개념이 구성되는 전체 과정이 하나의 조작 단위가 되는 수준이다. 즉, 과정의 세부적인 사고 없이도 개념의 전체 과정이 수행되는 단계로 다른 과정과의 결합을 통한 비교 및 일반화가 쉬워진다. 이 수준의 특징은 전체 절차적 문제해결 과정이 한눈에 파악되므로, 문제해결의 속도와 정확도도 높다고 할 수 있다. Zerpa(2016)는 내면화 수준과 대상화 수준의 결정적인 차이점은 주어진 정보가 같더라도, 학생이 작업 기억에서 한 번에 쓰는 데이터 저장량의 차이라고 한다. 내면화 수준의 학생은 개념을 이용하는 데 있어서 작업 기억에서 저장 용량의 대부분을 쓰고 있고, 대상화 단계의 학생은 작업 기억의 여유 공간이 더 많기 때문에 다른 정보를 함께 다룰 수 있다. 그래서 문제해결 상황에서 내면화 수준보다 대상화 수준에서 더 많은 정보를 사용할 수 있다.

구상화 수준은 대상화 수준에서 대상화된 개념에 심리적 전환이 일어나는 수준이다. 즉, 이 수준에서는 대상화된 개념의 질적 변환이 일어난다. 또한, 이 수준은 상위 개념의 내면화의 시작으로 볼 수 있고, Piaget의 반영적 추상화 과정에서 반사가 이루어져 다음 수준의 쉠 형성을 위한 준비가 심리적으로 이루어진 상태를 의미한

다. 또한 평형화 과정을 통해 다른 개념과의 연결 및 전체 사고 구조 속에서 통합적으로 인식이 가능한 수준으로 볼 수 있다.

Sfard(1991)는 정수, 복소수, 함수의 세 개념을 예로 이용하여 개념 형성의 세 수준을 설명하였다. Sfard의 설명을 정리하면 [표 1]과 같다. 또한 구상화 수준의 학생은 정수에 대한 문제해결 상황에서 정수의 본질적 기능이나 성질(나머지정리, 소인수분해 등)을 이용하여 문제해결의 실마리를 찾는다고 볼 수 있고, 체의 정의를 모른다고 하더라도 복소수도 실수처럼 체의 구성 원소로서 사고하기 시작한다고 할 수 있다.

Sfard의 구상화 이론의 이해를 돕기 위해, 유윤재(2012)는 대상화 이론으로 제시한 운전 기능 습득의 예를 구상화 이론에 맞게 수정하여 다음과 같이 제시하였다. 처음 운전을 배우게 되면, 운전에 관한 전반적 기능은 모두 습득하게 된다(내면화). 이때의 상황에서도 일반적으로 운전 가능하지만 운전 중에 다른 행동을 병행하기가 어렵다. 즉, 운전 기능이 대상화되어 있지 않다고 말할 수 있다. 그래서 일종의 연수 또는 반복된 운전 훈련이 필요한 것이다. 훈련이 반복될수록 운전이 자연스러워지고 점점 다른 동작도 가능하게 된다. 즉, 대상화되는 것이다. 그리고 최종적으로 실전에 나가게 되는데, 실제 도로에서 운전을 시작하는 것이다. 그러나 아직 뭔가 부족한 것이 보인다. 혼자서 운전을 익숙하게 하지만 다른 운전 중인 차를 인식하거나 다양한 상황에 대응하는 순발력이 부족하다. 즉, 운전 개념의 구상화가 되지 않았다고 할 수 있다. 개인에 따라서 구상화가 힘들 수도, 극단적인 경우 구상화가 안 될 수도 있다. 구상화에는 개인의 심리적인 영향, 인지적인 능력이 요구되기 때문이다. 특히, 운전면허를 받아도 공간 감각이 부족해 운전을 못하는 사람도 종종 있다.

Sfard(1991)는 구상화 이론을 적용하는 데 있어서 주의할 점으로 두 가지를 제안하였다. 첫째, 다른 대부분의 이론과 마찬가지로, 모든 수학적 개념에 적용 가능하지는 않다. 구상화 이론은 개념의 조작적 측면의 선재를 통한 구조적 측면의 개념의 전이를 가정하기 때문에, 특히 직관에 의한 구조적 측면의 개념 습득이 바로 이루어지는 기하 개념에 적용되기 어렵다. 둘째, 일부 수학적 개념은 교육 목표에 따라 조작적 측면(대상화)의 습득만을 필요로 하고, 일부 개념은 구조적 측면(구상화)까지 습득을 필요로 한다. 이와 관련하여 Sfard는 대상화에서 구상화로의 전이는 학생에 따라 쉽지 않은 과정이라고 추가적으로 밝혔다.

한편, Sfard(1991)는 구상화 수준을 학생의 겉으로 드러나는 표현, 행동, 태도에 초점을 맞추어 설명하고, 학생의 개념 발달에 관한 수준별 진단을 위해 다음과 같이 언급하였다.

> 우리는 학생의 행동, 태도, 기능 등 외적인 특징을 이용하여 개념 형성 수준을 기술할 수밖에 없을 것이다. 구체화된 결과는 학생을 진단하는 도구가 되고, 학생의 개념에 관한 구조적 사고 능력까지도 측정할 수 있을 것이다(p. 18).

[표 1] Sfard의 정수, 복소수, 함수 개념화 수준
[Table 1] Sfard's conceptualization levels on Integer, Complex number, and Function

수준	정수	복소수	함수
내면화	수 세기와 뺄셈에 익숙해짐.	제곱근 계산에 익숙해짐.	독립변수와 종속변수를 구분하고, 함숫값을 능숙하게 구함.
대상화	단순한 뺄셈뿐만 아니라 다른 연산, 즉 결합, 교환, 분배법칙 등의 복합연산에도 익숙해짐.	제곱근의 역연산 또는 다른 대수적 법칙 및 복잡한 복소수 계산에 익숙해짐.	함수의 그래프 그리기, 합성하기, 역함수 찾기 등에 익숙해짐.
구상화	환의 개념을 몰라도 정수의 집합을 환으로 사고하며 전체적이고 구조적인 성질을 파악하기 시작함.	복소수도 실수와 같이 수로 간주하기 시작함.	함수를 변수로 간주하기 시작함. (예: 미분방정식, 매개변수방정식)

Sfard의 설명과 같이 수학 개념의 형성 수준별로 학생의 표현에 관한 분석을 거친 후 진단 및 평가가 이루어질 수 있다. 그러나 중간고사나 기말고사와 같은 총괄평가 과정에서는 과정적인 측면이 강한 Sfard 구상화 수준을 적용하는 데 있어서 수학 내용상 구분 기준이 모호한 측면이 있다.

2. 선행 연구

정은실(2001)은 Sfard의 개념 형성 이론을 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로 발전하는 과정으로 보고, 내면화 단계, 압축 단계, 실재화 단계[1]로 구분하였다. 내면화와 압축 단계는 점진적인 양적인 변화로, 실재화 단계는 도약이 이루어지는 질적인 변화로 보고, 이를 통해 상위 개념으로의 수준 발달 과정을 설명하였다. 또한, 수학적 개념에 대한 특이성으로, 최초에는 과정적 측면을 가지고 있으나 나중에는 과정과 대상이라는 이중성을 소유하는 것으로 소개하였다.

유윤재(2012)는 어떤 일련의 과정이 새로운 개념적 대상으로 조직되는 구성 과정을 대상화(Encapsulation) 이론으로 설명하고, 이러한 이론 중의 하나로 Sfard의 구상화 이론을 소개하였다. 유윤재(2012)는 정은실(2001)과 유사하게 Sfard 이론을 소개하였지만, Sfard 이론에서 추가적으로 어떤 개념을 구성하는 과정에 대한 이해가 충분하지 않은 경우의 대상을 의사 구조적(Pseudo-structural) 대상으로 소개하였다. 그 예로 극한 개념을 학습하지 않은 중학생에게 0.3333…의 개념이 의사 구조적 개념이라고 설명하였다. 또한 개념의 구조적 측면은 학습자가 필요로 하지 않을 경우 제시하지 않아야 한다는 Sfard의 견해도 소개하였다.

오국환, 박정숙, 권오남(2017)은 APOS 이론, 물화 이론[2], 프로셉트(Procept) 개념을 이용하여 과정과 대상의 관점에서 교과서의 무리수 단원을 분석하였다. 수학적 지식이 가진 과정과 대상의 측면에서 분석틀을 만들어 수학교과서가 학생의 무리수 개념 이해에 어떠한 영향력을 미칠 수 있는지를 분석하였다. 또한 교과서에 다양한 표상, 즉 '순환하지 않는 무한소수', '분수로 표현되지 않는 수', '수직선', '근호 안의 수가 유리수의 제곱이 아닌 수'을 사용하고 있지만 이러한 표상 사이의 전환에 관한 논의가 미비하다고 제안하였다.

이상과 같이 국내에서는 Sfard의 구상화 이론에 관한 연구가 이론을 소개하는 정도로 이루어졌다.

국외에서는 Sfard(1992)가 구상화 이론을 적용하기 위한 후속 연구로 함수 개념의 조작적 훈련을 통한 구조적 개념의 이해에 관한 실험을 실시하였다. 이 연구 결과를 통해 구상화 수준의 이해에는 시간, 개인적인 동기 및 다른 요인들이 다양하게 반영되므로 교수를 통한 구상화는 쉽지 않다고 제안하였다. Sfard & Linchevski(1994a)는 방정식과 부등식 개념의 연구를 통하여 학생의 산술 계산에서 대수 계산으로의 전이의 어려움을 설명하면서, 이차부등식에서 학생이 쓴 해답이 학생의 사고와 다를 수 있음을 주장하였다. 특히, 의사 구조적 개념을 다음 수준 개념화의 실패 원인으로 지적하였다. 또한 Sfard & Linchevski(1994b)는 대수 개념에 구상화 이론을 적용하여 조작적 개념화를 통한 구조적 개념화를 설명하였다. 이 연구에서 Sfard는 대수식이 계산 과정, 하나의 수, 함수 등으로 인식될 수 있다는 것을 보이고, 하나의 문자를 추가함으로써 함수군 또는 이변수함수로 인식될 수 있음을 언급하였다. 이 연구에서도 의사 구조적 개념화가 학생의 구상화에 걸림돌이 되는 것으로 지적하며, 개념화의 단계마다 학생이 개념의 의미를 숙고할 수 있도록 교수법의 개선을 촉구하였다. 이와 같이 구상화 이론에 대한 Sfard의 후속 연구를 살펴보면 수학 개념의 조작적이고 구조적인 측면을 주로 다루는 반면에, 구상화 이론의 수준을 구분하는 명확한 기준을 제시하지 않고 있다.

Goodson-Espy(1998)는 구상화 수준의 전이를 설명하기 위하여 문제해결 상황에서 Cifarelli(1988)의 반영적

1) Sfard의 개념 형성 수준을 정은실(2001)의 연구에서는 내면화, 압축, 실재화 단계로 번역하여 사용하였고, 이 연구에서는 내면화, 대상화, 구상화 수준으로 번역하였다. 이는 Piaget의 연구에서 사용되는 용어 condensation(압축)의 의미가 Sfard의 연구에서 도입하는 condensation(대상화)의 의미와 차이가 있기 때문이다. 즉, Piaget는 condensation 수준의 아동이 가역성을 보유하지 않은 것으로 본 반면에, Sfard는 정수, 복소수, 함수의 예시를 통해 condensation 수준에 가역성을 포함하고 있다고 이 연구에서 해석하였기 때문이다.

2) 물화 이론은 이 연구에서의 구상화 이론과 동일하다. Sfard의 이론을 해석하는 관점을 적용하여 이 연구에서 다른 용어로 번역하여 사용하였다.

추상화 단계를 도입하였다. Cifarelli는 Piaget의 반영적 추상화를 재인지(Recognition), 재표상(Re-presentation), 구조적 추상화(Structural abstraction), 구조적 인식(Structural awareness)의 4단계로 구분하였고, Goodson-Espy는 이러한 4단계를 도입하여 구상화 수준을 설명하였다.

Wille(2009)는 Sfard의 이론을 조작적인 측면과 구조적인 측면으로 나누어 변수를 처음 배우는 학생의 변수 개념 습득 정도를 설명하였다. 문법 수업 후 변수의 구조화 정도를 분석함으로써 학생의 개념 이해 수준이 Sfard의 이론에서와 같이 내면화, 대상화, 혼합 단계, 구상화 수준에 분포한다는 것을 밝혀내었다. 그러나 대상화 단계에서 구상화 단계로의 전이는 설명하기 어렵다고 하였다. Zerpa(2016)는 Sfard 이론을 확장하여 개념 형성의 4단계 모델을 제안하였다. Zerpa는 구상화 수준을 약한 수준의 구상화, 강한 수준의 구상화의 두 가지 수준으로 다시 구분하여 제시하였다. 다시 말하여, 구상화 수준에서 개념이 심리적 또는 존재론적 전이의 발생 여부로 구분하였다. 예를 들어, 함수 개념 습득에 있어서 합성함수 또는 역함수의 기능적인 측면이 숙달(대상화)되었지만, 함수 자체를 독립변수로 인식하는지의 여부에 따라 구상화 수준을 다시 두 수준으로 구분하였다.

Sfard의 구상화 이론과 관련한 선행연구 분석 결과, 구상화 이론에서 제안하는 개념 형성의 세 수준을 구분하여 설명하려는 시도는 있었지만, Piaget 이론의 가역성을 판단 기준으로 적용한 연구는 찾아보기 어렵다. 그리하여 이 연구에서는 수학 개념화의 수준 분석을 위하여 수학적 내용상 판단 준거로 가역성을 도입하고 그 타당성을 Piaget 이론에 근거하여 고찰하고자 하였다. 이를 토대로 이차방정식의 근의 공식 개념화 수준 분석을 위한 검사 도구를 개발하여 적용하고자 하였다.

3. Sfard의 구상화 이론의 수준 구분 기준: Piaget 이론의 가역성

Sfard의 구상화 이론의 핵심은 Piaget 이론의 조작적 측면을 내면화와 대상화 수준으로 구분하여 제시한 교육적 적용 이론이라고 볼 수 있다. 그러나 실질적으로 수학적 개념의 형성 단계를 세 수준으로 구분하기가 쉽지 않다. 이에 이 연구의 기본 가설은 내면화 수준과 대상화 수준의 결정적 구분을 조작의 성질 중 가역성을 완전히 가지느냐 그렇지 않느냐로 구분할 수 있다는 것이다. 이 절에서는 Sfard의 구상화 이론에 도입되는 위계적 수준과 관련된 내용을 기준으로 Piaget(1971) 이론의 내면화 과정과 반영적 추상화 과정, 조작, 구조적 측면을 고찰한 후에, 구상화 이론의 수준 구분 기준으로 Piaget의 가역성을 선택한 근거를 논해 보고자 한다.

첫째, Piaget의 이론은 아동의 대상에 대한 행동에서 시작하여 행동이 내면화되고 조작이 되어 반영적 추상화를 통한 쉠의 형성 이론으로 볼 수 있다. 내면화를 살펴보면, 어떤 개념이 실제 행동을 통한 조작이 수행되지 않더라도 말 또는 상징 등의 다른 표현으로 수행할 수 있으면 그 개념이 내면화되었다고 할 수 있다. 또한 쉠은 행동으로 반복 가능하고 일반화 가능한 것이다.

둘째, Sfard의 구상화 이론을 실제적으로 적용하기 위해서는 Piaget의 조작 개념을 이해하는 것이 필요하다. Piaget(1971)는 조작을 네 가지 기능 및 특징을 가지는 것으로 정의하였다([표 2] 참조). 첫 번째 특징은 내면화 가능한 행동이다. 즉, 실제로 수행될 수 있을 뿐만 아니라 사고 속에서도 수행될 수 있는 행동이다. 두 번째 특징은 가역적인 행동이다. 가역성에는 두 가지 유형이 있다. 역 또는 부정으로서의 가역성과 단순한 순서의 반대로서의 가역성이다. 세 번째 특징은 조작의 보존성 또는 불변성을 가정한다. 예를 들면, 덧셈에서 합의 불변성(예, 5+1=4+2=3+3)이다. 네 번째 특징은 조작이 홀로 이루어지지 않는다는 것이다. 즉, 조작은 일종의 조작의 체계 또는 전체 구조와 관련되어 있다. 또한 Piaget는 반영적 추상화를 조작의 연합으로 설명하였다. 그리하여 논리-수학적 사고 과정을 반영적 추상화 과정이며 조작의 연합으로 볼 수 있다.

셋째, Piaget의 인식론은 구조주의 이론이다. 이러한 구조는 세 가지 특징을 가진다. 먼저, 구조는 전체성을 가진다. 즉, 구조는 전체 시스템 안에서 원소들이 만족하는 법칙이 존재한다. 예를 들어, 수 그룹은 결합법칙, 교환법칙, 닫혀있다 등의 성질을 만족한다. 다음으로, 정적이지 않고 하나의 원소가 다른 원소로 변환되는 변환법칙을 만족한다. 이것은 스키마의 동화, 조절 작용의 가능성을 의미한다. 마지막으로, 구조는 자기조절의 기능을 가진다. 변환에 외부의 도움이 필요 없다는 것으로, 스키

마의 동화와 조절의 결과가 구조 내부에서 일어나는 것으로 볼 수 있다. 또한, Piaget는 조작적 사고의 세 가지 측면이 대수 구조, 순서 구조, 위상 구조와 일대일 대응하고, 세 가지 구조가 융합되어 작용하는 것으로 설명하였다.

Sfard는 이러한 Piaget 인지 심리학의 이론과 수와 함수의 역사적 발달 과정을 바탕으로, 개념 형성 단계를 세 수준, 즉 내면화 수준, 대상화 수준, 구상화 수준으로 구분하였다. 특히, 내면화 과정은 Piaget 이론의 용어를 그대로 적용하였다. 이에 Sfard의 구상화 이론은 Piaget 이론의 구조의 모든 특징을 가지고 있다고 할 수 있다.

그러나 지금까지 설명으로는 실질적으로 수학적 개념의 형성 단계를 세 수준으로 구분하기가 쉽지 않다. 그럼에도 불구하고 내면화 수준과 대상화 수준을 조작의 성질 중 가역성의 여부로 구분할 수 있다. 이것은 Sfard의 설명을 정리한 [표 1]에 제시된 정수, 복소수, 함수의 세 수준별 분석과 Piaget의 조작의 가역적 성질을 비교함으로써 그 유사성으로부터 도출되었고, 이를 정리하면 [표 2]와 같다. Piaget의 가역성은 많은 수학적 개념 형성 수준을 구분하는 실질적 준거가 될 수 있을 것이다. 또한 Piaget의 행동이 조작이 되고 반영적 추상화 과정을 거친다는 말을 Sfard의 말로 번역하면 내면화, 대상화, 구상화 과정을 거친다는 말로 바꿀 수 있다. 여기서도 행동과 조작의 구분은 가역성으로 구분 가능하다.

넷째, 학생의 수학 개념 형성에 있어서 가역성 보유 여부를 내면화와 대상화 수준의 구분 기준으로 주목한 이유를 두 가지 제시하면 다음과 같다. 먼저, Piaget는 '유전적 인식론'에서 가역성을 내면화 다음으로 조작의 주요 특징으로 들고, 가역성을 2가지 유형으로 나누어 구체적인 수학적 내용 예시를 들고 있다. 다음으로, Sfard의 구상화 이론에서 대상화의 용어 사용에 있다. Sfard(1991)는 직접적으로 언급하지 않았지만 '아동의 판단과 추론'에서 아동이 논리적으로 추론하기 이전에 단순한 사건의 병렬 및 압축[3]을 통해 사고한다고 주장하였다. Piaget는 압축 수준의 아동이 가역성을 보유하지 않은 것으로 보았다. 그러나 Piaget는 아동이 가역성을 가진 후 개념의 일반화의 필요성을 느끼기 시작하는 것으로 주장하였다. 다시 말하면, 아동이 가역성을 가지기 전에는 단순한 사건의 나열과 회상의 어려움을 느끼며 자신이 제시한 명제에 원인을 찾을 필요성을 가지지 못하는 것으로 설명하였다. 그러나 아동은 가역성, 즉 거꾸로 생각하는 능력을 가지기 시작하면서 개념의 일반화의 필요성을 느끼기 시작한다고 보았다. 또한 학생 자신이 제시한 명제에 논리적 모순을 찾고 원인을 찾아 수정하기 시작한다고 보았다.

[표 2] Sfard의 개념 형성 수준과 Piaget의 조작적 특징
[Table 2] The conceptualization levels of Sfard and the characters of Piaget's operation

Sfard의 개념 형성 수준	Piaget의 조작적 특징
내면화	· 내면화될 수 있는 행동, 즉 행동이 직접 실행뿐만 아니라 사고 속에서도 수행 가능함.
대상화	· 가역적인 행동 - 유형 1: 역 또는 부정. 예) $+A-A=0$, $+1-1=0$ - 유형 2: 상반에 의한 가역성 (순서의 역) 예) '$A=B$'와 '$B=A$'는 같다.
	· 보존성, 불변성[4]
구상화	· 조작만으로는 존재하지 않고, 조작은 연산 체계 또는 전체 구조와 관련됨.

이러한 이유로 이 연구에서는 가역성을 학습자의 수학적 개념 형성을 위한 최소한의 요건으로 본다. 다시 말하면, 대상화 수준에서 학습자의 가역성의 보유 여부가 Sfard가 쉽지 않은 과정이라고 강조한 학습자의 구상화 수준으로의 수준 전환의 심리적 전이의 시발점이고, 다른 개념과의 연결 고리이며, 다음 수준의 개념 학습의 필수 요건으로 본다.

3) Piaget의 압축의 영어 원어는 Sfard의 대상화의 영어 원어인 condensation와 동일하다. 하지만 언어 사용에 대한 정의에 차이가 있어 다르게 번역하여 사용하였다.

4) 조작의 세 번째 특징인 보존성과 불변성은 Sfard의 개념 형성 수준에서 대상화 수준과 구상화 수준에 모두 해당된다고 볼 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 근의 공식 개념 형성 수준 분석틀

이 연구에서 이차방정식의 근의 공식 개념이 형성된다는 것은 이차방정식을 정확하게 구분하고, 근의 공식을 암기하여 정확하고 신속하게 적용할 수 있으며, 다양한 상황에서 근의 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 것으로 정의한다. Sfard의 구상화 이론에 근거하여 이차방정식의 근의 공식에 관한 수행 능력과 학생의 태도 표현에 관한 수준을 분석하기 위하여, 이러한 개념 형성의 세 수준을 [표 3]과 같은 특징으로 구분하였다. 이는 학생의 행동, 태도, 기능 등 외적인 특징을 이용하여 개념 형성 수준을 기술할 수밖에 없다고 한 Sfard의 언급을 반영한 것이다.

[표 3] 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준 분석틀
[Table 3] The framework for the analysis of conceptualization levels on the quadratic formula

수준	이차방정식의 근의 공식 개념 형성의 특징
내면화	- 이차방정식을 구분하고, 근의 공식을 암기하지만, 공식의 적용이 서툴다. - 공식을 써놓고 근을 구하거나, 공식을 써놓지 않고 근을 구하면 느리고 잦은 실수가 있다.
대상화	- 공식을 써놓지 않더라도, 근의 공식을 신속하고 정확하게 구분하여 사용할 수 있고, 머릿속 계산만으로 근의 개수 판별이 가능하다. - 공식을 써놓고 문제를 풀더라도 속도와 정확도가 높다.
구상화	- 다양하고 복잡한 문제 상황에서 문제 해결의 도구로 근의 공식 또는 판별식을 선택하여 사용 가능하다. 예를 들어, 원과 직선의 관계에 관한 문제를 판별식을 통한 방정식의 근의 개수로 해석이 가능하다.

좀 더 자세하게 살펴보면 다음과 같다. Sfard(1991)는 대상화 수준을 개념이 구성되는 전체 과정이 하나의 조작 단위가 되며, 과정의 세부적인 사고 없이도 개념의 전체 과정이 수행되는 수준으로 보았다. 이에 이 연구에서는 이차방정식의 근의 공식을 신속하고 정확하게 구분하여 사용할 수 있다는 것이 이러한 대상화 수준의 정의에 해당한다고 판단하였다. 또한 대상화 수준에 이르지 못한 것을 내면화 수준으로 보았고, 이는 근의 공식을 신속하고 정확하게 사용하는 것이 서툰 수준으로 볼 수 있다. 마지막으로 구상화 수준에 대하여, Sfard는 학생의 개념에 대한 심리적 전환으로 보고, Piaget 반영적 추상화 과정을 반영하여 사고 대상이 사고 수단이 되는 반사와 반영의 과정으로 보았다. 이에 이차방정식의 근의 공식을 문제해결 과정의 도구로 이용할 수 있는 것이 이 수준에 해당한다고 해석하였다.

이와 같이 정의한 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준을 요약하면, 내면화 수준에서는 이차방정식을 정확하게 구분하고 근의 공식을 암기하는 것으로, 대상화 수준에서는 근의 공식을 정확하고 신속하게 적용할 수 있는 것으로, 구상화 수준에서는 다양한 상황에서 근의 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 것으로 정의하여 구분하였다.

2. 검사 도구와 개념 형성 수준 구분 기준

Sfard의 수학 개념 형성 수준 구분은 학생의 겉으로 드러나는 표현, 행동, 태도 등의 과정적 측면으로 설명되어 있고 수학적 내용에 대한 명확한 구분 기준이 없기 때문에 실질적 적용이 쉽지 않다. 특히 세 수준 구분에 가장 중요한 단계는 대상화 수준 구분이다. 이에 Sfard가 제시한 다른 예시([표 1] 참조)에서 개념 형성의 세 수준을 분석해 보면, 대상화 수준에 Piaget의 가역성이 반영되어 있는 것을 알 수 있다([표 2] 참조). 이 연구에서 분석하고자 하는 이차방정식의 근의 공식 개념에는 가역성이 반영된 것으로 볼 수 있다.

Sfard의 대상화 수준을 이차방정식의 근의 공식에 적용하면 '이차방정식의 근의 공식을 암기하고 선행 개념인 유리수와 제곱근의 계산을 이용하여 신속하고 정확하게 사용할 수 있다.'로 표현할 수 있다. 이 표현을 세 부분으로 나누어 검사 도구를 구성하였다. 최종 검사 도구[5]는 총 8문항으로 구성되었고, 1번에서 6번까지는 구

5) 검사 도구의 타당성을 검증하기 위해 사전 검사를 실시하였

상화 수준에 해당하는 이차방정식의 근의 공식에 관한 계산 문제이고, 7번과 8번 문항은 이차방정식의 근의 공식을 활용하는 구상화 수준의 문제이다.

좀 더 자세하게 살펴보면, 1번 문항은 이차방정식을 구분하는 문제로, 2번과 3번 문항은 암기한 근의 공식을 그대로 적용할 수 있는 문제로 구성하였다. 3번에서 6번 문항은 유리수와 제곱근에 관련된 가역적 성질인 기본적 연산 성질(결합, 교환 법칙 등)이 잘 드러날 수 있도록 계수가 분수와 소수인 경우로 구분하여 문제를 구성하였다. 7번과 8번 문항은 구상화 수준을 구분하기 위하여, 중학생 대상의 검사 도구에서는 중학생의 대상화 수준에서 해결할 수 있는 활용 문제로 구성되었고, 고등학생 대상의 검사 도구에서는 다른 내용과도 연계해서 해결할 수 있도록 구성되었다. 또한 7번과 8번 문항의 경우 다른 풀이 방법을 동시에 기술할 수 있도록 답란을 두 개로 구분하여 제시하였다.

이때, '가역적 성질이 구체적으로 어디에 반영될 수 있는가?'라는 의문이 제기될 수 있다. 이 연구에서는 다음 두 가지 의미로 가역성을 반영하였다. 먼저 2번과 3번 문항에서 외운 공식을 정확하게 사용할 수 있는 것은 자신의 기억을 역으로 추론하여 논리적 순서에 맞게 쓸 수 있다는 것이고, 두 번째로 3번~6번 문항의 풀이 시 먼저 각 계수들의 최소공배수로 바꾼다는 것 자체가 정수와 유리수의 성질을 알고 이용한다고 볼 수 있다.

한편, 검사 도구를 활용하여 학생의 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준을 구분하는 구체적인 기준은 [표 4]와 같다. Sfard의 이론에서는 내면화 이전 수준에 대한 언급이 없다. 이 연구에서 내면화에 이르지 못한 학생을 구분하기 위하여 내면화 이전 수준으로 명명하여 분류하였다.

1번 문항은 근의 공식 계산 능력에 영향을 미치는 정도가 약하다고 판단되어 수준 판정 기준에서 제외되었다. 이 연구에 이용된 검사 도구의 2~6번 문항이 대상화 수준의 문제로, 5문항에 모두 옳게 응답하여야 이차방정식의 근의 공식 개념이 학생에게 대상화 수준으로 형성된 것으로 볼 수 있다. 그러나 수학교육 전문가 집단 7명은 문제 풀이 과정에서 할 수 있는 실수를 감안하여 1문항까지 실수를 허용하였고, 2문항 이상 틀리는 학생은 대상화 수준이 아닌 것으로 합의하였다. 가장 우려되는 상황은 '1번에서 3번 중 2문항을 틀리고, 구상화 수준의 문제를 포함하여 나머지 6문항에 모두 옳게 응답하는 경우를 내면화 수준으로 볼 수 있는가?'이다. 검사 결과 이러한 상황은 발생하지 않은 것으로 나타났다.

[표 4] 검사 도구에 따른 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준 구분 기준

[Table 4] Students' conceptualization level on the formula of root of quadratic equation based on the test tool

수준	개념 형성 수준 구분 기준
내면화 이전	이차방정식의 근의 공식을 암기하지 못하는 경우
내면화	이차방정식의 근의 공식을 알지만 대상화 수준에 이르지 못한 경우로서, 2번~6번 문항에서 2개 이상 틀린 경우
대상화	암기한 근의 공식을 그대로 적용하고, 유리수와 제곱근에 관련된 가역적 성질인 기본적 연산 성질(결합, 교환 법칙 등)을 적용하는 경우로서, 2번~6번 문항에서 1개 이하 틀린 경우
구상화	대상화 수준에서 7번과 8번 문항에 모두 옳게 응답한 경우

3. 연구 대상

이 연구는 참여에 동의한 D광역시 소재 중학교 3학년 학생 42명(남: 20, 여: 22), 고등학교 1학년 여학생 55명을 대상으로 이루어졌다. 검사에 참여 가능한 학생을 연구에 참여시킴으로 인해 중학교와 고등학교의 학생의 학업 성취 수준과 성별의 분포가 동일한 조건에서 연구가 이루어지지 않았다는 한계가 있다. 중학교 교사 1

다. 사전 검사 도구는 중학교 내용으로 8문항(대상화 수준 6문항, 구상화 수준 2문항)으로 구성하였다. 중학교 3학년 6명을 대상으로 사전 검사를 실시하였고, 검사 결과를 토대로 7명의 수학교육 전문가 집단(수학교육 전공자 1명, 수학교육 전공 박사과정 3명, 현직 교사 4명)에서 최종 검사 도구를 확정하였다. 사전 검사 도구에서 실근이 없는 문제를 삭제하고, 어려워 해결하지 못한 문제의 수준을 낮추어 조정하였다.

명과 고등학교 교사 1명이 각 학년의 두 학급을 대상으로 검사를 실시하였다. 연구 대상자의 대략적인 특징을 살펴보면 다음과 같다.

중학생의 경우 평소 수업 중 교사의 발문에 50% 정도의 학생은 적극적으로 응답하고, 5명을 제외한 나머지 대부분의 학생도 소극적이지만 성실한 태도를 지니고 있다. 중학생의 수학 성취도 수준은 고르게 분포되어 있다. 반면에 고등학생의 경우 6월 전국 모의고사 기준으로 1등급 14명, 2등급 41명으로 대부분 상 수준 학생들로 구성되었다. 평소 수업에서 교사의 발문에 40% 정도는 적극적으로 응답하고, 나머지는 적극적이지는 않지만 성실한 태도를 지니고 있다.

검사는 중학생의 경우 40분, 고등학생의 경우 35분 동안 이루어졌다. 검사를 실시하는 교사가 이차방정식의 근의 공식을 알려주지 않았고, 검사가 진행되는 동안 학생들 간의 상호작용(대화)이 없었던 것을 확인하였다.

4. 자료 분석

중학생과 고등학생의 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준 분석을 위해 검사 결과를 직접 채점하고 [표 4]의 기준에 따라 수준별 빈도와 백분율을 산출하였다.

그리고 대상화 수준의 2~6번 문제에 대하여 내면화 및 대상화 수준의 학생의 응답을 대상으로 오류를 분류하였다. 오류 분석은 '관련 선수 개념의 대상화 여부가 다음 개념의 구상화 수준에 영향을 줄 것이다.'라는 가정하에 이차방정식의 근의 공식 대상화에 필요한 3개의 선수 개념을 학생이 자주 범하는 실수의 요소로 보고, 이 3개의 선수 개념을 기준으로 이루어졌다. 또한 이차방정식의 근의 공식의 대상화 수준은 문자, 유리수, 무리수 등의 선수 개념의 대상화 수준 형성이 선행되어야 하고, 이러한 선수 개념의 숙달 정도에 공식의 암기 및 유연한 적용이 대상화 수준에 필수 요소라 할 수 있다. 이에 이 연구에서는 이차방정식의 근의 공식 개념 형성의 선수 능력을 정수에 대한 결합·분배·교환법칙의 수행 능력, 분수에 대한 결합·분배·교환법칙의 수행 능력, 제곱근 계산 능력 등의 3가지로 구분하고 오류를 분석하였다. 정수는 음의 정수가 분수와 분배법칙이 결합된 문제에서 학생의 실수가 자주 발생하여 분수 개념과 구분하였다. 이 3가지 외에 사소한 실수나 다른 기능으로 인한 오류를 기타 오류로 분류하였다.

이러한 4종류의 오류를 분석하기 위하여 정수의 연산 수행 능력의 오류를 I, 분수의 연산 수행 능력의 오류를 Q, 제곱근 계산의 오류를 S, 기타 오류를 D, 무응답을 E로 각각 코딩하였다. 복합적인 오류는 오류 분석의 편의를 위해 최초 선수 개념의 오류를 선정 기준으로 하였다. 이러한 오류 분석과 더불어 세 가지의 선수 개념 형성이 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준에 어느 정도 영향을 끼치는지 분석하기 위하여 가상 실험을 하였다. 즉, 가상으로 해당 선수 개념을 이해한다고 가정하였을 때 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준에 어느 정도 변화가 있는지를 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

1. 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준 분석

중학교 3학년과 고등학교 1학년 학생의 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준 분석 결과는 [표 5]와 같다. 먼저, 수학 성취도가 다소 고르게 분포된 중학생을 대상으로 이차방정식의 근이 공식 개념 형성 수준을 살펴보면 다음과 같다. 이차방정식의 근의 공식을 암기하지 않은 내면화 이전 수준은 연구에 참여한 중학생 전체의 약 7%이고, 대상화 수준에 해당하는 5개의 문항 중에서 2개 이상을 틀림으로써 이차방정식의 근의 공식을 알지만 계산에 익숙하지 않은 내면화 수준은 약 38%인 것으로 나타났다. 이차방정식의 근의 공식을 알고 정확하게 근을 구할 수 있는 대상화 수준의 중학생은 약 52%이고, 이차방정식의 근의 공식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는 구상화 수준은 1명으로 나타났다. 중학교 과정에서 이차방정식 근의 공식 개념이 대상화 수준의 개념 형성을 요구한다는 것을 고려할 때, 이러한 결과는 내면화 이전 수준과 내면화 수준에 해당하는 약 45%의 중학생이 이차방정식의 근의 공식을 외우지 않거나 외우더라도 근을 구하는 데 정확한 계산 능력이 부족하므로, 대부분의 중학생이 대상화 수준에 도달할 수 있도록 교수·학습을 계획할 필요가 있음을 드러낸다.

다음으로, 전국 모의고사 등급 기준으로 1~2등급에 해당하는 상 수준에 해당하는 고등학생을 대상으로 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준을 살펴보면 다음과

같다. 내면화 이전 수준의 고등학생은 연구에 참여한 고등학생 전체의 약 5%이고, 내면화 수준의 경우 약 16%인 것으로 나타났다. 전국 모의고사 등급의 상 수준에 해당하는 고등학생임을 고려할 때, 약 16%의 고등학생이 중학교 수준에서 요구하는 대상화 수준에 도달하지 않은 것은 다소 의외의 결과라고 할 수 있다. 또한 대상화 수준의 고등학생은 연구에 참여한 고등학생 전체의 약 40%이고, 구상화 수준도 약 40%에 해당하는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 고등학교 과정에서 이차방정식의 근의 공식을 활용하는 수준을 요구하므로, 연결되는 내용의 교수・학습 단계에서 구상화 수준에 도달하지 못한 약 60%에 해당하는 고등학생을 대상으로 이차방정식의 근의 공식에 대한 개념 형성 수준을 향상시킬 수 있는 보정 교육의 필요성을 드러낸다.

[표 5] 중・고등학생의 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준 분석 결과
[Table 5] The result of Students' conceptualization level on the formula of root of quadratic equation

수준	중학교 3학년	고등학교 1학년
	인원 수(%)	인원 수(%)
내면화 이전	3 (7)	3 (5)
내면화	16 (38)	9 (16)
대상화	22 (52)	22 (40)
구상화	1 (3)	21 (38)
합계	42 (100)	55 (100)

2. 오류 유형 분석

먼저, 이 연구에 참여한 42명의 중학교 3학년 학생 중에서 2~6번 문항에 모두 옳게 응답한 대상화 수준의 중학생 10명과 구상화 수준에 해당하는 1명을 제외한 31명을 대상으로 대상화 수준의 5문항에 대한 오류를 분석하였다. 오류 코딩 결과는 [표 6]과 같다.

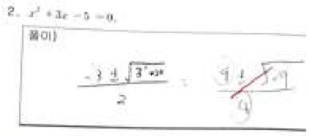
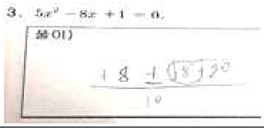
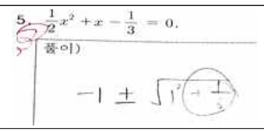
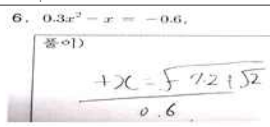
내면화 이전 수준을 제외하고 수준별 각 오류가 차지하는 비율을 살펴보면, 내면화 수준에서는 정수 계산의 오류(I) 17%, 분수 계산의 오류(Q) 21%, 기타 오류(D) 29%, 무응답(E) 33%로 나타났다. 대상화 수준에서는 정수 계산의 오류(I) 10%, 분수 계산의 오류(Q) 30%, 제곱근 계산의 오류(S) 10%, 기타 오류(D) 50%로 나타났다. 내면화 수준과 대상화 수준 모두에서 정수와 분수의 계산 오류 비율이 상대적으로 높은 것을 알 수 있다. 이는 중학생의 경우 유리수의 사칙계산 지도에 더 많은 관심을 가져야 함을 시사한다. 대상화 수준에서는 기타 오류의 비율이 상대적으로 높게 나타났지만 다른 5개의 문제를 옳게 해결하였기 때문에 단순 실수로 볼 수 있다.

[표 6] 중학생의 문항별 오류 코딩
[Table 6] The coding of middle school students' errors

수 준	학생	문항 번호				
		2	3	4	5	6
내면화 이전	1	E	E	E	E	E
	2	Q	I	D	D	D
	3	D	E	E	E	E
내면화	4		E	E	E	E
	5		D	E	E	E
	6		I	E	Q	I
	7		E	E	E	E
	8		D		Q	I
	9	S		D	Q	
	10	D	D	D		
	11			I	Q	Q
	12	D		D		
	13		E	E	E	E
	14				Q	I
	15		D	D		Q
	16		D	D		D
	17		I	I	Q	
	18			Q		I
	19	D	Q		Q	
대상화	20				Q	
	21				Q	
	22				Q	
	23			D		
	24		D			
	25			S		
	26				D	
	27			D		
	28					I
	29				D	
	30					D
	31		D			

이차방정식의 근의 공식 개념과 관련된 문제 풀이 과정에서 나타나는 오류와 관련하여 중학생의 경우 주목할 만한 하나의 사례가 발견되었다([표 7] 참조). [표 6]에서 2번 중학생은 이차방정식의 근의 공식을 외우고 있지만 8문항 모두 틀린 경우로 내면화 이전 수준으로 분류되었다. 2번 중학생은 1번 문제에서 이차방정식을 찾는 데 어려움을 드러내었고, 2번과 3번 문제 풀이 과정에서 음수와 분수의 계산에서 오류를 드러내었다. 또한 4~6번 문제 풀이 과정에서는 이차방정식의 계수를 근의 공식에 대입하는 데에 어려움을 가지고 있음을 보여주었다.

[표 7] 2번 중학생의 문항별 풀이 및 오류 유형
[Table 7] Solutions and error types by No. 2 9th student

문제 풀이	오류 유형
	Q
	I
	D
	D
	D

다음으로, 고등학교 과정에서 이차방정식의 근의 공식에 대한 개념 형성은 구상화 수준을 요구한다. 이 연구에 참여한 55명의 고등학교 1학년 학생 중에서 내면화 이전 수준과 내면화 수준뿐만 아니라 대상화와 구상화 수준에서 오류를 드러낸 학생을 대상으로 대상화 수준의 5문항에 대한 오류를 분석하였다. 오류 코딩 결과는 [표 8]과 같다.

[표 8] 고등학생의 문항별 오류 코딩
[Table 8] The coding of high school students' errors

수준		문항 번호				
	학생	2	3	4	5	6
내면화 이전	1	E	E	E	E	E
	2	E	E	E	E	E
	3	D	D	D	D	D
내면화	4	D	D	D	Q	D
	5			I	D	D
	6		D		D	
	7	D			D	D
	8				E	E
	9		D		D	D
	10	D	E	E	E	E
	11		D			D
	12		D		D	D
대상화	13					D
	14				D	
	15					I
	16		D			
	17	I				
	18		D			
	19				D	
	20				D	
	21					D
	22				I	
	23					E
	24					I
	25	D				
	26	D				
구상화	27					I
	28		Q			
	29				I	
	30					I
	31					I
	32				Q	
	33					I
	34					D
	35		Q			

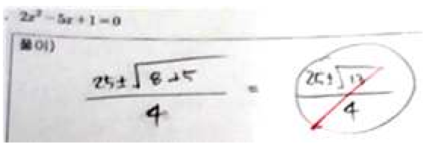
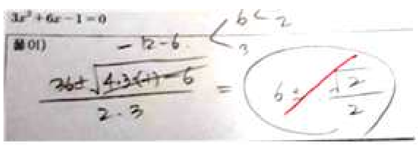
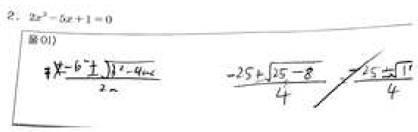
내면화 이전 수준을 제외하고 수준별 각 오류가 차지하는 비율을 살펴보면, 내면화 수준에서는 정수 계산의

오류(I) 4%, 분수 계산의 오류(Q) 4%, 기타 오류(D) 71%, 무응답(E) 21%로 나타났다. 대상화 수준에서는 정수 계산의 오류(I) 27%, 제곱근 계산의 오류(S) 7%, 기타 오류(D) 60%로 나타났다. 구상화 수준에서는 정수 계산의 오류(I) 56%, 분수 계산의 오류(Q) 33%, 기타 오류(D) 11%로 나타났다. 고등학생의 내면화와 대상화 수준에서는 중학생과 비교하여 기본적인 선수 개념 계산 오류보다 공식을 적용하는 과정에서 상대적으로 더 많은 오류를 보이는 것을 알 수 있다.

반면에 구상화 수준 학생의 경우 다른 수준과 비교하여 유리수 계산 오류가 상대적으로 더 많았다. 이와 같이 구상화 수준 학생이 유리수 계산에서 오류를 보이는 원인을 계산 능력이 부족해서라기보다는 단순한 계산 실수로 보는 것이 더 적절할 것으로 보인다.

고등학생의 이차방정식의 근의 공식 개념에 대한 오류 분석을 하는 과정에서 [표 9]와 같은 눈에 띄는 2가지 사례가 발견되었다.

[표 9] 고등학교 3, 4번 학생의 문제 풀이
[Table 9] Test solutions by No. 3 & No. 4 10th students

학생 번호	문제 풀이
3	 
4	 

2가지 사례의 경우 선수 개념 계산 과정은 옳지만 이차방정식의 근의 공식 자체에 오류를 가지고 있는 것으로 드러났다. [표 8]에서 내면화 이전 수준의 3번 고등학생은 틀린 근의 공식을 적용하였고, 내면화 수준의 4번 고등학생은 근의 공식을 외우지만 틀리게 적용하였다. 이 두 학생은 모두 근의 공식 암기와 적용 방법을 정확하게 한다면 대상화 수준에 도달하는 것으로 판명되었다. 이러한 사례는 고등학교 과정에서 이차방정식의 근의 공식을 정확하게 다룰 수 있도록 안내하는 기회를 제공하는 것이 필요함을 드러낸다.

3. 오류의 가상 교정에 따른 수준 변화

정수 계산, 분수 계산, 제곱근 계산의 세 가지 선수 개념 형성이 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준에 어느 정도 영향을 끼치는지 분석하기 위하여 가상으로 오류를 교정한 실험을 하였다. 즉, 가상으로 오류가 나타나는 선수 개념을 교정하였다고 가정할 때, 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준에 변화가 있는지를 분석하였다.

먼저, 정수 계산 오류가 교정된다고 할 때, 중학생은 [표 6]의 14번, 17번, 18번 학생이 내면화 수준에서 대상화 수준으로 상승하였다. 그러나 대상화 수준에서 구상화 수준으로의 변화는 없었다. 고등학생은 모든 수준에서 변화가 없었지만, 구상화 수준에서 [표 8]의 27번, 29번, 30번, 31번, 33번 학생이 정수 계산 과정에서 주의를 기울인다면 8개의 문항에 모두 옳은 답을 하게 되는 것으로 나타났다.

다음으로, 분수 계산 오류가 교정된다고 할 때, 중학생은 [표 6]의 11번, 14번, 18번, 19번 학생이 내면화 수준에서 대상화 수준으로 상승하였다. 그러나 대상화 수준에서 구상화 수준으로의 변화는 없는 것으로 나타났다. 고등학생의 경우에는 정수 계산 오류 교정과 마찬가지로 분수 계산을 교정한다고 하여도 모든 수준에서 변화가 없지만, 구상화 수준에서 [표 8]의 28번, 32번, 35번 학생이 8개의 문항에 모두 옳은 답을 하게 되는 것으로 나타났다.

마지막으로, 제곱근 계산의 오류를 교정한다고 가정할 때에는 중학생과 고등학생 모두 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준에 변화는 없는 것으로 나타났다.

이는 내면화 이전 수준과 내면화 수준의 학생이 제곱근 계산을 옳게 한다고 단정하기는 어렵다. 유리수 계산에서 오류를 보이는 학생의 제곱근 계산 과정에서 오류 여부는 확인을 하지 않았기 때문이다. 그러나 이러한 결과를 통해 유리수 계산에 어려움이 없는 학생은 제곱근 계산에도 어려움이 없는 것으로 볼 수 있다.

이와 같이 선수 개념의 오류를 교정한 후에 수준 변화가 있는 중학교 3학년 학생을 대상으로 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준 변화의 비율(%)을 정리하면 [표 10]과 같다.

[표 10] 선수 개념 오류 보정에 따른 중학생의 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준의 변화
[Table 10] The change of the 9th students' conceptualization level of the formula of quadratic equation after remediating errors

교정 오류 유형	내면화	대상화
I	7%p 감소	7%p 증가
Q	10%p 감소	10%p 증가
S	변화 없음	변화 없음
I & Q	15%p 감소	15%p 증가
Q & S	2%p 감소	2%p 증가

이차방정식의 근의 공식 개념 형성을 위해서는 정수 계산, 분수 계산, 제곱근 계산의 세 개념에 대한 오류를 보정하여 개념 형성 수준이 각각 대상화 수준에 도달되는 것을 전제로 해야 한다. 이에 중학교 3학년 학생의 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준이 내면화 수준에서 대상화 수준으로 변화되는 비율은 정수 계산 오류 보정의 경우 약 7%p, 분수 계산 오류 보정의 경우 약 10%p, 유리수 계산 보정의 경우 약 15%p, 분수와 제곱근 계산 보정의 경우 약 2%p인 것으로 나타났다. 이는 유리수 계산 능력을 보정하면 추가적으로 약 15%의 중학생이 중학교 과정에서 요구되는 대상화 수준에 더 도달할 수 있을 것을 의미한다.

이러한 정수 계산 오류 교정, 분수 계산 오류 교정, 제곱근 계산 오류의 가상 교정 후 결과에서 중학생과 고등학생에게 공통으로 나타나는 2가지 특징을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 내면화 이전 학생의 경우 각각의 오류가 교정될지라도 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준의 변동은 일어나지 않았다. 둘째, 내면화 수준과 대상화 수준의 학생 모두 제곱근 계산 오류가 교정될지라도 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준에는 변동이 없었다. 이는 제곱근 계산 자체만 부족한 학생은 드물고, 내면화와 대상화 수준의 대부분의 학생이 유리수 계산에서 능력이 부족하다고 볼 수 있다.

V. 결론 및 제언

이 연구에서는 Sfard의 구상화 이론의 개념 형성 수준의 판단 준거로 Piaget 이론의 가역성을 도입하였다. 또한 구상화 이론을 이차방정식의 근의 공식에 적용하여 검사를 실시하고, 학생의 이차방정식의 개념 형성 수준을 내면화 수준 이전, 내면화 수준, 대상화 수준, 구상화 수준으로 구분하였다. 더불어 이차방정식의 근의 공식 개념의 선수 개념으로 정수 계산, 분수 계산, 제곱근 계산 등을 선정하여, 이 세 가지의 선수 개념 형성이 학생의 현재 개념 형성 수준에 영향을 미칠 것이라 가정하고 오류를 분석하고 교정하는 가상 실험을 실시하였다. 중학교 3학년과 고등학교 1학년 학생을 대상으로 조사한 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준과 오류 분석 결과를 바탕으로 교육적 시사점을 도출하면 다음과 같다.

먼저, 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준과 관련하여 중학교 과정에서는 기본적으로 대상화 수준을 요구하고, 고등학교 과정에서는 이 개념을 적용하여 다양한 문제를 해결할 수 있는 대상화 수준을 요구한다는 관점에서 이 연구 결과를 해석하고자 한다. 이러한 관점에서 볼 때, 중학교 3학년 학생의 경우 내면화 이전 또는 내면화 수준인 절반 정도의 중학생을 대상으로 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준을 대상화 수준으로 향상시키는 보충 교수・학습이 필요하다. 고등학교 1학년 학생의 경우 이차방정식의 근의 공식 개념을 활용하는 문제를 해결하는 상황에서 대상화 수준에 이르지 못한 약 20%와 대상화 수준에 해당하는 약 40%임을 감안하여 교수・학습을 설계하는 것이 필요하다.

다음으로, 선수 개념의 오류를 가상으로 보정해 본 결과 중학생은 이차방정식의 근의 공식 개념 형성 수준이 상승하는 변화가 있고, 고등학생은 수준 변동이 없었다. 특히, 중학생은 내면화 수준에서 대상화 수준으로의 변동 비율이 상대적으로 높았다. 고등학생은 수준의 변

동은 없었지만 문제 해결 과정에서 계산 실수가 교정되는 것으로 나타났다. 이러한 가상의 변화는 학생의 개념 형성 수준에 있어서 연결된 선수 개념 형성 수준에서 대상화의 중요성을 시사한다. 특히 이차방정식의 근의 공식 개념 형성에서 대상화 수준에 도달하기 위해서는 유리수의 사칙계산 능력이 전제되어야 하고, 유리수 계산 능력이 전제되면 전체 중학생의 약 70%가 대상화 수준에 도달하게 될 것이다.

한편, 이 연구에서 도입한 Sfard의 구상화 이론을 수학교육에 활용할 수 있는 방안과 관련하여 제언하고자 한다. 2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 성취기준별 평가기준을 상, 중, 하로 설정하고 각 기준에 도달하는 학생이 무엇을 알고 할 수 있는지를 기술하라고 권고한다. 이러한 평가기준은 학교의 상황 및 학생 수준을 고려한 교수･학습 설계에 활용될 뿐만 아니라 평가 문항 제작 및 채점 기준 설정의 근거로 활용되도록 하고 있다. 그러나 평가기준의 상, 중, 하에 대한 이론적 근거는 아직 미비한 실정이다. 이에 대한 대안으로 Sfard의 구상화 이론을 이론적 근거로 적용할 수 있을 것이다. 예를 들어, 평가기준 하 수준을 내면화 수준으로, 중 수준을 대상화 수준으로, 상 수준을 구상화 수준으로 고려해 볼 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

김경자 (1999). 이차방정식의 지도방안에 관한 연구. 석사학위논문, 목포대학교.

Kim, K .(1999). *Investigation for a method of guidance quadratic equation: centralize of mathematics curricular middle school*. Master's thesis, Mokpo national university.

서현정 (2009). 중학교 3학년 학생들의 이차방정식 해결 과정에서 나타나는 구조감각 분석. 석사학위논문, 한국교원대학교.

Seo, H. (2009). *An analysis on structure sense of the 9th graders in solving quadratic equations*. Master's thesis, Korea national university of education.

오국환, 박정숙, 권오남 (2017). 무리수 단원에 대한 교과서 분석 연구: 과정과 대상의 관점으로, 수학교육 56(2), 131-145.

Oh, G., Park, J., & Kweon, O. (2017). A textbook analysis of irrational numbers unit: focus on the view of process and object. *The Mathematical Education 56*(2), 131-145.

이새샘 (2015). 학습 위계성에 따른 수학학습 부진아 지도방안. 석사학위논문, 부산대학교.

Lee, S. (2015). *A study of teaching method for underachieved students in mathematics based on learning hierarchy : focused on the quadratic equation for the third grade students in a middle school*. Master's thesis, Pusan National University.

이정미 (2009). 중학교 3학년 학생들의 이차방정식에 관한 문장제 해결과정 및 해결력 분석. 석사학위논문, 한국교원대학교.

Lee, J. (2009). *Analysis on ninth graders' problem solving abilities and process about word problems of quadratic equation*. Master's thesis, Korea national university of education.

우정호 (2000). 수학 학습 - 지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교출판부.

Woo, J. (2000). *Mathematics learning-guiding principles and methods*, Seoul National University Press.

유윤재 (2012). 수학교육으로 초대, 서울: 10101.

Yoo, Y. (2012). *Invitation to mathematics education*, Seoul: 10101.

정은실 (2001). 수학적 개념 형성 과정과 그 지도. 진주교육대학교 과학교육연구소 27, 95-110.

Jeong, E. (2001). The process of mathematical concept formation and the teaching of mathematical concepts. *Science Education Center in Chinju National University of Education. 27*, 95-110.

Cifarelli, V. V. (1988). *The role of abstraction as a learning process in mathematical problem solving.* Unpublished doctoral dissertation, Purdue University, Indiana.

Dubinsky, E. & Mcdonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld (eds), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level.* New ICMI Study Series, 7. Springer, Dordrecht, 275-282.

Goodson-Espy, T. (1998). The roles of reification and reflective abstraction in the development of abstract thought: transitions from arithmetic to algebra, *Educational Studies in Mathematics* 36, 219-245.

Hamlyn, D. W. (2010). *Experience and the growth of understanding*(이홍우 역), 서울: 교육과학사. (원저 1978년 출판)

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings ofthe 28th Conference ofthe International Group for the Psychology of Mathematics Education* 3, 49-56. Bergen, Norway: PME.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Principles and standards for school mathematics* (류희찬 외 역), 서울: 경문사. (원저 2000년 출판)

Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology,* Toronto Canada: George J. Mcleod Limited.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics 22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification－the case of function. the conception of function, *Aspects of Epistemology and Pedagogy* 59-84.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994a). The gains and the pitfalls of reification-the case of algebra, *Educational Studies in Mathematics 26*(2), 191-228.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994b). Between arithmetic and algebra: in the search of a missing link the case of equations and inequalities, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 52*(3), 279-307.

Wille, A. M. (2009). Steps towards structural conception of the notion of variable, *Proceedings of CERME 6,* 659-668, Lyon, France.

Zerpa, L. (2016). The reification of mathematical notions in mathematics education: A four-stage model of concept development, *the International Journal of Science, Mathematics and Technology learning 24*(1), 1-14.

An analysis on the secondary students' conceptualization level of the formula of quadratic equation based on Sfard's reification theory

Chang, Hyun Suk
Department of Mathematics Education, Graduate school of Kyungpook National University
E-mail: genichang@hanmail.net

Lee, Bongju[†]
Department of Mathematics Education, Kyungpook National University
E-mail: leebj@knu.ac.kr

In this paper, we applied Sfard's reification theory to analyze the secondary students' level of conceptualization with regard to the formula of quadratic equation. Through the generation and development of mathematical concepts from a historical perspective, Sfard classified the formulation process into three stages of interiorization, condensation, and reification, and proposed levels of formulation. Based on this theory, we constructed a test tool reflecting the reversibility of the nature of manipulation of Piaget's theory as a criterion of content judgement in order to grasp students' conceptualization level of the formula of quadratic equation. By applying this tool, we analyzed the conceptualization level of the formula of quadratic equation of the 9^{th} and 10^{th} graders. The main results are as follows. First, approximately 45% of 9^{th} graders can not memorize the formula of quadratic equation, or even if they memorize, they do not have the ability of accurate calculation to apply for it. Second, high school curriculum requires for students to use the formula of the quadratic equation, but about 60% of 10^{th} graders have not reached at the level of reification that they can use the formula of quadratic equation. Third, as a result of imaginarily correcting the error of the previous concept, there was a change in the levels of 9^{th} graders, and there was no change in 10^{th} graders.

* ZDM Classification : C33, C34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key words : Sfard's reification theory, the formula of quadratic equation, the conceptualization level, secondary students
† Corresponding author