

# Comparing the performance of likelihood ratio test and $F$ -test for gamma generalized linear models

Seongil Jo<sup>a</sup> · Jeongseop Han<sup>b</sup> · Woojoo Lee<sup>c,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics (Institute of Applied Statistics), Chonbuk National University;

<sup>b</sup>Department of Mathematics, Korea Military Academy; <sup>c</sup>Department of Statistics, Inha University

(Received May 8, 2018; Revised July 8, 2018; Accepted July 9, 2018)

---

## Abstract

Gamma generalized linear models are useful for non-negative and skewed responses. However, these models have received less attention than Poisson and binomial generalized linear models. In particular, hypothesis testing for the significance of regression coefficients has not been thoroughly studied. In this paper we assess the performance of various test statistics for gamma generalized linear models based on numerical studies. Our results show that the likelihood ratio test and  $F$ -type test are generally recommended and that the partial deviance test should be avoided in practice.

Keywords:  $F$ -test, gamma generalized linear models, likelihood ratio test, partial deviance test

---

## 1. 서론

감마 일반화 선형 모형(gamma generalized linear models)은 로그 정규 분포(lognormal distribution)와 역 가우스 분포(inverse Gaussian distribution)에 기반한 일반화 선형모형과 함께 음이 아닌 값을 가지며 비대칭(skewed) 자료(예, 비용자료, 수명자료 등)에 유용한 모형으로 알려져 있다 (Fahrmeir 등, 2013; Faraway, 2016). 그러나 이러한 모형의 유용성에도 불구하고 최근까지 이항 분포(binomial distribution)와 포아송 분포(Poisson distribution)에 기반한 일반화 선형 모형에 비해 관심을 적게 받아 왔으며 (Faraway, 2016; Jo와 Lee, 2017), 특히, 회귀계수의 유의성에 대한 검정문제에 관련하여 제안된 여러 검정 통계량의 성능에 대해서는 거의 연구가 진행되지 않았다. 따라서, 본 논문에서는 감마 일반화 선형 모형에서의 회귀 계수 검정 통계량의 성능 비교를 수치 연구를 통해 다루고자 한다.

일반화 선형 모형에서 일부 회귀계수의 유의성에 대한 검정은 다양한 방법을 통해 실시된다. 가장 널리 사용되는 방법으로는 가능도비 검정 방법(likelihood ratio test; LR) (McCullagh와 Nelder, 1989)과 부분 이탈도 검정 방법(partial deviance test) (Montgomery 등, 2012)이 있다. 가능도비 검정 방법은 완전 모형(full model)과 일부 회귀계수가 0인 축소 모형(reduced model)의 로그 가능도(log-likelihood) 값의 차를 이용하여 검정을 실시하는 방법이고, 부분 이탈도 검정 방법은 각 모형에서 계산된 척도

---

This research was supported by a Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (NRF-2016R1D1A1B03936100).

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Statistics, Inha University, 100 Inha-ro, Michuhol-gu, Incheon 22212, Korea. E-mail: lwj221@gmail.com

화 이탈도(scaled deviance) 값의 차를 이용하여 검정을 실시하는 방법이다. 이외에도 본 연구에서는 Jørgensen (2013)에 의해 소개된  $F$ -검정 방법과 공통 척도 모수를 이용하는 척도화 이탈도 검정(scaled deviance test) 방법을 고려한다. 수치 연구에서 이 둘 검정 통계량의 성능을 비교하여, 실제 자료분석에서 신뢰할 만한 검정 방법을 밝혀내고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 감마 일반화 선형 모형의 기초를 설명한다. 3절에서는 부분 이탈도 검정을 소개하고 모의실험을 통해 문제점을 제시한다. 4절에서는 일부 회귀계수의 유의성을 검정하는 다양한 검정 방법을 소개한다. 5절에서는 모의실험을 통해 4절에서 소개된 다양한 검정 방법들의 성능을 비교한 후, 6절에서 결론을 맺는다.

## 2. 감마 일반화 선형모형

$i$ 번째 관측치  $Y_i$ 가 감마분포(gamma distribution)를 따르면서 평균  $\mu_i$ 와 산포모수  $\phi$ 를 갖는다고 할 때, 해당하는 확률 밀도함수의 표현은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\nu^\nu y_i^{\nu-1} \exp(-\nu y_i / \mu_i)}{\mu_i^\nu \Gamma(\nu)} dy_i.$$

이 분포는  $Y_i \sim \text{Gamma}(\mu_i, \phi)$ 으로 나타내고,  $\phi = 1/\nu$ 의 관계를 가진다. 여기서,  $E(Y_i) = \mu_i$ 이고  $\text{Var}(Y_i) = \phi \mu_i^2 = \mu_i^2 / \nu$ 이 된다. 적률 생성 함수(moment generating function)는  $K_i(t) = E(\exp(tY_i)) = \nu \log(1 - \mu_i t / \nu)$ 으로 주어진다.  $Y_i$ 에 알려진 가중치  $w_i$ 가 있는 경우  $Y_i \sim \text{Gamma}(\mu_i, \phi/w_i)$ 으로 표현한다.

실제 자료분석에서는 감마분포의 정준 연결함수(canonical link function)인 역함수(reciprocal function)가 아닌 로그 연결함수(log link function)를 훨씬 더 자주 사용하므로 (Jo와 Lee, 2017), 본 논문에서는  $\mu_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$ 을 고려할 것이다. 여기서  $\mathbf{x}_i$ 는  $i$ 번째 설명변수(explanatory variable) 벡터이고  $\boldsymbol{\beta}$ 는 대응되는 회귀계수(regression coefficient)이다.

위의 감마 일반화 선형 모형에 대해 이탈도 통계량은  $D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = -2 \sum_{i=1}^n [\log(y_i / \hat{\mu}_i) - (y_i - \hat{\mu}_i) / \hat{\mu}_i]$ 으로 정의된다. 여기서  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ ,  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n)^\top$ ,  $\hat{\mu}_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \hat{\boldsymbol{\beta}})$ 이고  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 은 최대 가능도 추정치(maximum likelihood estimates; MLE)를 뜻한다.

## 3. 부분 가능도비 검정

이 절에서는  $\boldsymbol{\beta}$ 의 일부분이 0인지 아닌지를 검정하기 위한 방법 중, 부분 이탈도 검정(partial deviance test) 방법을 설명한다. 설명되는 검정 방법은 Czado (2004)의 강의노트에 나타나 있다. 검정 방법의 구체적인 설명하기 위해, 먼저  $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \boldsymbol{\beta}_2^\top)^\top$ 라 하자. 여기서  $\boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$ 이고  $\boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$ 이다. 이 때  $H_0 : \boldsymbol{\beta}_1 = (0, \dots, 0)^\top$ 를 귀무가설로 하는 부분 이탈도 검정은

$$\frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0)}{\hat{\phi}_0} - \frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_1)}{\hat{\phi}_1} > \chi_{p_1, 1-\alpha}^2 \quad (3.1)$$

일 때 유의수준(significance level)  $\alpha$ 에서 귀무가설을 기각한다. 여기서  $\chi_{p_1, 1-\alpha}^2$ 는 자유도  $p_1$ 을 갖는 카이제곱 분포의  $1 - \alpha$  분위수를 뜻하고,  $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0, \hat{\phi}_0)$ 과  $(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \hat{\phi}_1)$ 은 각각 축소모형(reduced model)과 완전모형(full model)에서 얻어진 최대 가능도 추정치이다. 부분 이탈도 검정 방법은 산포모수가 추정되는 경우 심각한 문제를 가질 수 있다. 예를 들어, 감마 일반화 선형 모형의 경우  $\phi$ 가 작은 값이라면,  $\hat{\phi}_0 \approx D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0)/(n - p_2)$ 과  $\hat{\phi}_1 \approx D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_1)/(n - p_1 - p_2)$ 이 성립한다 (McCullagh와 Nelder, 1989). 따라서, 표본 수가 충분히 클 때 부분 이탈도 검정은 단순히  $p_1 > \chi_{p_1, 1-\alpha}^2$ 인지 아닌지의 여부를 확인하는

**Table 3.1.** Results of partial deviance test based on the maximum likelihood estimates,  $\hat{\phi}$ 

True dispersion	Sample size	Type I error	Empirical power
$\phi = 0.01$	$n = 50$	0.000	0.000
	$n = 100$	0.000	0.000
	$n = 200$	0.000	0.000
	$n = 500$	0.000	0.007
$\phi = 0.1$	$n = 50$	0.000	0.000
	$n = 100$	0.000	0.000
	$n = 200$	0.000	0.000
	$n = 500$	0.000	0.051
$\phi = 0.5$	$n = 50$	0.000	0.000
	$n = 100$	0.000	0.000
	$n = 200$	0.000	0.000
	$n = 500$	0.000	0.044
$\phi = 1.0$	$n = 50$	0.000	0.000
	$n = 100$	0.000	0.000
	$n = 200$	0.000	0.000
	$n = 500$	0.000	0.008
$\phi = 1.5$	$n = 50$	0.000	0.000
	$n = 100$	0.000	0.000
	$n = 200$	0.000	0.000
	$n = 500$	0.000	0.001

검정이 되고, 유의수준  $\alpha = 0.05$ 일 때,  $\chi_{p_1, 0.95}^2 > p_1$  이므로 축소모형이 기각되는 일은 벌어지지 않는다. 이에 대한 증명은 부록에 주어져 있다.

부분 이탈도 검정의 문제점을 수치적으로 확인해보기 위해 1,000개의 독립된 데이터 셋을 생성하여 모의실험을 진행하였다. 감마 일반화 선형 모형의 평균 모형에서의 회귀계수는 제 1종 오류(type I error)를 살펴볼 때에는  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5)^\top = (0.8, 0, -0.1, 0.2, 0, -0.3)^\top$ 을 사용하였고, 검정력을 살펴보기 위해서는  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5)^\top = (0.8, 1, -0.1, 0.2, 0.5, -0.3)^\top$ 을 사용하여 데이터를 생성하였다. 모든 설명변수  $x_i$ 는 균등분포(uniform distribution)에서 독립적으로 생성되었다. 이를 바탕으로 적합되는 완전모형과 축소모형은 다음과 같이 지정하였다:

$$\text{완전 모형: } \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_5)^\top \in \mathbb{R}^6$$

$$\text{축소 모형: } \boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1, \beta_4)^\top = (0, 0)^\top, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_0, \beta_2, \beta_3, \beta_5)^\top \in \mathbb{R}^4$$

산포모수의 값으로는  $\phi \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1, 1.5\}$ 를 고려하였고, 모든 가중치  $w_i$ 는 1로 고정하였다. 모의실험에 대한 결과는 Table 3.1에 주어졌다. 이 표로부터, 부분 이탈도 검정 방법의 문제점을 쉽게 확인할 수 있다. 앞서 예상한대로 산포모수의 값이 작을 때에 부분 이탈도 검정력이 매우 낮는데, 이러한 문제점은 우리가 고려한 모의실험의 모든 산포모수에 대해서 일관되게 나타났다. 또한 관측치의 갯수가 클 때에도 축소모형이 기각되지 않음을 쉽게 확인할 수 있었다.

#### 4. 가능도비 검정, 척도화 이탈도 검정, $F$ -검정

이 절에서는 가능도비 검정, 척도화 이탈도 검정,  $F$ -검정방법을 소개한다. 먼저, 가능도비 검정을 설명하기 위해 두 개의 내포된(nested) 감마 일반화 선형 모형을 고려해보자. 이때, 축소모형의 검정을 위한

가능도비 검정 통계량은 다음과 같이 주어진다.

$$LR = 2 \left( \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \hat{\phi}_1) - \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0, \hat{\phi}_0) \right). \quad (4.1)$$

이 통계량은 축소모형이 올바른 모형일 때, 즉 귀무가설이 유지될 때 자유도가  $p_1$ 인 카이제곱분포를 따르는 것으로 알려져 있다. 따라서, 가능도비 검정 방법은  $LR > \chi_{p_1, 1-\alpha}^2$  일 때 유의수준  $\alpha$ 에서 축소모형을 기각한다.

척도화 이탈도 검정 방법은 부분 이탈도 통계량과 가능도비 검정 통계량 사이의 관계식으로 부터 주어진다. 구체적으로, 부분 이탈도 통계량은 산포모수  $\phi$ 가 알려져 있는 경우, 다음과 같은 관계식

$$\frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0)}{\hat{\phi}} - \frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_1)}{\hat{\phi}} = 2(\ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \phi) - \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0, \phi))$$

을 갖게 되고, 이 통계량은 귀무가설 하에서 자유도가  $p_1$ 인 카이제곱 분포를 따르게 된다. 따라서  $\phi$ 의  $\sqrt{n}$ -일치추정량(consistent estimator)인  $\hat{\phi}_1$ 을 사용하는 경우 다음과 같은 척도화 이탈도 검정 방법을 구할 수 있다.

$$\frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0)}{\hat{\phi}_1} - \frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_1)}{\hat{\phi}_1} = 2 \left( \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\phi}_1) - \ell(\hat{\boldsymbol{\mu}}_1, \hat{\phi}_1) \right) > \chi_{p_1, 1-\alpha}^2 \quad (4.2)$$

이면 유의수준  $\alpha$ 에서 귀무가설을 기각하며,  $\hat{\phi}_1$ 은 완전 모형에서 얻어지는 값을 사용한다.

마지막으로 Jørgensen (2013)은 다음의  $F$ -통계량:

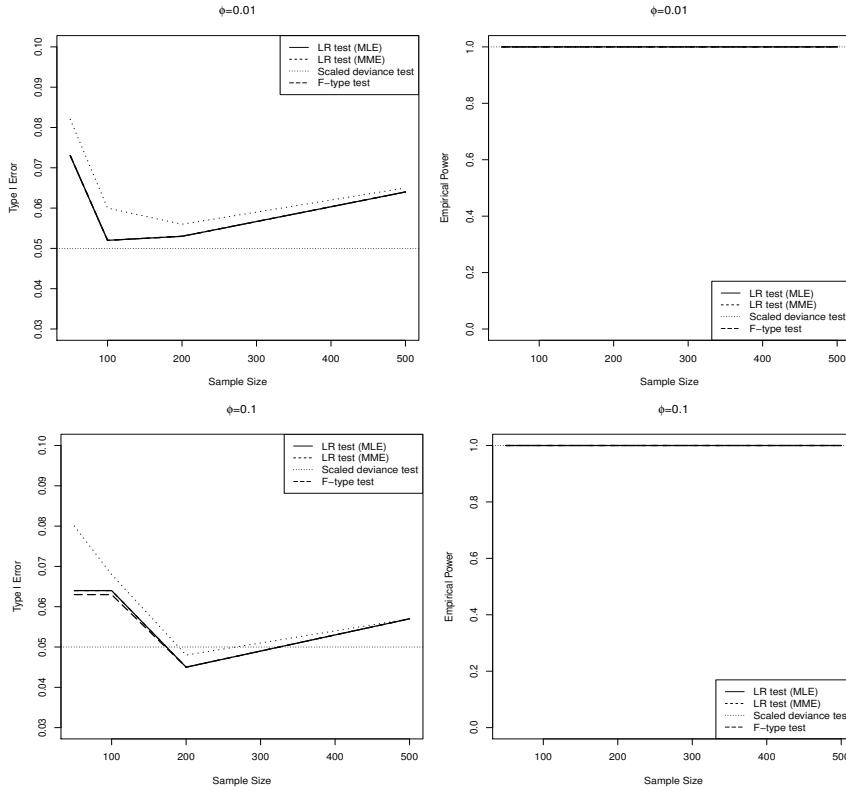
$$F = \frac{D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) - D(\mathbf{y}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_1)}{p_1 \hat{\phi}_1} \sim F_{p_1, n-p_1-p_2}$$

을 고려하였다. 여기서  $F_{p_1, n-p_1-p_2}$ 는 자유도  $p_1, n-p_1-p_2$ 를 갖는  $F$ -통계량을 뜻한다. 이 분포의 95% 분위수를  $F_{p_1, n-p_1-p_2}(0.95)$ 로 나타낼 때, 유의수준 0.05에서는 검정 통계량  $F$  값이  $F_{p_1, n-p_1-p_2}(0.95)$ 보다 크면 귀무가설을 기각한다.

## 5. 모의실험

본 절에서는 모의실험을 통해 4절에서 제시한 검정 방법(가능도비 검정 방법과 척도화 이탈도 검정, 그리고  $F$ -검정 방법)들의 성능을 비교하고자 한다. 구체적으로는, 설명변수로 연속형 변수만 포함한 경우와 연속형 변수와 범주형 변수가 혼재되어 있는 경우에 대하여 성능비교를 실시한다. 산포모수의 추정량으로는 척도화 이탈도 검정과  $F$ -검정의 경우 최대 가능도 추정량을 사용하였고, 가능도비 검정의 경우 산포 모수에 대해 적률 추정량(method of moment estimator; MME)을 이용하는 검정 통계량을 이용한 방법과 최대 가능도 추정량을 사용한 방법 두 가지를 고려하였다. 현재 R의 `glm` 함수는 감마 일반화 선형 모형 적합 시 산포모수에 대하여 적률 추정량을 이용하고 있는데, 이러한 사실이 잘 알려져 있지 않으므로 가능도비 검정 통계량을 계산해주는 `lmtest` 패키지의 `lrtest` 함수를 적용된 감마모형에 그대로 적용하는 경우를 고려한 것이다. 참고로 적률 추정량은 `glm` 함수와 `summary` 함수를 이용하여 구할 수 있고, 최대 가능도 추정량은 `MASS` 패키지의 `gamma.dispersion` 함수를 이용하여 구할 수 있다.

모의실험은 부분 이탈도 검정에서와 같이 1,000개의 독립적인 데이터 셋을 생성하였으며, 연속형 변수만을 포함한 경우는 3절에서 사용된 것과 같은 모형을 사용하였다. 범주형 변수를 포함한 경우, 평균 모형의 회귀 계수는 제 1종 오류를 비교하기 위해서는  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_7)^\top = (0.8, 0, -0.1, 0.2, 0, -0.3, 0.8, 1.2)^\top$ 을 사용하였고, 검정력을 비교하기 위해서는  $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_7)^\top = (0.8, 1, -0.1, 0.2, 0.5, -0.3, 0.8,$



**Figure 5.1.** Results for legitimate goodness-of-fit tests ( $\phi = 0.01, 0.1$ ). LR = likelihood ratio test; MLE = maximum likelihood estimates; MME = method of moment estimator.

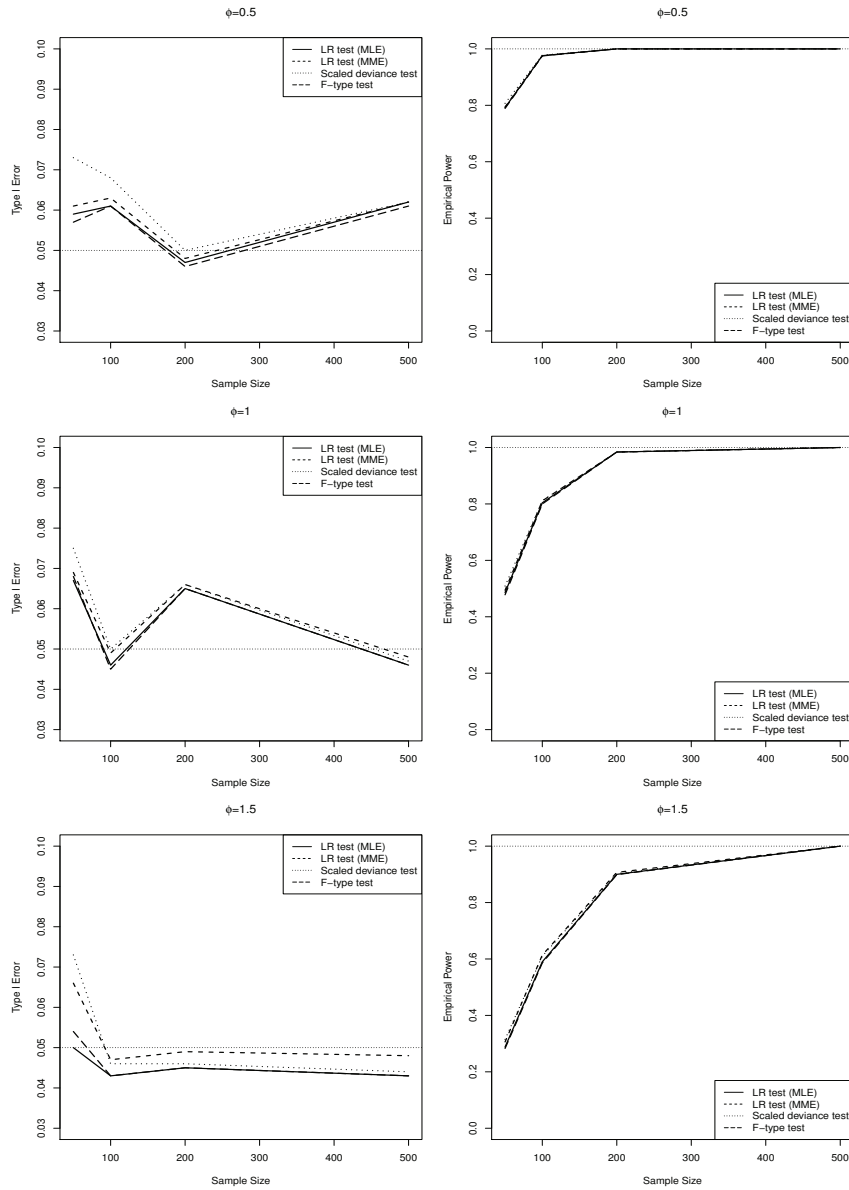
$1.2)^T$ 을 사용하였다. 범주형 변수는 모집단이  $\{1, 2, 3\}$ 인 이산형 균등분포에서 생성하였으며, 두 개의 더미 변수(dummy variable)를 고려하였다. 해당 변수의 회귀 계수는  $\beta_6, \beta_7$ 이다. 이를 바탕으로 다음의 두 가지 모형

$$\text{완전 모형: } \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_7)^T \in \mathbb{R}^8$$

$$\text{축소 모형: } \boldsymbol{\beta}_1 = (\beta_1, \beta_4)^T = (0, 0)^T, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = (\beta_0, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_7)^T \in \mathbb{R}^6$$

을 고려하였다. 모의실험의 결과는 Figures 5.1–5.2와 Table 5.2에 나타난다. Figures 5.1–5.2는 연속형 변수만을 설명변수로 하는 모형의 결과이고, Table 5.2는 범주형 변수를 설명변수로 가지는 모형에 대한 결과이다.

각 결과에서 LR test (MLE)와 LR test (MME)는 산포모수의 값을 각각 최대 가능도 추정치와 적률 방법 추정치를 사용한 결과를 나타낸다. 모의 실험 결과로 부터 표본이 큰 경우에는, 예를 들어  $n$ 이 500인 경우, 모든 검정 방법의 통계량은 모두 제 1종 오류를 잘 조절하는 것으로 보이고, 검정력 또한 높게 나타난 것을 보인다. 차이가 매우 크게 나타나지는 않았지만,  $F$ -통계량과 최대 가능도비 통계량의 유한 표본 성질이 척도화 이탈도 검정의 통계량에 비해 더 나은 것으로 보여진다. 소표본이나 중간 정도 크기의 표본 크기에서는  $F$ -통계량과 최대 가능도비 통계량의 제 1종 오류가 요구되는 유의수준에 더 가까운 것으로 나타났다. 범주형 변수를 설명변수로 하는 모형에서 모든 통계량들의 경험적 제 1종



**Figure 5.2.** Results for legitimate goodness-of-fit tests ( $\phi = 0.5, 1, 1.5$ ). LR = likelihood ratio test; MLE = maximum likelihood estimates; MME = method of moment estimator.

의 오류가 연속형 변수만을 설명변수로 하는 모형에 비해 높게 나타나는 경향이 있었다. 특히, 산포모수  $\phi = 1.5$ 이고 표본 수가 작은 경우( $n = 50$ ), 적률 방법 추정치를 사용하는 가능도비 통계량과 척도화 이탈도 검정 통계량은 다른 검정 통계량에 비해 제 1종 오류가 좀 더 높게 나타남을 확인할 수 있었다. Table 5.1과 Table 5.3은 산포모수에 대한 축소 모형과 완전 모형의 적률 추정치와 최대 가능도 추정치를 나타낸다.

**Table 5.1.** Mean (standard deviation) of estimates for dispersion parameter in legitimate goodness-of-fit tests

True dispersion	Sample size	축소모형 ( $\phi_0$ )		완전모형 ( $\phi_1$ )	
		MME	MLE	MME	MLE
$\phi = 0.01$	$n = 50$	0.010 (0.002)	0.009 (0.002)	0.010 (0.002)	0.009 (0.002)
	$n = 100$	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.009 (0.001)
	$n = 200$	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)
	$n = 500$	0.010 (0.000)	0.010 (0.000)	0.010 (0.000)	0.010 (0.000)
$\phi = 0.1$	$n = 50$	0.099 (0.021)	0.092 (0.019)	0.099 (0.021)	0.088 (0.012)
	$n = 100$	0.099 (0.015)	0.095 (0.014)	0.099 (0.015)	0.093 (0.013)
	$n = 200$	0.100 (0.011)	0.098 (0.010)	0.100 (0.011)	0.097 (0.010)
	$n = 500$	0.100 (0.006)	0.099 (0.006)	0.100 (0.006)	0.099 (0.006)
$\phi = 0.5$	$n = 50$	0.487 (0.115)	0.468 (0.090)	0.487 (0.115)	0.451 (0.088)
	$n = 100$	0.491 (0.087)	0.483 (0.066)	0.491 (0.087)	0.474 (0.066)
	$n = 200$	0.499 (0.063)	0.494 (0.048)	0.499 (0.063)	0.489 (0.048)
	$n = 500$	0.496 (0.037)	0.497 (0.037)	0.497 (0.037)	0.495 (0.028)
$\phi = 1.0$	$n = 50$	0.924 (0.231)	0.929 (0.165)	0.924 (0.231)	0.895 (0.162)
	$n = 100$	0.968 (0.187)	0.969 (0.126)	0.968 (0.187)	0.954 (0.126)
	$n = 200$	0.981 (0.134)	0.983 (0.088)	0.981 (0.134)	0.975 (0.088)
	$n = 500$	0.986 (0.087)	0.990 (0.054)	0.986 (0.087)	0.987 (0.054)
$\phi = 1.5$	$n = 50$	1.354 (0.349)	1.401 (0.242)	1.354 (0.349)	1.361 (0.274)
	$n = 100$	1.409 (0.288)	1.451 (0.178)	1.409 (0.288)	1.430 (0.177)
	$n = 200$	1.458 (0.226)	1.482 (0.130)	1.458 (0.226)	1.471 (0.130)
	$n = 500$	1.481 (0.143)	1.491 (0.082)	1.481 (0.143)	1.487 (0.082)

MME = method of moment estimator; MLE = maximum likelihood estimates.

**Table 5.2.** Results for legitimate goodness-of-fit tests when the design matrix includes a categorical variable

True dispersion	Sample size	LR test (MLE)		LR test (MME)		Scaled deviance test		$F$ -type test	
		Type I error	Empirical power	Type I error	Empirical power	Type I error	Empirical power	Type I error	Empirical power
$\phi = 0.01$	$n = 50$	0.073	1.000	0.073	1.000	0.088	1.000	0.072	1.000
	$n = 100$	0.068	1.000	0.068	1.000	0.073	1.000	0.068	1.000
	$n = 200$	0.059	1.000	0.059	1.000	0.061	1.000	0.058	1.000
	$n = 500$	0.044	1.000	0.044	1.000	0.044	1.000	0.044	1.000
$\phi = 0.1$	$n = 50$	0.091	1.000	0.091	1.000	0.104	1.000	0.090	1.000
	$n = 100$	0.063	1.000	0.063	1.000	0.067	1.000	0.063	1.000
	$n = 200$	0.056	1.000	0.056	1.000	0.063	1.000	0.056	1.000
	$n = 500$	0.043	1.000	0.043	1.000	0.044	1.000	0.043	1.000
$\phi = 0.5$	$n = 50$	0.077	0.786	0.077	0.787	0.088	0.795	0.071	0.778
	$n = 100$	0.058	0.976	0.059	0.976	0.065	0.980	0.058	0.975
	$n = 200$	0.054	1.000	0.054	1.000	0.054	1.000	0.054	1.000
	$n = 500$	0.045	1.000	0.046	1.000	0.046	1.000	0.045	1.000
$\phi = 1.0$	$n = 50$	0.076	0.472	0.079	0.477	0.085	0.485	0.073	0.458
	$n = 100$	0.075	0.797	0.078	0.802	0.078	0.804	0.073	0.795
	$n = 200$	0.053	0.976	0.055	0.977	0.054	0.976	0.053	0.976
	$n = 500$	0.053	1.000	0.056	1.000	0.054	1.000	0.053	1.000
$\phi = 1.5$	$n = 50$	0.081	0.338	0.110	0.367	0.108	0.372	0.096	0.345
	$n = 100$	0.056	0.601	0.064	0.618	0.061	0.615	0.055	0.595
	$n = 200$	0.057	0.905	0.060	0.910	0.058	0.906	0.056	0.904
	$n = 500$	0.040	0.999	0.046	0.999	0.040	0.999	0.040	0.999

LR = likelihood ratio test; MLE = maximum likelihood estimates; MME = method of moment estimator.

**Table 5.3.** Mean (standard deviation) of estimates for dispersion parameter in legitimate goodness-of-fit tests when the design matrix includes a categorical variable

True dispersion	Sample size	축소모형 ( $\phi_0$ )		완전모형 ( $\phi_1$ )	
		MME	MLE	MME	MLE
$\phi = 0.01$	$n = 50$	0.010 (0.002)	0.009 (0.002)	0.010 (0.002)	0.008 (0.002)
	$n = 100$	0.010 (0.001)	0.009 (0.001)	0.010 (0.001)	0.009 (0.001)
	$n = 200$	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)
	$n = 500$	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)	0.010 (0.001)
$\phi = 0.1$	$n = 50$	0.099 (0.021)	0.088 (0.018)	0.099 (0.021)	0.084 (0.018)
	$n = 100$	0.100 (0.015)	0.095 (0.013)	0.100 (0.015)	0.093 (0.013)
	$n = 200$	0.101 (0.011)	0.098 (0.010)	0.101 (0.011)	0.097 (0.010)
	$n = 500$	0.100 (0.006)	0.099 (0.006)	0.100 (0.006)	0.098 (0.006)
$\phi = 0.5$	$n = 50$	0.478 (0.107)	0.450 (0.089)	0.478 (0.107)	0.432 (0.088)
	$n = 100$	0.483 (0.085)	0.472 (0.065)	0.483 (0.085)	0.463 (0.064)
	$n = 200$	0.492 (0.057)	0.487 (0.045)	0.492 (0.057)	0.483 (0.045)
	$n = 500$	0.497 (0.037)	0.495 (0.028)	0.497 (0.037)	0.494 (0.028)
$\phi = 1.0$	$n = 50$	0.913 (0.218)	0.905 (0.162)	0.913 (0.218)	0.873 (0.163)
	$n = 100$	0.943 (0.174)	0.950 (0.121)	0.943 (0.174)	0.934 (0.120)
	$n = 200$	0.970 (0.125)	0.977 (0.089)	0.970 (0.125)	0.969 (0.089)
	$n = 500$	0.984 (0.086)	0.990 (0.055)	0.984 (0.086)	0.987 (0.055)
$\phi = 1.5$	$n = 50$	1.320 (0.328)	1.380 (0.243)	1.320 (0.328)	1.329 (0.242)
	$n = 100$	1.389 (0.274)	1.435 (0.180)	1.389 (0.274)	1.413 (0.178)
	$n = 200$	1.446 (0.233)	1.472 (0.130)	1.446 (0.233)	1.462 (0.129)
	$n = 500$	1.478 (0.142)	1.492 (0.082)	1.478 (0.142)	1.488 (0.081)

MME = method of moment estimator; MLE = maximum likelihood estimates.

## 6. 결론

본 논문에서는 감마 일반화 선형모형의 검정과 관련하여 부분 이탈도 검정 방법, 가능도비 검정, 척도화 이탈도 검정,  $F$ -검정 방법 등을 소개하고, 모의실험을 통해 검정 방법들의 성능을 알아보았다. 모의실험 결과 감마 일반화 선형모형에서 회귀계수의 일부분이 0인지를 검정할 때 부분 이탈도 검정 방법의 사용에 대한 위험성이 있음을 확인하였고, 최대 가능도 추정량을 사용하는 가능도비 검정 방법과  $F$ -검정 방법의 성능이 서로 비슷함을 알 수 있었다. 따라서 감마 일반화 선형모형을 이용한 자료 분석에 있어서 부분 이탈도 검정 방법은 사용하지 않는 것이 바람직하며, 일반적으로 최대 가능도 추정량을 사용하는 가능도비 검정 방법과  $F$ -검정 방법을 기본 분석 방법으로 채택하는 것이 합리적이라 생각된다.

## 부록

자유도가  $k$ 인 카이스퀘어 분포를 따르는 확률변수  $X_k$ 와 분포함수  $F_k(x) = P(X_k \leq x)$ 에 대해서,  $\chi_{k,1-p}^2$ 를 자유도가  $k$ 인 카이스퀘어 분포의  $1 - p$  분위수라고 하자. 즉,  $P(X_k \leq \chi_{k,1-p}^2) = F_k(\chi_{k,1-p}^2) = 1 - p$ .

**Lemma A.1**  $G_k(k) = \gamma(k, k)/\Gamma(k)$ 라 할 때, 모든  $k \geq 10$ 에 대해서  $G_k(k) > G_{k+1}(k+1)$ 이다. 여기서,

$$\gamma(k, k) = \int_0^k t^{k-1} e^{-t} dt : \text{불완전 하부 감마 함수}$$

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt : \text{감마 함수}$$



이다.

증명: 정의에 의해

$$\begin{aligned}\gamma(k, k) &= \int_0^k t^{k-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{k} \left[ k^k e^{-k} + \gamma(k+1, k) \right]\end{aligned}$$

이므로,

$$\begin{aligned}\frac{\gamma(k+1, k+1)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\gamma(k, k)}{\Gamma(k)} &= \frac{\gamma(k+1, k+1)}{k\Gamma(k)} - \frac{\frac{1}{k} [k^k e^{-k} + \gamma(k+1, k)]}{\Gamma(k)} \\ &= \frac{1}{k\Gamma(k)} \left[ \int_k^{k+1} t^k e^{-t} dt - k^k e^{-k} \right] \\ &< 0\end{aligned}$$

이다.

( $\because h(t) = t^k e^{-t}$ 라 할 때,  $t > k$ 에 대하여  $h'(t) = (k-t)t^{k-1}e^{-t} < 0$ 을 만족하므로  $t \in (k, k+1]$ 일 때,  $h(t) < h(k)$ 가 되어  $\int_k^{k+1} t^k e^{-t} dt < k^k e^{-k}$ 이다.)  $\square$

**정리 A.1**  $p < 0.3$ 일 때, 모든 자연수  $k \geq 10$ 에 대하여  $\chi_{k,1-p}^2 > k$ 이다.

증명:  $\chi_{k,1-p}^2 > k$ 은  $F_k(\chi_{k,1-p}^2) > F_k(k)$ 와 동치이므로,  $F_k(k) < 1-p$ 임을 보이면 충분하다. 분포함수  $F_k(k)$ 에 대해서  $F_k(k) = G_{k/2}(k/2)$ 이 성립하므로, Lemma A.1에 의하여 모든  $k \geq 1$ 에 대해서

$$\begin{aligned}F_k(k) &= \frac{\gamma(\frac{k}{2}, \frac{k}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \\ &> \frac{\gamma(\frac{k}{2}+1, \frac{k}{2}+1)}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)} = F_{k+2}(k+2)\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다.  $F_1(1) \approx 0.6827 < 0.7$ ,  $F_2(2) \approx 0.6321 < 0.7$ 이므로, 모든 자연수  $k \geq 1$ 에 대하여  $F_k(k) < 1-p$ 이다.  $\square$

## References

- Czado, C. (2004). *Lecture Note in Gamma Regression*, from: <https://www.statistics.ma.tum.de/fileadmin/w00bdb/www/czado/lec8.pdf>
- Jo, S. and Lee, W. (2017). Comparing the efficiency of dispersion parameter estimators in gamma generalized linear models, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 95–102.
- Jørgensen, B. (2013). Generalized linear models. In A. H. El-Shaarawi, & W. W. Piegorsch (Eds), *Encyclopedia of Environmetrics* (2nd ed, pp. 1152–1159), Chichester, Wiley.
- Fahrmeir, L., Kneib, T., Lang, S., and Marx, B. (2013). *Regression: Models, Methods and Applications*, Springer, Berlin.
- Faraway, J. J. (2016). *Extending the Linear Model with R* (2nd ed), Chapman and Hall, New York.
- McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models* (2nd ed), Chapman and Hall, London.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A., and Vining, G. G. (2012). *Introduction to Linear Regression Analysis* (5th ed), John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

# 감마 일반화 선형 모형에서의 가능도비 검정과 $F$ -검정 비교연구

조성일<sup>a</sup> · 한정섭<sup>b</sup> · 이우주<sup>c,1</sup>

<sup>a</sup>전북대학교 통계학과 (응용통계연구소), <sup>b</sup>육군사관학교 수학과, <sup>c</sup>인하대학교 통계학과

(2018년 5월 8일 접수, 2018년 7월 8일 수정, 2018년 7월 9일 채택)

---

## 요약

감마 일반화 선형모형은 음이 아니며 치우침이 있는 반응변수에 유용한 모형으로 알려져 있다. 그러나 포아송 분포 또는 이항 분포에 기반한 일반화 선형모형에 비해 적은 관심을 받아왔다. 특히, 회귀계수의 유의성 검정에 대해서는 연구가 면밀히 되어 있지 않다. 본 논문에서는 감마 일반화 선형 모형의 검정에 대해 다양한 통계량들을 알아보고 수치 연구를 통해 그들의 성능을 비교한다. 수치 실험의 결과 부분 이탈도 검정 방법의 문제점이 나타났으며, 가능도비 검정 방법과  $F$ -검정 방법이 좋은 성능을 보임을 확인하였다.

주요용어: 가능도 검정, 감마 일반화 선형모형,  $F$ -검정, 부분 이탈도 검정, 척도화 이탈도 검정

---

본 연구는 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (NRF-2016R1D1A1B03936100).

<sup>1</sup>교신저자: (22212) 인천광역시 미추홀구 인화로 100, 인하대학교 통계학과. E-mail: lwj221@gmail.com