

소수 나눗셈 수업의 계획, 실행, 비평 과정에서 초등교사의 성찰과 실천에 관한 사례 연구

김 상 미 (춘천교육대학교)

이 연구는 소수 나눗셈 수업을 중심으로 초등교사의 수업 성찰과 실행에 관한 사례 연구이다. 초등교사가 수학수업을 계획하고 실행하고 동료교사들과 자신의 수업을 비평하는 과정에서 어떤 고민을 하고 있으며 그 초점은 어떻게 변화해 가는지를 밝히고자 하였다. 수업을 계획하는 교사, 수업을 실행하는 교사, 동료교사와 자신의 수업을 비평하는 교사로 구분하고, 수학 목표, 과제의 실행, 수학적 표현, 수학적 담론, 질문의 설정, 개념적 이해와 절차적 능숙함, 생산적인 어려움, 학생 사고의 증거 활용 등의 8 가지 측면을 따라 각 시기의 초등교사의 성찰과 실천을 분석하였다.

I. 서론

수학교육의 많은 연구들은 수학 수업에서 무엇보다 교사의 역할이 중요하다고 말한다. 교사는 학생들의 학습을 위한 중요한 조건으로서 또는 수학교육의 질을 결정하는 하나의 요인으로서 종종 논의된다. 그러나 교사는 수업을 실행하는 과정에서 학생의 학습뿐만 아니라, 그 자신의 배움을 만들어간다. 이 연구는 수업에서 교사가 학생의 학습을 돕는 위치에 있으면서 동시에 자신의 배움을 추구하고 성장하는 위치에 있다고 본다. 교사와 학생은 수업 과정에서 협력적인 관계를 통하여 서로를 성장시킨다. 수학교실은 새로운 수학적 아이디어가 출현하고 교사와 학생의 참여와 성장을 추구하는 곳이다.

이러한 입장에서 본다면, 수학수업의 연구에서 교사

가 수업 과정에서 무엇을 추구하고 어떻게 성장하는가를 통하여 수학수업을 바라보는 연구가 필요하다. 수업 과정에서 교사의 배움은 학생과 분리되지 않으며 교사의 고민은 학생의 배움을 중심으로 일어나는 것들이다. 학생의 학습이 보여주는 것을 통하여 수학 수업을 이해하고 분석하는 것만이 아니라, 수업에 참여하는 교사의 성찰과 실천 과정을 통하여 수학 수업을 바라 볼 수 있다는 것이다. 학생의 학습에 대하여 학생이 말하는 것, 학생의 성취 결과, 학생의 요구 등을 통하여 밝혀 갈 수 있지만, 교사의 시선과 고민을 통하여 재검토될 수 있을 것이다.

한 초등교사의 소수 나눗셈 수업을 중심으로 수업의 계획, 실행, 비평의 과정을 따라 가면서, 교사가 수업을 실행하면서 무엇을 생각하고 무엇을 반성하게 되는지 또는 수업을 해가는 과정에서 고민하는 초점이 어디에 있는지를 통하여 교사의 변화를 살펴보고자 한다. 이 연구에서 수집한 수업은 6학년 1학기의 소수의 나눗셈 단원의 도입으로, 이 단원은 제수가 소수인 '(소수)÷(소수)'를 다룬다. 소수는 십진기수법과 관련하여 실수를 이해하는 기반이 되기도 하고 분수와 관련하여 유리수를 이해하는 기반이 되기도 한다. 초등학교 수학과 교육과정에서는 분수와 관련지어 다루기도 하고 십진기수법의 연장으로서 다루기도 한다.

소수 개념은 자연수의 연장으로서 또는 분수의 다른 표현으로서 접근할 때, 소수 개념의 이해가 단편적이 되거나 소수 연산에서 문제를 야기하기도 한다(변희현, 2005). 또한 수의 범위가 확장되었을 때, 예를 들어 자연수 범위의 연산에서 소수 범위의 연산으로 확장되었을 때, 연산의 의미나 성질이 유지되기도 하지만 다른 맥락과 이미지를 요구하기도 한다. 초등학교에서 분수나 소수의 연산을 학생들이 어려워하는 이유이기도 하다. 나눗셈 연산에서 포함제나 등분제 상황은 주요한 나눗셈 맥락으로 알려져 있지만, 제수가 자연수가 아닐 때에는 등분제(분배)의 맥락으로 표현하

* 접수일(2018년 7월 20일), 심사(수정)일(2018년 7월 28일), 게재확정일(2018년 7월 29일)

* ZDM분류 : B59

* MSC2000분류 : 97C70

* 주제어 : 소수 나눗셈, 초등교사, 교사의 성찰, 교사의 실천, 수업계획, 수업실행, 수업비평

* 이 사례연구의 자료가 되었던 수학수업을 공유하고 수업비평 과정에 참여해 주신 권나운, 김대연, 김순금, 김효영, 신기수, 원현목, 허지열 선생님께 감사드립니다.

기 어렵고(Barnett-Clarke, et al., 2010), 제수가 피제수보다 클 때에는 포함제(측정)의 상황으로 표현하기 어렵다. '(소수)÷(소수)'의 나눗셈에서 제수와 피제수를 어떻게 설정하는가에 따라 학생들에게 익숙했던 포함제나 등분제 상황으로 표현하기 어렵고, 나눗셈의 다른 의미 예를 들면, '카테시안 곱의 역', '단위 비율', '곱셈의 역원' 등을 고려해야 한다. 소수 나눗셈의 이해나 맥락의 설정은 교사와 학생에게 여전히 질문거리이다.

이 연구는 6학년을 맡은 초보 초등교사가 '소수 나눗셈'이라는 쉽지 않은 수업을 계획하고, 실행하고, 동료교사들과 비평하는 과정을 따라 가면서 교사의 변화하는 고민을 찾아가고자 한다. 수학수업에서 교사의 의도와 고민에 집중하고 교사가 갖는 성찰과 실천을 따라 수학수업의 측면들을 논의하고자 한다.

II. 수학수업과 초등교사의 성장

1. 수학 수업에서 초등교사의 변화

교사는 수업을 실행하면서 더 나은 수업을 만들어가고자 노력하고, 그 과정에서 교사 자신도 성장해 간다. 수학수업을 실행하면서 수업에 대한 교사의 반성과 학습을 연구의 중심에 두는 연구들이 소개되어 왔다. Ball(2000)은 자신의 교사 경험이 연구에서 유용한 자원이 되었다고 밝히고, 교사의 경험을 중심에 두는 수학 교육 연구 사례들을 소개하였다. 소개한 연구 사례로, Lampert(1986)은 4학년 학생을 가르쳤던 교수 경험을 통하여 학생들이 수학을 알고 행하는 과정에서 곱셈을 배우는 방식에 대한 것을 밝혔다. 곱셈에 대하여 계산적인 방식, 직관적인 방식, 구체적 조작의 방식, 절차적 지식의 방식 등의 네 가지를 밝히고 교사의 역할을 논의하였다. Simon (1995)은 예비교사 대상의 교사 교육 프로그램을 실행하면서 자신의 교수를 연구하였고, '교수실험'을 설계하였다. 수학적 지식과 수학 교수 학습을 예비교사에게 이해시키고자 노력하는 교사 자신을 분석하였고, '가설적 학습 궤도'라는 모형을 밝혔다. 수업 실행에서 계획과 결과 사이의 긴장을 통하여 교수 설계에 관한 모형을 구체화하였다.

수학수업 과정에서 변화하는 교사를 연구하고자 교

사의 시기를 분리하는 기법을 사용하기도 하였다. 수학수업에 관한 교사의 입장이나 위치에 따라 시기를 나누고 변화를 분석한 연구로 Heaton(1994)과 김상미(2005)가 있다. Heaton(1994)은 자신의 수학 교수와 관련하여 세 시기로 구별하고 자기 학습과 반성을 다루었다. 미국수학교사협회(NCTM: National Council of Teachers of Mathematics)는 1989년부터 1990년대 초반에 수학교육을 재편성하고자 '규준집(Standards)시리즈'(NCTM, 1989, 1991, 1995)를 출간하였다. Heaton은 이 연구과정에 참여하면서 규준집의 아이디어를 자신의 교실에서 실천하려고 노력하였다. 교사의 학습과 성장을 연구하고자 자신의 시기를 Ruth1, Ruth2, Ruth3으로 분리하는 기법을 설정하였다. 1989~1990년에 초등교사로서 수학을 가르치고 있는 Ruth1, 1989~1990년에 자신의 수업을 반성하는 Ruth2, 이로부터 몇 년이 지난 1994년에 자신의 수업을 재학습하고 있는 Ruth3로 분리하였다. 각 시기는 모두 Heaton 자신이지만 각 시기는 다른 입장과 위치에서 자신의 학습과 변화를 성찰하였다. 김상미(2005)는 자서전 방법론을 통하여 수학수업의 은유를 분석하였다. '수학적 패턴'이라는 수업 주제와 관련하여 교사 자신을 시기별로 분리하는 기법을 사용하였다. Mee1은 수학적 패턴이 수학과교육과정에 새롭게 도입되면서 교과서 관련 단원의 개발에 참여하는 1998~1999년의 '교재구성자' 교사이다. Mee2는 자신이 구성했던 그 단원을 수업하는 2002년의 '수업실행자' 교사이다. Mee3은 수업했던 단원의 동영상 자료를 동료교사들과 공유하고 자신의 수업을 비평하는 2005년의 '수업비평가' 교사이다. 이들은 모두 한 명의 교사이지만 교사의 입장과 위치에 따라 시기별로 분리하고 서로 바라보면서 교사의 성장과 변화를 연구하였다.

2. 수학 수업의 측면

수학교실은 여러 가지 측면이 복합적으로 작용하는 곳이다. 수학수업에서 교사가 어디에 초점이 두고 무엇을 고민하는지 밝히는 것은 단순하지 않을 것이다. 수학적 이해를 추구하는 수학수업의 연구로서 Hiebert 등(1997)의 연구가 잘 알려져 있다. 학생들의 수학적 이해를 추구하는 학습 환경을 논의하면서 수학수업의 5가지 주요 측면을 제시한 바 있다. 주요한 5가지 측

면은 ‘과제의 특성, 교사의 역할, 수업의 사회문화, 수학적 도구의 활용, 공평성과 접근가능성’이다. 이 측면들은 수학수업에서 서로 분리된 것이 아니라 상호작용하며 각 측면들 모두가 요구된다.

첫째로, 수학 수업은 과제의 특성에 따라 수업 주제와 참여가 달라진다(Doyle, 1988). 과제는 학생들이 흥미를 갖고 무엇인가를 발견할 수 있도록 문제다운 것이어야 하며, 학생이 가지고 있는 지식과 기능에 관련 지을 수 있도록 연결성이 있어야 하고, 학생들이 수학적으로 중요한 아이디어를 찾고 수학적으로 가치 있는 것을 다룰 수 있도록 수학적으로 중요한 내용을 담고 있어야 한다(Hiebert et al, 1997). 둘째로 교사의 역할은 수학적 이해를 촉진하고 적절한 과제를 준비하여 반성적 사고와 의사소통을 할 수 있도록 한다. 셋째로, 수업의 문화는 학생들의 학습공동체를 강조하고 구성원 간의 관계와 상호작용을 강화하도록 조성하는 것이다. 바람직한 학습 공동체를 구성하는 데 있어서 학생들의 아이디어를 서로 공유하고 검토하도록 하여야 하고, 해결 방법이 여러 가지임을 인식하도록 하고 실수도 학습의 과정임을 인정하도록 한다. 설명의 합리성이나 정확성을 판단할 때 설명하는 사람의 사회적 지위나 인기에 따라서가 아니라 수학적으로 의미가 있는가에 따라서 판단하여야 한다. 넷째로, 수학적 도구의 활용을 강조한다는 것에는 말, 문자, 그 외에도 학생이 사용할 다른 도구를 포함하여 확장시킬 수 있다. 도구는 수학적 이해에서 중요한 근거가 되며 이때 사용하는 도구는 이해하는 양상에 영향을 준다(Fuson et al., 1992). 다섯째로, 공평성과 접근가능성은 학생의 수준이나 배경과 상관없이 이 권리를 누린다는 것을 말한다. 공평성은 선택적인 것이 아니며 공평성이 확보되지 않는다면 다른 측면들이 제대로 기능할 수가 없다. 이와 같은 다섯 가지 측면을 중심으로 학생들의 이해를 추구하면서 수학교실을 논의하였다.

수학교실 현장의 수업 실행을 통한 연구들이 계속 소개되고 논의되어 왔다. NCTM(2014)은 최근 25여년의 기준 연구 자체만으로는 학생들의 수준 높은 이해를 가져오기 어렵다고 말하고 기준 이상의 필요성을 밝혔다. 모든 학생의 학습을 위하여 학교수학을 위한 원리로서, 교수학습, 공평성, 교육과정, 도구와 테크놀로지, 평가, 전문성 등을 설정하였고, 교수 실천 8가지와 관련짓고 있다.

[표 1] 8가지 수학 교수 실천(NCTM, 2014, p. 10)
[Table 1] Eight mathematics teaching practices

수학교수 실천	
학생의 학습에 초점을 둔 수학적 목표의 수립	효과적인 수학교수는 학습하는 수학에 관한 명확한 목표를 세우고, 그 목표를 학습 진행 과정에 알맞게 설정하고, 수업의 결정을 내리는데 있어서 그 목표를 활용한다.
추론과 문제해결을 증진하는 과제 실행	효과적인 수학교수는 학생이 수학적 추론과 문제해결을 증진하게 하고, 참여 시점을 확장하고 다양한 풀이 전략을 제공할 수 있는 과제를 해결하고 논의하도록 한다.
수학적 표현의 활용과 연계	효과적인 수학교수는 학생의 수학적 개념과 절차에 대한 이해를 깊이 있게 하기 위하여 수학적 표현들 간의 관계를 살펴보게 한다.
의미있는 수학적 담론을 촉진	효과적인 수학교수는 학생의 접근방식과 논쟁을 분석하고 비교하는 것을 통하여 수학적 아이디어에 대한 공유된 이해를 확립하도록 학생들 간의 담론을 촉진한다.
의도적인 질문을 설정	효과적인 수학교수는 중요한 수학적 아이디어와 관계에 관하여 학생의 추론과 감각을 평가하고 발전시키기 위하여 의도적인 질문을 활용한다.
개념적 이해를 기반으로 절차적 능숙함을 개발	효과적인 수학교수는 학생이 개념적 이해에 기반을 둔 절차에 능숙하게 하고, 지속적으로 맥락 있는 수학 문제를 해결하면서 융통성있게 계산절차를 이용하는데 익숙해지도록 한다.
수학학습에서 생산적인 어려움을 겪도록 지원	효과적인 수학교수는 학생들이 개인적으로 혹은 협력적으로 수학적 아이디어와 관계를 파악하는 과정에서 생산적인 어려움을 겪을 수 있는 기회와 지원을 지속적으로 제공한다.
학생 사고의 증거를 밝히고 활용	효과적인 수학교수는 학생의 수학적 이해의 진전을 평가하고자 또한 지속적으로 학습을 지원 및 확장하는 방식으로 수업을 조정하고자 학생의 사고의 증거를 활용한다.

NCTM(2014)의 수학교수 실천 8가지는 수학교육 연구 결과를 반영한 것으로서, 깊이 있는 수학교육을 위하여 필수적인 수학 교수 실천을 도출하고 수학교수를 강화하는 틀을 말해준다. 수학교수에서 교사가 수학적 지식을 갖는 것만이 아니라 그 지식이 가르치는 일과 관련될 수 있도록 교과에 대한 이해와 통찰을 강조하였고, 생산적인 교사의 신념을 효과적인 수업과 어떻게 연결할 수 있는지 논의와 예시를 통하여 보여준다. 수학교수 실천으로 제시한 8가지는 학생의 학습에 초점을 둔 수학 목표를 수립하기, 추론과 문제 해결을 증진하는 과제를 실행하기, 수학적 표현을 활용하고 연계하기, 의미있는 수학적 담론을 추구하기, 추론과 이해를 발전시킬 수 있는 의도적인 질문하기, 개념적 이해를 기반으로 절차적 능숙함을 개발하기, 수학교육에서 생산적인 어려움을 겪을 수 있도록 지원하기, 학생들의 사고의 증거를 밝혀내고 활용하기 등이 다. [표 1]은 8가지 수학 교수 실천을 요약한 것이다.

III. 연구방법

1. 연구 대상

이 연구는 초등교사가 수학수업을 계획하고, 실행하고, 비평하는 과정에서 수학 내용이나 수업 방법에 대하여 어떤 고민과 성찰을 하는지 분석하고 그 실천 과정의 초점은 어떻게 변화하는지 밝히고자 하였다. 이 연구는 한 초등교사에 대한 사례 연구로서, ‘소수의 나눗셈’ 수학 수업을 중심으로 수업계획, 수업실행, 수업비평의 위치에 있었던 시기로 분리하여 설정하였다.

김교사는 2016년도에 초등학교 교사를 시작한 초보 교사이다. 이 연구는 김교사가 2017년도 6학년 담임교사로서 실행한 공개수업을 중심으로 교사의 성찰과 변화에 관한 것이었다. 공개수업 이전에 수업계획안과 학습지가 작성되었고 수업실행 과정은 녹화되었다. 김교사가 공개한 수업은 6학년 1학기 3단원 소수 나눗셈의 11차시 중에서 1차시 수업(2017. 04. 04)이었다. 2018년 1월에 동료교사 6명(동료교사 A~F)*은 녹화된 비디오 자료로 이 수업을 관찰하였고 수업비평문을

작성하였다. 김교사는 동료교사들이 이 수업에 대하여 작성한 비평문을 함께 읽고 논의하였으며, 이후 자신의 수업에 대한 비평문을 작성하였다.

수학수업을 둘러싼 교사의 변화 과정 연구에서 교사의 위치나 입장을 따라 변화하는 교사를 구분하였던 Heaton(1994)이나 김상미(2005)의 방법론을 참조하여, 김교사를 세 가지로 설정하였다. 김교사를 수업계획자, 수업실행자, 수업비평자로서 구별하고 각각 Kim1, Kim2, Kim3라고 설정하였다. ‘소수의 나눗셈’ 수업을 둘러싸고 있는 김교사의 세 시기를 요약한다면, Kim1은 2017년 3월 수업계획자, Kim2는 2017년 4월 수업실행자, Kim3는 2018년 1월 수업비평자를 말한다. 이들 세 시기는 다른 입장에 있는 김교사이지만 모두 한 명의 김교사이며, 자신의 수업을 바라보는 다중적인 입장에서 서로 소통하며 성찰하고 있다.

수학과 교육과정** 측면에서 본다면, 김교사가 공개한 수업은 소수의 개념과 연산에 관한 것이다. 관련된 학년군별 학습내용에서 본다면, 3-4학년군에서 소수의 개념을 분수와 관련하여 도입하고 소수 두 자리 수의 범위에서 덧셈과 뺄셈을 다룬다. 5-6학년군에서 분수와 소수 관계의 이해를 통하여 표현하고 크기를 비교하고, 소수의 곱셈과 나눗셈을 다루게 된다. 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 수학과 교과서에서 소수의 덧셈과 뺄셈은 4학년 2학기(4-2-1단원. 소수의 덧셈과 뺄셈)에 제시되었고, 소수의 곱셈은 5학년 2학기(5-2-1단원. 소수의 곱셈)에 다루어진다. 소수의 나눗셈은 5학년과 6학년에 걸쳐서 다루어진다. 제수가 자연수인 즉, ‘(소수)÷(자연수)’, ‘(자연수)÷(자연수)’인 꼴의 소수 나눗셈을 5학년 2학기(5-2-4단원. 소수의 나눗셈)에서 다루고, 제수가 소수인 즉, ‘(소수)÷(소수)’인 꼴의 소수 나눗셈을 6학년 1학기(6-1-3단원. 소수의 나눗셈)에서 다루고 있다. 김교사의 수업은 수학과 교과서와 관련지어 본다면, ‘6-1-3단원’의 도입 차시에 해당한다. 소수 나눗셈 단원의 세부 구성은 [표 2]와 같다.

** 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 수학 교과서는 2017년도에 1-2학년군, 현재 2018년도에 3-4학년군, 내년 2019년도에 5-6학년군이 도입된다. 논의하는 수업은 2017년도 6학년 1학기에 계획하고 실행되었으며, 2018년도에 동료교사들과 수업을 비평하였다. 이 논문은 2017년도에 실행한 수업을 둘러싼 분석과 논의를 진행하므로 2009 개정 수학과 교육과정 및 그에 따른 수학 교과서를 중심으로 논의한다.

* 이 논문에서 동료교사의 실명은 A, B, …, F 등으로 대신하기로 한다.

[표 2] 수학 교과서의 소수 나눗셈 단원 구성
[Table 2] Contents of units related to the division with decimals in mathematics textbooks

학년학기 단원명	소수의 나눗셈 단원의 세부 구성
5-2-4 소수의 나눗셈	<ul style="list-style-type: none"> · (소수)\div(자연수), 몫이 소수 한 자리 대소수 · (소수)\div(자연수), 몫이 소수 두 자리 대소수 · (소수)\div(자연수), 몫이 1보다 작은 소수 · (소수)\div(자연수), 소수점 아래 0을 내려 계산 · (소수)\div(자연수), 몫의 소수 첫째 자리에 0이 있는 경우 · (자연수)\div(자연수), 몫을 소수로 나타내기 · (자연수)\div(자연수), 몫을 반올림하여 나타내기
6-1-3 소수의 나눗셈	<ul style="list-style-type: none"> · (소수 한 자리 수)\div(소수 한 자리 수) · (소수 두 자리 수)\div(소수 두 자리 수) · 자릿수가 다른 두 소수의 나눗셈 · (자연수)\div(소수) · 소수 나눗셈의 결과 어렵하기 · 소수의 나눗셈에서 나머지 구하기 · 소수 나눗셈에서 몫을 반올림하여 나타내기

2. 자료 수집

이 연구의 자료는 2017학년도 2학기 C교육대학원수학수업비평 강좌(2018. 01. 08.~2018. 01. 29)에서 수집되었다. 이 강좌는 수학수업비평에 관한 이론과 사례들을 논의하고, 개인별로 2회에 걸쳐서 수업비평문 쓰고 수학수업을 논의하는 것으로 구성되었다. 10회차에 다른 교사의 수학수업을 관찰하고 수업비평문을 작성하는 것이었고, 14~15회차에 자신의 수학수업에 대한 비평문을 작성하여 논의하였다. 이 과정에서 다른 교사의 수업에 대한 수업비평을 각기 달리 하지 않고 하나의 수학수업을 관찰하고 여러 가지 시선에서 논의하는 제안이 있었다. 이 때 김교사는 수업비평 과정을 위한 자료로서 자신의 수업을 공유하였다. 이 강좌를 수강하였던 동료교사 6명은 김교사의 수업을 관찰하고 서로 논의할 수 있는 기회를 가지게 되었다. 김교사는 수업을 실행하기 이전에 미리 작성하였던 수업계획안과 학생활동지를 제공하였고, 수업 녹화 비디오를 공개하였다. 6명의 동료교사는 수업 녹화 비디오를 통하여 이 수업을 관찰하고 수업비평문을 작성하였다. 김

교사는 동료교사 6명의 이 수업에 대한 수업비평에 참여하였고 이후 자신의 수업에 대한 수업비평문을 작성하고 논의하였다.

Kim1(수학 수업을 계획하는 교사)에 대한 자료 수집은 수업 계획안, 계획한 학생 학습지였고, Kim2(수학 수업을 실행하는 교사)에 대한 수집 자료는 수업 녹화 비디오와 수업 전사 자료였다. Kim3(수학 수업을 비평하는 교사)에 대한 자료는 김교사 자신의 수업비평문을 분석 자료로 하였으며 김교사 수업에 대한 동료교사 6명의 수업비평문을 참고 자료로 활용하였다. [표 3]은 김교사의 시기별 자료 수집과 생성 시기를 나타낸 것이다.

[표 3] 김 교사의 세 시기
[Table 3] Collecting data

세 시기	자료 수집	생성 시기
수업계획 교사 Kim1	· 김교사의 수업계획안 · 학생용 학습지 자료	2017. 03. 29 ~04. 03
수업실행 교사 Kim2	· 김교사 수업동영상 · 김교사 수업 전사 자료	2017. 04. 04 2018. 01. 18
수업비평 교사 Kim3	· 김교사 수업에 대하여 교사 6명의 수업비평문 · 김교사가 자신의 수업 에 대한 수업비평문	2018. 01. 15 ~01. 19 2018. 01. 24.

3. 분석의 초점

이 연구는 분석을 위하여 수학수업의 다양한 측면들 중에서 NCTM(2014)의 8가지 수학교수 실천을 기초로 분석틀을 설정하였다. 그러나 이 연구는 8가지의 수학교수 실천을 교사가 어떻게 따르고 있는가를 평가하려는 것이 아니다. 효과적인 수학교수 실천을 위한 지침으로서가 아니라 수업연구의 주요 측면으로서 8가지를 고려하였다. 각 측면에서 초등교사가 어떤 고민과 성찰을 하고 있는지 또는 실천의 초점을 어디에 두고 있는지를 분석하는 데에 있어서 수학수업의 주요한 측면과 준거로서 참조하였다. [표 4]는 이 연구가 8가지 수학교수 실천을 기초로 수학수업 분석의 측면을 설정한 것이다.

[표 4] 분석의 측면과 준거

[Table 4] Aspects and criteria for analysis

분석의 측면과 준거	
학습에 초점을 둔 수학 목표	학생의 학습에 초점을 두는 수학에 관한 목표를 어떻게 설정하고 수업 결정에서 그 목표를 어떻게 활용하는가?
과제의 설정과 실행	어떤 과제를 설정하고 어떻게 해결하고 참여하도록 하는가?
수학적 표현	수학적 개념과 절차의 이해를 위하여 수학적 표현들 간의 관계를 어떻게 살펴볼 수 있는가?
수학적 담론	학생들의 접근방식과 논쟁을 어떻게 다루고 학생들 간의 담론을 어떻게 촉진하려고 하는가?
질문의 실행	학생들의 추론과 감각을 평가하고 발전시키기 위하여 어떤 질문을 어떻게 활용하는가?
개념적 이해와 절차적 능숙함	개념적 이해에 기반을 두고 절차적 능숙함을 어떻게 개발하고 있는가?
생산적인 어려움	생산적으로 어려움을 겪을 수 있도록 어떤 기회와 지원을 제공하고 있는가?
학생 사고의 증거를 활용	학생들의 사고에 대한 증거(단서)를 어떻게 활용하고 있는가?

IV. 연구 결과

1. 학습에 초점을 둔 수학적 목표 설정하기

이 연구에서 분석하는 김교사의 수업은 '6-1-3단원 소수의 나눗셈'을 도입하는 첫 차시이다. 수학 6-1 교사용 지도서에 따르면, 이 단원의 수업 내용은 '(소수)÷(소수)의 계산 원리를 알고 필산으로 계산하기, 소수의 나눗셈에서 결과를 어렵하기, 소수의 나눗셈에서 몫과 나머지를 구하고 검산하기, 소수의 나눗셈에서 몫을 반올림하여 나타내기'(교육부, 2015, p. 179)라고 밝히고 있으며, 이 차시의 활동 내용은 '스토리텔링을 통하여 소수의 나눗셈이 필요한 상황을 이해하게 한다.'라고 한다. 수학 6-1 교사용 지도서가 제시하는 스토리텔링은 마법학교 이야기 상황을 도입하여 분수의

나눗셈을 해결하고 소수의 나눗셈으로 연결된다. 교사용 지도서의 흐름은 이전 단원에서 학습 한 분수 나눗셈에서 이번 단원에서 배우게 될 소수 나눗셈으로 연결하여 전개한다고 볼 수 있다.

Kim1 교사는 단원의 도입으로서 소수의 역사를 이야기로 구성하여 '소수는 누가 만들었고 언제부터 어떻게 소수가 전개되어왔는가'를 이야기로 준비하였다. 학습목표를 '소수의 역사와 개념을 알고, 소수점이 찍히는 위치를 판단할 수 있다.'로 설정하였다. 소수의 역사를 통하여 소수의 개념을 형성하고, 소수의 개념에서 소수점이 갖는 의미를 강조하였다. Kim1 교사의 수업계획안에 따르면, 소수 나눗셈에서 소수점이 찍히는 위치를 판단할 수 있도록 하는 데에 초점이 있다. 이것은 교사용 지도서가 제시하는 방식 즉, 분수 나눗셈에서 소수 나눗셈으로 가는 방식과는 달리, 자연수의 나눗셈에서 십진기수법의 원리와 연계하여 소수 나눗셈으로 가려는 계획을 보여주고 있다.

Kim2 교사는 스토리텔링과 <활동 1>을 시작하는 곳에서 수업의 초점을 언급한다. [수업장면 #1]에서 첫 번째 활동인 소수의 스토리텔링을 시작하면서 Kim2 교사가 소수의 의미에 주의할 것을 강조하였다.

[수업장면 #1] 소수의 의미

Kim2: 분수와 소수는 사람이 편리하기 위해서 만들어 놓은 거야. 편리하고자 만들어 놓았는데 여러 분들이 어렵게 생각하는 경우가 있어. 왜 그럴까? 숫자의 의미를 파악하려고 하지 않고 숫자 자체로 바라보기 때문이야. (중략)

Kim2: 소수를 영어로 뭐라고 할까요?

학생: 데시멀!

Kim2: 그렇지. '데시멀'이야. '데시'가 무슨 뜻인지 알아? (중략) 그것은 '10으로 나눈'이라는 뜻이야. '소수'라는 것은 10으로 나눈 것을 의미해. 그렇기 때문에 소수는 10진법을 사용해야만 사용할 수가 있어. 그렇기 때문에 분수가 소수보다 먼저 사용되었고 소수는 사용된 지 오래되지 않았어. 예를 들어 100분의 25 같은 경우 0.25라고 나타낼 수 있는 방법 자체가 몇 년 되지 않았어.

Kim2 교사는 생활의 편리를 위해 소수가 만들어졌다고 밝히고 소수로 표현하는 역사적인 흐름을 따라서

소수를 간단히 표현하려는 수학적 이야기를 펼쳐갔다. 소수의 역사를 중심으로 한 스토리텔링이 진행되었다. 지금의 소수 표현이 정착되기까지 변화 과정을 통하여 십진기수법의 원리와 연결하면서 소수 개념 형성을 목표로 하였다. 두 번째 활동으로 소수 나눗셈 식에 어울리는 문제 만들기 활동을 시작하였다. [수업장면 #2]에서 Kim2 교사는 소수의 나눗셈이 일상생활과 연관되어 있다고 강조하였다.

[수업장면 #2] 소수 나눗셈 상황 만들기

Kim2: 소수는 대부분 어디에 쓰이냐면, 무언가를 측정할 때 쓰여. 예를 들면 길이, 부피, 넓이, 두께, 들이 이런 것들을 측정, 측정할 때 사용돼. 이번에는 뭘 할 거냐면, 소수를 가지고 문제를 만들어 볼게. 어제 분수의 나눗셈 할 때 얘기했듯이, 소수와 분수의 나눗셈은 일상생활과 아주 밀접하게 연관되어 있어.

Kim2 교사는 소수 나눗셈의 의미를 다루고자 일상의 측정 상황을 떠올리고 생활 장면에서 의미를 말하였다. 소수 나눗셈 연산을 배우기 전에 주어진 식이 가능한 상황을 만들어보는 것이었다. 주로 연산 학습 순서로 알려져 있는 전개 방식은 연산을 학습하고 문제 상황에서 연산을 응용하는 것이지만, Kim2 교사의 방식은 이와는 다른 진행이었다. 또한 연산 학습의 초점은 주로 정확하고 빠르게 계산하도록 반복 연습하는 것에 있다고 알려져 있지만, Kim2 교사의 초점은 소수 나눗셈의 의미를 목표로 설정하고 상황을 만들어가는 활동으로 단원을 시작하였다.

Kim3 교사는 [수업비평문 #1]에서 '수학의 생활화'라고 수업의 의도를 밝히고 있다. 생활의 편리함을 위하여 변화해 온 수학을 이야기하고 이 과정에서 학생들은 수학이 이로운 학문이라는 신념을 갖게 될 것이라는 기대를 말하였다. Kim3 교사는 한 차시의 수업이 갖는 학습 목표를 수학과 목표로 연결하였다.

[수업비평문 #1] 수업의 의도

이 수업에서 의도는 이것이다. 학생들을 수학 안으로 끌어당겼다가 다시 수학을 통해 일상생활로 나가기도 하는 수학의 생활화를 경험하게 하고자 하였다. 수학의 생활화를 강화하기 위한 또 하나의 전

략으로 소수점의 위치 하나 때문에 폭발하고 만 쉐린저호의 동영상도 제공하였다. F교사는 '소수도 분수처럼 실제로 어딘가에 존재했던 사람들의 생활속 편리함을 위해 생겨난 것임을 알게 하는 것, 이 없이 지속되면 수학이 이로운 학문이라 믿는 신념과 가치로 이어지게 될 것(F교사의 논평문에서)'이라는 문장에서 본인의 의도를 전달한다.

학생의 수학학습에 대한 목표에 관하여 김교사는 무엇을 고민하고 초점을 두고 있는지 [표 5]와 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 소수 나눗셈의 의미를 소수점이라는 부분에 집중하였고, Kim2 교사는 소수의 표현과 일상의 맥락에 집중하였다. Kim3 교사는 수학과 생활의 관련을 수학 교과에 대한 가치와 신념과 관련지었다.

[표 5] 수학적 목표를 설정하기

[Table 5] Establishing the goals for mathematics

	수학적 목표
Kim1	· 소수 나눗셈에 대한 감각을 키운다. · 소수점 개념을 형성하고 소수점 위치 판단할 수 있다.
Kim2	· 소수의 역사에서 소수의 의미를 알 수 있다. · 소수 나눗셈의 생활 맥락을 만들 수 있다.
Kim3	· 생활 속의 수학을 경험할 수 있다. · 수학은 이로운 학문이라는 신념을 형성한다.

2. 과제를 설정하고 실행하기

Kim1 교사는 수업계획에서 동기유발 스토리텔링과 두 가지의 활동을 준비하였다. 스토리텔링은 '소수는 누가 만들었으며, 소수점은 언제부터 사용하게 되었을까?'를 중심으로 계획하였다. 이어서 두 가지 활동을 계획하였다. <활동 1>은 소수 나눗셈 식을 제시하고 일상생활과 관련된 문제를 만드는 것이었다. 생활과 관련된 문제를 만들 수 있도록 '힌트를 통하여 부피, 길이, 들이 등 측정활동에서 소수가 쓰인다.'고 덧붙였다. Kim1 교사가 준비한 <활동 1>의 학습지는 6개의 나눗셈 식이 있다. (1) $10 \div 4$, (2) $16.26 \div 8.03$, (3) $32.4 \div 5$, (4) $18 \div 3.6$, (5) $2.75 \div 5.2$, (6) $19 \div 5$ 를 제시하였다. 문제를 만든 후에 느낀 점을 써 보는 칸이 하단에

추가되어 있었다. 이 문제들은 이전 5학년에서 다루었던 제수가 자연수인 '(소수)÷(자연수)'와 이 단원에서 배우게 될 제수가 소수인 '(소수)÷(소수)'를 혼합하고 있었다. 5학년과 6학년의 소수 나눗셈 관련 내용을 이어주고, 소수의 나눗셈의 의미를 일상생활 장면에서 접할 수 있도록 계획하였다. <활동 2>는 소수 나눗셈의 결과를 추측하여 소수점을 찍는 문제였다. 자연수 부분에 집중하여 소수점이 찍히는 위치를 찾아가도록 계획하였다. [그림 1]은 Kim1 교사가 계획한 소수점 위치 찾기 활동지이다. 여기에서 소수 나눗셈에 대한 감각을 키우고, 소수점이 갖는 의미를 드러내고자 하였다. 이 단원에서 배우게 될 소수 나눗셈을 자연수 나눗셈과 연계하여 '소수점'의 위치를 어렵해보는 시도였다.

(1) $12.8 \div 4.2 = 30476190476$	(2) $15.12 \div 3.27 = 4623853211$
(3) $72.145 \div 5.16 = 139815891473$	(4) $55.7817 \div 4.97214 = 112188514$
(5) $251.12 \div 49.48 = 50751818917$	(6) $3514.52 \div 22.85 = 153808315$
(7) $7662.12 \div 15.2316 = 50304104$	(8) $6828.473 \div 175.16 = 38984203$
(9) $56842.121 \div 563.462 = 10088013$	(10) $77562.72 \div 27.562 = 2814117$

[그림 1] 소수점 찍기 활동지

[Fig. 1] Placing decimal points worksheet

Kim2 교사의 스토리텔링은 시몬 스테빈, 프랑스와 비에트, 존 케플러, 존 네이피어, 헨리 브리그스 등의 학자들을 이야기하면서 그들의 삶과 소수와 관련된 업적들을 다루었다. 학생들은 이야기를 듣는 중간 중간에 동의하거나 놀람의 감탄사를 보이면서 집중하였다. <활동 1> 나눗셈 상황 만들기를 시작하면서 Kim2 교사는 두 문제 '(1) $10 \div 4$ '와 '(2) $16.26 \div 8.03$ '에 대하여 예시를 보였다. 첫째 문제는 5학년에 다루었던 나눗셈 식이고 둘째 문제는 이번 단원에서 다루게 될 나눗셈 식이었다. Kim2 교사는 ' $10 \div 4$ '라는 식에 대하여 몇 가지 경우를 예시로 보여주었다. 몫을 소수로 구하는 경우, 나눗셈의 나머지를 묻는 경우, 몫을 자연수 부분까지 버림하고 나타내야 하는 경우 등의 예를 보여주었다. [수업장면 #3]에서 Kim2 교사의 초점은 하나의 나눗셈 식에 대한 여러 가지 상황을 만들고, 소수 나눗셈의 문제 해결 상황에서 몫과 나머지를 관련짓도록 요구하였다.

[수업장면 #3] 하나의 식에 관한 여러 가지 문제

Kim2: 10 나누기 4에 대해서 생각해 봅시다. 10 나누기 4는 예를 들면 사과 10개가 있는데 4사람이 나눠 먹으려고 그래. (중략) 2.5개가 돼. 사과 10개를 4사람이 나눠먹으면 2.5개가 돼. 그럼 여기서 2.5가 의미하는 건 뭘까? 한 사람당 2.5개씩. 그렇지. 한 사람당 2.5개씩 나눠먹을 수 있다는 거지. 2.5개는 뭐야. 사과 두 개랑. 반쪽이겠지? 한 사람당 그렇게 먹을 수 있다는 거야. 그런데 이번에는, 사과 10개를 4명에서 나눠 먹는데, 한 사람당 2개씩만 먹을 거야. 그럼 몇 개가 남을까?

학생들: 두 개

Kim2: 그렇지 두 개가 남겠지. 그걸 어떻게 계산했을까? 0.5라는 나눗셈을 나누는 수에 곱하면 얼마가 나와? 2가 나오지. 그게 남는 양이 된 거야. 사과로 했을 때 별로 문제가 되지 않아. 근데 똑같은 10나누기 4인데 문제를 바꿔 볼게. 사람이 10명이 있는데 오토바이 4대에 나눠 타야 돼. 자, 한 대에 탈 수 있는 사람은 몇 명일까요?

학생들: 두 명

Kim2: 두 명일까요?

학생들: 세 명

Kim2: 2.5명이라고 얘기할 수도 있겠지? 2.5명이 있어 없어? 없잖아. 사람은 소수점이 아니니까. 반으로 나눌 수가 없잖아.

계획했던 수업안과 달리, 스토리텔링 과정에서 소수의 역사에 집중하여 15분정도 진행되면서 <활동 1>의 과제는 논의할 시간이 부족하여 발표로 마무리되었고 <활동 2>의 과제는 실행하지 못하였다. Kim3 교사는 계획하였지만 수업하지 못한 <활동 2>에 대하여 [수업비평문 #2]와 같이 밝히고 있다.

[수업비평문 #2] 계획했지만 실행하지 못한 과제

학생들이 배우지도 않은 소수 나눗셈을 미리 하라는 것은 아니다. 자세히 보면 답은 주어져 있고 소수점만 찍는 활동이기 때문에 4학년에서 배운 나눗셈을 통해 해결할 수 있다. 어렵하기 전략을 사용하는 것과 소수 나눗셈 결과에 대한 수 감각을 익히는 것에 큰 비중을 두고 야심차게 준비했으나 본

차시에서 쓸 수 없었다.

Kim3 교사는 계획했던 과제가 학생들이 수행하기에 시간이 부족하고 충분히 논의되지 않았다는 점에서 의도대로 흘러가지 않았다고 지적하였다. [수업비평문 #3]에서 우리말의 ‘문제’를 이중적인 뜻으로 사용하여 계획대로 되지 않았다는 것을 표현하였다.

[수업비평문 #3] 문제(problem/question)의 활동 제목에서 문제의 활동이라고 한 것에는 이유가 있을 것이다. 그것은 수업이 본인의 의도대로 흘러가지 않았음을 대변해주는 가장 적절한 말이기 때문이다(problem). 하지만 돌이켜 생각해 보면 크게 문제가 될 것도 없는 것 같다는 생각이 들었다. 활동 1과 2는 수학 문제로 이루어진 활동이다(question). 활동 1과 2를 처음 기획했을 때 본연의 의도 (중략) ‘수학과 실생활은 아주 밀접한 관계 속에 우리를 사 고하게 할 수 있는 힘을 가졌고 게다가 같은 나눗셈 형태지만 서로 완전히 다른 의미를 지닌다.’라는 사실을 깨달은 친구는 없어 보인다. 그렇다고 이 활동이 의미가 없다고 생각하진 않는다. 학생들이 수학과 일상생활을 연결 지으려 노력했고 그것을 통해 들은 분명한 관계가 존재함을 깨달았다. 학생들을 사 고하게 하는 수업은 살아있는 수업이라고 생각한다.

학생들이 소수 나눗셈을 구체적으로 만들어내기를 기대하고 수업을 계획했지만, 수업 과정에서 학생들이 이 과제를 어려워하였고 수업 실행은 계획대로 진행되지 않았다는 점에서 문제가 있어 보이기도 하지만, 또 한편으로 학생들이 수학과 일상생활을 연결하여 사 고하도록 진행하였다는 점에서 살아있는 수업이라고 비평하였다. 계획했던 과제들을 실행하지 못했다는 점에서 문제일 수도 있지만, 수학과 일상을 관련짓도록 하려는 의도를 드러냈다는 점에서 의의를 두고 있었다. 교사의 수업 계획과 의도는 수업 실행 과정에서 변경될 수 있으며 교사를 통하여 재해석된다. 수업비평은 계획한 과제를 계획대로 실행하는가라는 관점이 아니라 과제를 계획한 교사의 의도를 중심으로 수업을 바라볼 수 있다. 계획한 시간과 예측된 반응대로 수업이 진행될 때 잘 짜여진 수업이라고 말할 수도 있겠지만,

Kim3 교사는 과제의 의도를 드러냈는가를 초점으로 수업을 바라보고 있었다.

과제의 측면에서 김교사는 무엇에 초점을 두고 있는지 [표 6]과 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 소수 나눗셈 식에 어울리는 상황 만들기과 소수 나눗셈을 어렵하여 소수점의 위치 정하기의 두 과제를 계획하였다. 수업실행에서 Kim2 교사는 소수 나눗셈 식에 대하여 여러 가지 상황 만들기에 집중하고 몫과 나머지를 생활과 연결하면서 소수 나눗셈 연산 감각에 집중하였다. Kim3 교사는 계획한 두 가지 중에서 하나만 실행한 것은 아쉽지만 수학과 일상생활을 연결하는 과제의 의도를 강조하면서 살아있는 수업의 추구를 말하였다.

[표 6] 과제를 실행하기
[Table 6] Implementing tasks

과제의 실행	
Kim1	<ul style="list-style-type: none"> · 주어진 소수 나눗셈 식에 어울리는 상황을 만들기 · 소수 나눗셈을 어렵하여 소수점을 찍기
Kim2	<ul style="list-style-type: none"> · 하나의 소수 나눗셈 식에 대하여 여러 가지 상황 만들고 연산 감각 키우기 · 몫과 나머지를 생활과 연결하기
Kim3	<ul style="list-style-type: none"> · 하나의 식을 여러 가지 의미로 해석하기 · 수학과 일상생활을 연결하는 살아있는 수업을 추구하기

3. 수학적 표현을 연결하기

소수는 초등수학에서 만나게 되는 유리수 또는 실수의 표현이다. 익숙하게 다루었던 자연수 범위의 연산과 달리, 연산이 구동되는 범위에 따라 다른 의미나 맥락을 요구하기도 한다. 소수 범위의 연산은 초등학생들이 혼동하거나 이해하기 어려워한다고 알려져 있다. Kim1 교사는 소수 나눗셈을 시작하기 전에 소수의 이야기를 구상하였고, 지도안 유의점에서 소수의 역사에 흥미를 가지는데 초점을 두었다. 소수 표현을 도입에서 다루고 소수의 의미와 연산을 연결하면서 소수 나눗셈의 의미를 접근하였다. 소수의 표현을 주로 소수점을 중심으로 계획하고, 십진기수법과 관련짓는 단

서로 생각하였다. 소수 나눗셈은 분수 나눗셈과 관련지어 도입하거나 십진기수법과 관련지어 도입하는 두 가지 접근이 알려져 있다. 이 두 가지 접근은 양자택일적으로 분리된 접근은 아니지만 어느 쪽에 중심을 두고 도입 방향을 설정할 것인가에 따라 수업은 다르게 전개될 수 있다. Kim1 교사의 도입은 분수 나눗셈에서 접근하기보다는 십진기수법과 관련하여 계획하고 있다.

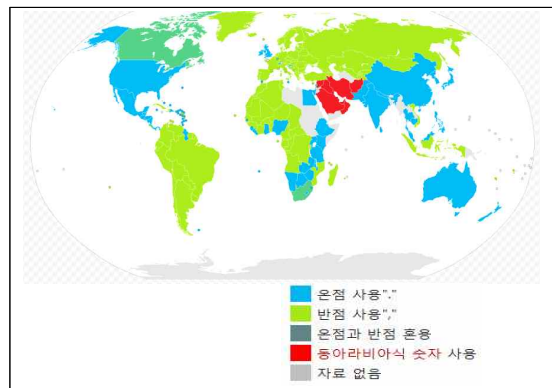
Kim2 교사의 스토리텔링은 ‘소수의 표현’ 특히 소수점 아래 자리를 표현하는 방법이 어떻게 변화해 왔는가를 중심으로 전개되었다. 소수를 나타내는 이전의 방법들은 1보다 작은 수를 어떻게 표현하려고 했는가를 고민하였던 것으로, 소수 아이디어와 수학자의 고민을 보여주었다. 스테빈의 방법 $37\textcircled{0}2\textcircled{1}4\textcircled{2}5\textcircled{3}$, 비에트의 방법 $37|_{245}$, 케플러의 방법 $37(245)$, 티코 브라헤의 방법 $37:2^14^25^3$, 헨리 브릭스의 방법 37^{245} , 오토리드의 방법 $37|245$ 등의 이야기가 계속되었다. 소수 표현을 이야기하면서 새로운 개념이 나타나고 지금 우리가 사용하는 표현이 정착되는 데에 오랜 시간이 지속되었다고 말해주었다. 익숙한 소수 표현이지만 수학의 역사에서 소수점을 사용한 소수 표현은 획기적인 변화라고 강조하였다. 우리가 사용하는 소수점(온점)과 다르게 표현하는 경우들을 소개하였고, 소수점의 표기 방법은 지역이나 나라에 따라서 온점과 반점이 섞여서 쓰인다고 추가하였다. [수업장면 #4]에서 소수의 표현이 다른 경우를 이야기하자, 한 학생은 나라에 따라 곱셈 기호도 다르다고 발표하였다. 수학 기호는 세계적으로 모두 동일하다고 생각하지만, 수학 기호도 지역이나 나라에 따라 다를 수 있음을 이야기하였다.

[수업장면 #4] 나라와 지역에 따라 다른 기호

Kim2: 2003년에 37.245 를 이렇게 찍는 나라도 있고, 어떤 나라들은 쉼표로 $37,245$ 로 표시하는 나라도 있어요. 아직도 통일되지 않았고 중동 지역에서는 아직도 쉼표를 사용하고 있어요. 또는 유럽 일부 나라에서도요. 그렇기 때문에 소수를 거의 500년에 가까운 시간동안, 물론 소수가 처음 발명된 지 오래 되었지만 소수점을 찍는 것에 대해서는 이렇게 몇 백년간 논의를 할 정도로 과연 소수가 중요할까라는 의문을 가질 수도 있어요.

학생: 그런데 다른 나라는 곱셈 기호도요, 우리는 이렇게 쓰는데 (손을 올려서 곱셈 기호 X자를 그리며), 다른 어디에서는 이렇게 (손가락으로 * 기호를 그리며) 하던데요.

Kim2: 아, 곱셈 기호? 이런 거 (칠판에 * 기호를 쓰면서) 말하는 거지?



[그림 2] 소수점 표기 (출처: 위키백과에서)

[Fig. 2] Notations of decimal points

Kim3 교사는 수업비평 과정에서 동료교사들에게 [그림 2]와 같은 ‘소수점 표기의 분포’를 소개하였다. 소수점 표현으로 온점이 익숙하지만, 우리나라가 쓰고 있는 온점만큼이나 반점이 널리 사용되고 있었다. 우리나라와 같이 소수점 표현으로 온점을 쓰는 지역은 동아시아, 미국, 오스트레일리아 등이었고, 반점을 쓰는 지역은 러시아, 유럽, 아프리카, 남아메리카 등이 있었다. 수업비평 과정에서 지역에 따른 소수점의 분포는 수학적 기호와 표현이 문화적인 성격이 있다는 점을 논의하는 계기가 되었다. 소수 표현을 둘러싼 이야기를 통하여 동료교사들은 수학적 표현이 지역과 문화에 따라 차이가 있다는 점을 돌아볼 수 있었다.

수학적 표현의 측면에서 김교사는 무엇에 초점을 두고 있는지 [표 7]과 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 소수의 시작과 소수점 표현에 집중하여 계획하였고, Kim2 교사는 현재 우리가 사용하는 소수의 표현이 긴 시간동안 어떻게 변화되어 왔는지를 보여주었다. Kim3 교사는 소수 표현이나 수학적 표현이 나라와 지역에 따라 달리 분포하고 있다는 수학적 표현이 지역과 문화와 관련됨을 지적하였다.

[표 7] 수학적 표현을 연결하기
[Table 7] Connecting mathematical representations

수학적 표현	
Kim1	· 소수의 표현이 역사적으로 변화한 것에 흥미를 갖게 한다.
Kim2	· 우리가 사용하는 소수의 표현이 되기까지 소수 표현의 변화과정을 알아본다. · 반점이나 온점과 같이 소수점 표현이 다를 수 있다는 점에 주목한다.
Kim3	· 지역에 따라 소수점 표현이 다르다. · 수학적 표현은 지역과 문화에 따라 차이가 있을 수 있다.

4. 수학적 담론을 촉진하기

수학교실에서 담론을 형성하는 것은 학생들의 접근 방식과 논쟁을 어떻게 다루고 촉진하는가를 중심으로 나타난다. 수업계획안에서 Kim1 교사가 수학적 담론을 어떻게 다룰 것인가는 잘 드러나지는 않지만, <활동 1> 문제 만들기에 '다양한 문제가 나올 수 있도록 기법을 활용한다.'고 밝혔다. 이 유의점에서 본다면 소수를 활용한 문제는 학생들이 다양하게 생각할 수 있도록 계획하였다. <활동 2> 소수점 어렵하기에서 '다양한 답변이 나올 수 있도록 질문을 유도한다.'라고 밝히고 있다. 학생들이 찾아내는 소수점을 위치가 단지 정답인지 오답인가보다는 다양한 어렵 방법에 초점을 두고 계획하였다.

Kim2 교사는 전체 학급 구조에서 스토리텔링을 진행하였고, <활동 1>은 학생들 개별 활동으로 문제 만들기를 하고 다시 전체 학급으로 가져와서 이야기하였다. 이 때 담론의 전개는 학생들이 만든 여러 가지 상황을 발표하는 것으로 끝나는 것이 아니라 학생이 하나의 상황을 발표하면 그 상황에 이야기를 덧붙여서 문제 상황을 구체화하려고 하였다. [수업장면 #5]에서 '19÷5' 나눗셈 식에 대하여 한 학생은 오렌지 나누어 먹기 문제를 만들었다. 문제를 만든 학생은 3개씩 먹고 나머지 4개라고 생각하는 문제였지만, Kim2 교사는 소수점 아래까지 나눗셈을 하고 나머지 0.8을 어떻게 다룰지 고민하였다. 학생들에게 자연수 나눗셈으로 해결할 수 있는 것이었는데, Kim2 교사는 소수 첫째자리

까지 구하는 소수의 나눗셈으로 전개하면서 나머지 0.8의 의미에 관심을 갖게 하였다. 학생이 만든 나눗셈 상황을 전체 교실에서 소수점 아래까지 나눗셈을 하면서 소수의 나눗셈 상황으로 생각해보도록 하였다. 교실 전체에서 특정한 정답을 발표하는 형태가 아니라 학생의 답을 논의하면서 새로운 문제를 제기하는 구조를 만들었다.

[수업장면 #5] 학생들의 '19÷5' 문제 만들기

학생A: 오렌지가 19개 있는데 먹을 수 있는 사람은 5명이다. 그러면 한 사람당 먹을 수 있는 오렌지의 개수는?

Kim2: 음, 거기서 쓸 수 있는 이걸 나누면 4.8정도가 되는데 근데 결국 쓸 수 있는 건 4를 쓸까? 0.8을 쓸까?

학생들: 4

Kim2: 어 그래 4를 쓰겠지? 사람이 먹을 수 있는 것은?

학생A: 3 아니에요?

Kim2: 아, 미안해. 3.8이네. 3을 쓸 수 있겠지.

이 교실의 대화 분위기는 자유롭고 허용적이었다. 교사가 실수할 때 학생들은 거침없이 지적하고 교사 또한 자신의 실수를 자연스럽게 인정하였다. Kim3 교사는 [수업비평문 #4]에 나타난 바와 같이, 한 단원의 시작에서 큰 그림을 그리고 그 속에서 배워가는 자신을 추구하였다. Kim2 교사가 스토리텔링을 깊이 있는 수학사의 내용과 흥미로운 수학자의 사생활까지 폭넓게 들려주기 위하여 스스로 공부하고 노력한 것을 엿볼 수 있었다. 교사 자신이 배워가면서 진행하는 수업에서 교사의 배움에 학생들도 함께 빠져들게 하는 힘을 느낄 수 있었다.

[수업비평문 #4] 한 단원의 시작

과목과 관계없이 단원이 시작될 때면 항상 고민이 많았다. 어떤 내용을 첫 차시로 구성해야 학생들이 새로운 단원에 흥미를 느끼고 기대를 하게 될 것인가에 대한 고민이었다. 그런 고민은 부족한 신규교사인 본인에게 공부할 수 있는 기회를 주었다. 무엇보다 학생들이 흥미로운 주제를 접하고 공부할 동기부여를 얻듯, 교사인 본인도 수업에 대한 동기를

언을 수 있었다. 공개수업의 일환으로 수학사 이야기를 스토리텔링으로 구성하였지만 사실 매 단원이 시작될 때마다 전체적인 내용을 아우를 수 있는 내용을 다루자는 것이 나름의 철학이었다.

수학적 담론의 측면에서 김교사는 무엇에 초점을 두고 있는지 [표 8]과 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 학생들이 제기하는 소수의 나눗셈의 상황이나 어렵 방법을 논의하는 것에 집중하여 계획하였다. Kim2 교사는 학생들이 만든 맥락을 다시 교실 전체로 가져와서 학생이 만든 맥락에 논의를 추가하면서 모두가 참여하도록 진행하였다. Kim3 교사는 단원 전체 내용을 아우를 수 있는 내용을 찾아서 단원을 시작하고 그 과정에서 교사 스스로 배워가는 수업을 추구하였다.

[표 8] 수학적 담론을 촉진하기

[Table 8] Facilitating mathematical discourse

	수학적 담론
Kim1	· 학생들이 다양한 상황과 어렵 방법을 제기하도록 촉진한다.
Kim2	· 학생이 만든 맥락을 교실 전체에서 논의하면서 모두가 참여하도록 연결한다.
Kim3	· 수업 계획과 실행 과정을 통하여 학생들과 함께 배워간다.

5. 질문을 설정하기

교사는 수업을 계획하면서 구체적으로 어떤 활동과 어떤 질문을 할 것인가를 고민하게 된다. 이 과정에서 교사는 수업 의도를 학생에게 드러내고 학생들은 학습에 참여하는 주요한 계기가 된다. 교사가 수업 계획에서 준비하는 질문들은 수업 전 교사의 의도와 교사가 예상하는 학생 반응을 말해 주기도 한다. 하지만 수업 전 계획한 질문들은 종종 수업 과정에서 학생들의 반응에 따라 변경되기도 하고 새로운 질문이 제기되기도 한다.

Kim1 교사가 문제 만들기 활동에서 계획한 질문은 ‘단위가 다를 때에 문제를 만들 수 있지만 단위가 같아지면 어떤가요?’였다. 이 질문은 Kim1 교사의 소수 나눗셈 단원의 고민을 드러낸 것이었다. 자연수 나눗셈은 주로 등분제와 포함제라는 맥락이 알려져 있다.

이 두 가지 맥락은 문제 상황에서 설정되는 제수와 피제수의 단위를 중심으로 살펴본다면, 결과적으로 등분제(분할) 상황은 제수(묶음의 개수)로 나누었을 때 하나의 묶음에 들어가는 날개를 묻는 것으로서 제수와 피제수의 단위가 다르게 설정된다. 포함제(측정) 상황은 특정 묶음 단위가 몇 번이 포함되는가를 묻는 것으로서 제수와 피제수의 단위가 같게 설정된다. 분수와 소수의 나눗셈에서 제수가 자연수가 아니고 분수나 소수일 때 등분제 맥락은 자연스럽게 만들어지지 않는다. 또한 제수가 피제수보다 큰 경우에 포함제(측정) 상황도 자연스럽게 지 않는다. Kim1 교사가 계획한 질문에서 ‘단위가 같을 때와 다를 때’라는 것은 설정한 소수 나눗셈 문제에서 제수와 피제수의 단위를 가리키고 있다고 보인다. 학생들에게 문제 만들기로 제시한 나눗셈 식은 피제수와 제수를 자연수와 소수, 수의 크기를 달리하면서 여러 상황이 가능하도록 구성되어 있었다. Kim1 교사는 소수의 나눗셈에서 ‘(소수)÷(소수)’인 경우 즉, 제수가 소수일 때 등분제 상황을 설정하기 어렵다는 것을 예상하고 있었고, 제수가 피제수보다 더 커진다면 포함제 상황을 설정하기도 어렵다는 것도 예상하고 있었다. Kim1 교사가 계획하는 여러 가지 나눗셈 식은 등분제나 포함제 이외의 단위 비율, 카테시안 곱의 역, 곱셈의 역 등의 다른 나눗셈 상황이 필요하다는 것을 예상하였다. 그러나 Kim1 교사가 계획했던 이 질문은 Kim2 교사의 수업 실행에서 제기되지 않았다. 학생들이 소수 나눗셈 문제 만들기 자체를 어려워하였고, 여러 가지 나눗셈 맥락을 서로 비교할 기회가 없었다.

Kim2 교사의 [수업장면 #6]은 문제 만들기를 시작하면서 교사가 여러 가지 나눗셈 장면을 보여주고, 상황에 따라 구하는 몫과 나머지가 달라진다는 예를 보여주었다. 소수 나눗셈 계산을 본격적으로 다루기 전에 연산 상황, 몫, 나머지 등을 묻는 질문들이었다. 나누는 수가 소수가 되었을 때 나머지는 소수 아래까지 나눗셈을 실행한 결과로 구하기 어렵다는 점을 지적하였다. Kim2 교사는 의도적으로 이 상황을 질문하였다. 리본 16.26m를 8.03m씩 나누어주면 2명에게 주고 남은 리본은 0.2m가 되겠지만, 만약 학생들이 ‘16.26÷8.03’을 소수 둘째자리까지 나눗셈하고 2.02라는 값에서 2명에게 주고 0.02m가 남는다고 오답할 수 있다고 예상하였다. Kim2 교사는 나머지가 0.02m가 아

니라 0.2m가 나온다는 설명을 덧붙였다.

[수업 장면 #6] 교사의 의도적인 질문

Kim2: 16.26 나누기 8.03 이걸 가지고 어떤 문제를 만들 수 있을까? (중략) 16.26미터를 한 사람에게 8.03씩 나눠 주고 남는 양은 얼마일까요? 라면 어느 곳을 써야 할까?

학생: 소수

교사: 여기에 (16.26 나누기 8.03의 몫에서 소수 부분을 가리키면서) 곱하기 8.03을 해야 나머지가 나오겠지? 결국 그때는 쓰는 양이 어디야? 소수 점 뒤에 있는 부분이겠지.

6학년 교육과정에서 '(소수)÷(소수)'의 나머지를 구하는 것은 어렵기 때문에 다루지 않는다고 수학 6-1 교사용 지도서는 제언하고 있다. '소수의 나눗셈에서 나머지를 구하는 것은 몫이 자연수이거나 나누는 수가 자연수인 경우에만 다루도록 하는 것이 바람직하다.' (교육부, 2015, p. 201)라고 밝혔다. 하지만 이러한 지도서의 권고에 대하여 Kim2 교사는 수업 의도나 진행에 따라 어떻게 할 것인가를 선택하고 결정할 수 있다. Kim2 교사가 실행한 수업은 나머지를 구하는 알고리즘에 중점이 있는 것이 아니라 소수 나눗셈의 여러 가지 상황을 만들어내는 것이었다. 이 질문을 제기한 것은 이 수업의 맥락에서는 가능할 수 있는 것이었다. 소수 나눗셈에서 나머지를 묻는 이 질문은 소수의 나눗셈이 무엇을 구하려고 하는가에 따라 다양한 상황이 있고, 단순히 나눗셈 연산을 그 아래 자리까지 실행하는 것만으로 해결하기 어렵다는 것을 의도적으로 질문하였다.

Kim3 교사는 수업비평과정에서 교사 자신이 제기한 질문들이 충분히 논의되지 않았다고 아쉬워하였다. [수업비평문 #5]에서 Kim3 교사는 질문이 학생의 학습으로 나아가지 못한 것을 지적하였다. 학생들의 생각을 수업에서 충분히 논의하지 못한 것도 아쉬워하였다. 수학수업에서 교사와 학생 모두 질문을 제기하고 이 질문들을 수업에서 논의하고 소통하면서 학생들이 학습할 수 있다는 것을 반성하였다.

[수업비평문 #5] 질문과 의사소통
수학사를 전달하는 과정에서 학생들과의 유기적인

대화가 더 있었으면 좋았을 것이라는 의견도 새롭게 다가왔다. C교사가 비평문에서 '좋은 물음을 던지며 아이들을 수업주제로 초대했지만 학습자의 사고활동이 일어나기 전에 문을 닫아버리게 되는 점이 아쉽다.'라고 표현한 것을 통해 본 수업에 대해 다시 생각해 볼 수 있었다. 단원 도입에 대한 고민이 많았고 학생들이 흥미를 느낄 수 있는 활동을 준비하는 것이 목적이었지 그것을 통해 소통하고 학생들의 생각을 들어보려는 노력을 하지 않았다는 사실이 식은땀을 흘리게 하였다. 교사 혼자 공부했었을 수도 있다는 생각에 지난 수업을 반성하게 되었다.

질문을 설정하는 측면에서 김교사는 무엇에 초점을 두고 있는지 [표 9]와 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 소수 나눗셈에서 제수가 소수일 때 등분제 상황 만들기 어려울 것을 예상하여 질문을 계획하였다. Kim2 교사는 소수 나눗셈에서 나머지를 구할 때 나눗셈 연산을 소수 아래 자리로 실행하는 것만으로 구할 수 없다는 것을 생각하도록 질문하였다. Kim3 교사는 좋은 질문을 설정하려고 노력했지만 수업에서 그 질문을 통하여 학생들과 소통하지 못하고 학생들의 질문과 생각을 수업에 가져올 수 없었다는 것을 반성하였다.

[표 9] 질문을 설정하기
[Table 9] Posing questions

질문의 설정	
Kim1	· 소수 나눗셈 식에서 제수나 피제수에 따라 맥락을 어렵다는 것을 예상하고 질문을 설정한다.
Kim2	· 학생들이 생각하지 못할 것이라고 예상되는 소수 나눗셈의 나머지를 생각해 볼 수 있도록 질문한다.
Kim3	· 좋은 질문을 만들려고 노력했지만 학생의 질문과 생각을 수업에서 소통하지 못한 것을 반성한다.

6. 개념적 이해에 기초한 절차적 능숙함

수학학습에서 개념적 이해와 절차적 능숙함의 관련이나 논의들은 오랜 논쟁거리이다. 특히 초등수학교육의 연산 학습에서 절차적 능숙을 위하여 학생들에게 이해보다는 암기와 연습을 강조하는 교수법을 종종 비판한다. 하지만 개념적 이해와 절차적 능숙은 서로 대

치되는 관계가 아니며, 절차적 능숙함은 연산을 체화하는 과정으로서 연산 학습에서 중요한 측면이다. 최근의 수학교육 연구들은 개념적 이해가 동반되는 절차적 능숙함을 논의하면서 개념적 이해와 연산의 의미를 고민하기를 요구하고 있다. 김교사의 소수 나눗셈 단원 도입은 주로 이해와 의미를 중심으로 다루었다. 절차적 능숙함은 이 수업에서 관심사는 아니었다. Kim1 교사는 이 단원의 도입을 소수의 개념에서 시작하고 소수 나눗셈 식을 제시한 후 그에 어울리는 문제와 상황을 만들어보도록 하였다. 수학 교과서나 지도서에 따른 연산 단원의 도입은 주로 생활 장면에서 문제 해결을 위하여 적절한 연산을 찾아 설정하고 그 연산의 알고리즘과 전략을 배우는 과정으로 전개되곤 한다. 이와 비교해 볼 때 Kim1 교사는 다른 방식으로 계획하고 있었다.

Kim2 교사는 소수 나눗셈 식에 어울리는 문제를 만들어 보게 한 후에 전체 수업에서 발표해 보도록 진행하였다. [수업장면 #7]에서 학생이 만든 문제는 케이크를 나누는 것이었다. 학생이 32.4cm의 케이크를 나누다고 말하자 Kim2 교사는 이 케이크가 일상에서 있는 것인지를 질문하였다. 소수 나눗셈 문제를 만들 때 만든 상황이 나눗셈 식과 연결 되는가 만들 고려하는 것이 아니라 생활에서 가능한 상황인가를 질문하고 있었다. 학생은 길이에서 넓이로, 긴 케이크로 변경하였다. 소수 나눗셈 단원의 도입에서 문제 만들기 과제를 설정한 것은 특정한 연산을 설정하거나 그 연산을 연습하는 접근과는 다른 방향에 있었다. 수학교육에서 연산의 속도와 정확성을 강조하는 오래된 통념과는 달리, Kim2 교사는 연산 감각과 의미에 초점을 두고 있었다.

[수업장면 #7] 학생의 '32.4÷5' 문제 만들기

학생: 오늘 영훈이가 생일이라서 친구 4명을 데리고 왔다. 그리고 32.4cm 케이크를 사왔다.

Kim2: 길이가 32.4라는 거야?

학생: 네? 케이크 길이가요.

Kim2: 길이가 32.4

학생: 영훈이 생일에 온 친구들은 케이크를 몇 cm 먹을 수 있을까?

Kim2: 좋아요, 좋은데, 32.4cm, 긴 케이크가 있을까?

학생: 어, 넓이요?

Kim3 교사는 [수업비평문 #6]에서 학생들이 과제를 해결하는 데 어려움이 있었지만 실생활 문제를 만들면서 소수 나눗셈의 의미를 생각하는 기회를 갖았다고 말하였다.

[수업비평문 #6] 소수 나눗셈의 의미와 알고리즘 교사 본연의 의도를 파악하지 못했는지연정 문제를 통해 A교사의 비평처럼 '알고리즘을 도입하기 전 소수의 나눗셈이 이용되는 다양한 실생활 문제를 접함으로써 소수 나눗셈의 의미를 이해(A교사의 비평문에서)'하는데 많은 도움을 주었으리라 생각한다.

학생들의 개념적 이해와 절차적 능숙함에 관하여 김교사는 무엇에 초점을 두고 있는지 [표 10]과 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 소수 개념의 이해에 초점을 두고 소수 나눗셈 식과 문제 만들기를 계획하였다. Kim2 교사는 소수 나눗셈 식과 일상의 맥락의 연결에 집중하였고, Kim3 교사는 소수 나눗셈 알고리즘을 도입하기 이전에 소수 나눗셈 연산을 생활과 관련지어 그 의미를 이해하는 데에 중점을 두었다.

[표 10] 개념적 이해와 절차적 능숙함

[Table 10] Building procedural fluency from conceptual understanding

개념적 이해와 절차적 능숙함	
Kim1	· 소수 나눗셈 식에 어울리는 문제 만들기로 연산을 이해하고 어렵하기를 통한 연산 감각에 초점을 두고 있다.
Kim2	· 소수 나눗셈 식을 생활 맥락과 관련지어서 의미 형성을 강조한다.
Kim3	· 소수 나눗셈 알고리즘 도입 이전에 소수 나눗셈 연산을 생활과 관련짓는 것에 중점을 두고 있다.

7. 생산적인 어려움을 지원하기

수학교육의 연구들은 학생들이 도전적으로 수학 수업에 참여할 수 있도록 생산적인 어려움을 지원해야 한다고 권한다. Kim1 교사는 소수의 역사 이야기, 문제 만들기, 어렵하여 소수점 위치 찾기 등을 계획하였다. 학생들이 이 단원 시작에서 소수 나눗셈에 흥미를 가질 수 있도록 과제를 계획하였고 다양한 방법과 답이 나오기를 기대하고 있었다. <활동 1>의 계획안을

보면, 모든 문제에 대하여 답할 수 있을지 의문하였다. 계획한 활동지의 소수 나눗셈 식 6가지 중에서 몇 가지는 답하기 어려울 것이라고 예상하였다. <활동 1>의 문제 '2.75÷5.2'는 익숙한 등분제나 포함제 맥락으로 학생들이 문제를 만들기 어려운 것이었고, 교육과정 상으로 이 단원에서 배우게 될 것으로 아직은 학생들이 배우지 않은 나눗셈 식이었다.

Kim2 교사는 [수업장면 #8]에서 학생들이 문제 만들기 어려워할 것을 예상하고, 학생이 만든 문제에 등분제나 포함제가 아니라 단위 비율 맥락으로 해설을 덧붙였다. 소수 나눗셈은 자연수 나눗셈과 달리 제수에 따라서 문제 상황이 만들어지지 않을 수 있다는 것을 예상하고 있었다. 의도적으로 다른 맥락을 추가하여 다른 상황이나 맥락을 만들어보기를 기대하였다.

[수업장면 #8] 학생의 '2.75÷5.2' 문제 만들기

학생: 떡이 2.75m가 있다.

Kim2: 2.75m? 떡이? 떡은 보통 킬로그램이나 무게를 …… 그래, 그래, 길게 만들었다고 하자.

학생: 그런데 떡을 오늘 안에 5.2m를 만들어야 한다. 그런데 지금 만든 떡이 2.75m 있다.

Kim2: 그래 몇 분의 몇을 만들었나 이 얘기지? 그지? 5번 문제 만들기 어렵죠?

Kim3 교사는 [수학비평문 #7]에서 <활동 1>의 소수 나눗셈 식은 다양한 상황을 만들어야 해결할 수 있도록 피제수와 제수를 다양하게 조합하여 설정하였다는 것을 밝혔다. 여섯 문제는 소수 나눗셈 식으로 동일해 보이지만 그 식에 있는 제수와 피제수 사이의 관계와 특성에 따라서 문제 상황이 달라져야 한다. 연산 감각은 연산 기호에 선택하는 것에 대한 것만이 아니라 그 연산에 있는 제수와 피제수의 특성을 파악하는 것이 필요하다는 것을 보여주었다.

[수업비평문 #7] 생산적인 어려움

나눗셈 문제 만들기 활동에서 가장 중점적으로 생각했던 것은 실생활과의 연결이었다. 생활 속에서 접하는 문제를 수학으로 나타내는 것은 누구나 하지만 수학으로 먼저 접한 것을 생활 속에서 있을 법한 일로 나타내는 것은 6학년 학생에게도 어렵기 때문이다. 어려운 것을 알면서 그것도 첫 차시에 활

동으로 구성한 이유는 소수의 나눗셈이 다양한 상황에서 쓰인다는 것, 또한 그 다양한 상황에서 쓰이는 나눗셈의 의미가 서로 완전히 상이하다는 것을 깨닫는 것이 중요하다고 생각했기 때문이다. 각각의 문제들은 등분제와 포함제로 나누어지기도 하고 같은 등분제, 포함제 안에서도 몫만 쓰이는 경우, 나머지만 쓰이는 경우, 반올림을 하여 자연수만 쓰이는 경우, 제수가 피제수보다 큰 경우 등 다양한 경우로 나뉠 수 있다. 학생들은 이것을 보며 같은 나눗셈 식이지만 '무언가 차이가 있다.'라는 것을 느끼게 해 주고 싶었다.

생산적인 어려움에 관한 김교사의 초점을 [표 11]과 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 소수 나눗셈의 도입을 흥미롭게 하면서도 다양한 상황이 나올 문제를 계획하였다. Kim2 교사는 소수 나눗셈에서 제수와 피제수, 몫과 나머지에 따라 학생들이 문제를 만드는 데 어려움이 있다고 느꼈고, 단위 비율 맥락을 추가하였다. Kim3 교사는 동일한 나눗셈 식이지만 제수와 피제수의 특성과 관계에 따라 다른 문제 상황을 만들어야 한다는 것을 느껴보는 것을 강조하였다.

[표 11] 생산적인 어려움을 지원하기

[Table 11] Supporting productive struggles

생산적인 어려움	
Kim1	· 소수 나눗셈의 도입은 흥미로우면서도 다양한 답과 방법이 나올 수 있도록 계획한다.
Kim2	· 소수 나눗셈에서 여러 가지 맥락을 만들 수 있도록 의도적으로 제수와 피제수를 달리하면서 나눗셈 식을 제시하고 학생들이 문제 만들기에서 고민하도록 한다.
Kim3	· 소수 나눗셈은 같은 나눗셈일지라도 제수와 피제수의 특성과 관계에 따라 생활 문제를 만드는 맥락이 다르다는 것을 느낄 수 있게 한다.

8. 학생 사고의 단서를 활용하기

수학수업은 학생들의 배움과 성장을 추구하고 이를 파악하는 데에 학생들의 사고에 대한 단서들은 무엇보다 중요하다. [수업비평문 #8]에서 Kim1 교사가 수업 계획에서 동기 유발 자료를 설정하게 된 이유를 찾을 수 있었다. 외국에서 이 학급으로 전학 온 학생이 있

었고, 그 학생은 우리말이 서툴러서 Kim1 교사는 수학 용어를 영어로 어떻게 해설해 줄 수 있을지 고민하였다고 한다. 'decimal'이라는 용어에 집중하면서 이 용어가 갖는 십진기수법의 의미를 동기유발에 추가하고 소수점 아래로 가는 방향을 설정하고 있었다.

[수업비평문 #8] 동기유발의 설정

공개수업을 하기 한 달 전 호주에서 전학 온 학생이 있었다. 그 학생은 우리말이 익숙지 않아 수업에서 사용되는 용어를 어떻게 설명해야 할지 고민이 많은 상황이었다. 수학에 관심이 많았던 본인은 구글을 통해 수학 용어를 영어로 정리하던 중에 'decimal'이라는 단어를 발견하고 이를 '소수의 나눗셈' 단원 첫 차시의 동기유발로 사용하였다.

Kim2 교사는 수업 진행 과정에서 학생들과 소통하고 학생들의 단서를 수업에 가져오려고 곳곳에서 시도하였다. [수업장면 #9]는 소수점을 찍는 새로운 표현이 등장하는 한 장면이었다. 소수점 아래 자리를 숫자 위쪽에 작게 표기하는 방법을 초등학생들에게 달리 명명할 방법이 없었는데, 한 학생이 '제공'을 말하였다. Kim2 교사는 '제공'을 듣고 '지수'라는 용어를 떠올리고 '지수'를 말하였다. 자연수 범위에서 '제공'이라면 실수 범위로 확장하였을 때 '지수'라고 표현할 수 있고 확장된 범위에서 가능한 표현이다. 하지만 이 장면에 대하여 Kim3 교사는 [수업비평문 #9]에서 지수라는 용어는 초등학생들이 아직 배우지 않은 내용으로 해설한 것에 대하여 적절하지 않았다고 반성하였다.

[수업장면 #9] 제공과 지수

Kim2: 헨리 브릭스는 37.245를 37²⁴⁵로 적었어.

이건 어떤 단점이 있을까?

학생1: 앞에는 크고 뒤에는 작아요.

학생2: 제공이랑 똑같아요.

Kim2: 그렇지. 지수와 헛갈리는 부분이지.

[수업비평문 #9] 학생의 단서와 교육과정 용어

소수의 역사를 이야기하는 과정에서 김교사는 어이 없는 실수를 한다. (중략) F교사는 학생들의 응답을 처리하는 교사의 응답에 대해 아직 지수를 학습하지 않은 상태에서 적절치 않은 응답이라고 하며

본인은 전혀 인지하지 못한 부분에 대해 잘 짚어주었다. 초보교사의 부족한 경험으로 인한 실수를 비평문과 영상을 통해 알게 되었다.

수업실행 과정에서는 계획하지 않았지만 주어진 교육과정을 넘어서기도 하고 미치지 못하기도 한다. Kim2 교사는 수업 과정에서 학생의 문제와 발표를 지속적으로 활용하고자 하였다. '지수'라는 표현은 '제공'이라는 학생의 단서를 확장된 수의 범위에서 사용하는 용어였다. Kim3 교사가 돌아본다면 '지수'라는 용어가 교육과정을 넘어서는 것이었음을 지적하고 있었다. 하지만 한편으로는 이 수업에서 '지수'라는 용어를 가르치려고 의도한 것은 아니었고 학생의 단서를 스토리텔링에 녹여가려고 시도한다는 점에서 교사의 의도를 헤아려 볼 수 있었다. 그러나 여전히 Kim3 교사의 반성에 나타나 있듯이, 6학년의 수준에 맞게 학생의 단서를 표현할 수 있는 용어나 방식에 대한 고민은 여전히 남아있다.

학생들의 사고의 단서에 관하여 김교사는 무엇에 초점을 두고 있는지 [표 12]와 같이 요약할 수 있다. Kim1 교사는 학생의 어려움을 고려하여 동기유발을 계획하였다. Kim2 교사는 학생의 답을 교사의 스토리텔링에 녹여서 전개하고자 하였다. Kim3 교사는 학생의 답을 수학과 교육과정과 적절하게 표현하는 방식을 반성하고 고민하였다.

[표 12] 학생 사고의 단서를 활용하기

[Table 12] Using evidences of students' thinking

학생 사고의 단서	
Kim1	· 학생의 어려움을 고려하여 동기유발을 설정하고 계획한다.
Kim2	· 교사의 스토리텔링 과정에 학생의 단서와 소통하면서 이야기를 이어간다.
Kim3	· 학생의 단서를 교육과정과 관련지어 학생 수준에 맞는 표현을 고민한다.

V. 결론

이 연구는 한 초등교사가 소수 나눗셈 수업을 계획하고 실행하고 동료교사들과 수업을 비평하는 과정에

서 자신의 수업에 관하여 어떤 고민을 하고 그 초점은 어떻게 변화해 가는지 분석하였다. 김교사를 시기별로 분리하는 기법을 도입하여, 수업을 계획하는 교사 Kim1, 수업을 실행하는 교사 Kim2, 동료교사와 자신의 수업을 비평하는 교사 Kim3의 세 시기로 구분하였다. NCTM(2014)의 8가지 수학 교수 실행을 참조하여, 수학 목표, 과제의 실행, 수학적 표현, 수학적 담론, 질문의 설정, 개념적 이해와 절차적 능숙함, 생산적인 어려움, 학생 사고의 증거 활용 등을 분석의 측면으로 설정하였다.

수학 목표의 측면에서 교사의 초점은 소수의 의미와 소수 나눗셈 연산의 감각을 키우고자 소수 이야기와 소수점 위치와 찾기를 계획하였고, 수업실행 과정에서 소수의 표현과 일상의 맥락에 집중하였다. 수업비평에서 수학과 생활의 관련을 통하여 수학 교과에 대한 가치와 신념을 관련지었다.

과제 실행의 측면에서 교사의 초점은 소수 나눗셈식에 어울리는 상황 만들기과 소수 나눗셈을 어렵하여 소수점의 위치 정하기라는 두 과제를 계획하였지만, 수업실행에서는 소수 나눗셈식에 대하여 여러 가지 문제 만들기 과제만 실행하였고 몫과 나머지를 생활과 연결하면서 소수 나눗셈 연산 감각에 집중하였다. 수업비평에서 수학과 일상생활을 연결하는 과제를 강조하면서 살아있는 수업 추구에 관심을 보였다.

수학적 표현의 측면에서 교사의 초점은 소수의 시작과 소수점 표현에 집중하여 수업을 계획하였고, 수업 실행에서 지금 우리가 사용하는 소수 표현이 오기까지 긴 시간동안 변화되었다는 것을 강조하였다. 수업비평에서 소수점의 표현은 우리와 같은 '온점'이 아니라 '반점'이나 다른 표현들이 있으며 나라와 지역에 따라 다를 수 있다는 수학적 표현의 문화적인 측면을 밝혔다.

수학적 담론의 측면에서 교사의 초점은 학생들이 제기하는 소수 나눗셈의 상황이나 어렵 방법을 논의하는 것에 집중하여 계획하였고, 수업 실행에서 학생이 발표한 맥락에 논의를 추가하면서 모두가 참여할 수 있도록 노력하였다. 수업비평에서 단원의 첫 차시에 대하여 전체를 아우를 수 있는 것을 찾아가면서 스스로 배워가는 수업 추구를 강조하였다.

질문 설정의 측면에서 교사의 초점은 소수 나눗셈에서 제수와 피제수에 따라 문제 만들기가 어려울 것

을 예상하여 질문을 계획하였고, 수업 실행에서 소수 나눗셈에서 나머지를 구할 때 나눗셈 연산을 소수 아래 자리로 실행하는 것만으로 구할 수 없다는 것을 의도적으로 질문하였다. 수업비평에서 좋은 질문을 설정하려고 노력했지만 학생들과 소통하지 못하고 학생들의 질문과 생각을 수업으로 가져올 수 없었다는 것을 반성하였다.

개념적 이해와 절차적 능숙함의 측면에서 교사의 초점은 절차적 능숙함보다는 소수 나눗셈의 의미 형성에 집중하여 계획하였다. 수업 실행에서 소수의 표현과 일상의 맥락에 집중하였고, 수업비평에서 나눗셈 연산 절차 이전에 생활 장면에서 연산을 관련짓고 이해하는 과정을 강조하였다.

생산적인 어려움을 겪도록 한다는 측면에서 교사의 초점은 소수 나눗셈 단원의 도입으로서 흥미로운 이야기로 시작하고 학생들에게 어려울 수 있겠지만 다양한 상황이 나올 수 있는 문제를 계획하였다. 수업 실행에서 소수 나눗셈이 자연수 나눗셈과 달리 등분제나 포함제로 생활 문제를 만드는 데 어려움이 있다고 예상하였고 단위 비율 맥락의 해설을 추가하였다. 수업비평에서 소수 나눗셈식의 상황은 제수와 피제수의 관계나 특성에 따라서 여러 가지 다른 맥락을 만들어야 한다는 것을 학생들이 느끼기를 기대하였다.

학생 사고의 단서를 활용하는 측면에서 교사의 초점은 학생의 상황을 고려하여 시작점을 계획하였고 수업 실행에서 학생의 답을 교사의 이야기 속에 녹여서 전개하고자 하였다. 수업비평에서는 학생의 답을 교육 과정에 맞게 적절하게 표현하는 방법을 고민하였다.

이 연구는 한 초등교사의 수학수업에 관한 사례 연구로서, 소수의 나눗셈이라는 수업을 둘러싼 한 초등교사의 초점을 분석한 것이었다. 김교사의 소수 나눗셈 수업에 관한 고민과 성찰을 따라 가면서 변화하는 교사를 만날 수 있었다. 그 어떤 초등교사도 김교사와 동일한 고민과 초점을 가질 수 없겠지만, 또 다른 한편에서 보면 김교사가 고민했던 문제들은 소수 나눗셈 수업을 전개하는 초등교사라면 누구든지 만날 수 있는 고민들이었다.

Kim1 교사는 소수의 개념과 소수 나눗셈의 의미에 초점을 두면서 소수의 표현을 둘러싼 수학사를 깊이 있게 준비하였다. 소수 나눗셈식에 어울리는 문제 만들기에서 등분제와 포함제 맥락의 어려움을 예상하였

고 학생들이 여러 가지 맥락을 만들 수 있도록 제수와 피제수를 다양하게 설정하였다. 학생들의 흥미있는 참여와 수학수업 내용의 의미를 수업에서 어떻게 다룰 것인가를 주로 고민하였다. Kim2 교사는 스토리텔링을 진행하고 문제 만들기를 하면서 학생들이 소수의 표현이 변화하는 과정에서 소수의 중요성과 소수 나눗셈에 집중시키고자 하였다. 문제 만들기 활동은 학생들이 수학과 일상을 연결하도록 질문과 논의를 전개하였다. 일상생활에서 수학을 찾고 또 한편으로 수학을 일상생활의 모습으로 표현하면서 수학이 일상에서 살아있다는 것을 학생들이 느낄 수 있도록 강조하였다. Kim3 교사는 수업을 통하여 배워가는 자신을 돌아보고 미흡했던 소통이나 표현들을 점검하였다. 자신이 추구하는 수업에 대하여 즉, 수학적 의미의 이해, 연산의 감각 형성, 수학의 생활화, 살아있는 수업, 소통하는 수업, 교사와 학생이 배워가는 수업, 학생들의 참여 등을 성찰하였다. [수업비평문 #10]은 김교사가 자신의 수업을 공개하고 동료교사들과 비평한 후에 자신의 수업을 비평하면서 쓴 것이었다.

[수업비평문 #10] 김교사가 말하는 수업비평
 신규교사로서 부족한 수업을 공개했을 때만 해도 부끄러움을 금할 길이 없었지만 수업을 공개하고 선생님들께 비평을 받고 나서 보니 공개하길 잘했다는 생각이 들었다. 수업을 분석하고 비평한 후 한 차시의 수업에도 정말 많은 의도가 담길 수 있음을 알게 되었다. 분명 본인이 한 수업이지만 누군가가 보기엔 다른 의도로 느껴질 수 있다는 생각에 선생님들께서 써 주신 비평문을 읽으며 한 편의 시를 읽은 듯한 느낌마저 들었다.

교사에게 수업을 공개하고 동료교사들과 비평한다는 것은 마음 편한 작업은 아니다. 하지만 자신의 수업을 다른 교사들과 나누게 될 때, 새로운 시선으로 자신의 수업을 보게 되고 이제 자신이 실행한 수업은 자신만의 것이 아니다. 또한 다른 시선으로 수업을 볼 수 있다는 그 자체만으로 교사에게 하나의 변화이고 성장이며 또 다른 실천이다.

참 고 문 헌

- 김상미(2005). 초등교사 <나>의 수업 이야기로 보는 수학 수업의 은유. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- Kim, S.(2005). *Metaphors on the Mathematics Teaching in Autobiography of an Elementary School Teacher*. Unpublished doctoral dissertation, Korea National University of Education.
- 교육부(2015). 수학 6-1 교사용지도서. 서울: (주)천재교육.
- Ministry of Education (2015). *Mathematics 6-1 Teachers' Guide*. Seoul: Chunjae.
- 변희현(2005). 소수 개념의 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- Byun, H. H.(2005). *A didactical analysis of the decimal fraction concept*. Unpublished doctoral dissertation, Seoul National University.
- Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist* 23, 167-180.
- Fuson, K. C., Fraivillig, J. L., & Burghardt, B. H. (1992). Relationships children construct among English number words, multiunit base-ten block, and written multidigit addition, In J. Campbell (ed.), *The Nature and origins of mathematics skills* (pp.39-112), The Netherlands: Elsevier Science.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann Educational Books
- Heaton, R. M. (1994). *Creating and studying a practice of teaching elementary mathematics for understanding*. Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University, East Lansing.

- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*, Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematics success for all*. Reston, VA: Author.

A Case Study on Reflection and Practice of an Elementary School Teacher in the Process of Planning, Executing and Criticizing a Lesson on Division with Decimals

Kim, Sangmee

Department of Mathematics Education,
Chuncheon National University of Education, Chuncheon, Korea
E-mail: sangmee@cnu.ac.kr

This study is a case study of an elementary school teacher's reflection and practice in the process of planning, executing and criticizing his lesson on division with decimals. The purpose of this study was to clarify what kinds of problems an elementary school teacher was thinking about and how his focus was changing in the process of planning and executing a lesson and criticizing his lesson with his peers. The teacher was set in three periods: a teacher planning a lesson, a teacher executing a lesson, and a teacher criticizing his or her own lesson. Each period was analyzed in eight aspects: Establishing the goals for mathematics, implementing tasks, connecting mathematical representations, facilitating mathematical discourse, posing questions, building procedural fluency from conceptual understanding, supporting productive struggles, and using evidences of students' thinking.

* ZDM Classification : B59

* MSC2000분류 : 97C70

* Key Words : elementary school teacher, division with decimals, teacher's reflection, teacher's practice