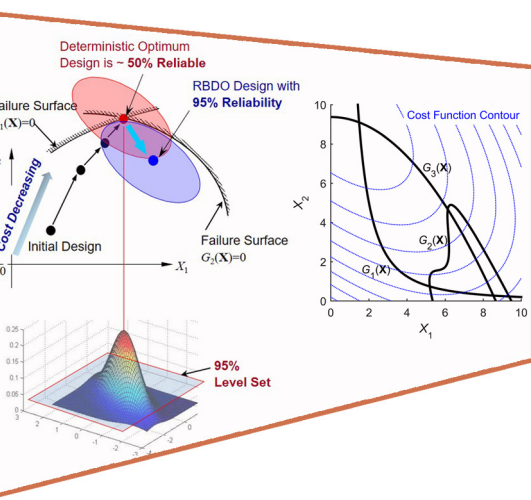


신뢰성기반 최적설계와 표준편차의 변화

Reliability-Based Design Optimization and Varying Standard Deviation



1. 서론

시스템을 구성하는 재료 및 부품의 성능은 변동성(variability)을 가지고 있다. 또한, 시스템에 작용하는 환경요소 - 하중, 부식, 마모 등 - 도 변동성을 가지기 마련이다. 이러한 요소들로 구성된 시스템은 각 요소들의 변동성을 모두 이어받기 때문에 동일한 시스템을 여러 개 생산하더라도 그 성능에 변동성이 발생하게 된다. 신뢰성기반 최적설계(Reliability-based design optimization, RBDO)는 이러한 변동성을 고려하여 최적설계를 수행하고자 개발되었다. 신뢰성기반 최적설계에서는 결정론적 변수(deterministic variable)가 아니라 확률변수(random variable)를 입력변수로 사용하여 정식화 중에 성능함수의 변동성을 고려할 수 있도록 한다. 이후 설계변수를 조정하여 설계자가 제안한 목표신뢰성(target reliability)을 만족하도록 한다. 설계변수로는 확률변수의 평균과 표준편차 등을 사용할 수 있으나, 확률변수의 평균을 설계변수로 사용하고 표준편차는 상수로 고정하는 것이 일반적이다.

신뢰성기반 최적설계의 기본 개념을 그림 1에 도시하였다. 두 설계변수가 결정론적 변수인 경우, 하나의 설계는 점으로 표시할 수 있다. 따라서 최적설계의 결과 최초 설계점(검은색 점)이 비용이 최소화되고 두 경계조건을 만족하는 빨간색 점으로 이동하게 된다. 만약 두 변수가 확률변수라면, 빨간색 점에서 95%의 신뢰성(reliability)을 만족하기 위해서 분홍색 타원의 내부가 모두 유용설계영역 안으로 들어와야 한다. 따라서 신뢰성기반 최적설계의 결과는 파란점이 되며, 확률변수의 변동성의 약 95%(하늘색 타원)가 유용설계영역 내부로 들어와 있음을 확인할 수 있다.

그림 1에서 타원의 면적은 확률변수의 변동성 정도를 의미한다. 또한 이 변동성은 확률변수의 표준편차로 구현이 가능하다. 표준편차가 크면, 변동성이 커지고 타원의 면적도 늘어나게 된다. 따라서 표준편차가 커지면 더 큰 타원이 유용설계영역의 내부로 들어와야 하므로 설계점(파란색 점)은 유용설계영역의 더 안쪽으로 이동해야 하고, 설계의 비용은 더욱 커지게 된다. 여기서 주의해야 할 점은, 설계점의 이동(빨간색 점에서 파란색 점으로)은 변동성의 크기(타원의 면적)에 영향을 끼치지 않았다는 점이다. 이는 앞에서 언급한 바와 같이 설계변수를 확률변수의 평균으로 정하고, 표준편차를 그 초기값에 고정하였기 때문이다.



조 현 규

목포대학교 기계·신소재공학과 조교수

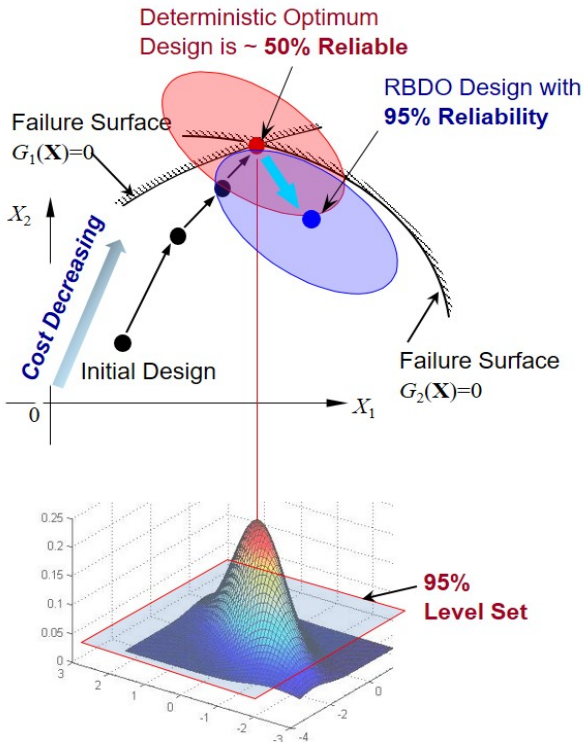


그림 1 신뢰성기반 최적설계의 개념

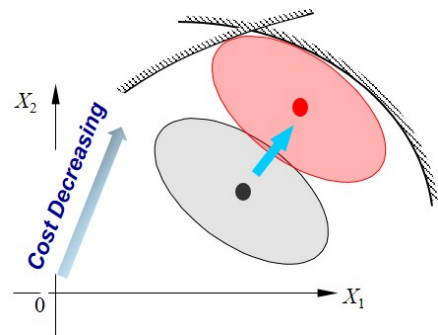
표 1 재료 물성치의 변동계수 (Dowling, 2013)

변수	변동계수 (%)
항복강도 (금속)	7
극한강도 (금속)	5
탄성계수 (금속)	5
파괴인성 (금속)	15
인장강도 (용접부)	10
압축강도 (콘크리트)	15
강도 (목재)	15
피로파괴 반복수	50
피로 균열 진전율	50
피로강도	10

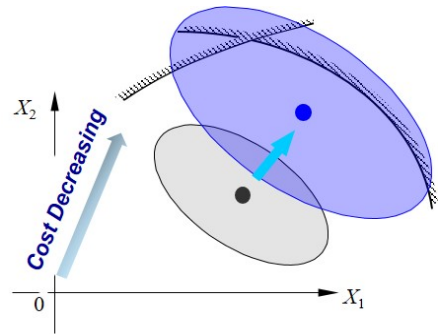
표 2 냉연강판 두께 공차 (폭 630mm 이하) (POSCO, 2014)

두께 (mm)	공차(mm)
0.8 ~ 1.0	±0.06
1.0 ~ 1.25	±0.07
1.25 ~ 1.6	±0.08
1.6 ~ 2.0	±0.10
2.0 ~ 2.5	±0.12

최적설계에서 설계변수는 독립적이고 자유롭게 조정할 수 있어야 한다(Arora, 2017). 환경요소 등에 관계된 변수는 조정이 불가능하기 때문에 확률매개변수 (random parameter) 로 두고 그 평균 및 표준편차는 변화하지 않는다고 가정한다. 그러므로 신뢰성기반 최적설계의 설계변수는 사람에 의해 제작되는 재료 및 부품을 대변하는 어떤 변수의 평균값이 되어야 한다. 사람에 의해 제작되는 만큼 그 변동성을 제어할 수 있지만 이에 막대한 비용이 들기 때문에 어느 수준 이하로 제어한 후 공차(tolerance)로 남겨두기 마련이다. 공차는 곧 변동성을 의미하며, 확률변수의 표준편차로 나타낼 수 있다. 여기서 하나의 문제가 발생하는데, 평균 (설계변수)이 변하는 경우 표준편차(공차)의 값도 변할 수 있다는 것이다. 표 1에 대표적인 재료 물성치의 변동계수 (coefficient of variation)를 정리하였다. 변동계수가 상수로 주어진다는 말은 표준편차가 평균값의 변화에 선형적으로 변한다는 것이다. 표 2에는 냉연강판의 두께 공차를 표시하였다. 이 경우에는 두께의 평균이 증가함에 따라서 공차가 비선형적으로 증가하는 것을 볼 수 있다. 따라서, 신뢰성기반 최적설계에서 설계변수인 평균이 변하면 이에 따른 표준편차의 변화도 고려하여야 확률변수의 변동성을 정확하게 고려할 수 있다.



(a) 표준편차가 고정된 경우



(b) 표준편차가 변하는 경우

그림 2 표준편차에 따른 변동성의 변화

표준편차의 변화는 확률변수의 변동성의 변화를 의미한다. 따라서 그림 2(a)처럼 표준편차를 고정한 기존 신뢰성기반 최적설계에서는 변하지 않던 타원의 면적이 이제는 그림 2(b)처럼 변하게 된다. 이는 최적설계의 각 반복(iteration)마다 목표하는 최적설계점이 달라질 수 있다는 것이다. 따라서 표준편차의 변화를 고려한 신뢰성기반 최적설계는 움직이는 과녁을 맞히는 것과 같이 어려운 문제가 된다. 이 경우 필요한 것은 매우 정확한 설계민감도(design sensitivity)이다. 과녁이 움직인다 하더라도 정확한 방향을 제시할 수 있다면, 과녁을 맞힐 수 있기 때문이다. 따라서 표준편차가 변하는 경우 신뢰성기반 최적설계는 곧 정확한 설계민감도를 구하는 방법에 대한 연구라 할 수 있다.

2. 신뢰성기반 최적설계 (RBDO)

이 절에서는 신뢰성기반 최적설계의 기본개념에 대해 간단히 설명하고자 한다. 먼저 신뢰성기반 최적설계는 다음과 같이 정식화할 수 있다(Haldar and Mahadevan, 2000).

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \text{cost}(\mathbf{d}) \\ & \text{s.t. } P[G_j(\mathbf{X}) \leq 0] \geq Re_j^{\text{tar}}, \quad j = 1, \dots, NC \quad (1) \\ & \quad \mathbf{d}^L \leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U, \quad \mathbf{d} \in R^{NDV}, \quad \text{and } \mathbf{X} \in R^N \end{aligned}$$

여기서 \mathbf{X} 는 N 차원의 확률변수이고, \mathbf{d} 는 NDV 차원의 설계변수로 상응하는 \mathbf{X} 의 평균값이다. $G_j(\mathbf{X}) \leq 0$ 는 NC 개의 결정론적 제약조건 중 j 번째 제약조건이고 Re_j^{tar} 는 그 제약조건의 목표신뢰성이다.

식 (1)에서 비용함수 $\text{cost}(\mathbf{d})$ 는 확률변수 \mathbf{X} 의 함수가 아니라 설계변수 \mathbf{d} 의 함수이다. 다시 표현하면 평균적인 비용함수라 할 수 있고, 따라서 계산하는데 확률의 개념이 포함되지 않는다. 이에 반해 신뢰성기반 최적설계의 제약조건은 확률제약조건(probabilistic constraint)이라 부르는 $P[G_j(\mathbf{X}) \leq 0] \geq Re_j^{\text{tar}}$ 이다. 이 확률제약조건은 신뢰성 $P[G_j(\mathbf{X}) \leq 0]$ 의 계산을 필요로 한다. 신뢰성은 기존의 결정론적 제약조건 $G_j(\mathbf{X}) \leq 0$ 이 확률변수의 변동성 하에서 만족될 확률로 성능함수 $G_j(\mathbf{X})$ 보다 계산비용이 크다. 따라서 신뢰성기반 최적설계에서 가장 중요한 점은 신뢰성을 어떻게 효과적이고 경제적으로 평가하는가에 있다.

신뢰성기반 최적설계에서 신뢰성 혹은 확률제약조건의 평가만큼 중요한 부분이 설계민감도의 계산이다. 비용함수 $\text{cost}(\mathbf{d})$ 는 설계변수 \mathbf{d} 의 함수이므로 설계민감도를 계산하는

데 어려움이 적다. 하지만 확률제약조건에 사용되는 신뢰성은 확률변수 \mathbf{X} 의 함수이므로 설계변수 \mathbf{d} 와의 연관성을 찾기가 쉽지 않아 설계민감도를 정확히 계산하기가 어렵다. 또한 유한차분법(finite different method)로 계산하면 신뢰성을 수차례 계산해야하기 때문에 계산비용이 매우 크다. 따라서 신뢰성의 설계민감도를 해석적(analytic)으로 구하는 것이 전체 신뢰성기반 최적설계의 효율성과 정확성을 높이는데 큰 도움이 된다.

신뢰성을 평가하는 방법에는 크게 경사도(gradient)법과 샘플링(sampling)법으로 나눌 수 있다. 또한 신뢰성의 설계민감도를 계산하는 방법도 이 두 방법으로 크게 구분된다. 경사도법은 성능함수 $G_j(\mathbf{X})$ 의 경사도를 필요로 하고 평가한 신뢰성의 정확도가 떨어진다는 단점이 있지만 계산비용이 적다는 장점이 있다. 샘플링법은 몬테카를로법(Monte Carlo method)을 사용하여 확률변수의 변동성을 구현하고 각 샘플에서의 성능함수를 계산하여 신뢰성을 매우 정확히 계산할 수 있는 반면, 목표신뢰성이 높아지면 많은 샘플을 요구하여 계산비용이 커진다는 단점이 있다. 그래서 샘플링법은 반응표면법(response surface method)와 함께 쓰는 것이 좋다. 신뢰성을 평가하는 두 방법에 대해서는 다음에 더 자세히 설명한다.

2.1 경사도법

경사도법에서는 식 (1)의 확률제약조건을 다음의 식으로 치환한다(Tu et al. 1999).

$$G_j^*(\mathbf{d}) = F_{G_j}^{-1}(Re_j^{\text{tar}}) \leq 0 \quad (2)$$

여기서 $F_{G_j}(\cdot)$ 는 성능함수 $G_j(\mathbf{X})$ 의 누적분포함수(cumulative distribution function, CDF)이다. 식 (2)가 의미하는 바는 목표신뢰성 Re_j^{tar} 의 변동성을 가지는 부분이 결정론적 제약조건 $G_j(\mathbf{X}) \leq 0$ 을 만족한다는 의미이다. 신뢰성을 직접 계산하는 것이 아니라 목표신뢰성으로부터 결정론적 제약조건의 만족 여부를 검토하기 때문에 역신뢰성분석(inverse reliability analysis)이라 불린다. 역신뢰성분석에서는 목표신뢰성 Re_j^{tar} 를 만족하는 점을 찾아야 하는데 이는 다음의 최적설계 정식을 풀면 된다(Tu et al. 1999).

$$\begin{aligned} & \text{minimize } -g_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) \\ & \text{s.t. } \|\mathbf{u}\| = \beta^{\text{tar}_j} \quad (3) \end{aligned}$$

여기서 U 는 확률변수 X 가 로젠블라트 변환(Rosenblatt transformation)에 따라 표준정규분포를 따르도록 치환된 확률변수이고, \mathbf{u} 는 U 의 구현(realization)이다. $\boldsymbol{\mu}$ 와 $\boldsymbol{\sigma}$ 는 각각 확률변수 X 의 평균과 표준편차 벡터이다. 목적함수 $g_j(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma})$ 는 성능함수 $G_j(\mathbf{X})$ 와 같고, $\beta_j^{\text{tar}} = \Phi^{-1}(Re_j^{\text{tar}})$ 는 목표신뢰성지수(target reliability index)이다. 식 (3)의 제약조건은 벡터 \mathbf{u} 가 항상 반지름이 β_j^{tar} 인 구 위에 있도록 하는데, 이 구의 표면이 바로 목표신뢰성을 만족하는 점들의 집합이다. 이 집합 중에서 가장 큰 g_j 값을 가지는 점을 찾는 것인데, 목표신뢰성을 만족시키는 여러 점 중에 가장 위험한(결정론적 제약조건을 가장 크게 위반하는) 점을 찾는 것이다. 이 점을 최대가능목표점(most probable target point, MPTP)라 하고, 이 점에서 계산한 성능함수 g_j 값이 식 (2)에서 필요로 하는 $G_j^*(\mathbf{d})$ 이다. 즉 다음의 식이 성립한다.

$$G_j^*(\mathbf{d}) = g_j(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = G_j(\mathbf{x}^*) \quad (4)$$

여기서 \mathbf{u}^* 와 \mathbf{x}^* 는 각각 U 와 X 로 표현한 최대가능목표점이다. 경사도법의 핵심은 식 (3)을 풀어 최대가능목표점 \mathbf{u}^* 와 \mathbf{x}^* 를 찾는 데 있으며, 이에 식 (3)의 목적함수인 성능함수 g_j 의 경사도가 필요하기 때문에 경사도법이라 지칭한다.

2.2 샘플링법

샘플링법에서는 몬테카를로법을 이용하여 식 (1)의 신뢰성을 바로 계산한다. 신뢰성을 계산하는 식은 다음과 같다 (Lee et al., 2011).

$$P[G_j(\mathbf{X}) \leq 0] \simeq \frac{1}{nMCS} \sum_{q=1}^{nMCS} I_{\Omega_s}[\mathbf{x}^{<q>}] \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{x}^{<q>}$ 는 X 의 q 번째 구현이고, $nMCS$ 는 몬테카를로 샘플의 개수이며, 지시함수(indicator function)는 다음과 같이 정의된다.

$$I_{\Omega_s}(\mathbf{x}) \equiv \begin{cases} 1, & \text{if } G_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

신뢰성을 정확하게 계산하기 위해서는 $nMCS$ 가 커야한다는 것이 샘플링법의 단점이다. 식 (6)을 직접 사용하면 $nMCS$ 만큼의 성능함수를 평가해야하기 때문에 계산비용이 많이

든다. 따라서 성능함수의 반응표면을 만들어 적은 계산비용으로 식 (5)와 (6)을 계산하는 것이 좋다.

3. 신뢰성기반 최적설계의 설계민감도

2절에서 정리한 신뢰성을 계산하는 방법은 신뢰성기반 최적설계의 확률제약조건을 구하기 위함이다. 효율적이고 효과적인 신뢰성기반 최적설계를 위해서는 정확한 설계민감도 특히 신뢰성의 설계민감도를 최적설계 알고리즘에 제공해야한다. 설계민감도를 구하는 계산비용이 크면 전체 최적설계 과정의 비용이 증가하게 된다. 또한 설계민감도가 정확하지 않으면 최적설계점을 찾기위한 추가적인 선탐색(line search)을 수행하기 때문에 역시 전체 최적설계 과정의 비용이 증가한다. 따라서 정확하고 효율적인 신뢰성기반 최적설계를 위해 설계민감도를 해석적으로 유도할 필요가 있다. 또한 신뢰성을 다룬 2절에서는 표준편차의 변화를 고려할 필요가 없었지만 설계민감도에서는 고려되어야 한다.

3.1 경사도법

신뢰성을 경사도법으로 구하는 경우에는 식 (4)의 설계민감도를 구해야 한다. 설계변수 d_i 는 확률변수 X_i 의 평균인 μ_i 이다. 그리고 표준편차 σ_i 는 설계변수 $d_i (= \mu_i)$ 가 이동함에 따라 변하기 때문에 함수 $\sigma_i(\mu_i)$ 로 생각할 수 있다. 식 (4)의 설계민감도를 구하면 다음과 같다(Cho et al., 2017).

$$\frac{d}{dd_i} g_j(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} + \frac{d\sigma_i}{d\mu_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) g_j(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) \quad (7)$$

위의 식을 확장하면 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial \mu_i} + \frac{d\sigma_i}{d\mu_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) g_j(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \left(\frac{dx_i}{d\mu_i} + \frac{dx_i}{d\sigma_i} \frac{d\sigma_i}{d\mu_i} \right) \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 주의할 점은 $dx_i/d\mu_i$ 와 $dx_i/d\sigma_i$ 의 두 항이다. 일반적으로 확률변수 X_i 와 평균 μ_i 및 표준편차 σ_i 는 상호 독립적이다. μ_i 와 σ_i 는 X_i 의 확률에 영향을 미치지 X_i 자체에는 영향을 미치지 않기 때문이다. 하지만 식 (8)에서

이 $dx_i/d\mu_i$ 와 $dx_i/d\sigma_i$ 가 0이 아닌 이유는 최대가능목표점의 특성 때문이다. 최대가능목표점은 U의 영역에서 구하는데 X에서 U로의 로젠블라트 변환은 다음의 수식으로 구할 수 있다(Rosenblatt, 1952).

$$u_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i; a_i, b_i)] \quad (9)$$

여기서 $\Phi(\cdot)$ 는 정규분포의 누적분포함수이고, $F_{X_i}(\cdot)$ 는 X_i 의 누적분포함수이다. a_i 와 b_i 는 $F_{X_i}(\cdot)$ 에 사용되는 두 개의 매개변수로 평균 μ_i 및 표준편차 σ_i 의 함수이다. 최대가능목표점 \mathbf{u}^* 는 U의 영역에서 구하기 때문에 \mathbf{u}^* 와 μ_i 및 σ_i 는 독립적이다. 따라서 최대가능목표점 \mathbf{x}^* 는 \mathbf{u}^* , μ_i 및 σ_i 의 함수이고 $dx_i/d\mu_i$ 와 $dx_i/d\sigma_i$ 는 0이 아니게 된다.

$dx_i/d\mu_i$ 와 $dx_i/d\sigma_i$ 는 다음의 식에서 구할 수 있다(Cho et al., 2017).

$$\frac{dx_i}{dp_i} = -\frac{1}{f_{X_i}(x_i; a_i, b_i)} \times \left(\frac{\partial a_i}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial a_i} + \frac{\partial b_i}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial b_i} \right) F_{X_i}(x_i; a_i, b_i) \quad (10)$$

여기서 p_i 는 μ_i 또는 σ_i 이고, $f_{X_i}(\cdot)$ 는 X_i 의 확률밀도함수이다. $z = F_{X_i}(x_i; a_i, b_i)$ 이라 두고 자주 사용되는 확률밀도함수의 $\partial z/\partial a_i$ 와 $\partial z/\partial b_i$ 는 표 3에 정리되어 있다. a_i 와 b_i 는 μ_i 및 σ_i 의 해석적 함수이기 때문에 $\partial a_i/\partial p_i$ 와 $\partial b_i/\partial p_i$

표 3 $\partial z/\partial a_i$ 와 $\partial z/\partial b_i$ (Cho et al., 2016)

분포 종류	$\frac{\partial z}{\partial a_i}$	$\frac{\partial z}{\partial b_i}$
정규분포 ¹⁾	$-\frac{1}{b_i} \phi\left(\frac{x_i - a_i}{b_i}\right)$	$-\frac{x_i - a_i}{b_i^2} \phi\left(\frac{x_i - a_i}{b_i}\right)$
대수정규분포	$-\frac{1}{b_i} \phi\left(\frac{\ln x_i - a_i}{b_i}\right)$	$-\frac{\ln x_i - a_i}{b_i^2} \phi\left(\frac{\ln x_i - a_i}{b_i}\right)$
와이불분포	$-\frac{b_i}{a_i} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{b_i} (1-z)$	$(\ln x_i - \ln a_i) \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{b_i} (1-z)$
감마분포 ²⁾	$\frac{\Gamma(a_i)\psi(a_i)}{-\ln x_i \Gamma(a_i, x_i/b_i) - x_i \mathcal{I}(3, a_i, x_i/b_i)}$	$-\frac{e^{-x_i/b_i} (x_i/b_i)^{a_i}}{b_i \Gamma(a_i)}$

1) $\phi(\cdot)$: 표준정규분포의 확률밀도함수

2) $\Gamma(\cdot)$: 감마 함수, $\psi(\cdot)$: 디감마(digamma) 함수, $\mathcal{I}(\cdot, \cdot, \cdot)$: Meijer G-function의 한 경우(Geddes et al. 1990)

도 해석적으로 구할 수 있고, 이는 Cho 등(2016)에 잘 정리되어 있다. 식 (10)을 이용하면 식 (8)을 구할 수 있고, 따라서 표준편차 σ_i 가 변하는 경우에 식 (3)의 설계민감도를 계산할 수 있다.

3.2 샘플링법

샘플링법에서는 식 (5)를 이용하여 확률제약조건을 계산하는데 이의 설계민감도는 다음의 식으로 구할 수 있다 (Lee et al., 2011).

$$\frac{d}{dd_i} P[G_j(\mathbf{X}) \leq 0] \approx \frac{1}{nMCS} \sum_{q=1}^{nMCS} I_{\Omega_s}[\mathbf{x}^{<q>}] S_{d_i}^{(1)}[\mathbf{x}^{<q>}] \quad (11)$$

여기서 $S_{d_i}^{(1)}(\mathbf{x})$ 는 1차 점수함수(score function)이고 표준편차가 변하는 경우에는 다음의 식으로 구할 수 있다(Cho et al., 2016).

$$S_{d_i}^{(1)}(\mathbf{x}) = S_{\mu_i}^{(1)}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \mu_i} S_{\sigma_i}^{(1)}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

여기서 μ_i 및 σ_i 에 대한 1차 점수함수는 다시 다음의 식으로 구할 수 있다.

$$S_{p_i}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial p_i} \quad (13)$$

앞에서 언급했듯이 식 (13)의 우변에 있는 $\partial a_i/\partial p_i$ 와 Cho et al. (2016)에 정리되어 있다. 우변의 나머지 항인 $\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})/\partial a_i$ 와 $\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})/\partial b_i$ 는 $f_{X_i}(\cdot)$ 식을 이용하여 구할 수 있으며 자주 사용되는 확률밀도함수에 대해서는 표 4에 정리하였다. 식 (12)와 (13)을 이용하면 식 (11)의 설계민감도를 계산할 수 있다. 신뢰성을 계산하는 식 (5)와 비교하면 추가적으로 1차 점수함수만 구하면 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 1차 점수함수를 모두 해석적으로 유도하였기 때문에 설계민감도는 신뢰성을 계산할 때 조금의 계산비용을 더하여 계산할 수 있다.

표 4 $\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})/\partial a_i$ 와 $\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})/\partial b_i$ (Cho et al., 2016)

분포 종류	$\frac{\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})}{\partial a_i}$	$\frac{\partial \ln f_{X_i}(\mathbf{x})}{\partial b_i}$
정규분포	$\frac{x_i - a_i}{b_i^2}$	$-\frac{1}{b_i} + \frac{(x_i - a_i)^2}{b_i^3}$
대수정규분포	$\frac{\ln x_i - a_i}{b_i^2}$	$-\frac{1}{b_i} + \frac{(\ln x_i - a_i)^2}{b_i^3}$
와이불분포	$\frac{b_i}{a_i} \left[-1 + \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{b_i} \right]$	$\frac{1}{b_i} + \left[1 - \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^{b_i} \right] \times (\ln x_i - \ln a_i)$
감마분포	$\ln x_i - \psi(a_i) - \ln b_i$	$\frac{x_i}{b_i} - \frac{a_i}{b_i^2}$

3절에서는 확률변수가 서로 독립적이라고 가정하고 설계 민감도를 구하였다. 확률변수가 상관관계(correlation)을 가지는 경우에는 코플라(copula) 함수 이용하여 그 상관관계를 나타낼 수 있는데 이 경우에는 설계민감도를 구할 때 추가적인 항이 존재한다. 이 추가적인 항들은 Cho 등(2016, 2017)에 정리되어 있고 이 추가적인 항이 모두 해석적으로 유도 가능하기 때문에 계산비용의 증가는 최소화된다.

4. 수치예제

표준편차의 변화를 고려한 설계민감도를 이용하여 2차원 수학예제의 신뢰성기반 최적설계를 수행하고자 한다. 다음은 이 예제의 최적설계 정식이다.

$$\begin{aligned} \min \text{cost}(\mathbf{d}) &= -\frac{(d_1 + d_2 - 10)^2}{30} - \frac{(d_1 - d_2 + 10)^2}{120} \\ \text{s.t. } P[G_j(\mathbf{X}) \leq 0] &\geq 97.725\%, \quad j = 1, \dots, 3 \\ \mathbf{d}^L &\leq \mathbf{d} \leq \mathbf{d}^U, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{and } \mathbf{X} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 $\mathbf{d}^L = [0, 0]^T$, $\mathbf{d}^U = [0, 0]^T$ 이다. 식 (14)에서 볼 수 있듯이 목표신뢰성은 97.725% 이다. 세 성능함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{X}) &= 1 - \frac{X_1^2 X_2}{20} \\ G_2(\mathbf{X}) &= -1 + (0.9063 X_1 + 0.4226 X_2 - 6)^2 \\ &\quad + (0.9063 X_1 + 0.4226 X_2 - 6)^3 \\ &\quad - 0.6(0.9063 X_1 + 0.4226 X_2 - 6)^4 \\ &\quad - (-0.4226 X_1 + 0.9063 X_2) \end{aligned} \tag{15}$$

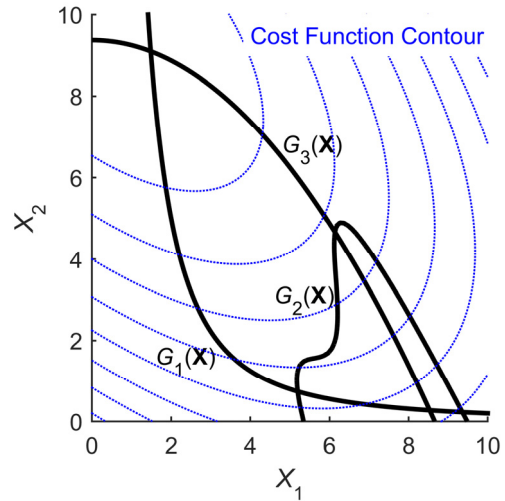


그림 3 비용함수와 성능함수의 형상

$$G_3(\mathbf{X}) = 1 - \frac{80}{X_1^2 + 8X_2 + 5}$$

그림 3의 비용함수와 성능함수의 형상에서 성능함수의 비선형성이 매우 큼을 알 수 있다. 유용설계영역은 세 성능함수로 둘러싸인 부분이다.

4.1 경사도법

경사도법의 설계민감도를 이용하여 위 예제의 신뢰성기반 최적설계를 수행할 수 있다. 확률변수를 두 가지 모델로 사용하였는데 표 5에는 그 내용이 정리되어 있다. 두 모델 모두 확률변수가 서로 상관관계를 갖도록 만들었다. 표준편차 σ_i 의 변화를 고려하기 위해서 아래와 같이 평균 μ_i 의 함수로 정하였다.

$$\sigma_i(\mu_i) = 0.02\mu_i^2 + 0.08\mu_i + 0.07 \tag{16}$$

두 모델 모두 성공적으로 신뢰성기반 최적설계점을 구할 수 있었고, 그 결과는 표 6에 정리되어 있다. 모델 A의 경우에는 세 확률제약조건 중 최소 신뢰성 값이 97.7%로 목표신뢰성 97.725%를 잘 만족시키고 있다. 모델 B의 최소 신뢰성 값은 96.9%로 목표신뢰성을 거의 만족하는데, 앞에서 말한 바와 같이 경사도법은 정확성이 부족해서 완전히 만족시킬 수 없다. 경사도법의 설계민감도의 정확성을 파악할 수 있는 부분은 반복횟수와 선 탐색의 횟수이다. 정확한 설계민감도가 주어진다면 반복횟수와 선 탐색 횟수가

표 5 경사도법 예제의 확률변수

모델	X_1		X_2		Copula	
	분포	μ_1	분포	μ_2	종류	θ
A	정규	5.19	대수정규	0.74	Clayton	2
B	감마		Extreme		FGM	

표 6 경사도법 신뢰성기반 최적설계 결과

모델	최적설계점		반복 횟수	선 탐색	비용 함수	최소 신뢰성
	d_1	d_2				
A	4.473	3.531	5	5	-1.131	97.7 %
B	4.424	2.642	5	5	-1.444	96.9 %

거의 같아지는데, 표 6에서 볼 수 있듯이, 이 예제에서는 반복횟수와 선 탐색 횟수가 정확히 같다. 앞에서 유도한 설계 민감도가 정확하게 최적설계점을 알려주고 있기 때문이다.

그림 4에는 모델 B의 초기 설계점 d^0 과 최적설계점 d^{opt} 에서의 97.725% 변동성을 나타내었다. 먼저 두 확률변수가 모두 정규분포가 아니고, 상관관계를 가지고 있기 때문에 변동성의 형상이 원형이 아닌 복잡한 형태를 띠고 있음을 볼 수 있다. d^0 에서는 변동성이 유용설계영역의 내부로 들어오지 않지만 d^{opt} 에서는 변동성이 정확히 유용설계영역의 내부로 들어왔음을 볼 수 있다. 특히 주목할 점은 변동성의 크기의 변화이다. d^0 와 d^{opt} 에서의 변동성의 크기가 매우 다른데 이는 설계변수가 조정됨에 따라 표준편차가 크게 변하였기 때문이다. 이러한 표준편차의 변화에서도 정확한 설계민감도를 제공하였기 때문에 효율적이고 효과적으로 신뢰성기반 최적설계점을 구할 수 있다.

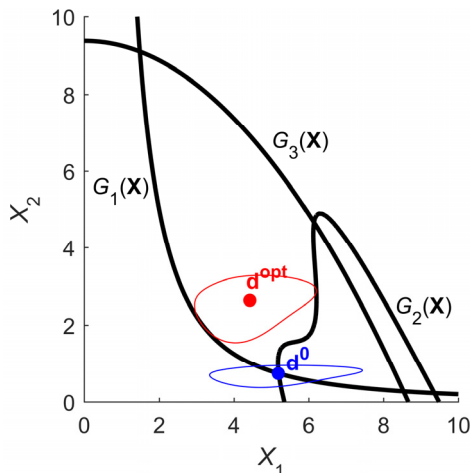


그림 4 경사도법의 설계점과 변동성 (모델 B)

4.2 샘플링법

같은 예제를 샘플링법의 설계민감도를 이용하여 수행할 수 있다. 표 7에는 샘플링법 예제에 사용한 두 개의 입력모델을 표기하였고, 역시 확률변수가 상관관계를 갖고 있다.

샘플링법 예제의 경우에도 성공적으로 신뢰성기반 최적설계점을 구할 수 있었고, 그 결과는 표 8에 정리되어 있다. 두 모델 모두 세 확률제약조건 중 최소 신뢰성 값이 97.7%로 목표신뢰성 97.725%를 잘 만족시키고 있는 것에서 샘플링법의 정확성을 알 수 있다. 모델 A는 반복횟수와 선 탐색 횟수의 차이가 2로, 성능함수와 확률변수 변동성의 비선형성을 고려하면 매우 작다고 할 수 있다. 모델 B의 경우에는 차이가 없다. 따라서 샘플링법의 설계민감도 역시 매우 정확함을 알 수 있다.

표 7 샘플링법 예제의 확률변수

모델	X_1		X_2		Copula	
	분포	μ_1	분포	μ_2	종류	θ
A	대수정규	5.19	정규	0.74	Clayton	2
B	정규		감벨			

표 8 샘플링법 신뢰성기반 최적설계 결과

모델	최적설계점		반복 횟수	선 탐색	비용 함수	최소 신뢰성
	d_1	d_2				
A	4.380	3.281	7	9	-1.209	97.7 %
B	4.424	2.642	9	9	-1.216	97.7 %

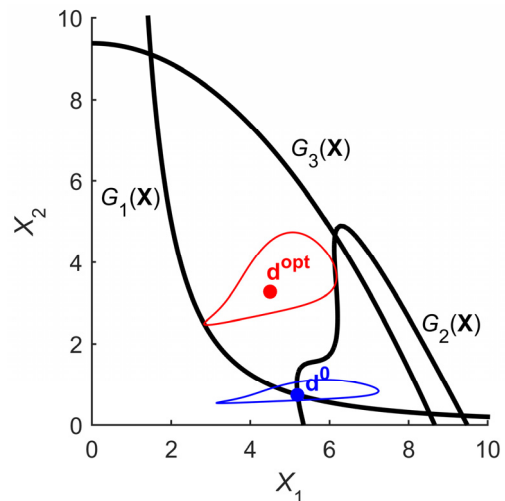


그림 5 샘플링법의 설계점과 변동성 (모델 B)

그림 5에는 모델 B의 초기 설계점 d^0 과 최적설계점 d^{opt} 에서의 97.725% 변동성을 나타내었다. 그림 4와 비교하면 변동성의 형상이 더욱 복잡하게 변했음을 알 수 있다. d^0 에서는 변동성이 유용설계영역의 외부로 나와있지만 d^{opt} 에서는 변동성이 유용설계영역의 내부로 정확히 들어왔음을 확인할 수 있다. 경사도법에서와 마찬가지로 변동성의 크기가 d^0 와 d^{opt} 에서의 매우 다르지만 정확한 설계민감도를 최적설계 알고리즘에 제공하여 신뢰성기반 최적설계를 효율적으로 수행할 수 있음을 확인하였다.

5. 결론

실제적인 공학문제에서는 확률변수의 평균이 변함에 따라 표준편차가 변화하게 된다. 이는 재료물성치나 강판의 두께의 예에서 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 신뢰성기반 최적설계의 설계변수인 평균이 변함에 따라 표준편차가 변하는 것을 고려해야만 올바른 신뢰성기반 최적설계점을 구할 수 있다. 표준편차의 변화는 곧 확률변수의 변동성의 변화를 의미하고 따라서 신뢰성기반 최적설계점은 움직이는 과녁이 된다. 그러므로 표준편차가 변하는 경우의 신뢰성기반 최적설계는 곧 움직이는 과녁을 맞는 정확한 설계민감도를 구하는 문제라 할 수 있다.

본 기사에서는 경사도법과 샘플링법을 사용하는 신뢰성기반 최적설계의 설계민감도를 소개하였다. 두 방법의 설계민감도는 표준편차의 변화를 고려하고 있으며, 해석적으로 유도하였기 때문에 계산비용이 작고 정확하다. 2차원 수치예제를 통해 유도한 설계민감도가 신뢰성기반 최적설계에 미치는 영향에 대해 고찰하였다. 경사도법과 샘플링법 모두 확률제약조건을 만족하는 유효한 최적설계점을 구하였다. 반복횟수와 선 탐색 횟수의 차이가 매우 작으므로 설계민감도가 정확하다는 결론을 내릴 수 있었으며, 최적설계점에서 변동성이 유용설계영역 내부로 들어오는 것을 확인하였다. 특히 초기 설계점과 최적설계점에서의 변동성의 크기가 매우 큰 것을 볼 수 있었는데, 이로부터 신뢰성기반 최적설계에서 표준편차의 변화를 고려하는 것이 매우 중요함을 볼 수 있다.

본 기사에서 소개한 설계민감도는 표준편차의 변화를 고려하지 않은 기존의 방법에 비해 계산비용은 거의 증가하지 않는다. 따라서 기존의 신뢰성기반 최적설계를 수행하였던 문제라면 표준편차의 변화를 고려한 신뢰성기반 최적설계가 가능하다는 점이 가장 큰 장점이라 하겠다.

참고문헌

1. Dowling, N. E. (2013) *Mechanical Behavior of Materials*, 4th ed., Pearson, Boston.
2. POSCO (2014) *Cold Rolled Steel* 냉연강판, POSCO, Seoul.
3. Arora, J. S. (2004) *Introduction to Optimum Design*, 4th ed., Academic Press, London.
4. Haldar, A., Mahadevan, S. (2000) *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*, John Wiley & Sons, New York.
5. Tu, J., Choi, K. K., Park, Y. H. (1999) A New Study on Reliability-Based Design Optimization. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, No. 4, pp. 557-564.
6. Lee, I., Choi, K. K., Noh, Y., Zhao, L., Gorsich, D. (2011) Sampling-Based Stochastic Sensitivity Analysis Using Score Functions for RBDO Problems With Correlated Random Variables. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 133, No. 2, p. 21003.
7. Cho, H., Choi, K. K., Lamb, D. (2017) Sensitivity Developments for RBDO with Dependent Input Variable and Varying Input Standard Deviation. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 139, No. 7, pp. 071402.
8. Rosenblatt, M. (1952) Remarks on a Multivariate Transformation, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 23, No. 3, pp. 470-472.
9. Cho, H., Choi, K. K., Lee, I., Lamb, D. (2016) Design Sensitivity Method for Sampling-Based RBDO with Varying Standard Deviation, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 138, No. 1, pp. 011405.
10. Geddes, K. O., Glasser, M. L., Moore, R. A., Scott, T. C. (1990) Evaluation of Classes of Definite Integrals Involving Elementary Functions via Differentiation of Special Functions, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 1, No. 2, pp. 149-165. 