

불확도 분석을 이용한 관성모멘트 측정장비의 신뢰도평가

김광로^{1,†} · 강휘원¹ · 설창원¹

¹국방과학연구소

The Confidence Estimation of MOI Measurement Equipment using Uncertainty Analysis

KwangRo Kim¹, HuiWon Kang¹ and ChangWon Shul¹

¹Agency for Defense Development

Abstract

The Monte Carlo simulation (MCS) method and the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) are the most widely used approaches for uncertainty estimation. In this paper, MCS and GUM were used to estimate the confidence of MOI measurement equipment developed in-house. According to the results, the GUM estimated uncertainty was slightly underestimated compared to the MCS method. This difference is due to the approximation used by GUM. MOI uncertainties estimated by both methods were less than 1% of the estimate, which shows the high measurement reliability of the developed MOI measurement system.

초 록

몬테카를로 시뮬레이션 방법과 측정불확도 표현 지침은 불확도 평가를 위해 가장 널리 사용되는 방법들이다. 본 논문에서는 자체 개발된 질량관성모멘트 측정장비의 신뢰도를 평가하기 위해 몬테카를로 방법과 GUM방법이 사용되었다. 결과에 따르면 GUM방법에 의해 평가된 불확도가 몬테카를로 방법에 의한 것보다 약간 과소평가되었고 그 차이는 GUM방법의 근사화에 기인한 것으로, 두 방법에 의해 평가된 관성모멘트 불확도들은 추정량의 1% 미만으로 개발된 관성모멘트 측정시스템의 높은 측정신뢰성을 보여준다.

Key Words : GUM(Guide to the expression of Uncertainty in Measurement), MCS(Monte Carlo Simulation), MOI(Moment of Inertia), Measurement Uncertainty(측정불확도)

1. 서 론

일반적으로 측정은 완벽할 수 없고, 측정결과가 측정하려는 양을 얼마나 잘 나타내 주는지 항상 분석이 필요하다.[1][2] 그런 측면에서 측정불확도는 측정결과 품질을 정량적인 지표로 제시해 줌으로써 시험결과의 신뢰도를 가늠할 수 있도록 해준다. 또한 다양한 국가에서 생산되는 측정결과를 비교하고 상호인정을

위해서도 보편적인 절차가 필요한데, 국제표준화기구(ISO)는 측정불확도 표현지침서[3]를 1993년에 발간하였고, 이후 1995년, 2008년[4]에 걸쳐 지침을 개정하고 있다. 측정불확도를 평가하는 방법으로는 전통적으로 사용되는 GUM방법과 행렬을 이용한 방법 그리고 몬테카를로 시뮬레이션을 이용하는 방법[5] 등이 주로 사용되고 있다.

GUM 방법은 컴퓨터의 도움 없이도 간편하게 불확도 전파법칙을 통해 계산할 수 있는 장점이 있는 반면 측정량의 확률분포는 전파되지 않아서 근사화된 합성 분산의 확률분포를 이용하여 측정량의 확률분포를 추

정하여 불확도를 산출한다. 또한 불확도 전파법칙이 테일러 전개 1차 근사식을 사용하는데, 복잡한 모델식을 다루어야 하는 경우에는 계산과정에서 오류를 범할 가능성도 높아지는 단점이 있다.[6-7]

이에 반해 몬테카를로 시뮬레이션(MCS) 방법은 각 불확도 성분의 확률분포에 맞게 난수를 발생시키고 측정량의 불확도 모형에 따라 난수를 합성한 후, 합성된 확률분포에서 기댓값, 합성 표준불확도, 포함구간 및 포함인자를 구하는 방법으로 측정량의 확률분포가 정규분포가 아닌 경우에도 정확한 포함구간을 계산할 수 있으며 입력량 변동이 기능적인 관계를 가지고 출력량 변동으로 어떻게 전파되는 지에 대한 과정이 복잡한 수학적 과정 없이 쉽게 구현할 수 있는 장점이 있다.[8-10]

본 논문에서는 자체 개발한 관성모멘트 측정 장비를 이용하여 실제 구조물에 대한 관성모멘트를 측정하였다. 관성모멘트는 항공기, 유도무기 등 비행체의 정확한 비행성능 예측에 중요한 물리량으로서 회전축의 위치뿐만 아니라 물체의 질량과 형상 모두에 의해 결정된다. 이론적으로도 관성모멘트를 추정할 수 있지만 복잡한 형상을 갖는 물체의 경우 충분한 정확도를 주지 못할 수 있고, 추정을 위한 비행체의 상세 모델링에 많은 시간을 요할 수 있다. 따라서 일반적으로 비행시험 전에 지상시험을 통하여 비행체의 관성모멘트를 직접 측정한다. 이에 측정된 결과에 대해 대표적인 불확도 산출방법인 GUM 방법과 MCS 방법을 적용하여 불확도를 산출하고, 측정장비의 신뢰도를 평가해보고자 한다.

2. 측정시스템 및 불확도 요인

2.1 측정시스템 개요

Figure 1은 구조물의 관성모멘트 값을 측정하기 위해 자체 개발된 측정시스템이다. 측정원리는 구조물을 장비에 수평으로 올려놓고 구조물의 한쪽은 힌지로 고정시키고, 다른 한쪽은 스프링을 연결시켜 베어링 피봇을 중심으로 일정 초기 변위를 주어 진동시키도록 설계되었다. 진동주파수는 스프링에 연결된 주파수카운터를 통하여 측정되고, 아래의 모델식(1)을 이용하여 측정량을 구한다.

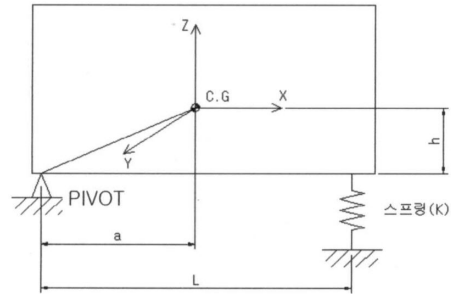
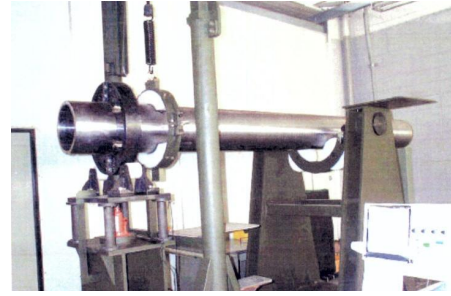


Fig. 1 (a) MOI Measurement Equipment and (b) its Parameters

$$MoI = \left(\frac{1}{2\pi f}\right)^2 (KL^2 - Wh) - \frac{W}{g}(h^2 + a^2) \quad (1)$$

여기서, f : 주파수, W : 구조물 중량, K :스프링상수

관성모멘트 측정결과에 영향을 미칠 수 있는 불확도 요인들로는 중량, 스프링상수, 진동주파수, 길이 측정 관련 불확도 요인들이 식별되었다. 측정기의 소급성에 의한 부분은 교정성적서 값을 사용하고, 반복성의 경우에는 시험 데이터의 평균 및 표준편차를 사용하였고, 분해능의 경우는 일반적으로 사용하는 직사각형 분포로 가정하였다.

2.2 측정시스템 구성

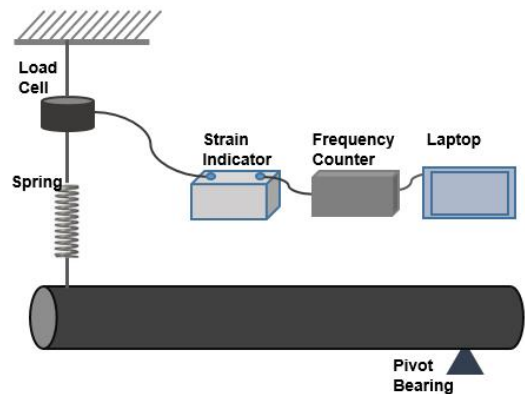


Fig. 2 Measurement System Configuration

스프링 : 스프링 하중-변위 그래프의 선형구간의 중간 점이 스프링에 걸리는 초기 하중과 부합되도록 스프링을 설계/제작하고, 재료시험 장비를 이용하여 제작된 스프링의 스프링 상수를 측정하여 MOI 측정에 적용하였으며, 사용된 스프링의 강성 값은 32,176Kg/m이다.

로드셀 : 로드셀은 MOI 측정 시 스프링의 진동하중을 전기적 신호로 바꾸어 인디케이터에 전달하는 기능을 수행하며, 용량 300Kg인 로드셀을 사용하였다.

인디케이터(Strain Indicator) : 모델명 P-3500 스트레인 인디케이터 사용하였다.

주파수카운터(Universal Frequency Counter) : 주파수카운터는 인디케이터에서 받은 신호를 주파수로 변화시키는 기능을 하며, 사용된 Keysight 53230A 모델 주파수카운터의 주파수 분해능은 1초에 1회 12자리 수의 주파수 디스플레이 성능을 가진다.

Laptop : 수학적 모델 이용한 관성모멘트를 계산한다.

였다. 유효자유도(ν_{eff})는 18이고, 이에 해당하는 k 값은 t -분포 표에서 2.101이다. 따라서 GUM 방법의 해 계산된 최종 확장불확도는 아래와 같다.

$$U = k \cdot u_c(y) = 5.38$$

Table 1 MOI MU Summary by GUM

불확도 성분	추정량	표준불확도 $u(x_i)$	확률 분포	자유도
$u(W)$	554.32	0.0511	정규	29
$u_A(W)$	-	0.0355		
$u_{B,Cul}(W)$	-	0.0367		∞
$u_A^*(K)$	8249.0	10.3525	t-분포	3
$u_A(f)$	2.2892	0.0016	정규	329
$u_B^{**}(L)$	1.8170	0.0006	사각	∞
$u_c^{***}(MoI)$		2.5602		

* A-type uncertainty, ** B-type uncertainty

*** Combined uncertainty

3. 측정불확도 평가

3.1 GUM 방법에 의한 불확도 평가

관성모멘트에 대한 불확도 계산은 불확도 계산식에 들어가는 입력량들이 별도의 분리된 측정과정들을 통하여 산출되므로 상관관계가 없는 입력량에 대한 합성 표준불확도 계산식(2)을 이용하여 산출하였다. 불확도 요인들을 고려하여 산출된 측정된 관성모멘트의 불확도 총괄표를 Table 1에 제시하였다.

$$u(MoI) = \sqrt{[c_f u_f]^2 + [c_K u_K]^2 + [c_W u_W]^2 + [c_L u_L]^2} \quad (2)$$

여기서 $c_i = \frac{\partial(MoI)}{\partial x_i}$ 로 감도계수이고,

u_i 는 각 입력량의 표준불확도

위의 합성표준불확도 식은 측정량을 테일러 급수 1차 근사식에 기반하여 도출한 것이며 자세한 전개과정은 문헌[8][11]를 참고하였다.

Table 1에 제시된 바와 같이 관성모멘트 측정값에 대한 합성표준불확도는 2.5602(Kg-m²)이고, 측정량의 합리적인 추정 값이 이루는 분포의 대부분을 포함할 것으로 기대되는 구간을 정의하기 위해 Welch-Satterthwaite식을 이용하여 포함인자 k 값을 추정하

3.2 몬테카를로 시뮬레이션(MCS) 방법에 의한 불확도 평가

3.2.1 몬테카를로 시뮬레이션 절차

본 논문에서는 불확도를 구하기 위해 몬테카를로 방법을 통해 각 입력량의 확률분포를 따르는 각 10⁶개의 난수를 발생시키고, 이들 난수들을 측정량을 구하는 모델식을 통해 측정량의 합성확률분포를 구하였다. 몬테카를로시뮬레이션 세부 절차는 Fig. 3와 같다.

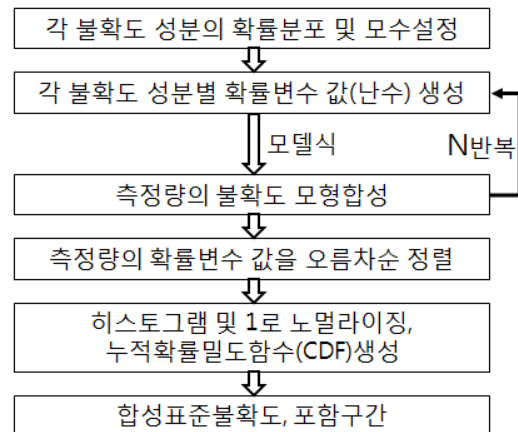


Fig. 3 Monte Carlo Simulation Procedure

3.2.2 몬테카를로 시뮬레이션에 의한 불확도 산출

확장불확도 및 포함구간은 합성된 측정량의 확률분포로부터 산출하는데, 95% 신뢰수준에 해당하는 분위수 2.5와 97.5에 해당하는 측정량(MOI)을 계산하고 두 값의 차이의 1/2을 95% 신뢰수준의 확장불확도로 사용하였다. Fig. 4는 몬테카를로 시뮬레이션을 통해 구현한 각 입력량 즉, 중량(W), 강성(K), 주파수(f) 및 측정길이(L)에 대한 확률분포이다. 이들 확률분포와 모델식을 통해 합성된 측정량(MOI)에 대한 누적확률분포를 도출하게 되며, Fig. 5는 합성된 측정량(MOI)의 누적확률분포를 보여준다. 불확도는 95% 신뢰수준에서 아래와 같이 산출되었다.

$$\therefore MOI = (863.20 \pm 6.37) \text{ Kg}\cdot\text{m}^2 \text{ (신뢰수준 95\%)}$$

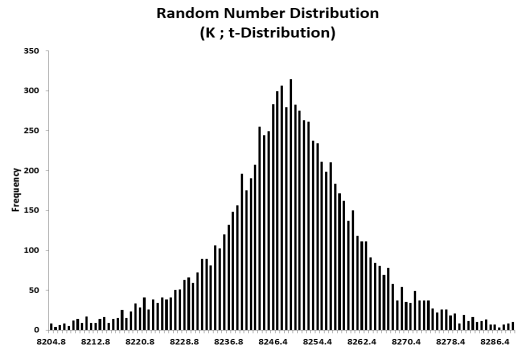
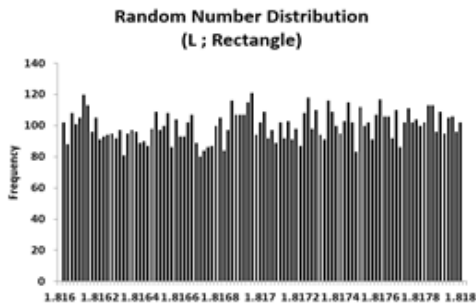
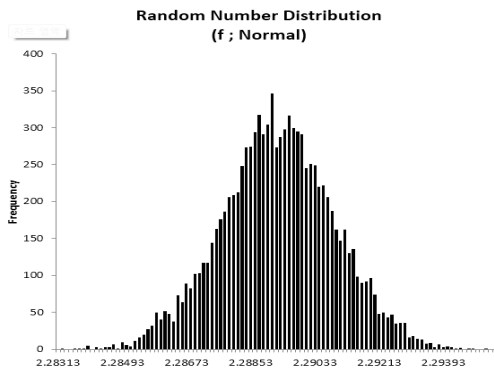
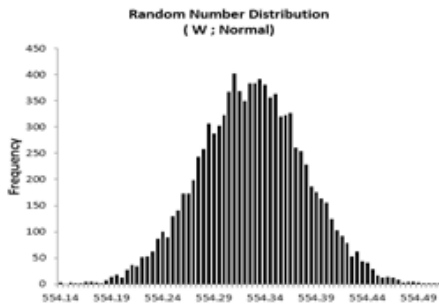


Fig. 4 Distribution of Input Quantities by MC Simulation

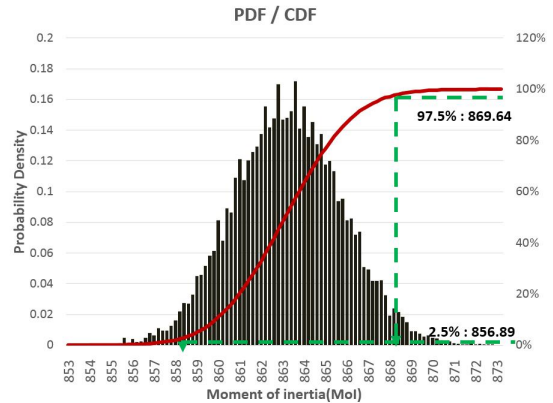


Fig. 5 Probability Density Function of Measurand (MOI)

4. 측정불확도 결과 비교분석

Table 2는 GUM에 방법과 MCM 방법에 의한 요약된 측정 불확도 산출결과이다.

Table 2 MOI MU Summary by GUM and MCS

(unit : Kg·m ²)	GUM	MCS
Measurand, <i>MoI</i>	863.08	863.20
Standard uncertainty, <i>u(MOI)</i>	2.56	-
Expanded uncertainty, <i>U(MOI)</i>	5.38	6.37

Table 2에 제시된 두 가지 방법에 의한 확장불확도 결과는 GUM에 의한 방법이 5.38이고, MCS 방법에 의한 결과가 6.37으로 전통적인 GUM 방법이 약간 낮게 평가되었다. GUM 방법에 의한 합성불확도는 측정량과 관련된 모든 불확도 기여도를 불확도 전파법칙을 통해 전파시키지만, 측정량의 확률분포는 전파되지 않

아서 확장불확도 산출시 kai-square로 근사된 합성분산의 확률분포를 이용하여 측정량의 확률분포를 추정하게 된다. 이 경우 Welch-Satterwaite 방법으로 유효자유도를 구할 때 A형 불확도의 자유도가 낮아서 불확도의 불확도가 크지만, 상대적으로 자유도가 큰 B형 불확도로 인해 합성표준불확도와 유효자유도의 왜곡이 발생한다. 즉, A형 불확도의 불확도가 과소평가되고 그로인해 GUM에 의한 산출된 표준불확도가 낮게 평가되는 결과를 낳는다. 이러한 결과는 결국 측정량의 확률분포를 정확히 구하지 못해서 생기는 문제로 A형 불확도에 의한 차이가 예상되는 경우에는 몬테카를로 시뮬레이션 방법에 의하면 좀더 정확한 불확도 산출이 가능하다.

5. 결 론

본 논문에서는 종래의 대표적인 불확도 산출방법인 GUM방법과 더불어 몬테카를로 시뮬레이션 방법을 사용하여 관성모멘트 측정과정에서 측정불확도를 계산하고 상호 비교하였다. GUM방법은 여러 계산과정을 통하여 불확도를 산출하게 되는데 복잡한 모델식이 아니어도 불확도 계산과정에 계산오류가 발생할 수 있고, 추정량에 비해서 불확도 값이 민감한 계산 혹은 측정의 입출력 값의 개수가 많거나, 모델식이 비선형인 경우에는 근사식을 사용하는 전통적인 불확도 계산에 차이가 발생할 수 있으므로 몬테카를로 방법을 병행해서 사용하는 것이 계산된 측정불확도의 신뢰성측면에도 바람직해 보인다.

References

- [1] Chan Kyu Joo, Jong Hoon Kim, and Michiko Furudate, "Measurement of Thrust Induced by the Dielectric Barrier Discharge in Cylinder Pipes," *Journal of Aerospace System Engineering*, Vol. 11, No. 6, pp.56-63, 2017.
- [2] Ji Sung Oh, Jun Su Shin, Keun Hwan Moon, and Jung Pyo Lee, "Launch and Altimate of Small Hybrid Rocket," *Journal of Aerospace System Engineering*, Vol. 4, No. 3, pp.29-33, 2010.
- [3] ISO GUM, Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, International Organization for Standardization, 1993
- [4] BIPM, Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement, JCGM 100:2008
- [5] BIPM, Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM 101:2008
- [6] Young-Cheol Ha, Jae-Young Her, Seung-Jun Lee, Kang-Jin Lee, "Comparison of ISO-GUM and Monte Carlo Method for Evaluation of Measurement Uncertainty," *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers - B* 38(7) pp.647-656, 2008
- [7] Kwang-Ro Kim and Young-Shin Lee, "Study on the Estimation of Measurement Uncertainty in MOI Measurement," *J. of the Korea Institute of Military Science and Technology*, Vol.16, No.6 pp. 797-802, 2013.
- [8] Martin Basil, Christos Papadopoulos, Donald Sutherland and Hoi Yeung, "Application of Probabilistic Uncertainty Methods (Monte Carlo Simulation) in Flow Measurement Uncertainty Estimation," *Flow Measurement 2001 International Conference*, pp. 1-21, 2001.
- [9] Bo-Hwa Lee, Kyung-Jae Lee, In-Young Yang, Soo-Seok Yang and Dae-Sung Lee, "Uncertainty Assessment using Monte Carlo Simulation in Net Thrust Measurement at AETF," *KSAS International Journal*, Vol. 8, No.2, pp. 126-131, 2007.
- [10] Jungkee Suh, Hyungsik Min, Minsu Park, Jin-Chun Woo, and Jongsang Kim, "A Study on Comparison between the Propagation of Uncertainty by GUM and Monte-Carlo Simulation," *Journal of the Korean Chemical Society*, Vol. 47, No. 1, pp. 31-37, 2003.
- [11] Taylor J.R., An introduction to Error Analysis in Measurement. The Study of Uncertainty in Physical Measurement, 2nd Ed., University Science Books 1997.