

기하판을 지원하는 초등 도형 학습 소프트웨어의 설계 및 구현

최지원 · 이용배

전주교육대학교 컴퓨터교육과

요 약

수학 도형 영역에서 기하판과 같은 구체적 조작도구를 활용하여 학습하면 추상적인 기하 개념을 이해하는데 효과적이며 학습 흥미도와 문제 해결 능력을 높여줄 수 있다. 현재까지 구체적 조작도구는 고전적인 교실학습 환경에서만 적용하고 있으며 온라인 환경에서는 거의 없었다. 본 연구에서는 수학 도형 영역에서 다각형 주제를 기하판을 활용하여 학습할 수 있는 교육용 소프트웨어를 설계하고 구현하였다. 소프트웨어의 기본 기능은 도형 그리기와 지우기 기능으로 구성되어 있고 학습한 내용의 도형을 맞게 그렸는지 확인할 수 있다. 연구에서 개발된 도구는 텔파이 분석으로 도형 영역 학습에 도움을 줄 수 있고 학습 흥미도를 높일 수 있을 것이다.

키워드 : 기하판, 구체적 조작도구, 도형 영역 학습, 교육용 소프트웨어, 텔파이 분석

Design and Implementation of a Digital Geoboards for Geometrical Shapes Learning for Elementary Students

Jiwon Choi, Yong-Bae Lee

Dept. of Computer Education, Jeonju National University of Education

ABSTRACT

This research supports the idea that manipulative devices can be an effective modality tool for learning abstract concepts involved with identifying geometric shapes and enhance learners' problem solving and motivation. Until recently specified manipulative device has been adapted only in traditional classroom environment and it has been very rare to find devices that is designed for online-basis. This study focused on designing and implementing an educational software which guide learners with geoboard in identification and characteristics of polygons. In addition to the function to draw and to delete various shapes, this software helps learners immediately assess the outcome. The results of the Delphi Technique show promising evidence for it being a very efficient means to learn geometric shapes and increase learners' motivation to learn the subject matter.

Keywords : Geoboards, Specific Manipulation Tools, Geometrical Shapes Learning, Educational Software, Delphi Technique

교신저자 : 이용배(전주교육대학교)

논문투고 : 2018-06-08

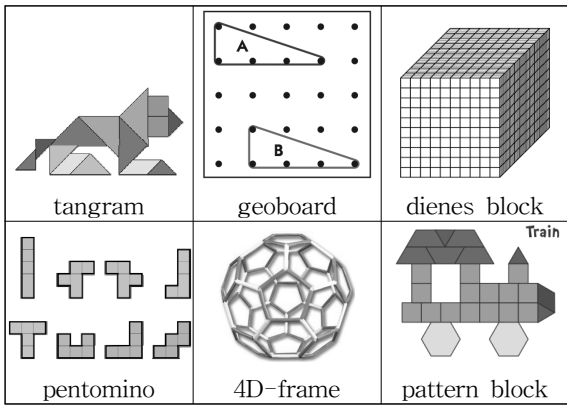
논문심사 : 2018-06-21

심사완료 : 2018-06-27

1. 서론

교육부는 제 7차 수학과 교육과정 기본 방향을 수학 능력 신장으로 설정하고 이를 구현하기 위한 실천 항목으로 수학적 흥미와 자신감의 고양, 컴퓨터 및 구체적 조작물의 활용을 적극 제안하였다[10]. 이후 2015년 교육과정 개정을 포함한 5번의 개정이 있었음에도 7차 교육과정의 실천 항목은 주요 맥락으로 유지되고 있다 [11].

이와 병행하여 수학교육 분야에서 많은 연구자들은 수학의 추상적인 개념이나 복잡한 이론을 학습자에게 쉽게 교육하기 위한 방법으로 다양한 도구 활용법을 개발하고 제안해 왔다[3,8,14]. 실제 수업에서도 주사위 (dice), 탱그램(tangram), 패턴 블록(pattern block), 디네스 블록(dienes block), 펜토미노(pentomino), 기하판(geoboard) 등의 구체적인 조작물을 활용하여 교육하는 방법이 그 결과물이라 할 수 있다.



(Fig. 1) various tools used in Math[google]

(Fig. 1)의 4D-프레임(4D-frame)은 입체도형의 뼈대를 구성하는 모서리를 구부리거나 모서리 양끝을 자석으로 연결하여 다각 입체 도형을 만드는 도구이다. 기하판[4]은 1954년 이집트의 수학자 가테그노(Caleb Gattegno)[3]가 개발한 다각형의 기본 개념이나 특성을 이해하는데 사용되는 수학 학습도구로 판자위에 일정한 간격으로 못을 박고 그 위에 고무줄을 걸 수 있도록 고안된 도구이다.

초등학교 고학년에서 중학교 수학 교과에 포함된 도

형의 성질 및 도형간의 관계는 의미가 매우 추상화되어 있어서 개념 정립이 미완성된 학생들에게는 아직까지도 학습하기 어려운 단원으로 인식되고 있다. 이런 도형학습의 도구로 기하판을 활용하면 도형의 종류와 특징을 이해하는데 효과적이며 분석적 사고력과 통합적 문제해결 능력향상에 도움을 줄 수 있다[3,4]. 또한 학습 동기 유발과 흥미도 향상에도 긍정적인 영향을 주는 것으로 알려져 있다.

본 연구에서는 초등학교 수학 도형 학습 단원 중 4학년 다각형 주제에 대해 학생들이 집에서 스스로 학습할 수 있도록 디지털 기하판 도구를 개발하는데 주안점을 두고 도형 학습 소프트웨어를 설계하고 구현하였다.

초등학생이 직접 도형 그리기 프로그래밍을 하면 도형 학습과 소프트웨어의 융합지식을 습득할 수 있다. 그러나 도형을 프로그래밍하는 과정에서 정삼각형이나 정사각형은 가능하겠지만 마름모, 사다리꼴, 직사각형 등의 개념으로 들어가면 프로그래밍에 대한 기초 수준으로는 접근하기 어렵고 중급 이상의 프로그래밍 학습 수준과 반 하일[16]의 개념(Abstraction) 단계 이상의 기하학습이 이루어져야 가능하다.

따라서 본 연구팀은 여러 연구 결과로 검증된 기하판을 직접 활용해보는 것이 도형 학습 효과 측면에서는 효율적이라 판단하였다. 또한 교육용 프로그램 활용이 수학분야에서는 학습효과가 입증[2,7,14,18]되고 있기 때문에 도형 학습 지원 소프트웨어 개발에 초점을 두었다.

논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서 도형학습과 관련된 현재까지의 연구를 도구 활용 중심으로 분석해보고 제3장에서는 도형 학습 소프트웨어를 설계하고 구현한 과정에 대해 상세히 기술한다. 제4장에서는 개발된 프로그램을 평가해보고 역할이나 쓰임새를 진단해 본다. 마지막 5장에서는 결론을 맺고 향후 연구 방향을 제시해본다.

2. 관련 연구

2.1 입체 도형 학습

박만구[12]는 4D-프레임을 활용한 학습이 초등학생의 공간 지각 능력 신장에 어떤 영향을 주는지를 알아

보기 위해 초등 5학년을 대상으로 학습한 결과, 교구를 활용하지 않은 집단보다 공간 지각 능력 향상에 효과적이었고 특히, 공간 지각 일관성과 공간 지각 관계 이해력 신장에도 도움을 주는 것으로 나타났다. 이주용[9]도 4D-프레임을 활용한 학습이 초등학교 수학 영재에게 공간 감각 능력과 창의성에 어떤 영향을 주는지를 분석하기 위해 D광역시 두 개 초등학교의 6학년 영재 36명을 대상으로 실험하였다. 그 결과, 공간 지각 능력의 회전요소, 거리감각, 구조인식 능력에서 유의미한 결과를 보였으며 창의성에서도 유창성, 융통성, 독창성에 긍정적 효과를 주는 것으로 나타났다.

김갑수[7]는 입체도형 학습에서 전개도나 복잡한 입체도형의 경우 조각물을 만들어 내기가 어렵기 때문에 컴퓨터를 통한 가상의 구체물을 활용하는 것이 효과적이라고 판단하고 RIA(rich internet application) 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램은 간단한 수치 입력과 마우스 클릭으로 입체 도형을 쉽게 만들 수 있는 것이 특징이다.

이상윤[14]은 초등학교 6학년 28명에게 미리 제작된 증강현실 기반 콘텐츠 각기둥, 각뿔, 전개도, 나무 쌓기 등으로 입체도형을 학습하도록 하였는데 학습 후, 증강현실로 학습한 집단이 그렇지 않은 집단보다 학업성취도, 수업 만족도, 흥미도가 더 높게 측정되었다.

2.2 평면 도형 학습

김민경[8]은 초등 수학에서 다각형 개념 지도, 평행 이동, 대칭 이동, 도형의 측정 등 기하판 활용 방안을 구체적으로 제시하였다. 황우현[17]은 중학교에서 피타고라스 정리 학습에 기하판을 활용하였을 때의 효과를 측정하였는데 학습에 참여한 그룹 모두 재미있고 쉬웠다고 답변하였고 고무줄을 걸어보고 생각하는 활동이 수업에 집중하게 하고 실제 도형을 만들고 확인하는 과정에서 피타고라스 정리를 이해하는데 도움이 된다고 응답하였다.

콜린(Colleen King)은 2002년에 수학 놀이터(math playground)[5]라는 수학 학습 사이트를 만들었다. 이곳은 게임, 퍼즐, 다양한 문제 풀이 활동을 통해 수학 개념을 학습하고 탐구할 수 있는 공간을 제공하고 있으며 기하판 게임 외에 다양한 수학 기반 게임과 초등학교 6

개 학년별로 학습 콘텐츠를 제공하고 있는 것이 특징이다. 여기에서 제공하는 기하판은 도형을 자유롭게 그리고 색칠할 수 있도록 제작되었는데 물리적인 기하판의 기능을 온라인에서 지원하고 있다.

배진성[2]은 초등학교 3-6학년 수학 교과를 분석하고 각 학년에 맞는 도형 학습 주제를 추출한 후 이를 학습하기 위한 자기 주도형 문제 해결 도구를 개발하였다. 문제 해결 도구는 선그리기, 원그리기, 측정 기능 등으로 도형을 쉽게 완성하고 크기를 바로 알 수 있는 특징이 있다.

박용규[15]는 초등학교 4학년 수학과 각도 단원을 중심으로 웹 코스웨어를 설계하고 구현하였다. 코스웨어 활용 수업결과 일반 수업 방식으로 수업한 반에 비해 학업성취도, 이해도, 흥미도, 자기주도적 학습 영역에서 긍정적인 반응을 보였다.

구윤미[18]는 학습 부진아 대상 도형 단위 학습을 위해 도형 단원을 1단계 여러 가지 도형, 2단계 점-선-각, 3단계 평면도형, 4단계 합동과 대칭, 5단계 입체도형으로 구분하여 단계별로 학습하도록 하였다. P초등학교 2학년 학습부진아 10명 대상으로 학습한 결과, 90%이상 재미있었고 70%이상 도형학습에 효과적이라고 응답하였다.

2.3 교구 활용 정리

연구결과를 온라인/오프라인 도형 학습으로 구분하여 정리하면 <Table 1>과 같이 나타낼 수 있다.

<Table 1>의 내용과 현재의 정보기술 환경을 고려해 보면 앞으로의 교수-학습 시스템 설계의 방향은 온라인 학습으로 프레임을 설계하는 것이 오프라인 학습보다 학생들에게는 더 많은 학습기회를 제공할 것으로 판단된다.

따라서 본 연구에서는 온라인 학습 환경에서 도형 학습을 지원할 수 있는 프로그램을 개발하고자 한다. 또한 기존의 도형 학습에서 학습 효과를 객관적으로 인정받은 기하판을 활용하는 도형 학습 시스템을 설계하고 구현하는데 초점을 둔다.

<Table 1> Researches based on learning env

Tools	Online learning	Traditional classroom learning
4D-프레임 (4D-frame)		Park Mangoo[12] Lee Ju Yong[9]
기하판 (Geoboard)	Colleen[5]	Son Sook-Hyun[13] Kim Min Kyeong[8] Whang W-H[17]
증강현실 (AR)	SangYoon Lee[14]	
응용프로그램 (application program)	Bae Jin Seong[2] KapSu Kim[7] Ung-Kyu Park[15] Yun-mi Koo[18]	

기하판을 활용하는 콜린의 수학 놀이터(math play-ground)[5]의 특징은 고전적인 기하판을 웹 프로그램으로 변환시킨 것으로 고무줄 대신 마우스로 쉽게 도형을 만들고 그것을 자유롭게 변형시킬 수 있다는 것이다. 그러나 학습자가 만든 도형이 어떤 도형인지 알려면 다른 사람의 도움을 받거나 스스로 학습해야 한다는 것이 한계이다. 본 연구에서 개발된 도형 학습 소프트웨어는 슬라이드를 통해 학습하고 학습된 내용을 기하판 위에 직접 만들어 보면서 평가 받는 과정을 거친다.

3. 도형 학습 소프트웨어 설계

3.1 반 하일 학습 모형 적용

본 연구에서 개발된 도형 학습 소프트웨어를 통해 학습하는 과정은 반 하일(van Hiele)의 기하 학습 모델을 적용하였다. 반 하일 이론은 도형 학습을 하는 많은 분야에 적용[1,6]되고 있으며 그 학습 효과가 입증된 바 있다.

반 하일 학습 모형[16]은 시각화(Visualization), 분석(Analysis), 개념(Abstraction), 추론(Deduction), 정확한 적용(Rigor)의 다섯 가지 기하학적 사고 단계로 구성되며 각 단계는 단계별 학습이 완성된 후에 다음 단계로 넘어갈 수 있는 규칙이 있다. <Table 2>는 반 하일의 학습 모형을 정리하였다.

<Table 2> The van Hiele model of geometric understanding

level	meaning
level 0 : Visualization	-Look geometric shapes as a whole. -Don't focus on their particular attributes.
level 1 : Analysis	-Recognize that each shape has different properties. -Identify the shape by that property.
level 2 : Abstraction	-Look at the interrelationships between figures.
level 3 : Deduction	-Construct proofs rather than just memorize them. -See the possibility of developing a proof in more than one way.
level 4 : Rigor	-Learn that geometry needs to be understood in the abstract.

- 시각화(Visualization) 단계

이 단계 어린이의 사고 중심은 도형의 개별 모양에 있으며 전체적인 모습을 판단하여 분류하는 방법을 배운다. 이 단계의 학습자는 단순히 도형의 모양을 보면서 어떤 도형인지를 인지할 수 있도록 하면 된다. 예를 들어, 학습자는 직사각형을 창문, 책, 상자처럼 생겼기 때문에 사각형이라고 판단한다.

- 분석(Analysis) 단계

이 단계에서 학습자는 특정한 도형 모양에서 속성을 뽑아내고 미리 정의된 그룹에 도형을 분류시킬 수 있다. 예를 들어, 이 단계의 학생은 네 변의 길이가 같고 네 각이 모두 직각이면 정사각형이라고 말할 수 있다.

- 개념(Abstraction) 단계

이 단계의 학생들은 자신이 이해한 도형의 속성을 정리할 수 있다. 즉, 도형의 속성은 다른 속성을 내포하고 있음을 알 수 있는데 예를 들어, 이등변 삼각형은 대칭이기 때문에 두 각은 서로 같다는 사실을 인지할 수 있다. 그러나 이 단계 학습자는 아직 복잡한 논증을 이해하거나 기하학적 증명을 하지는 못하지만 충분히 나열된 조건을 이해하고 간단하게 정의할 수 있게 된다.

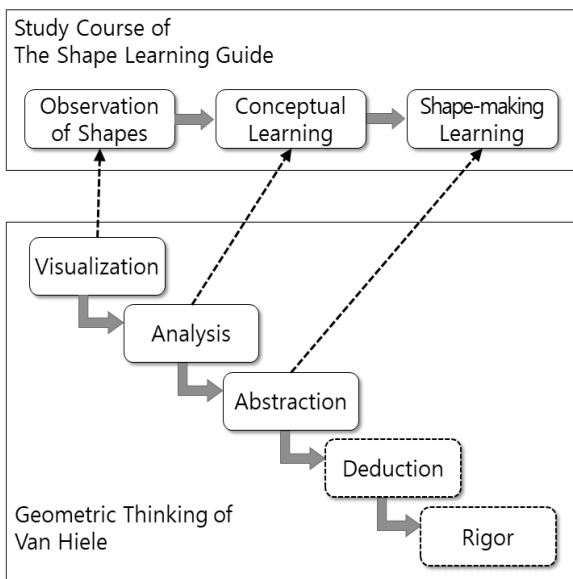
- 추론(Deduction) 단계

추론 단계에서 학습자는 연역적 추론을 통해 공식을 증명하는 방법을 배운다. 이 수준의 학습자는 정의가 고정되어 있다고 인식하기 때문에 아직 유클리드 기하학을 생각하지 못한다. 또한 학습자는 고등학교 수준에서 도형 정의를 기하학적으로 증명하고 그 의미를 이해할

수 있다.

- 정확한 적용(Rigor) 단계

이 단계의 학습자는 수학 전공자나 수학자 수준에서 기하학을 하고 적용할 수 있다. 학습자는 연역적 기하학을 기반으로 사고하며 비 유클리드 기하학을 연구하고 이해할 수 있다. 또한 이 단계의 학습자는 기하학 법칙과 그것이 비 수학적 연구와 어떻게 철학적으로 다른지도 해석할 수 있다.



(Fig. 2) Learning process of shape learning software

도형 학습 소프트웨어의 학습 과정은 (Fig. 2)에서와 같이 반 하일 학습 모형을 초등 도형 영역 학습에 맞도록 수정하여 적용하였다.

반 하일 이론은 학년이나 나이에 종속된 학습 이론이 아니고 단계별 과정을 학습하면 다음 단계로 올라가는 구조이지만 기존의 연구에서도 언급된 바가 있듯이 추론(Deduction) 단계와 적용(Rigor) 단계는 고등학교 학습 수준이나 대학 수학 전공 수준에서 기하학을 이해할 수 있다[16]. 본 연구가 초등 영재가 아닌 일반 초등 일반학생을 대상으로 하기 때문에 모형을 수정하고 한국 초등 환경에 맞도록 재조정하였다.

도형 학습 소프트웨어의 학습 과정은 도형 관찰(Observation of Shapes), 개념 학습(Conceptual Learning),

도형 그려보기(Shape-making Learning)의 세 단계로 구성하였다.

도형 관찰 과정은 여러 개의 도형을 보여 주고 그 중에 같은 그룹에 속하는 도형만을 따로 그룹핑하여 다시 한 번 보여주면서 학습하는 단계이다. 학습자는 머릿속에서 같은 그룹에 속하는 도형의 대표 이미지를 스스로 그릴 수 있게 된다.

개념 학습 단계는 같은 그룹에 속한 도형의 특성을 찾아내고 그 특성을 학습하는 과정이다. 예를 들어, 사다리꼴을 학습할 때 사다리꼴의 특성을 설명과 그림을 통해 이해하고 여러 도형에서 사다리꼴을 찾아내는 평가를 통해 사다리꼴의 개념을 정확하게 인지할 수 있게 하는 단계이다.

도형 그려보기 단계는 디지털 기하판을 활용하여 학습한 도형을 직접 그려보는 과정이다. 학습자는 도형 관찰과 개념 학습 단계에서 학습한 도형을 직접 그려봄으로써 추상적인 기하학적 도형 개념을 구체화시킬 수 있고 알고 있는 도형의 특성에서 다른 특성들도 생각해 낼 수 있다.

3.2 소프트웨어 설계

본 연구과정에서 개발된 도형 학습 소프트웨어는 초등학교 4년 수학과정의 도형 영역 학습을 위한 것이며 향후 5학년, 6학년 도형 영역 학습도 가능하도록 설계에 반영하였다.

학습내용을 구성하기 위해 먼저 초등 4학년 수학과정을 분석하였으며 <Table 3>에서 정리하였다.

<Table 3> Mathematics curriculum - grade 4

1 st term	main subjects	2 nd term	main subjects
1	큰수	1	소수의 덧셈과 뺄셈
2	곱셈과 나눗셈	2	수직과 평행
3	각도와 삼각형	3	다각형
4	분수의 덧셈과 뺄셈	4	어림하기
5	혼합 계산	5	꺼은선 그래프
6	막대그래프	6	규칙과 대응

도형에 대한 내용은 4학년 1학기 3단원 각도와 삼각형에서 이등변 삼각형과 정삼각형 내용을 다루고 있으

며 4학년 2학기 3단원 다각형에서 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형에 대한 내용을 학습한다. 본 연구팀은 이 영역의 학습 내용만을 추출하여 도형 학습 소프트웨어에서 학습을 지원하고자 하였다.

도형 학습 소프트웨어의 전체 구조는 (Fig. 3)과 같이 크게 삼각형 학습과 사각형 학습으로 구성하였다. 삼각형 학습은 이등변 삼각형 학습 후 정삼각형 학습을 하도록 유도하였으며 이등변 삼각형 학습 없이 직접 정삼각형 학습으로도 접근 가능하도록 하였다.

사각형 학습도 삼각형 학습과 접근 방식은 유사하다. 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형 학습이 순차적으로 이루어지도록 구성하였으며 이미 학습을 마쳤거나 전 단계를 이해한 학생들을 위해서는 각각의 사각형 학습으로 직접 들어갈 수도 있도록 학습 경로를 구성하였다.

또한 개별 도형 학습을 마치면 학업 성취도 결과를 알 수 있도록 하였으며 삼각형이나 사각형 전체 학습을 끝냈을 때에는 전체 성취도 결과도 학습자가 확인할 수 있도록 하였다.

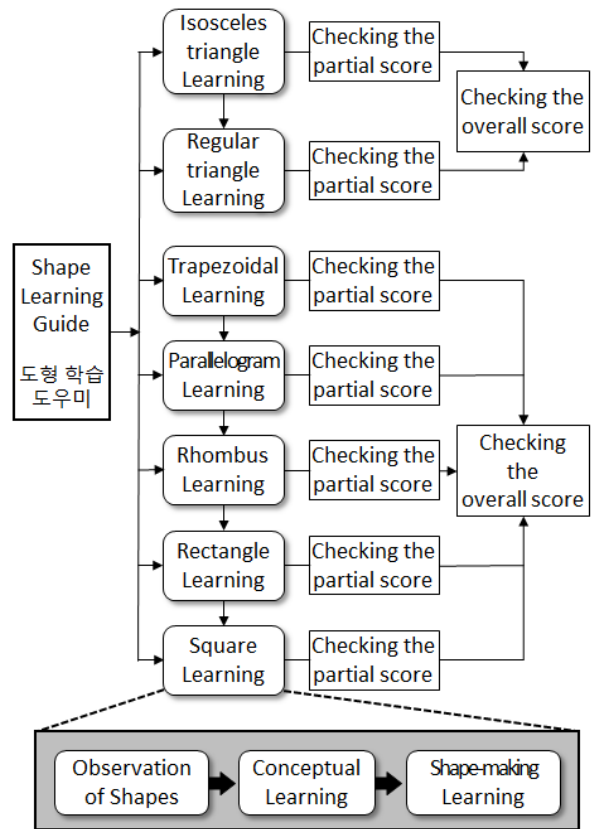
각각의 도형 학습 과정은 (Fig. 2)에서도 표현했듯이 반 하일의 학습 이론을 변형한 도형 관찰(Observation of Shapes), 개념 학습(Conceptual Learning), 도형 그려보기(Shape-making Learning)의 3 단계를 거치도록 하였다.

3.2.1 도형 관찰

도형 관찰 단계에서는 여러 가지 도형의 모습을 보여준 다음, 학습 주제의 도형을 따로 모아 다시 한 번 보여줌으로써 학습자가 스스로 도형의 모양을 정의하고 그룹핑하는 연산 활동을 할 수 있게 된다. 이때 학습 주제의 도형은 규격화된 도형 모습과 생활 속에서 볼 수 있는 도형 모양의 사물을 함께 보여줌으로써 학습자가 추상화된 도형 모양을 사물 모양으로 구체화시켜 기억할 수 있도록 구성한다.

3.2.2 개념 학습

개념 학습 단계를 순서도로 표현하면 (Fig. 4)와 같이 나타낼 수 있다. 학습 과정은 우선 도형 학습 내용을 슬

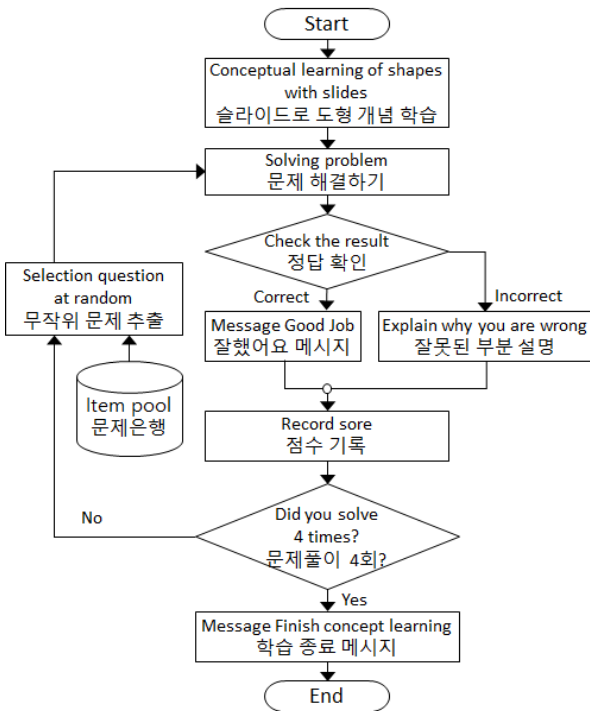


(Fig. 3) Structure of the shapes learning software

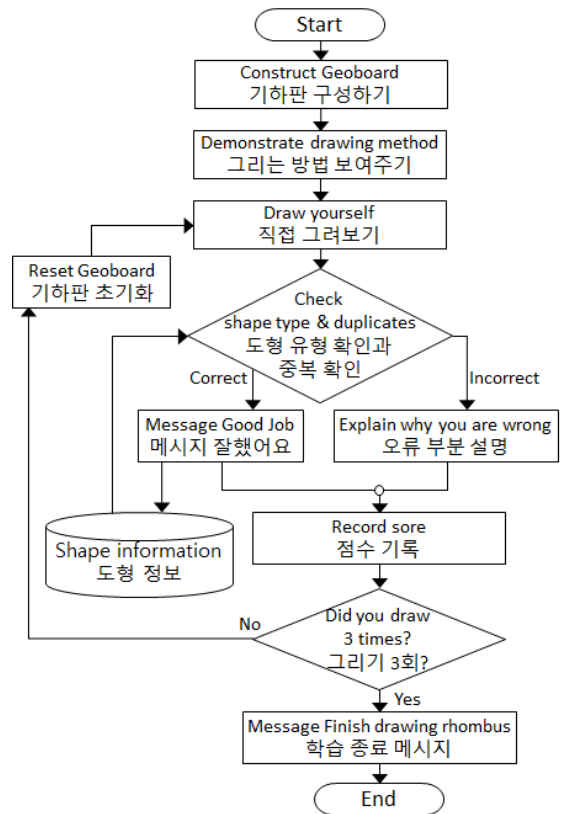
라이드 형식의 영상으로 학습할 수 있도록 하였으며 여러 도형 모습을 보면서 도형의 특성과 규칙을 찾아낼 수 있도록 구성하였다. 개념 학습 후에는 문제 은행에서 무작위로 뽑아낸 문제를 도형 종류 별로 4문제씩 풀고 확인하는 과정을 거치도록 하였다.

3.2.3 도형 그려보기

도형 그려보기 단계에서는 기하판에 직접 도형을 만들어 보면서 개념 학습 단계에서 익힌 도형의 추상적인 이해를 구체화된 체험 활동으로 구조화시키고 형상화할 수 있다. (Fig. 5)는 도형 그려보기 과정을 순서도로 나타낸 것이다.



(Fig. 4) Stage of the Conceptual Learning

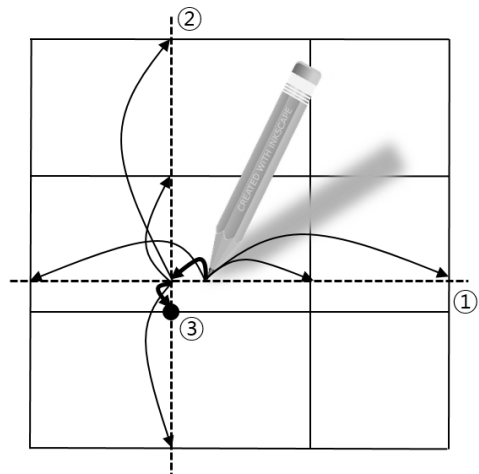


(Fig. 5) Stage of the Shape-making Learning

이 단계에서는 우선 기하판을 구성한 후 어떻게 도형 만들기를 하는지 미리 제작된 테모 영상을 통해 간단히 학습한 다음 도형 그려보기를 바로 시작할 수 있다. 도형 그려보기를 마치면 완성된 도형이 도형의 정의에 맞는지와 이전 도형과 중복됐는지를 확인하고 다시 그리는 과정을 3번 반복하도록 구성하였다. 이 과정을 통해 학습자는 기하판의 도형 학습 효과를 컴퓨터 프로그램을 통해 간접 경험을 할 수 있으며 그 과정을 여러 번 반복하면서 도형의 특성을 명확히 이해할 수 있게 된다.

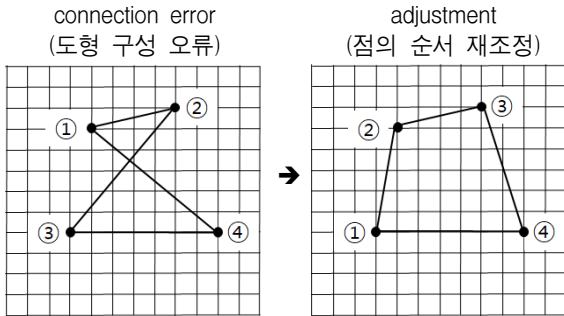
- 직접 그려보기

기하판 위에 도형을 그릴 때에는 학습자는 마우스로 기하판 위의 격자만 선택하면 도형이 완성될 수 있도록 설계하였다. 이때 학습자는 기하판의 격자 위치에 정확하게 점을 찍기가 어렵기 때문에 격자 근처에서 마우스를 클릭하면 클릭된 위치의 좌표 값을 계산하여 가장 가까운 격자점이 선택될 수 있도록 하였다.



(Fig. 6) How to locate points

(Fig. 6)에서와 같이 연결 모양의 마우스를 기하판 위에서 클릭하면 선택된 위치를 계산하여 먼저 X축에서 가장 가까운 격자점을 찾아내고(①), 다음으로 Y축에서 가장 가까운 점을 찾아내어(②) 찾아낸 (X, Y)위치에 격자점을 찍게 된다(③).



(Fig. 7) How to connect points

<Table 4> Checking methods of shapes

Type of Shapes 도형유형	Checking methods 확인 방법
Isosceles triangle 이등변 삼각형	$(\text{length}(\overline{12}) \ \&\& \ \text{length}(\overline{23})) \parallel$ $(\text{length}(\overline{12}) \ \&\& \ \text{length}(\overline{13})) \parallel$ $(\text{length}(\overline{13}) \ \&\& \ \text{length}(\overline{23}))$
Regular triangle 직각 삼각형	$((\tan(\overline{12}) \times \tan(\overline{23})) = -1) \ \&\&$ $((\tan(\overline{23}) \times \tan(\overline{31})) = -1) \ \&\&$ $((\tan(\overline{31}) \times \tan(\overline{12})) = -1)$
Trapezoidal 사다리꼴	$(\tan(\overline{12}) = \tan(\overline{43})) \parallel$ $(\tan(\overline{23}) = \tan(\overline{14}))$
Parallelogram 평행사변형	$(\tan(\overline{12}) = \tan(\overline{43})) \ \&\&$ $(\tan(\overline{23}) = \tan(\overline{14}))$
Rhombus 마름모	$\text{length}(\overline{12}) \ \&\& \ \text{length}(\overline{23}) \ \&\&$ $\text{length}(\overline{34}) \ \&\& \ \text{length}(\overline{41})$
Rectangle 직사각형	$((\tan(\overline{12}) \times \tan(\overline{23})) = -1) \ \&\&$ $((\tan(\overline{23}) \times \tan(\overline{34})) = -1) \ \&\&$ $((\tan(\overline{34}) \times \tan(\overline{41})) = -1) \ \&\&$ $((\tan(\overline{41}) \times \tan(\overline{12})) = -1)$
Square 정사각형	Rhombus && Rectangle

* 삼각형의 점 번호는 격자에 찍은 순서임
 * 사각형의 점 번호는 (Fig. 7)의 오른쪽 사각형 번호를 따름
 * length(segment) : length of segment
 * tan(segment) : slop of segment
 * || : OR , && : AND , == : it is equal

삼각형의 경우, 점을 찍은 순서대로 선을 연결하여 도형을 그려도 관계없지만 사각형의 경우에는 (Fig. 7)에서 보듯이 점을 선택한 순서대로 연결하면 원하는 모양의 도형을 만들 수 없다. 따라서 사각형은 학습자가 꼭지점을 모두 선택한 후 왼쪽부터 시계방향으로 다시 순서를 정해준 다음 선을 연결할 수 있도록 하였다.

- 도형 유형 확인

도형이 잘 그려졌는지 확인하는 방법은 도형의 정의에 따라 기울기와 선분 길이를 조합한 계산법으로 확인하도록 하였다. <Table 4>에서는 도형 유형별 확인방법을 제시한다.

- 중복 확인

<Table 5>는 현재 그린 도형이 이전에 그렸던 도형과 같은 도형인지 좌표를 확인하여 그에 따른 오류 메시지를 분류한 것이다.

<Table 5> Duplicate types and error messages

이전의 도형 (previous shape)	
Duplicate types	Error messages
	The same as previous shape (이전 도형과 모양이 같습니다.)
	Previous shape rotated +90o (이전 도형을 오른쪽으로 90도 회전한 모양과 같습니다.)
	Previous shape rotated +180o (이전 도형을 오른쪽으로 180도 회전한 모양과 같습니다.)
	Previous shape rotated +270o (이전 도형을 왼쪽으로 90도 회전한 모양과 같습니다.)
	Symmetrical shape of the previous shape (이전 도형과 좌우 대칭 도형입니다.)
	Top and bottom are symmetrical (이전 도형과 상하 대칭 도형입니다.)

- 도형 정보

(Fig. 5)에서의 도형 정보는 도형 유형 확인과 중복 확인 과정을 거쳐 제대로 그려진 도형일 때 저장하는 도형의 좌표 정보를 의미한다. 이 정보는 다음 도형을 그릴 때에 불러와서 중복 도형인지를 확인하기 위해 사용된다.

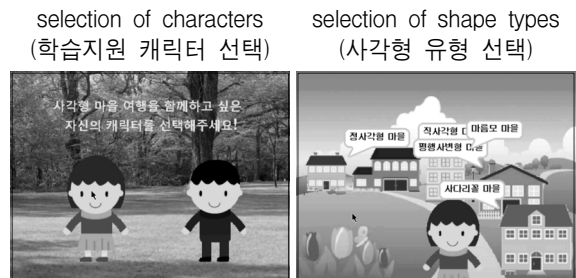
4. 도형 학습 소프트웨어 구현

도형 학습 소프트웨어 구현에는 블록기반 프로그래밍 도구 스크래치를 이용하였다. 스마트폰에서의 지원을 위해 앱 기반 도구 사용도 고려하였지만 본 연구에서 기본으로 지원하는 기하판은 그 위에 도형을 구성하여 학습하는 과정이 중심이기 때문에 화면크기가 스마트폰 보다는 비교적 큰 노트북이나 태블릿 컴퓨터 기반으로 학습 환경을 정하고 컴퓨터의 성능이나 인터넷 조건에 제약이 적은 스크래치를 개발도구로 사용하였다. <Table 6>에서는 도형 학습 소프트웨어 프로그램의 개요를 보여준다.

<Table 6> Overview of shape learning software

elements	summary
development tool	Scratch ver1.4
number of sprites	153
number of broadcastings	856
number of questions of question bank	10 by shape type (total 70)
development period	6 months

도형 학습 소프트웨어에 접속하면 학습을 도와줄 캐릭터를 선택하고 삼각형 학습과 사각형 학습을 구분하여 들어가게 된다. (Fig. 8)은 캐릭터 선택 후 사각형 학습으로 들어왔을 때의 화면구성을 보여준다. 사각형 학습은 사각형 유형별로 다섯 개 마을로 구성되고 원하는 학습 마을을 선택하면 해당 학습 과정으로 들어갈 수 있다.

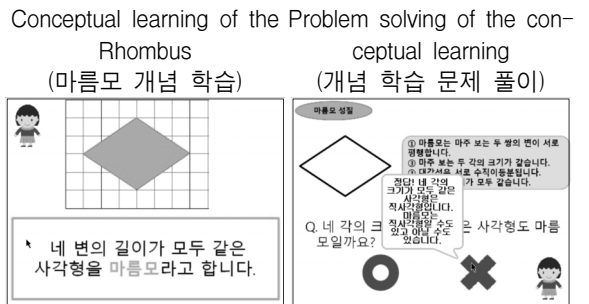


(Fig. 8) Start of the shape learning software

- 개념 학습 단계

사각형 유형별 도형 관찰을 마치고 개념 학습 단계로 들어오면 슬라이드 형식의 간단한 개념 학습과 문제 은행에서 무작위로 가져온 도형 관련 문항을 풀게 된다.

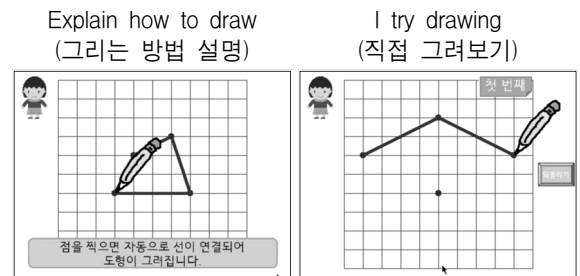
(Fig. 9)는 마름모 마을 개념 학습 단계에서의 화면 구성을 보여준다. 왼쪽은 마름모 개념 학습 영상의 일부이며 오른쪽은 개념 학습을 제대로 했는지 내용 확인을 위해 문제 은행에서 추출된 문항을 풀고 맞았을 때의 메시지를 보여준다.



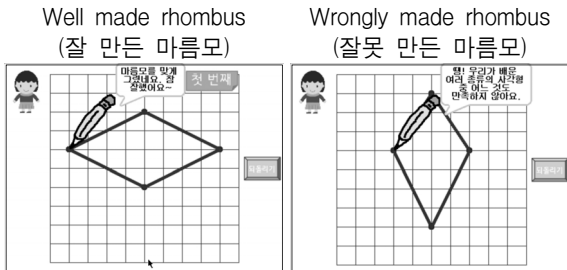
(Fig. 9) Screen of the conceptual learning

- 도형 그려보기 단계

(Fig. 10)의 왼쪽은 도형 그려보기 단계에서 그리는 방법을 설명하는 슬라이드의 일부이며 오른쪽은 학습자가 점을 찍고 프로그램이 점을 연결하여 마름모를 완성하는 화면이다. 직접 그려보기에서는 학습자가 선택했던 점을 중복 선택하면 오류 음을 내보내고 선택했던 점을 취소할 경우에는 오른쪽 회색(되돌리기) 버튼으로 지울 수 있도록 하였다.



(Fig. 10) Explain how to draw and direct drawing



(Fig. 11) Check shape type

(Fig. 11)은 도형 유형 확인 화면으로 왼쪽은 도형을 마름모에 맞게 잘 그렸다는 메시지를 주고 있으며 오른쪽은 도형이 정의에 맞지 않는다는 메시지를 내보내고 있다.

5. 도형 학습 소프트웨어 평가

개발된 도형 학습 소프트웨어를 객관적으로 평가하기 위해서는 초등 현장에서 4학년을 대상으로 한 학기 정도 학습 기간을 두고 학습 전후의 학업성취도를 측정하거나 정의적 영역을 설문하는 것이 가장 좋을 것이다. 그러나 본 연구가 디지털 기하판 개발에 목적을 두었고 연구 결과물을 교육 현장에서 직접 활용하기에는 어려운 문제들이 있어 우선 소수의 컴퓨터교육 전문가에게 질의하는 방식으로 단순화된 델파이 분석을 수행하였다.

델파이 분석에 참여한 평가자는 모두 8명이며 <Table 7>과 같이 구성하였다.

<Table 7> Evaluation committee of the shape learning software

group	number of people
teachers of primary school (MA in Computer Education)	4
school inspectors (MA in Computer Education)	2
professors of Dept. of computer education	2
total	8

평가자의 설문 문항은 크게 4가지로 성능에 대한 것, 학습 효과, 흥미도, 보완점이다.

<Table 8> Functions of digital gioboards

score of the functional implementation of digital geoboard compared to classical geoboard? (%)				
~60	60~80	80~90	90~95	95~100
0	0	0	0	8

<Table 8> 기하판 성능에 대한 질문에는 평가자 모두 95%이상이라고 하였으며 이는 개발된 결과물이 기존 기하판의 기능을 최대한 재현했다고 평가한 것이다.

<Table 9> Expectation of learning effect

Do you expect that applying to mathematics will help elementary students learn geometry?				
not at all	no	is average	yes	it really is
0	0	0	1	7

<Table 9> 학습에 대한 효과를 묻는 질문에는 매우 그렇다 7명, 그렇다 1명으로 모두 긍정적 평가를 하였다. 이것은 향후 초등 수학교육에 적용했을 때 좋은 효과를 얻을 수 있다는 의미로도 이해할 수 있다.

<Table 10> Expectation of learning interest

Can applying elementary mathematics improve the interest of elementary school students?				
not at all	no	is average	yes	it really is
0	0	0	1	7

<Table 10> 도형 학습 흥미도를 높일 수 있는가를 묻는 질문에는 <Table 9> 학습 효과 기대 정도와 같은 결과를 얻었다. 이 지표로 연구 결과물을 수업에 활용하면 초등학생들이 기존의 도형 학습보다 재미있게 학습할 것으로 기대할 수 있다.

<Table 11> Supplements

Be free to describe what you need to supplement	
subjects	number of person
Change to elementary school students favorite characters.	2
I'd like to include the stereographic contents in digital geoboard. I expect elementary grades 5-6 to use digital geoboard.	1
none	5

<Table 11>과 같이 연구결과물에 보완해야 될 내용을 자유롭게 기술해달라는 질문에는 5명이 없다고 답했으며 2명은 스프라이트에 대한 의견으로 캐릭터를 다양하게 추가했다면 좋겠다고 초등학생이 좋아하는 캐릭터로 바꿨으면 좋겠다고 답했다. 1명은 학습 내용에 입체도형에 대한 내용도 포함시켜 학습 대상을 5-6학년까지 확장자는 의견이 있었다. 위 내용은 연구 개발팀 내에서도 제기되었던 내용이며 향후 연구에 반영할 예정이다.

6. 결론

도형과 같은 추상적인 개념 학습에 기하판을 활용하면 효과적이라는 것은 이미 많이 알려진 사실이다. 그러나 학교나 집에서 자유롭게 도형 영역 학습을 지원하는 디지털 기하판에 관한 연구나 학습 도구는 매우 적었다. 따라서 본 연구에서는 기하판을 지원하는 초등학교 4학년 수학 도형 학습 소프트웨어를 설계하고 구현하였다.

도형 학습 소프트웨어의 특징은 우선 학습 모델을 반하일의 기하 학습 모델을 초등 도형 학습에 맞도록 변형하여 적용하였으며 둘째, 학습자가 점을 찍어 도형을 직접 도형을 구성하면서 기하판의 기능을 프로그램을 통해 간접 경험을 할 수 있다는 것이다.

전문가 평가 결과, 연구 결과물은 기존의 물리적인 기하판의 기능을 95퍼센트 이상 구현하였으며 초등 수학에 적용하면 학습에 긍정적인 효과를 줄 것으로 기대할 수 있다.

본 연구 결과물은 현재 시험 버전(trial version)으로 앞으로 보완할 내용이 많이 남아 있다.

첫째, 전문가의 지적과 같이 입체 도형 내용도 포함시켜 4학년만 국한되지 않고 5-6학년도 학습할 수 있도록 확장해야 할 것이다. 둘째, 프로그램에 사용된 캐릭터를 학생들이 좋아하는 것으로 변경해야 하며 저작권 문제에 자유롭기 위해서도 직접 만들어 바꿀 필요가 있다. 마지막 가장 중요한 것으로 초등 현장에 직접 적용해 봄으로써 도형 학습 소프트웨어의 효과를 객관적으로 평가해 보고 보완해 가는 일이 과제로 남아 있다.

참고문헌

- [1] Abdul Halim Abdullah, Effandi Zakaria(2013), The Effects of Van Hiele's Phases of Learning Geometry on Students' Degree of Acquisition of Van Hiele Levels, *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 102, 251-266.
- [2] Bae Jin Seong, Kapsu Kim(2010), A Development and Applications of Problem Solving Tool for Learning Geometry, *Journal of the Korean Association of Information Education*, 14(3), 449-459.
- [3] Caleb Gattegno, en.wikipedia.org/wiki/Caleb_Gattegno
- [4] Geoboards, en.wikipedia.org/wiki/Geoboard
- [5] Geometry Board, www.mathplayground.com
- [6] Hsiu-Lan Ma, De-Chih Lee, Szu-Hsing Lin, Der-Bang Wu(2015), A Study of Van Hiele of Geometric Thinking among 1st through 6th Graders, *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(5), 1181-1196.
- [7] KapSu Kim, TaeHo You(2008), Development of Rich Internet Application in the Three-Dimensional Shapes of Elementary Mathematics, *Journal of the Korean Association of Information Education*, 12(4), 395-404.
- [8] Kim Min Kyeong(2001), Investigation of Geoboards in Elementary Mathematics Education, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C: Education of Primary School Mathematics*, 5(2), 111-119.
- [9] Lee Ju Yong, Choi Jae Ho(2001), The Effects of 4D-Frame Teaching upon Mathematically Gifted Elementary Students' Mathematical Creativity and Spatial Sense, *Education, J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C: Education of Primary School Mathematics*, 16(1), 1-20.
- [10] Ministry of Education(1997), 7th Mathematics Curriculum, 1997-15.
- [11] Ministry of Education(2015), Mathematics Curriculum, 2015-74.

- [12] Park Mangoo, Choi Koh, Sang Soon, Jung Inchl, Kim Eun Young(2010), The Effects of Using the Geometric Manipulative for the Development of Spatial Sense, *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 13(2), 303-322.
- [13] Son Sook-Hyun(2002), The Effects of Club Activities with Mathematical Materials on Students' Mathematical Dispositions and Figure Learning Activity, Graduate School of Education, Daegu National University of Education.
- [14] SangYoon Lee, Kapsu Kim(2012), A Development and Application of the Learning Objects of Geometry based on Augmented Reality, *Journal of the Korean Association of Information Education*, 16(4), 451-462.
- [15] Ung-Kyu Park, Byung-Hong An(2006), Design and Implementation of WBI Courseware based on Learning Activities for Studying Angle Subject at Elementary School, *Journal of the Korea Contents Association*, 6(12), 192-200.
- [16] Vojkuvkova(2012), The van Hiele Model of Geometric Thinking, WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, Part I, 72-75.
- [17] Whang Woo Hyung, Lee Ji Yon(2000), A Qualitative Study on the Effect of Geoboard Activities, *J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 39(1), 21-36.
- [18] Yun-mi Koo, Byung-oh Goh(2010), A Study on Development of Diagram Teaching & Learning System for Low-Level Students, *Journal of the Korean Association of Information Education*, 14(3), 395-404.

저자소개

최 지 원



2015-현재 전주교육대학교 컴퓨터교육과(학부과정)
 관심분야: 알고리즘 교육, 프로그래밍 교육, 융합 교육
 E-Mail: 96carol@naver.com

이 용 배



1998 충남대학교 컴퓨터과학과(이학석사)
 2003 충남대학교 컴퓨터과학과(이학박사)
 2003-현재 전주교육대학교 컴퓨터교육과 교수
 관심분야: 알고리즘 교육, 프로그래밍 교육, 정보 검색
 E-Mail: yblee@jnue.kr