The Korean Journal of Applied Statistics (2018) DOI: https://doi.org/10.5351/KJAS.2018.31.2.205
31(2), 205–216

A threshold-asymmetric realized volatility for high frequency financial time series

J. Y. Kim[a] · S. Y. Hwang[a,1]

[a]Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received January 8, 2018; Revised February 15, 2018; Accepted February 25, 2018)

Abstract

This paper is concerned with volatility computations for high frequency time series. A threshold-asymmetric realized volatility (T-RV) is suggested to capture a leverage effect. The T-RV is compared with various conventional volatility computations including standard realized volatility, GARCH-type volatilities, historical volatility and exponentially weighted moving average volatility. High frequency KOSPI data are analyzed for illustration.

Keywords: high frequency, realized volatility (RV), threshold-RV

1. 서론

금리, 환율, 주식, 파생상품 등 금융상품의 가치나 수익률과 관련된 시계열 자료는 분산이 시간에 따라 변하는 조건부 이분산성을 갖는다. 금융시계열에서 조건부 분산, 즉 변동성(volatility)은 위험을 설명하고 측정하는 수단이므로 위험관리, 포트폴리오의 선택, 파생상품의 가치평가 등에서 중요하게 다루어진다. 변동성의 일반적인 특징은 첫 번째, 어느 기간에는 변동성이 높고 또 어느 기간에는 변동성이 낮은 변동성 집중 현상(volatility cluster)이 존재한다. 두 번째, 변동성은 조건부적으로는 비정상 시계열이지만 전체적(비조건부적)으로는 일정한 범위 내에서 변화하는 정상 시계열이다. 세 번째, 변동성은 시계열의 상승과 하락에 다르게 반응하는 비대칭 효과(leverage effect)를 보이는 경우가 많다 (Tsay, 2010; Kim과 Lee, 2005).

일반적으로 일간 수익률(daily return) 자료는 한 개의 시계열이기 때문에 일 단위의 변동성을 계산할 수 없다. 따라서 이를 추정하기 위해 다양한 모형들이 제안되었고, 대표적인 변동성 모형으로 Bollerslev (1986)의 일반화된 자기회귀 조건부 이분산(generalized autoregressive conditional heteroskedasticity; GARCH) 모형이 있다. Nelson (1991)은 변동성의 비대칭 효과를 반영한 exponential GARCH (EGARCH) 모형을 제안하였다. 모형을 이용하는 방법 외에 자료를 기반으로 변동성을 추정할 수 있는데, 대표적인 방법으로 역사적 변동성(historical volatility), 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 등이 있다. 최근에는 빅데이터 처리 능력의 향상으로 1분, 5분 단위 등의 고

This work is supported by a grant from the National Research Foundation of Korea (NRF-2018R1A2B2 004157).

[1]Corresponding author: Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Cheongpa-ro 47-gil 100, Yongsan-Gu, Seoul 04310, Korea. E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr

빈도 자료(high frequency data)를 이용하는 것이 가능해졌고, 고빈도 자료로부터 일중 수익률(intra-daily return)을 계산하여 일간 변동성(daily volatility)을 추정하는 실현변동성(realized volatility; RV) 방법이 제안되었다.

본 논문에서는 앞서 언급한 다양한 변동성 추정 방법들을 소개하고, 실현변동성에 비대칭 효과를 반영한 분계점 실현변동성(threshold-asymmetric RV; T-RV)을 새롭게 제안한다. 그리고 대표적 종합주가지수인 KOSPI 자료를 이용하여 기존의 변동성들과 분계점 실현변동성을 비교한 후 "최적" 분계점 실현변동성을 제시하고자 한다. 2장에서는 대칭 및 비대칭 GARCH 모형에 대해 간략히 언급하고, 3장에서는 실현변동성 등 자료 기반 변동성 계산 방법을 소개한다. 4장에서는 분계점 실현변동성을 제안하고, 5장에서는 사례분석을 통해 분계점 실현변동성의 유용성을 알아보고자 한다.

2. 대칭 및 비대칭 GARCH 모형

본 장에서는 다양한 대칭 및 비대칭 GARCH 모형들에 대해 간략히 소개하겠다. 기본적인 개념과 수식은 Tsay (2010)와 Choi 등 (2012)를 참고하였다.

2.1. GARCH

로그수익률 시계열 r_t의 예측오차를 ϵ_t라고 하면 $\epsilon_t = r_t - E(r_t|F_{t-1})$과 같고, 여기서 F_{t-1}은 $t-1$ 시점까지의 정보 집합이다. ϵ_t는 계열 상관이 없으나 절댓값 시계열 $|\epsilon_t|$와 제곱 시계열 ϵ_t^2이 계열 상관성을 보이면 조건부 이분산성이 존재한다고 할 수 있다. 대표적인 조건부 이분산 모형인 Bollerslev (1986)의 GARCH(p,q) 모형은 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j},$$

여기서 e_t는 평균이 0이고 분산이 1인 independent and identically distributed (iid) 과정이고, 조건부 분산, 즉 변동성 h_t가 양수이고 정상성 조건을 만족하기 위해 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$이어야 한다. 그리고 e_t에 대해 정규분포(normal distribution; NORM), 스튜던트-t분포(Student-t distribution; STD), 일반화된 오차분포(generalized error distribution; GED) 등을 가정할 수 있다. GARCH 모형은 인접 시차의 오차 ϵ_{t-i}^2와 변동성 h_{t-j} 값이 클수록 t 시점의 변동성 h_t도 커지는 경향이 있으므로, 변동성 집중 현상을 모델링하는데 적절하다. 또한, GARCH 모형의 분포는 꼬리 부분이 정규분포보다 두꺼워서 첨도가 3보다 큰 값을 갖고, 고차의 ARCH 모형을 적합하는 대신 낮은 차수의 GARCH 모형을 적합함으로써 모수 추정을 더 간단하게 할 수 있다. GARCH 모형의 간결한 형태인 GARCH$(1,1)$ 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}.$$

한편 integrated GARCH (IGARCH) 모형은 GARCH 모형에 $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$이라는 조건이 추가된 것으로, 과거의 변동성이 미래에도 남아서 계속 영향을 끼친다는 특징이 있다.

2.2. GARCH in the mean (GARCH-M)

GARCH(p,q)-M (GARCH in the mean) 모형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_t = \mu + c h_t + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t,$$
$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j},$$

여기서 μ와 c는 상수이고, c는 로그수익률 r_t와 변동성 h_t 사이의 관계를 나타내는 위험 프리미엄 모수이다. 만약 c가 양수이면 고위험 자산일수록 고수익을 창출한다는 것을 의미한다. r_t에 대한 식에서 변동성 h_t 대신 로그값 $\ln(h_t)$나 제곱근 $\sqrt{h_t}$를 사용하기도 한다.

2.3. Component GARCH (CGARCH)

변동성이 추세와 계절성을 가질 때 이를 모델링하기 위해 Engle과 Lee (1993)는 변동성을 영구적인 성분과 일시적인 성분으로 분해한 component GARCH (CGARCH) 모형을 제안하였다. CGARCH(p,q) 모형은 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t = \xi_t + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \left(\epsilon_{t-i}^2 - \xi_{t-i}\right) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \left(h_{t-j} - \xi_{t-j}\right),$$

여기서 $\rho < 1$이고 보통 0.99와 1 사이의 값을 갖는다. ξ_t는 시간에 따라 변화하는 추세를 반영하는 영구적인 성분이다.

2.4. Exponential GARCH (EGARCH)

앞서 소개한 GARCH 모형들은 변동성, 즉 위험이 양의 수익률을 가질 때와 음의 수익률을 가질 때가 동일하다고 봄으로써 변동성이 대칭이라고 가정한다. 하지만 실제 금융시장 참가자들은 수익률이 양수일 때와 음수일 때 위험을 다르게 인식하기 때문에(보통 음의 수익률일 때 더 위험하다고 인식) 변동성은 비대칭이라고 가정하는 것이 더 적절할 것이다. Nelson (1991)은 변동성의 비대칭 효과를 반영한 exponential GARCH (EGARCH) 모형을 제안하였다. EGARCH(p,q) 모형은 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad \ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{|\epsilon_{t-i}| + \gamma_i \epsilon_{t-i}}{h_{t-i}} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \ln(h_{t-j}),$$

여기서 ϵ_{t-i}가 양수이면 변동성의 로그값 $\ln(h_t)$에 $\alpha_i(1+\gamma_i)|e_{t-i}|$만큼, 음수이면 $\alpha_i(1-\gamma_i)|e_{t-i}|$만큼 영향을 끼치고, $e_{t-i} = \epsilon_{t-i}/h_{t-i}$이다. γ_i는 비대칭 효과를 반영하는 모수로서, 그 값이 음수이면 음의 수익률을 가질 때 위험이 더 크다는 것을 의미한다. EGARCH 모형은 변동성의 로그값을 모델링한 결과 변동성이 양수임을 보장하기 위해 필요했던 모수에 대한 조건들을 완화하였고, 비대칭 효과를 반영하는 점에서 GARCH 모형과 차이가 있다.

2.5. Threshold GARCH (TGARCH)

Rabemananjara와 Zakoian (1993)이 제안한 threshold GARCH (TGARCH) 모형 역시 변동성의 비대칭 효과를 반영한다. TGARCH(p,q) 모형은 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \left[\alpha_{i1} \left(\epsilon_{t-i}^{+}\right)^2 + \alpha_{i2} \left(\epsilon_{t-i}^{-}\right)^2\right] + \sum_{j=1}^{q} \beta_j h_{t-j},$$

여기서 $\alpha_{i1} \geq 0$, $\alpha_{i2} \geq 0$, $\beta_j \geq 0$이고, $\epsilon^+ = \max(\epsilon, 0)$, $\epsilon^- = \max(-\epsilon, 0)$이다. α_{i1}, α_{i2}는 비대칭 효과를 반영하는 모수로서, α_{i2}가 α_{i1}보다 크면 음의 수익률을 가질 때 위험이 더 크다는 것을 의미하고, $\alpha_{i1} = \alpha_{i2}$면 위험이 수익률의 부호에 영향을 받지 않는 GARCH 모형과 같아진다.

2.6. Asymmetric power GARCH (A-PGARCH)

Ding 등 (1993)은 다양한 GARCH 모형들을 일반화한 asymmetric power GARCH (A-PGARCH) 모형을 제안하였다. A-PGARCH(p,q) 모형은 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t^{\frac{d}{2}} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i(|\epsilon_{t-i}| + \gamma_i\epsilon_{t-i})^d + \sum_{j=1}^{q}\beta_j h_{t-j}^{\frac{d}{2}},$$

여기서 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $d > 0$, $-1 < \gamma_i < 1$이고, γ_i는 비대칭 효과를 반영하는 모수이다. A-PGARCH 모형은 모수 α_i, β_j, d, γ_i가 어떤 값을 가지는지에 따라 기존의 GARCH 모형들을 만들어 낼 수 있다. 예를 들어 $d = 2$, $\gamma_i = 0$이면 GARCH 모형이 된다.

2.7. Quadratic GARCH (QGARCH)

또 다른 비대칭 GARCH 모형으로, Sentana (1995)가 제안한 QGARCH(p,q) (quadratic GARCH) 모형은 다음과 같다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\alpha_{ii}\epsilon_{t-i}^2 + 2\sum_{i\neq j}\alpha_{ij}\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-j} + \sum_{i=1}^{p}\gamma_i\epsilon_{t-i} + \sum_{k=1}^{q}\beta_k h_{t-k},$$

여기서 γ_i는 비대칭 효과를 반영하는 모수이고, QGARCH 모형의 간단한 형태인 QGARCH$(1,1)$ 모형은 다음과 같다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{11}\epsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\epsilon_{t-1} + \beta_1 h_{t-1}.$$

3. 자료 기반 변동성 계산

3.1. 고빈도 자료에서의 변동성 계산: 실현변동성

일별 종가(close price)를 이용하여 일간 로그수익률(daily log return)을 계산하고 이로부터 변동성을 추정하는 방법과 달리, 1분, 5분 단위 등의 고빈도 자료를 이용하면 일중 로그수익률(intra-daily log return)을 계산하여 일간 변동성을 추정할 수 있다. r_t를 일간 로그수익률이라 하고, 하루에 일정한 n개 간격의 고빈도 거래 가격 자료가 있다고 가정하여 n개의 일중 로그수익률을 $\{r_{t,i}\}_{i=1}^{n}$이라고 하겠다. 일중 로그수익률 $r_{t,i}$는 다음과 같이 i 시점의 거래 가격 $P_{t,i}$에서 이전 시점의 거래 가격 $P_{t,i-1}$을 로그 차분한 것이다.

$$r_{t,i} = \ln(P_{t,i}) - \ln(P_{t,i-1}).$$

일간 로그수익률은 다음과 같이 일중 로그수익률의 합으로 구할 수 있다.

$$r_t = \sum_{i=1}^{n} r_{t,i}.$$

일간 로그수익률의 조건부 분산은 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}(r_t|F_{t-1}) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(r_{t,i}|F_{t-1}) + 2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}[(r_{t,i}, r_{t,j})|F_{t-1}],$$

여기서 F_{t-1}은 $t-1$일까지의 정보 집합이다. 만일 $r_{t,i}$가 백색잡음과정이고 $\bar{r}_t = (\sum_{i=1}^n r_{t,i})/n = 0$이라고 가정하면 조건부 분산을 다음과 같이 간단한 식으로 근사시킬 수 있다.

$$\mathrm{Var}(r_t|F_{t-1}) = n\mathrm{Var}(r_{t,1}) = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^n r_{t,i}^2 \approx \sum_{i=1}^n r_{t,i}^2.$$

이를 일반화하여 일중 로그수익률의 제곱합으로 일간 변동성을 추정한 것을 실현변동성이라고 한다. 여기서 일중 로그수익률 $\{r_{t,i}\}_{i=1}^n$은 평균이 0인 iid 과정이라고 가정한다.

$$\text{실현변동성 :} \quad \mathrm{RV}_t = \sum_{i=1}^n r_{t,i}^2.$$

실현변동성은 일중 로그수익률을 이용하여 일간 변동성을 간단하게 추정할 수 있다는 장점이 있으나, 일중 로그수익률의 시간 간격이 너무 좁으면 시장 미시구조의 영향을 받을 수 있기 때문에 적절한 간격을 선택해야 한다. 그리고 실현변동성은 $t-1$일의 종가(close price)와 t일의 시가(open price) 사이의 야간수익률을 고려하지 않는데, 이 기간의 로그수익률이 상당히 커서 변동성을 과소 추정할 위험이 있다 (Tsay, 2010; Lee와 Hwang, 2017).

3.2. 역사적 변동성

역사적 변동성은 과거 일정 기간의 로그수익률을 이용하여 변동성을 추정하는 방법이다. 그 식은 다음과 같다.

$$h_t = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k (r_{t-i} - \bar{r})^2,$$

여기서 $\bar{r}$는 과거 k 기간의 로그수익률의 표본평균이다. 역사적 변동성은 고려하는 기간에 대해 동일한 가중치를 부여하는 가장 간단한 변동성 추정 방법이다. 과거 기간은 일주일 단위($k=5$), 한 달 단위($k=22$), 세 달 단위($k=66$)를 많이 사용한다.

3.3. 지수가중이동평균

변동성은 큰 값은 큰 값끼리, 작은 값은 작은 값끼리 몰려있는 변동성 집중 현상이 존재한다. 따라서 변동성을 추정할 때 최근의 자료에 더 높은 비중을 두는 것이 적절할 수 있다. 지수가중이동평균은 과거의 자료일수록 가중치가 지수적으로 감소하는 변동성 추정 방법으로, 그 식은 다음과 같다.

$$h_t = \lambda h_{t-1} + (1-\lambda) r_{t-1}^2,$$

여기서 λ는 평활상수(smoothing parameter)로 0과 1 사이의 값을 가지며 과거 로그수익률의 제곱 효과를 지수적으로 감소시키는 역할을 한다. λ 값이 1에 가까울수록 변동성이 천천히 변화하고, JP Morgan 사의 RiskMetrics 시스템은 $\lambda = 0.94$를 사용한다.

4. 분계점 실현변동성의 제안

실현변동성은 일중 로그수익률의 제곱합으로서 수익률의 부호는 고려하지 않고 절대적인 크기만을 고려한다. 이는 곧 양의 일중 로그수익률의 제곱과 음의 일중 로그수익률의 제곱에 1씩의 동일한 가중치를

부여한다는 의미이고, 다음의 식에서 확인할 수 있다.

$$\mathrm{RV}_t = \sum_{i=1}^{n} r_{t,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(r_{t,i}^{+}\right)^2 + \left(r_{t,i}^{-}\right)^2 \right],$$

여기서 $r_{t,i}^{+} = \max(r_{t,i}, 0)$, $r_{t,i}^{-} = \max(-r_{t,i}, 0)$이다. 하지만 현실적으로 양의 수익률을 가질 때와 음의 수익률을 가질 때 위험을 인식하는 정도가 다른 비대칭 효과가 발생하기 때문에 양의 수익률과 음의 수익률에 가중치를 다르게 부여하는 것이 더 바람직할 수도 있다. 따라서 양의 일중 로그수익률의 제곱에 대한 가중치를 α_1, 음의 일중 로그수익률의 제곱에 대한 가중치를 α_2라고 하여, 두 가중치의 합이 2가 되는 분계점 실현변동성을 제안한다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{T-RV}: \quad \mathrm{RV}_t^{(T)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_1 \left(r_{t,i}^{+}\right)^2 + \alpha_2 \left(r_{t,i}^{-}\right)^2 \right], \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

여기서 격자탐색(grid search) 방식으로 "최적"의 α_1 및 α_2를 정하기 위해 가중치를 0.1과 1.9 사이에서 0.1 단위로 변화시키며 T-RV를 계산하기로 한다. 즉,

$$(T, \alpha_1, \alpha_2) = (1, 0.1, 1.9), (2, 0.2, 1.8), \ldots, (19, 1.9, 0.1), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

로부터 T-RV는 19가지 경우가 존재하고, 특별히 10번째 T-RV, 즉, $(T, \alpha_1, \alpha_2) = (10, 1, 1)$일 때는 실현변동성과 동일하다. 본 논문에서는 가중치를 0.1 단위로 변화시켰지만 좀 더 정교한 추정이 목적이라면 보다 작은 단위로 변화시키면 될 것이다.

5. 사례분석: KOSPI

본 장에서는 역사적 변동성, 지수가중이동평균, 모형 기반 GARCH 변동성, 즉 기존의 변동성들과 19가지의 분계점 실현변동성들을 비교하여 분계점 실현변동성이 실현변동성보다 더 바람직하다고 할 수 있는지 알아보고자 한다. 2010년 1월 4일부터 2015년 6월 30일까지 오전 9시에서 오후 15시 사이에 5분 단위로 관측된 KOSPI 고빈도 자료를 이용한다. 여기서 오후 14시 50분부터 59분까지는 동시호가(유가증권 매매거래 시 동시에 접수된 호가 또는 시간의 선후가 분명하지 않은 호가)로 간주되기 때문에 제거하여 일중 자료는 70개가 된다. 그리고 관측 오류로 인하여 일중 자료가 70개가 아닌 날들을 제거하여 분석에는 총 1349일의 자료가 사용되었다. 또한 시장의 미시구조에서 받는 영향을 줄이기 위해 5분 간격 자료를 선택하였다 (Jin 등, 2017).

자료 분석에서는 5분 단위 일중 로그수익률을 이용하여 19가지의 분계점 실현변동성들을 계산한다. 그리고 일간 로그수익률을 이용하여 역사적 변동성, 지수가중이동평균, 모형 기반 GARCH 변동성을 계산한다. 역사적 변동성은 $k = 5$로 하여 일주일 전까지의 로그수익률을 고려하였고, 지수가중이동평균은 평활상수 $\lambda = 0.94$를 이용하였다. 모형 기반 GARCH 변동성은 R의 rugarch 패키지와 SAS의 AUTOREG 프로시저에서 지원하는 모형들을 이용하여 계산하였다. 일간 로그수익률 r_t는 평균이 0이고 자기상관성이 없다고 판단되므로 $r_t = \epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t$라 하고, 각 모형마다 e_t의 iid 분포를 정규분포, 편중 정규분포(skewed-NORM; SNORM), 표준화된(즉, 분산이 1인) 스튜던트-t분포, 편중 표준화된 스튜던트-t분포(skewed-STD; SSTD), 일반화된 오차분포, 편중 일반화된 오차분포(skewed-GED; SGED)로 가정하였다. 또한 GARCH-M 모형에서는 수익률에 영향을 미치는 변동성을 선형, 로그, 루트 세 가지 모두 고려하여 적합하였다. GARCH(1, 1), IGARCH(1, 1), GARCH(1, 1)-M, CGARCH(1, 1), EGARCH(1, 1), TGARCH(1, 1), A-PGARCH(1, 1), QGARCH(1, 1) 모형을 적합한 결과는(모형 기반 변동성 추정치로서) Table 5.1에 정리하였다.

Table 5.1. Various GARCH-type models fitted to high frequency KOSPI

Model	Estimated equations
GARCH(1, 1)-NORM	$h_t = 2 \times 10^{-6} + 0.0788\epsilon_{t-1}^2 + 0.9027h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-SNORM	$h_t = 10^{-6} + 0.0751\epsilon_{t-1}^2 + 0.9078h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-STD	$h_t = 10^{-6} + 0.0703\epsilon_{t-1}^2 + 0.9153h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-SSTD	$h_t = 10^{-6} + 0.0678\epsilon_{t-1}^2 + 0.9189h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-GED	$h_t = 10^{-6} + 0.0724\epsilon_{t-1}^2 + 0.9119h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-SGED	$h_t = 10^{-6} + 0.0697\epsilon_{t-1}^2 + 0.9155h_{t-1}$
IGARCH(1, 1)-NORM	$h_t = 10^{-6} + 0.0857\epsilon_{t-1}^2 + 0.9143h_{t-1}$
IGARCH(1, 1)-SNORM	$h_t = 10^{-6} + 0.0816\epsilon_{t-1}^2 + 0.9184h_{t-1}$
IGARCH(1, 1)-STD	$h_t = 10^{-6} + 0.0763\epsilon_{t-1}^2 + 0.9237h_{t-1}$
IGARCH(1, 1)-SSTD	$h_t = 10^{-6} + 0.0726\epsilon_{t-1}^2 + 0.9274h_{t-1}$
IGARCH(1, 1)-GED	$h_t = 10^{-6} + 0.0784\epsilon_{t-1}^2 + 0.9216h_{t-1}$
IGARCH(1, 1)-SGED	$h_t = 10^{-6} + 0.0750\epsilon_{t-1}^2 + 0.9250h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-M-NORM	$r_t = -1.05 \times 10^{-4} + 6.8755h_t + \epsilon_t,$
$(g(h_t) = h_t)$	$h_t = 1.61 \times 10^{-6} + 0.0787\epsilon_{t-1}^2 + 0.9032h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-M-STD	$r_t = -9.2 \times 10^{-5} + 7.5262h_t + \epsilon_t,$
$(g(h_t) = h_t)$	$h_t = 1.3267 \times 10^{-6} + 0.0704\epsilon_{t-1}^2 + 0.9151h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-M-NORM	$r_t = 8.806 \times 10^{-3} + 0.0009\ln(h_t) + \epsilon_t,$
$(g(h_t) = \ln(h_t))$	$h_t = 1.6132 \times 10^{-6} + 0.0787\epsilon_{t-1}^2 + 0.9031h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-M-STD	$r_t = 9.317 \times 10^{-3} + 0.0009\ln(h_t) + \epsilon_t,$
$(g(h_t) = \ln(h_t))$	$h_t = 1.3217 \times 10^{-6} + 0.0701\epsilon_{t-1}^2 + 0.9154h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-M-NORM	$r_t = -1.033 \times 10^{-3} + 0.1754\sqrt{h_t} + \epsilon_t,$
$(g(h_t) = \sqrt{h_t})$	$h_t = 1.6107 \times 10^{-6} + 0.0788\epsilon_{t-1}^2 + 0.9030h_{t-1}$
GARCH(1, 1)-M-STD	$r_t = -1.072 \times 10^{-3} + 0.1873\sqrt{h_t} + \epsilon_t,$
$(g(h_t) = \sqrt{h_t})$	$h_t = 1.3237 \times 10^{-6} + 0.0704\epsilon_{t-1}^2 + 0.9151h_{t-1}$
CGARCH(1, 1)-NORM	$h_t = \xi_t + 0.0632(\epsilon_{t-1}^2 - \xi_{t-1}) + 0.9037(h_{t-1} - \xi_{t-1}),$ $\xi_t = 0.9946\xi_{t-1} + 0.0171(\epsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})$
CGARCH(1, 1)-SNORM	$h_t = \xi_t + 0.0610(\epsilon_{t-1}^2 - \xi_{t-1}) + 0.9099(h_{t-1} - \xi_{t-1}),$ $\xi_t = 0.9942\xi_{t-1} + 0.0162(\epsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})$
CGARCH(1, 1)-STD	$h_t = \xi_t + 0.0556(\epsilon_{t-1}^2 - \xi_{t-1}) + 0.9145(h_{t-1} - \xi_{t-1}),$ $\xi_t = 0.9950\xi_{t-1} + 0.0195(\epsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})$
CGARCH(1, 1)-SSTD	$h_t = \xi_t + 0.0501(\epsilon_{t-1}^2 - \xi_{t-1}) + 0.9186(h_{t-1} - \xi_{t-1}),$ $\xi_t = 0.9940\xi_{t-1} + 0.0236(\epsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})$
CGARCH(1, 1)-GED	$h_t = \xi_t + 0.0561(\epsilon_{t-1}^2 - \xi_{t-1}) + 0.9105(h_{t-1} - \xi_{t-1}),$ $\xi_t = 0.9945\xi_{t-1} + 0.0198(\epsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})$
CGARCH(1, 1)-SGED	$h_t = \xi_t + 0.0512(\epsilon_{t-1}^2 - \xi_{t-1}) + 0.9170(h_{t-1} - \xi_{t-1}),$ $\xi_t = 0.9940\xi_{t-1} + 0.0232(\epsilon_{t-1}^2 - h_{t-1})$
EGARCH(1, 1)-NORM	$\ln(h_t) = -0.1887 - 0.1002\frac{\lvert\epsilon_{t-1}\rvert + 0.1104\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + 0.9798\ln(h_{t-1})$
EGARCH(1, 1)-SNORM	$\ln(h_t) = -0.1694 - 0.0955\frac{\lvert\epsilon_{t-1}\rvert + 0.1023\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + 0.9818\ln(h_{t-1})$
EGARCH(1, 1)-STD	$\ln(h_t) = -0.1707 - 0.1067\frac{\lvert\epsilon_{t-1}\rvert + 0.1058\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + 0.9820\ln(h_{t-1})$
EGARCH(1, 1)-SSTD	$\ln(h_t) = -0.1558 - 0.1034\frac{\lvert\epsilon_{t-1}\rvert + 0.0997\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + 0.9834\ln(h_{t-1})$
EGARCH(1, 1)-GED	$\ln(h_t) = -0.1782 - 0.1039\frac{\lvert\epsilon_{t-1}\rvert + 0.1076\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + 0.9813\ln(h_{t-1})$
EGARCH(1, 1)-SGED	$\ln(h_t) = -0.1650 - 0.1006\frac{\lvert\epsilon_{t-1}\rvert + 0.1012\epsilon_{t-1}}{h_{t-1}} + 0.9825\ln(h_{t-1})$

(continued)

(continued)

Model	Estimated equations
TGARCH(1, 1)-NORM	$h_t = 2 \times 10^{-6} + 0.1315(\epsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9106h_{t-1}$
TGARCH(1, 1)-SNORM	$h_t = 2 \times 10^{-6} + 0.1227(\epsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9178h_{t-1}$
TGARCH(1, 1)-STD	$h_t = 2 \times 10^{-6} + 10^{-6}(\epsilon_{t-1}^+)^2 + 0.1341(\epsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9107h_{t-1}$
TGARCH(1, 1)-SSTD	$h_t = 2 \times 10^{-6} + 0.1261(\epsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9183h_{t-1}$
TGARCH(1, 1)-GED	$h_t = 2 \times 10^{-6} + 0.1314(\epsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9118h_{t-1}$
TGARCH(1, 1)-SGED	$h_t = 2 \times 10^{-6} + 0.1256(\epsilon_{t-1}^-)^2 + 0.9176h_{t-1}$
A-PGARCH(1, 1)-NORM	$h_t^{1.3354} = 0.0330(\lvert\epsilon_{t-1}\rvert + 0.5718\epsilon_{t-1})^{2.6708} + 0.9021h_{t-1}^{1.3354}$
A-PGARCH(1, 1)-STD	$h_t^{1.3799} = 0.0253(\lvert\epsilon_{t-1}\rvert - 0.7106\epsilon_{t-1})^{2.7599} + 0.9030h_{t-1}^{1.3799}$
A-PGARCH(1, 1)-SSTD	$h_t^{1.4067} = 0.0257(\lvert\epsilon_{t-1}\rvert - 0.6687\epsilon_{t-1})^{2.8135} + 0.9022h_{t-1}^{1.4067}$
A-PGARCH(1, 1)-GED	$h_t^{1.3126} = 0.0327(\lvert\epsilon_{t-1}\rvert - 0.5793\epsilon_{t-1})^{2.6251} + 0.9056h_{t-1}^{1.3126}$
A-PGARCH(1, 1)-SGED	$h_t^{1.3376} = 0.0308(\lvert\epsilon_{t-1}\rvert - 0.6109\epsilon_{t-1})^{2.6752} + 0.9021h_{t-1}^{1.3376}$
QGARCH(1, 1)-NORM	$h_t = 0.0736\epsilon_{t-1}^2 + 0.0065\epsilon_{t-1} + 0.8898h_{t-1}$
QGARCH(1, 1)-STD	$h_t = 0.0760\epsilon_{t-1}^2 + 0.0064\epsilon_{t-1} + 0.8866h_{t-1}$

GARCH = generalized autoregressive conditional heteroskedasticity; IGARCH = integrated GARCH; GARCH-M = GARCH in the mean; CGARCH = Component GARCH; EGARCH = exponential GARCH; TGARCH = Threshold GARCH; A-PGARCH = Asymmetric power GARCH; QGARCH = Quadratic GARCH; NORM = normal distribution; SNORM = skewed-NORM; STD = Student-t distribution; SSTD = skewed-STD; GED = generalizederror distribution; SGED = skewed-GED.

총 19가지의 분계점 실현변동성 $\mathrm{RV}^{(T)}$ ($T = 1, 2, \ldots, 19$)들과 역사적 변동성, 지수가중이동평균, 모형 기반 GARCH 변동성 사이의 상관계수를 구하여 어느 분계점 실현변동성이 이들과의 상관계수가 가장 높게 나타나는지 알아보았다. 여기서 자료가 수익률이므로 수익률의 측정 단위와 동일하게 만들기 위해 변동성의 양의 제곱근, 즉 조건부 표준편차를 이용하여 상관계수를 구했고, 그 결과는 Table 5.2와 같다. Table 5.2를 보면 역사적 변동성의 경우 $\mathrm{RV}^{(14)}$, 지수가중이동평균의 경우에는 $\mathrm{RV}^{(15)}$와의 상관계수가 가장 높다. 모형 기반 GARCH 변동성의 경우에도 $\mathrm{RV}^{(14)}$, $\mathrm{RV}^{(15)}$와의 상관계수가 가장 높게 나타난다. 따라서 양의 일중 로그수익률의 제곱과 음의 일중 로그수익률의 제곱에 동일한 가중치를 부여하는 실현변동성 $\mathrm{RV}^{(10)}$보다는 양의 부분(α_1)에 1.4–1.5, 음의 부분(α_2)에 0.6–0.5 정도의 서로 다른 가중치를 부여하는 것이 바람직하다고 할 수 있다. 특정 T-RV에 대해서, 예로서 Table 5.2의 $\mathrm{RV}^{(15)}$열을 보면 모형 기반 변동성과의 상관계수는 비대칭 모형인 EGARCH, TGARCH, A-PGARCH, QGARCH의 경우가 대칭 모형인 GARCH, IGARCH, GARCH-M 및 CGARCH보다 더 높은 경향이 있음을 알 수 있다. 참고로, 수익률 제곱의 단위를 가진 조건부 분산을 이용하여 상관계수를 구했을 때는 $\mathrm{RV}^{(7)}$, $\mathrm{RV}^{(8)}$이 기존의 변동성들과 상관계수가 가장 높게 나타났다. 한편 시가총액 상위 주식인 삼성전자의 주가 수익률에 대해서는 변동성의 제곱근끼리 비교했을 때는 $\mathrm{RV}^{(12)}$–$\mathrm{RV}^{(14)}$, 변동성끼리 비교했을 때는 $\mathrm{RV}^{(14)}$–$\mathrm{RV}^{(17)}$이 상관계수가 가장 높았다(결과 생략). 결론적으로 기존의 변동성 계산 방법들에 비추어 볼 때 가중치 α_1과 α_2를 서로 다르게 부여하는 분계점 실현변동성이 표준적인 실현변동성($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$)보다 우수함을 볼 수 있었다.

6. 결론

본 논문에서는 금융시계열의 변동성을 추정하는 다양한 방법들을 소개하고, 분계점 실현변동성이라는 새로운 개념을 제안하여 기존의 변동성들과 비교하였다. 분계점 실현변동성은 비대칭 효과를 갖는 변동성의 특징에 착안하여 이를 실현변동성에 적용, 발전시킨 것이다. 양의 수익률과 음의 수익률에 다른 가중치를 부여해 변동성을 계산하고, 그 유용성을 기존 변동성들과의 상관계수를 통해 알아보고자 하였다.

Table 5.2. Correlations between T-RV and various volatility computations (high frequency KOSPI)

	$\mathrm{RV}^{(1)}$	$\mathrm{RV}^{(2)}$	$\mathrm{RV}^{(3)}$	$\mathrm{RV}^{(4)}$	$\mathrm{RV}^{(5)}$	$\mathrm{RV}^{(6)}$	$\mathrm{RV}^{(7)}$	$\mathrm{RV}^{(8)}$	$\mathrm{RV}^{(9)}$	$\mathrm{RV}^{(10)}$	$\mathrm{RV}^{(11)}$	$\mathrm{RV}^{(12)}$	$\mathrm{RV}^{(13)}$	$\mathrm{RV}^{(14)}$	$\mathrm{RV}^{(15)}$	$\mathrm{RV}^{(16)}$	$\mathrm{RV}^{(17)}$	$\mathrm{RV}^{(18)}$	$\mathrm{RV}^{(19)}$
Historical volatility	0.6549	0.6611	0.6669	0.6723	0.6772	0.6817	0.6858	0.6893	0.6924	0.6950	0.6970	0.6984	0.6993	**0.6995**	0.6991	0.6980	0.6961	0.6935	0.6901
EWMA	0.6003	0.6064	0.6122	0.6176	0.6227	0.6274	0.6317	0.6356	0.6391	0.6421	0.6447	0.6469	0.6485	0.6495	**0.6500**	0.6499	0.6492	0.6478	0.6457
GARCH(1, 1)-NORM	0.6356	0.6418	0.6477	0.6532	0.6583	0.6630	0.6673	0.6712	0.6746	0.6776	0.6801	0.6821	0.6835	0.6844	**0.6846**	0.6843	0.6833	0.6815	0.6791
GARCH(1, 1)-SNORM	0.6321	0.6383	0.6442	0.6497	0.6548	0.6595	0.6638	0.6677	0.6711	0.6741	0.6766	0.6786	0.6800	0.6809	**0.6812**	0.6809	0.6799	0.6782	0.6758
GARCH(1, 1)-STD	0.6278	0.6340	0.6398	0.6453	0.6504	0.6551	0.6594	0.6633	0.6667	0.6697	0.6722	0.6742	0.6757	0.6766	**0.6769**	0.6766	0.6756	0.6740	0.6716
GARCH(1, 1)-SSTD	0.6243	0.6305	0.6363	0.6418	0.6468	0.6515	0.6558	0.6597	0.6632	0.6661	0.6686	0.6706	0.6721	0.6730	**0.6734**	0.6731	0.6721	0.6705	0.6681
GARCH(1, 1)-GED	0.6300	0.6362	0.6420	0.6475	0.6526	0.6573	0.6616	0.6655	0.6689	0.6719	0.6744	0.6764	0.6778	0.6787	**0.6790**	0.6787	0.6777	0.6761	0.6737
GARCH(1, 1)-SGED	0.6267	0.6329	0.6387	0.6442	0.6493	0.6540	0.6583	0.6622	0.6656	0.6686	0.6711	0.6731	0.6745	0.6754	**0.6757**	0.6754	0.6745	0.6728	0.6705
IGARCH(1, 1)-NORM	0.6273	0.6336	0.6394	0.6449	0.6500	0.6548	0.6591	0.6630	0.6665	0.6695	0.6721	0.6741	0.6756	0.6766	**0.6769**	0.6766	0.6757	0.6741	0.6718
IGARCH(1, 1)-SNORM	0.6240	0.6302	0.6361	0.6415	0.6467	0.6514	0.6557	0.6596	0.6631	0.6661	0.6687	0.6707	0.6722	0.6732	**0.6735**	0.6733	0.6724	0.6708	0.6685
IGARCH(1, 1)-STD	0.6207	0.6269	0.6327	0.6382	0.6433	0.6480	0.6523	0.6562	0.6597	0.6627	0.6653	0.6673	0.6688	0.6698	**0.6702**	0.6699	0.6690	0.6675	0.6652
IGARCH(1, 1)-SSTD	0.6166	0.6227	0.6285	0.6340	0.6391	0.6438	0.6481	0.6520	0.6555	0.6585	0.6610	0.6631	0.6646	0.6656	**0.6660**	0.6658	0.6649	0.6634	0.6611
IGARCH(1, 1)-GED	0.6221	0.6283	0.6341	0.6396	0.6447	0.6495	0.6538	0.6577	0.6612	0.6642	0.6667	0.6688	0.6703	0.6712	**0.6716**	0.6714	0.6705	0.6689	0.6666
IGARCH(1, 1)-SGED	0.6184	0.6246	0.6304	0.6359	0.6410	0.6457	0.6500	0.6539	0.6574	0.6604	0.6630	0.6650	0.6665	0.6675	**0.6679**	0.6676	0.6668	0.6652	0.6629
GARCH(1, 1)-M-NORM ($g(h_t) = h_t$)	0.6403	0.6466	0.6525	0.6580	0.6631	0.6679	0.6722	0.6761	0.6796	0.6825	0.6850	0.6870	0.6884	0.6893	**0.6895**	0.6891	0.6881	0.6863	0.6838
GARCH(1, 1)-M-STD ($g(h_t) = h_t$)	0.6330	0.6392	0.6451	0.6506	0.6557	0.6604	0.6647	0.6686	0.6721	0.6751	0.6776	0.6795	0.6810	0.6819	**0.6821**	0.6818	0.6808	0.6791	0.6767
GARCH(1, 1)-M-NORM ($g(h_t) = \ln(h_t)$)	0.6407	0.6470	0.6529	0.6584	0.6636	0.6683	0.6727	0.6766	0.6800	0.6830	0.6855	0.6875	0.6889	0.6898	**0.6900**	0.6897	0.6886	0.6869	0.6844
GARCH(1, 1)-M-STD ($g(h_t) = \ln(h_t)$)	0.6331	0.6393	0.6452	0.6507	0.6558	0.6605	0.6649	0.6688	0.6722	0.6752	0.6777	0.6797	0.6812	0.6821	**0.6824**	0.6820	0.6811	0.6794	0.6769
GARCH(1, 1)-M-NORM ($g(h_t) = \sqrt{h_t}$)	0.6411	0.6473	0.6532	0.6588	0.6639	0.6686	0.6730	0.6769	0.6803	0.6833	0.6858	0.6878	0.6892	0.6901	**0.6903**	0.6899	0.6889	0.6871	0.6847
GARCH(1, 1)-M-STD ($g(h_t) = \sqrt{h_t}$)	0.6336	0.6398	0.6457	0.6512	0.6563	0.6611	0.6654	0.6693	0.6727	0.6757	0.6782	0.6802	0.6817	0.6826	**0.6828**	0.6825	0.6815	0.6798	0.6774
CGARCH(1, 1)-NORM	0.6376	0.6438	0.6496	0.6550	0.6601	0.6648	0.6690	0.6729	0.6762	0.6792	0.6816	0.6835	0.6849	0.6857	**0.6859**	0.6854	0.6843	0.6826	0.6800
CGARCH(1, 1)-SNORM	0.6353	0.6414	0.6472	0.6526	0.6577	0.6623	0.6666	0.6704	0.6738	0.6767	0.6791	0.6810	0.6824	0.6832	**0.6834**	0.6829	0.6819	0.6801	0.6776
CGARCH(1, 1)-STD	0.6330	0.6391	0.6449	0.6503	0.6554	0.6600	0.6643	0.6681	0.6715	0.6744	0.6768	0.6787	0.6801	0.6809	**0.6811**	0.6807	0.6796	0.6779	0.6754
CGARCH(1, 1)-SSTD	0.6311	0.6373	0.6431	0.6485	0.6535	0.6582	0.6624	0.6662	0.6696	0.6725	0.6749	0.6769	0.6782	0.6791	**0.6793**	0.6789	0.6778	0.6761	0.6736
CGARCH(1, 1)-GED	0.6340	0.6401	0.6459	0.6514	0.6564	0.6611	0.6653	0.6691	0.6725	0.6754	0.6779	0.6798	0.6812	0.6820	**0.6822**	0.6818	0.6807	0.6789	0.6764
CGARCH(1, 1)-SGED	0.6315	0.6376	0.6434	0.6488	0.6538	0.6585	0.6627	0.6666	0.6699	0.6728	0.6753	0.6772	0.6786	0.6794	**0.6796**	0.6792	0.6781	0.6764	0.6739

(continued)

(continued)

	$RV^{(1)}$	$RV^{(2)}$	$RV^{(3)}$	$RV^{(4)}$	$RV^{(5)}$	$RV^{(6)}$	$RV^{(7)}$	$RV^{(8)}$	$RV^{(9)}$	$RV^{(10)}$	$RV^{(11)}$	$RV^{(12)}$	$RV^{(13)}$	$RV^{(14)}$	$RV^{(15)}$	$RV^{(16)}$	$RV^{(17)}$	$RV^{(18)}$	$RV^{(19)}$
EGARCH(1, 1)-NORM	0.6618	0.6683	0.6744	0.6801	0.6854	0.6904	0.6948	0.6989	0.7024	0.7055	0.7081	0.7101	0.7115	0.7124	**0.7126**	0.7122	0.7110	0.7092	0.7065
EGARCH(1, 1)-SNORM	0.6571	0.6636	0.6697	0.6754	0.6807	0.6857	0.6901	0.6942	0.6978	0.7009	0.7035	0.7055	0.7070	0.7079	**0.7081**	0.7078	0.7067	0.7049	0.7023
EGARCH(1, 1)-STD	0.6587	0.6652	0.6713	0.6770	0.6823	0.6872	0.6917	0.6957	0.6993	0.7024	0.7049	0.7069	0.7084	0.7093	**0.7095**	0.7091	0.7080	0.7061	0.7035
EGARCH(1, 1)-SSTD	0.6548	0.6613	0.6674	0.6731	0.6784	0.6833	0.6878	0.6919	0.6955	0.6985	0.7011	0.7032	0.7047	0.7056	**0.7058**	0.7055	0.7044	0.7026	0.7000
EGARCH(1, 1)-GED	0.6599	0.6664	0.6725	0.6782	0.6836	0.6885	0.6930	0.6970	0.7005	0.7036	0.7062	0.7082	0.7096	0.7105	**0.7107**	0.7103	0.7092	0.7073	0.7047
EGARCH(1, 1)-SGED	0.6562	0.6627	0.6688	0.6745	0.6798	0.6848	0.6892	0.6933	0.6969	0.7000	0.7025	0.7046	0.7061	0.7070	**0.7072**	0.7068	0.7058	0.7040	0.7014
TGARCH(1, 1)-NORM	0.6658	0.6721	0.6780	0.6835	0.6887	0.6933	0.6976	0.7014	0.7047	0.7076	0.7099	0.7116	0.7128	**0.7134**	**0.7134**	0.7127	0.7113	0.7092	0.7063
TGARCH(1, 1)-SNORM	0.6619	0.6682	0.6741	0.6796	0.6847	0.6894	0.6937	0.6975	0.7009	0.7037	0.7061	0.7079	0.7091	**0.7097**	**0.7097**	0.7091	0.7077	0.7057	0.7028
TGARCH(1, 1)-STD	0.6656	0.6719	0.6778	0.6833	0.6885	0.6932	0.6974	0.7012	0.7046	0.7074	0.7097	0.7115	0.7127	**0.7133**	0.7132	0.7126	0.7112	0.7091	0.7062
TGARCH(1, 1)-SSTD	0.6613	0.6676	0.6736	0.6791	0.6842	0.6889	0.6932	0.6970	0.7004	0.7032	0.7056	0.7074	0.7086	**0.7093**	**0.7093**	0.7087	0.7073	0.7053	0.7024
TGARCH(1, 1)-GED	0.6651	0.6714	0.6773	0.6828	0.6880	0.6927	0.6969	0.7007	0.7041	0.7069	0.7092	0.7110	0.7122	**0.7128**	**0.7128**	0.7121	0.7107	0.7086	0.7057
TGARCH(1, 1)-SGED	0.6618	0.6681	0.6740	0.6795	0.6847	0.6894	0.6936	0.6975	0.7008	0.7037	0.7060	0.7078	0.7091	**0.7097**	**0.7097**	0.7091	0.7077	0.7057	0.7028
A-PGARCH(1, 1)-NORM	0.6601	0.6663	0.6721	0.6775	0.6826	0.6871	0.6913	0.6950	0.6983	0.7010	0.7032	0.7049	0.7060	**0.7066**	0.7065	0.7057	0.7043	0.7021	0.6992
A-PGARCH(1, 1)-STD	0.6583	0.6645	0.6703	0.6756	0.6806	0.6852	0.6893	0.6930	0.6963	0.6990	0.7012	0.7029	0.7040	**0.7045**	0.7044	0.7037	0.7022	0.7001	0.6972
A-PGARCH(1, 1)-SSTD	0.6579	0.6640	0.6698	0.6752	0.6802	0.6847	0.6889	0.6925	0.6958	0.6985	0.7007	0.7024	0.7035	**0.7040**	0.7039	0.7031	0.7017	0.6995	0.6966
A-PGARCH(1, 1)-GED	0.6593	0.6655	0.6713	0.6767	0.6817	0.6864	0.6905	0.6943	0.6975	0.7003	0.7025	0.7042	0.7054	**0.7059**	**0.7059**	0.7051	0.7037	0.7016	0.6987
A-PGARCH(1, 1)-SGED	0.6590	0.6652	0.6710	0.6764	0.6814	0.6860	0.6902	0.6939	0.6971	0.6999	0.7021	0.7038	0.7050	**0.7055**	0.7054	0.7047	0.7032	0.7011	0.6982
QGARCH(1, 1)-NORM	0.6616	0.6679	0.6738	0.6793	0.6844	0.6891	0.6933	0.6971	0.7004	0.7033	0.7056	0.7073	0.7085	**0.7091**	**0.7091**	0.7084	0.7070	0.7049	0.7020
QGARCH(1, 1)-STD	0.6628	0.6690	0.6749	0.6804	0.6855	0.6902	0.6944	0.6982	0.7015	0.7043	0.7066	0.7084	0.7096	**0.7102**	0.7101	0.7094	0.7080	0.7059	0.7030

T-RV = threshold-asymmetric realized volatility; EWMA = exponentially weighted moving average; GARCH = generalized autoregressive conditional heteroskedasticity; IGARCH = integrated GARCH; GARCH-M = GARCH in the mean; CGARCH = component GARCH; EGARCH = exponential GARCH; TGARCH = threshold GARCH; A-PGARCH = asymmetric power GARCH; QGARCH = quadratic GARCH; NORM = normal distribution; SNORM = skewed-NORM; STD = Student-t distribution; SSTD = skewed-STD; GED = generalized error distribution; SGED = skewed-GED.

KOSPI 자료의 경우 음의 수익률보다 양의 수익률에 가중치를 더 높게 부여한 분계점 실현변동성이 기존의 변동성 계산 방법들과의 상관계수가 가장 높았다. 대칭 GARCH 모형에서의 변동성이 옳다고 가정하는 경우, 이에 맞추기 위해 상대적으로 영향력이 적은 양의 수익률에 가중치를 더 높게 부여한 분계점 실현변동성과 가장 높은 상관관계가 나왔을 것으로 판단된다. 그리고 19가지의 분계점 실현변동성들의 상관계수 차이가 그리 크지는 않지만 기존의 모든 변동성 계산 방법들에 대해 일관되게 양의 수익률에 더 높은 가중치를 부여한 것이 좋다고 나온 결과에 주목하였다. 따라서 고빈도 자료를 이용해서 변동성을 계산할 때 양의 수익률과 음의 수익률에 가중치를 다르게 부여하는 분계점 실현변동성을 기존의 표준적인 실현변동성과 함께 고려하는 것이 유용할 것이라고 생각된다.

고빈도 금융시계열의 일간 (참)변동성을 비모수적으로 추정하기 위해 Barndorff-Nielson 등 (2008)은 실현 커널(realized kernel; RK) 변동성을 제안하였다. Barndorff-Nielson 등 (2009)은 RK-변동성이 실현변동성 RV에 비해 참변동성에 대한 로버스트한 일치추정량임을 증명하였으며 고빈도 Alcoa 미국 주식자료 적용사례를 예시하고 있다. RK-변동성에 대한 자세한 내용은 Barndorff-Nielson 등 (2008, 2009)을 참고하기 바라며 비대칭 확장 모형인 분계점 RK-변동성, 즉, T-RK 변동성에 대한 연구는 좋은 미래 연구토픽으로서 이에 대한 후속 연구가 이루어질 예정이다.

References

Barndorff-Nielson, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., and Shephard, N. (2008). Designing realized kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise, *Econometrica*, **76**, 1481–1536.

Barndorff-Nielson, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., and Shephard, N. (2009). Realized kernels in practice: trades and quotes, *Econometrics Journal*, **12**, C1–C32.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.

Choi, M. S., Park, J. A., and Hwang, S. Y. (2012). Asymmetric GARCH processes featuring both threshold effect and bilinear structure, *Statistics & Probability Letters*, **82**, 419–426.

Ding, Z., Granger, C. W., and Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model, *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.

Engle, R. F. and Lee, G. G. (1993). A permanent and transitory component model of stock return volatility, Discussion paper, (pp. 92–44), University of California at San Diego, Economics Working Paper Series.

Jin, M. K., Yoon, J. E., and Hwang, S. Y. (2017). Choice of frequency via principal component for high-frequency volatility models, *Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 747–757.

Kim, H. and Lee, M. (2005). *Econometrics and Financial Time Series*, Kyungmunsa, Seoul.

Lee, G. J. and Hwang, S. Y. (2017). Multivariate volatility for high-frequency financial series, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **30**, 169–180.

Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, *Econometrica*, **59**, 347–370.

Rabemananjara, R. and Zakoian, J. M. (1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility, *Journal of Applied Econometrics*, **8**, 31–49.

Sentana, E. (1995). Quadratic ARCH models, *Review of Economic Studies*, **62**, 639–661.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3rd ed), Wiley, New York.

Yoon, J. E. and Hwang, S. Y. (2015). Volatility computations for financial time series: high frequency and hybrid method, *Korean Journal of Applied Statistics*, **28**, 1163–1170.

비대칭형 분계점 실현변동성의 제안 및 응용

김지연[a] · 황선영[a,1]

[a]숙명여자대학교 통계학과

(2018년 1월 8일 접수, 2018년 2월 15일 수정, 2018년 2월 25일 채택)

요 약

본 논문에서는 모형 기반 GARCH 변동성, 실현변동성(realized volatility; RV), 역사적 변동성(historical volatility), 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 등 다양한 변동성 추정 방법을 소개하고, 실현변동성에 비대칭 효과(leverage effect)를 반영한 분계점 실현변동성(threshold-asymmetric realized volatility; T-RV)을 제안하였다. 또한, 예시를 위해 KOSPI 고빈도 수익률 자료의 변동성을 분석하였다.

주요용어: 고빈도 자료, 실현변동성, 분계점 실현변동성

한국연구재단의 지원을 받았습니다 (NRF-2018R1A2B2004157).

[1](04310) 서울특별시 용산구 청파로47길 100, 숙명여자대학교 통계학과. E-mail: shwang@sookmyung.ac.kr