신뢰성응용연구
제18권, 제1호. pp.80-86, 2018

성능특성치의 열화가 대수정규분포를 따를 때의 가속열화시험 모형 개발*

임헌상[1] · 성시일[2†]

[1]삼성전자 메모리사업부, [2]경기대학교 창의공과대학 산업경영공학과

Planning of Accelerated Degradation Tests: In the Case Where the Performance Degradation Characteristic Follows the Lognormal Distribution*

Heonsang Lim[1] · Si-Il Sung[2†]

[1]Memory Business, Samsung Electronics
[2]Department of Industrial and Management Engineering, Kyonggi University

Purpose: This article provides a mathematical model for the accelerated degradation test when the performance degradation characteristic follows the lognormal distribution.
Method: For developing test plans, the total number of test units and the test time are determined based on the minimization of the asymptotic variance of the q-th quantile of the lifetime distribution at the use condition.
Results: The mathematical model for the accelerated degradation test is provided.
Conclusion: Accelerated degradation test method is widely used to evaluate the product lifetime within a resonable amount of cost and time. In this article. a mathematical model for the accelerated degradation test method is newly developed for this purposes.

Keywords: Accelerated Degradation Test, Minimization of the Asymptotic Variance Criteria, Accelerated Model

1. 서 론

현재 과학 기술이 과거에 비해 매우 높은 수준으로 발달하는 동시에 시장에서의 경쟁이 매우 치열해짐에 따라 새로운 제품의 개발 기간은 과거에 비해 단축되고 있는 상황이다. 이와 동시에 4차 산업혁명과 3D 프린터 등의 등장으로 인해 다양한 제품이 더욱 빠른 시간 안에 개발되어 시장에 출시되고 있다. 점점 더 개발 기간이 단축되는 상황과 달리 제품의 수명 즉 신뢰성을 평가하는 시험의 시간은 단축되지 않고 있으며 대부분의 경우 상당한 시험 시간을 필요로 하고 있다 또한 신뢰성을 평가하는 시간을 단축시키기 어려운

* 이 성과는 2017년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2017R1C1B5015303).
† 교신저자 sisung@kgu.ac.kr
2018년 3월 12일 접수; 2018년 3월 19일 수정본 접수; 2018년 3월 20일 게재 확정.

요소 중 하나로 현재 기술수준이 과거에 비해 높기 때문에 새롭게 출시되는 제품들의 품질 및 신뢰성 수준이 과거에 비해 비약적으로 향상되었으며, 이로 인해 정상적인 사용 조건으로 제품의 수명을 추정할 경우 막대한 시간이 소요된다. 이에 따라 정상 사용 조건보다 훨씬 가혹한 스트레스 조건에서 시험하여 빠른 시간 내에 제품의 신뢰성 정보를 획득할 수 있는 가속시험(accelerated test)이 자주 사용되고 있다. 이러한 가속시험은 관측하는 정보에 따라 가속수명시험(accelerated life test)과 가속열화시험(accelerated degradation test)으로 나눌 수 있다. 가속수명시험은 제품의 고장과 관측중단 자료를 활용하여 제품의 수명 및 신뢰성 정보를 추정하는 방법이며, 가속열화시험은 성능 특성치의 열화량을 관측하여 제품의 수명 및 신뢰성 정보를 획득하는 방법이다. 여기서 가속수명시험의 경우에는 가혹한 스트레스가 인가됨에도 불구하고 제품의 고장이 충분히 관측되지 않는 경우가 있기 때문에 수명 추정에 문제가 발생할 수 있는 단점이 있지만 성능 특성치의 열화 정보를 사용하는 가속열화시험의 경우에는 고장이 발생하지 않는 경우에도 가속수명시험에 비해 비교적 정밀한 수명 정보를 획득할 수 있다.

성시일[1]의 연구를 보면 가속열화시험의 종류를 스트레스를 인가하는 방법과 열화 경로 모형 그리고 최적화 기준을 통해 2006년부터 2015년까지 진행된 가속 시험 계획에 관한 문헌 정리를 제공하고 있다. 또한 성시일 등[2]의 연구는 지난 50년간 품질경영학회지에 발표된 신뢰성 분야의 연구에 대한 리뷰를 제공하고 있다. 또한 Sung and Yum[3]의 연구나 Kim and Sung[4], Lim 등의 연구[5]를 살펴보았을 때 성능 특성치의 열화량이 Wiener process와 같은 추계적 과정 모형을 따르는 경우에 대한 연구는 많이 진행되었으나 성능 특성치의 열화량이 대수정규분포를 따르는 경우에 대해 많은 연구가 미진함을 알 수 있다. 대수정규분포는 신뢰성 분야의 대표적인 교재인 Nelson[6]의 문헌에서도 매우 중요하게 다루어지는 수명분포이다. 따라서 이러한 대수정규분포에 대한 연구가 미진하기에, 이 연구를 통해 시료의 성능 특성치의 열화가 대수정규분포를 따를 때 일정형 가속열화시험 계획의 수리적 모형을 개발하고자 한다.

이 연구의 구성은 다음과 같다. 제2장에서 수리적 모형에 대한 가정과 표준화 그리고 시험절차에 대해 언급하고 최우추정량과 사용 조건에서의 고장시간 분위수 그리고 점근분산은 제3장에서 다룬다. 제4장에서는 최적 시험 계획을 위해 필요한 사전추정과 최적화 그리고 최적 시험계획을 다루며 제5장에서는 결론 및 향후 연구방향에 대해 언급한다.

2. 가정 및 시험 상황

2.1 모형

이 연구에서는 다음과 같은 모형을 가정하였다.

1) 스트레스 수준 S', 시점 t'에서 관측한 시료의 성능특성치(U)는 통계적으로 독립이며 대수정규분포를 따른다. 즉, 대수성능특성치, $Y' = \ln U$는 평균이 $\mu(S', t')$이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다.
2) σ는 S', t'에 의존하지 않는다. 그러나, $\mu(S', t')$는 S', t'에 의존하며 다음과 같이 단순 일정률 관계식을 따른다.
$$\mu(S', t') = \alpha' - \beta(S')t'$$
여기서, α'는 미지의 상수이다. 그리고 열화율 $\beta(S')$는 S'의 연속함수이며 시간에 의존하지 않는다.
3) n은 총 시료수, t_M'는 최대시험시간이다.
4) 최대 스트레스 수준과 사용 조건에서의 스트레스 수준 S_M', S_0'는 각각 주어져 있다.
5) 시료의 대수성능특성치 Y'가 특정한 값 g 이하일 때 고장으로 판단한다.
6) 열화율 $\beta(S')$의 스트레스 의존성은 다음과 같은 모형을 따른다[6].
(1) 아레니우스 모형: $\beta(S') = \beta\exp(-\gamma/S')$,
(2) 자승 모형: $\beta(S') = \beta(1/S')^{\gamma}$,
(3) 지수 모형: $\beta(S') = \beta\exp(\gamma S')$.
여기서, $\beta(>0)$와 $\gamma(>0)$는 알려지지 않은 상수이다.

모형을 단순화하기 위해 $\alpha = \alpha' - g$, $Y = Y' - g$로 정의하면, 스트레스 수준 S'에서 시료의 수명 X'는 평균이 $\mu_{x'}(S')(=\alpha/\beta(S'))$이고 표준편차가 $\sigma_{x'}(S')(=\sigma/\beta(S'))$인 정규분포를 따르며, Y는 평균이 $\mu(S', t')(=\alpha - \beta(S')t')$이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다.

2.2 표준화

수리적 모형의 일관성을 유지하면서 다음과 같이 시험시간과 스트레스 수준을 표준화할 수 있다.

$$t = t'/t_B',$$
$$S = (1/S_0' - 1/S')/(1/S_0' - 1/S_M'):\ \text{아레니우스모형}$$
$$= (\ln S' - \ln S_0')/(\ln S_M' - \ln S_0^1):\ \text{자승 모형},$$
$$= (S' - S_0')/(S_M' - S_0'):\ \text{지수 모형}.$$

여기서, t_B'는 사전 추정시 필요한 기준시간이다.

표준화 후 최대시험시간은 $\tau(=t_M'/t_B')$가 되며, 정상사용 조건에서의 스트레스 수준과 최대 스트레스 수준은 각각 0과 1이 된다. 그리고 표준화된 $\mu(S', t')$를 $\mu(S, t)$라 하면, $\mu(S', t')$는 다음과 같이 표준화할 수 있다.

$$\begin{aligned}\mu(S', t') &= \alpha - \beta(S')t' \\ &= \alpha - \beta(S')t_M' t \\ &= \alpha - t\exp(\delta_1 + \delta_2 S) \\ &= \mu(S, t).\end{aligned}$$

여기서,

$\delta_1 = \ln(t_M'\beta) - \gamma/S_0'$, $\delta_2 = \gamma(1/S_0' - 1/S_M')$: 아레니우스 모형,

$\delta_1 = \ln(t_M'\beta) + \gamma\ln S_0'$, $\delta_2 = \gamma(\ln S_M' - \ln S_0')$: 자승 모형,

$\delta_1 = \ln(t_M'\beta) + \gamma S_0'$, $\delta_2 = \gamma(S_M' - S_0')$: 지수 모형이다.

또한, 시료의 수명 X'는 $X(=X'/t_M')$로 표준화할 수 있는데, 표준화된 수명 X의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mu_x(S') &= \mu_{x'}(S')/t_M' = \alpha/\{t_M'\beta(S')\} \\ &= \alpha/\exp(\delta_1 + \delta_2 S) = \mu_x(S), \\ \sigma_x(S') &= \sigma_{x'}(S')/t_M' = \sigma/\{t_M'(S')\} \\ &= \sigma/\exp(\delta_1 + \delta_2 S) = \sigma_x(S).\end{aligned}$$

2.3 시험절차

이 연구에서는 다음과 같은 시험 절차를 가정한다.

(1) 세 시험점 $(S_0, t_0), (S_1, t_1), (S_2, t_2)$에서 시험이 수행된다. 여기서, S_0는 정상 사용 스트레스 수준, $t_0 = 0, 0 < t_1 < \tau, 0 < t_2 < \tau$이고 $S_0 \le S_1 < S_2 \le S_M$이다.

(2) 각 시험점 $(S_i, t_i), i = 0, 1, 2$에 n_i개의 시료를 할당한다. 여기서 $n_i = \pi_i n, \sum_{i=0}^{2}\pi_i = 1, \pi_i \ge 0$이다.

(3) 스트레스 수준 S_i에 n_i개의 시료를 $t_i, i = 0, 1, 2$ 동안 시험한 후, 열화특성치를 한 번 측정한다.

3. 수리 모형

3.1 최우추정량

$S_i, t_i, i = 0, 1, \cdots, r$에서 관측한 j번째 시료의 열화특성치 $Y_{ij}, j = 1, 2, \cdots, n_i$에 대한 대수우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L_{ij} = -\ln\sigma - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2}B_{ij}^2$$

여기서, $A_i = \exp(\delta_1 + \delta_2 S_i)$, $B_{ij} = Y_{ij} - \alpha + \exp(\delta_1 + \delta_2 S_i)t_i = Y_{ij} - \alpha + A_i t_i$이다.

이 n개의 관측치에 대한 열화특성치의 표본 대수우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L = \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\ln L_{ij}$$

위 식을 $\alpha, \delta_1, \delta_2, \sigma$에 대해 일차 편미분하면, 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}B_{ij}}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1} = \frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_i B_{ij} t_i}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2} = \frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_i B_{ij} S_i t_i}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}=\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{B_{ij}^2}{\sigma^2}-1\right)$$

$\alpha, \delta_1, \delta_2, \sigma$의 최우추정치 $\hat{\alpha}, \hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\sigma}$는 위 식을 최대화하는 값으로서 위 식을 각각 0으로 놓고 구할 수 있다.

3.1 사용 조건에서 고장시간 분위수

사용 조건에서 $s_0=0$이므로, 표준화된 수명의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

$$\mu_x(S_0)=\mu_x(0)=\alpha/\exp(\delta_1),$$
$$\sigma_x(S_0)=\sigma_x(0)=\sigma/\exp(\delta_1).$$

그리고 $x_q(0)$를 사용 조건에서 표준화된 고장시간의 q 분위수라 하면, $x_q(0)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Phi\left(\frac{x_q(0)-\mu_x(0)}{\sigma_x(0)}\right)=q \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x_q(0)-\dfrac{\alpha}{\exp(\delta_1)}}{\dfrac{\sigma}{\exp(\delta_1)}}\right)=q$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_q(0)\cdot\exp(\delta_1)-\alpha}{\sigma}=Z_q$$

$$\Leftrightarrow x_q(0)=(\alpha+\sigma Z_q)\exp(-\delta_1)$$

여기서, Z_q는 표준정규분포의 q 분위수이다.

따라서 $x_q(0)$의 최우추정치 $\widehat{x_q(0)}$는 다음과 같다.

$$\widehat{x_q(0)}=\left(\hat{\alpha}+\hat{\sigma}Z_q\right)\exp\left(-\hat{\delta}_1\right)$$

3.2 사용 조건에서 고장시간 분위수의 점근분산

$\ln L_{ij}$를 $\alpha, \delta_1, \delta_2, \sigma$에 대해 이차 편미분하면 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha^2}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}B_{ij}}{\partial \alpha}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(-1)=-\frac{n}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha\partial \delta_1}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}B_{ij}}{\partial \delta_1}=\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_it_i}{\sigma^2}=\frac{n\sum_{i=0}^{r}\pi_iA_it_i}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha\partial \delta_2}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}B_{ij}}{\partial \delta_2}=\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iS_it_i}{\sigma^2}$$

$$=\frac{n\sum_{i=0}^{r}\pi_iA_iS_it_i}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha\partial \sigma}=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}B_{ij}}{\sigma^2}\right)=-\frac{2\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}B_{ij}}{\sigma^3}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1^2}=-\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}t_i}{\partial \delta_1}$$

$$=-\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_j}(A_iB_{ij}t_1+A_i^2t_i^2)}{\sigma^2}$$

$$=-\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}t_i}{\sigma^2}-\frac{n\sum_{i=0}^{r}\pi_iA_i^2t_i^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1\partial \delta_2}=-\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}t_i}{\partial \delta_2}$$

$$=-\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_i^2S_it_i^2}{\sigma^2}=-\frac{n\sum_{i=0}^{r}\pi_iA_i^2S_it_i^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1\partial \sigma}=-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}t_i}{\sigma^2}\right)=\frac{2\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}t_i}{\sigma^3}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2^2}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}S_it_i}{\partial \delta_2}=-\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_i^2S_i^2t_i^2}{\sigma^2}$$

$$=-\frac{n\sum_{i=0}^{r}\pi_iA_i^2S_i^2t_i^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2^2}=-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}S_it_i}{\sigma^2}\right)=\frac{2\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}A_iB_{ij}S_it_i}{\sigma^3}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{B_{ij}^2}{\sigma^3}-\frac{1}{\sigma}\right)\right)=-\frac{3\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}B_{ij}^2}{\sigma^4}+\frac{n}{\sigma^2}$$

그리고 위 식에서 Y_{ij}에 대해 기대값을 취하면 다

음과 같다.

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha^2}\right) = -\frac{n}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha \partial \delta_1}\right) = \frac{n\sum_{i=0}^{r} \pi_i A_i t_i}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha \partial \delta_2}\right) = \frac{n\sum_{i=0}^{r} \pi_i A_i S_i t_i}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha \partial \sigma}\right) = 0$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1^2}\right) = -\frac{n\sum_{i=0}^{r} \pi_i A_i^2 t_i^2}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1 \partial \delta_2}\right) = -\frac{n\sum_{i=0}^{r} \pi_i A_i^2 S_i t_i^2}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_1 \partial \sigma}\right) = 0$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2^2}\right) = -\frac{n\sum_{i=0}^{r} \pi_i A_i^2 S_t^2 t_i^2}{\sigma^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \delta_2^2}\right) = 0$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}\right) = -\frac{3n\sigma^2}{\sigma^4} + \frac{n}{\sigma^2} = -\frac{2n}{\sigma^2}.$$

위 식으로부터 S_i, $i = 0, 1, \cdots, r$에서 관측한 n개의 열화특성치에 대한 피셔정보행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$F = \frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & -\sum_{i=0}^{r}\pi_i A_i t_i & -\sum_{i=0}^{r}\pi_i A_i S_i t_i & 0 \\ & \sum_{i=0}^{r}\pi_i A_i^2 t_i^2 & \sum_{i=0}^{r}\pi_i A_i^2 S_i t_i^2 & 0 \\ \text{(symmetric)} & & \sum_{i=0}^{r}\pi_i A_i^2 S_i^2 t_i^2 & 0 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{n}{\sigma_Y^2}\begin{pmatrix} 1 & -f_4 & -f_1 & 0 \\ & f_5 & f_2 & 0 \\ & & f_3 & 0 \\ \text{(symmetric)} & & & 2 \end{pmatrix}$$

그러면 $\widehat{x_{q(0)}}$의 점근분산 $A\,\mathrm{var}(\widehat{x_q(0)})$는 다음과 같다.

$$A\,\mathrm{var}\left(\widehat{x_q(0)}\right) = H^T F^{-1} H$$

여기서,

$$H = \begin{pmatrix} \partial y_x(0)/\partial \alpha \\ \partial \mu_x(0)/\partial \delta_1 \\ \partial \mu_x(0)/\partial \delta_2 \\ \partial \mu_x(0)/\partial \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\exp(\delta_1) \\ -(\alpha + \sigma Z_q)/\exp(\delta_1) \\ 0 \\ Z_q/\exp(\delta_1) \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{\sigma^2}{n}\begin{pmatrix} \frac{f_2^2 - f_3 f_5}{C} & \frac{f_1 f_2 - f_3 f_4}{C} & \frac{f_2 f_4 - f_1 f_5}{C} & 0 \\ & \frac{f_1^2 - f_3}{C} & \frac{f_2 - f_1 f_4}{C} & 0 \\ & \text{(symmetric)} & \frac{f_4^2 - f_5}{C} & 0 \\ & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$C = f_2^2 - 2f_1 f_2 f_4 + f_3 f_4^2 + f_1^2 f_5 - f_3 f_5,$$

그리고 " T"는 전치를 나타낸다.
따라서 $A\,\mathrm{var}(\widehat{x_q(0)})$를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$A\,\mathrm{var}\left(\hat{x}_q(0)\right) = \frac{\sigma^2 \cdot \exp(-2\delta_1)}{n \cdot C}\left\{f_2^2 - f_3 f_5 - 2(\alpha + Z_q\sigma)(f_1 f_2 - f_3 f_4) + (\alpha + Z_q\sigma)^2 (f_1^2 - f_3)\right\} + \frac{Z_q^2 \sigma^2 \exp(-2\delta_1)}{2n}$$

4. 최적화

4.1 사전추정

$A\,\mathrm{var}(\widehat{x_q(0)})$는 알려지지 않은 상수 α, δ_1, δ_2에 의존한다. 따라서 이러한 상수들의 사전추정이 필요하다 P_{00}, P_{01}, P_{11}를 각각 $(S, t) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$에서 사전추정된 고장확률이라 하고, $P_{00} < P_{01}$, P_{11}, $P_{00} < q$라고 가정하면, α, δ_1, δ_2는 다음과 같이 사전추정 할 수 있다.

$$\alpha = -Z_{00}\sigma,$$
$$\delta_1 = \ln(\sigma(Z_{01} - Z_{00})),$$
$$\delta_2 = \ln\left(\frac{Z_{11} - Z_{00}}{Z_{01} - Z_{00}}\right).$$

여기서, Z_{St}는 표준정규분포의 P_{St} 분위수이고, $Z_{00} < Z_{01} < Z_{11}$, $Z_{00} < Z_q$이다.

4.2 최적화

세 시험점 $(S, t) = \{(0,0), (S_1, t_1), (S_2, t_2)\}$ 에서 시험하는 경우, $\hat{x}_q(0)$의 점근분산을 최소화하는 가속열화시험의 계획에 대한 문제는 다음과 같이 정형화할 수 있다.

$$\text{minimize } A\,\text{var}\{\hat{x}_q(0)\} = \frac{\sigma^2\{x_q(0)\}^2}{n}\left(\frac{C_0^2}{\pi_0} + \frac{C_1^2}{\pi_1} + \frac{C_2^2}{\pi_2} + \frac{Z_q^2}{2(\alpha + Z_q\sigma)^2}\right)$$

$$\text{subject to } 0 \le S_1 < S_2 \le 1$$
$$0 \le t_1 \le \tau\left(= \frac{t_m'}{t_B'}\right)$$
$$0 \le t_2 \le \tau$$

여기서,

$$C_0 = \left|\frac{1}{\alpha + Z_q\sigma} - \frac{1}{S_2 - S_1}\left(\frac{S_2}{A_1 t_1} - \frac{S_1}{A_2 t_2}\right)\right|,$$
$$C_1 = \frac{1}{S_2 - S_1}\frac{S_2}{A_1 t_1},$$
$$C_2 = \frac{1}{S_2 - S_1}\frac{S_1}{A_2 t_2}.$$

위 문제에서, 어떤 S_1, S_2에 대해서도 목적함수를 최소화시키는 π_i^*는 다음과 같다(박종인[7] 참조).

$$\pi_i^* = \frac{C_i}{C_0 + C_1 + C_2},\ i = 0, 1, 2$$

또한, 이때의 목적함수는 다음과 같다.

$$A\,\text{var}\{\hat{x}_q(0)\} = \frac{\sigma^2\{x_q(0)\}^2}{n}\left[(C_0 + C_1 + C_2)^2 + \frac{Z_q^2}{2(\alpha + Z_q\sigma)^2}\right] \qquad (1)$$

4.3 최적 시험 계획

이제 목적함수 (1)의 형태를 살펴보면 박종인[7]의 연구와 매우 유사한 형태를 알 수 있다. 따라서 이 연구에서도 박종인[7]의 연구와 유사한 방법으로 조건별 최적 조건을 도출하면 다음과 같다.

1. Case 1. $\tau \ge \tau_2(= (\alpha + Z_q\sigma)/\exp(\delta_1))$

$$S_1^* = 0,\ t_1^* = \tau,\ 0 < S_2^* \le 1,\ 0 < t_2^* \le \tau$$
$$\pi_0^* = 1 - \frac{\alpha + Z_q\sigma}{\exp(\delta_1)\tau},\ \pi_1^* = \frac{\alpha + Z_q\sigma}{\exp(\delta_1)\tau},$$
$$\pi_2^* = 0$$
$$C_0 + C_1 + C_2 = \frac{1}{\alpha + Z_q\sigma}$$

2. Case 2a. $\tau < \tau_2,\ \delta_2 \le 1$

$$S_1^* = 0,\ t_1^* = \tau,\ 0 < S_2^* \le 1,\ 0 < t_2^* \le \tau$$
$$\pi_0^* = \frac{\alpha + Z_q\sigma - \exp(\delta_1)\tau}{2(\alpha + Z_q\sigma) - \exp(\delta_1)\tau},$$
$$\pi_1^* = \frac{\alpha + Z_q\sigma}{2(\alpha + Z_q\sigma) - \exp(\delta_1)\tau},\ \pi_2^* = 0$$
$$C_0 + C_1 + C_2 = \frac{2}{\exp(\delta_1)\tau} - \frac{1}{\alpha + Z_q\sigma}$$

3. Case 2b. $\tau < \tau_2,\ \delta_2 > 1$

$$\blacktriangle\ \tau \le \tau_1\left(= \frac{\alpha + Z_q\sigma}{\exp(\delta_1 + \delta_2)}\{(e-1)\delta_2 + 1\}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(S_1^0 \ge 1 - 1/\delta_2\right)$$
$$S_1^* = 1 - 1/\delta_2,\ t_1^* = \tau,\ S_2^* = 1,\ t_2^* = \tau$$
$$\pi_0^* = \frac{\{(\alpha + Z_q\sigma)/\exp(\delta)\}\{\delta_2 - (\delta_2 - 1)\exp(-1)\} - \exp(\delta_2 - 1)\tau}{2\delta_2(\alpha + Z_q\sigma/\exp(\delta_1) - \exp(\delta_2 - 1)\tau)}$$
$$\pi_1^* = \frac{\delta_2(\alpha + Z_q\sigma)/\exp(\delta_1)}{2\delta_2(\alpha + Z_q\sigma)/\exp(\delta_1) - \exp(\delta_2 - 1)\tau)},$$
$$\pi_2^* = \frac{\{(\alpha + Z_q\sigma)/\exp(\delta_1)\}(\delta_2 - 1)\exp(-1)}{2\delta_2(\alpha + Z_q\sigma)/\exp(\delta_1) - \exp(\delta_2 - 1)\tau}$$
$$C_0 + C_1 + C_2 = \frac{2\delta_2}{\exp(\delta_1 + \delta_2 - 1)\tau} - \frac{1}{\alpha + Z_q\sigma}$$

$$\blacktriangle\ \tau_1 \le \tau < \tau_2$$
$$S_1^* = S_1^0,\ t_1^* = \tau,\ S_2^* = 1,\ t_2^* = \tau$$
$$\pi_0^* = 0,\ \pi_1^* = \frac{1}{1 + S_1^0\exp(\delta_2 S_1^0 - \delta_2)\tau},$$

$$\pi_2^* = \frac{S_1^0 \exp\left(\delta_2 S_1^0 - \delta_2\right)}{1 + S_1^0 \exp\left(\delta_2 S_1^0 - \delta_2\right)\tau}$$

$$C_0 + C_1 + C_2 = \frac{2}{\left(1 - S_1^0\right)\exp\left(\delta_1 + \delta_2 S_1^0\right)\tau} - \frac{1}{\alpha + Z_q \sigma}$$

5. 결론 및 향후 연구 방향

이 연구는 시료의 성능 특성치의 열화가 대수정규분포를 따를 때 일정형 가속열화시험 계획의 수리적 모형을 개발하고 있다. 특히 가속열화시험 계획에 필요한 모수들의 사전 추정치를 획득할 수 있는 방법을 제시하고 있으며 박종인[7]의 연구 결과를 활용하여 이 연구의 목적함수를 최적화하여 제시하고 있다.

향후 연구 방향은 다음과 같다. 본 연구는 수리적 모형의 개발과 해당 모형의 최적화에 중점을 두고 진행하였기 때문에 예제 혹은 사례 분석에 대한 제시가 미진한 상태이다. 따라서 사례 분석에 관한 연구를 수행하여 현장에서 근무하는 신뢰성 공학자들에게 제공할 필요가 있다. 다음으로 신뢰성 시험의 정확도 개선과 시험의 효율성 향상을 위해 시료수를 결정하는 문제에 대해 연구가 필요한 상태이다. 더 나아가 스트레스 인가 방법이 계단형 혹은 점진형이면서 성능 특성치의 열화가 대수정규분포를 따를 때의 가속열화시험 계획에 대한 연구가 필요하다. 마지막으로 스트레스 변수의 수가 2개 이상인 경우에 대해서도 추가적인 연구가 필요하다.

References

[1] Sung, S. I. (2015). “A Review on the accelerated life test plan: 2006~2015”. Journal of Applied Reliability, Vol. 15, No. 2, pp. 84-89.

[2] Sung, S. I., Kim, Y. S., Mun, B. M., and Bae, S. J. (2016). “Literature Review on the Reliability in KSQM for 50 Years”. Journal of the Korean Society for Quality Management, Vol. 44, No. 1, pp. 29-42.

[3] Sung, S. I. and Yum, B. J. (2016). “Optimal design of step-stress accelerated degradation tests based on the Wiener degradation process”. Quality Technology and Quantitative Management, Vol. 13, No. 4, pp. 367-393.

[4] Kim, Y. S. and Sung, S. I. (2017). “Practical Lifetime Estimation Strategy based on Partially Step-Stress Accelerated Degradation Tests”. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part O-Journal of Risk and Reliability, Vol. 231, No. 5, pp. 605-614.

[5] Lim, H., Kim, Y. S., Bae, S. J., and Sung, S. I. (2017). “Partial accelerated degradation test plans for Wiener degradation processes”. Quality Technology and Quantitative Management, online published.

[6] Nelson, W. (1990). Accelerated Testing: Statistical Method, Test Plans, and Data Analyses. Wiley-Interscience, Hoboken, New York.

[7] Park, J. I. and Yum, B. J. (2007). “Optimal Design of Accelerated Degradation Tests for Estimating Mean Lifetime at the Use Condition”. Engineering Optimization, Vol. 28, No. 3, pp. 199-230.