

일량제어정책과 복수휴가를 갖는 이산시간 Geo/G/1 대기행렬의 분석

(Analysis of Discrete-Time Geo/G/1 Queues under Workload
Control and Multiple Vacations)

이 세 원^{1)*}
(Se Won Lee)

요 약 본 논문에서는 일량제어정책과 복수휴가정책이 혼합된 서버제어정책 하에서 운영되는 이산시간 대기행렬시스템을 다룬다. 고객들은 베르누이 도착과정으로 시스템에 도착하고, 서버는 한 대가 운영되며 시스템 내 서비스할 고객이 없으면 유휴기간을 갖는 서버가 이산 확률변수 V 만큼의 휴가를 떠났다가 돌아와서 대기 중인 고객들의 총 일량이 임계값 D 를 넘길 때까지 휴가를 반복한다. 본 논문에서는 이산시간 시스템을 대상으로 하여 보다 현실적이며 유연한 혼합제어 정책 하에서 운영되는 대기행렬시스템의 안정상태 일량분포를 유도하고 평균일량을 계산하였다. 이는 시스템 내 고객수, 대기시간, 체제시간과 같은 시스템의 여러 성능척도를 분석하는데 기본이 된다.

핵심주제어 : 이산시간 대기행렬시스템, 혼합제어정책, 일량제어정책, 복수휴가

Abstract In this paper, we discuss a discrete-time queueing system with dyadic server control policy that combines workload control and multiple vacations. Customers arrive at the system with Bernoulli arrival process. If there is no customer to serve in the system, an idle server spends a vacation of discrete random variable V and returns. The server repeats the vacation until the total service time of waiting customers exceeds the predetermined workload threshold D . In this paper, we derived the steady-state workload distribution of a discrete-time queueing system which is operating under a more realistic and flexible server control policy. Mean workload is also derived as a performance measure. The results are basis for the analysis of system performance measures such as queue lengths, waiting time, and sojourn time.

Key Words : Discrete-Time Queueing System, Dyadic Server Control Policy, Workload Control, Multiple Vacations

* Corresponding Author : swlee@pknu.ac.kr

+ 이 논문은 2015년 대한민국 교육부와 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2015S1A5A8017582)

Manuscript received April 2, 2018 / revised April 18, 2018/
accepted April 24, 2018

1) 부경대학교 경영학부

1. 서 론

본 연구에서는 ‘일량제어정책’과 ‘복수휴가정책’이 혼합된 서버제어정책을 갖는 대기행렬시스템

을 다룬다. 대기행렬이론(queueing theory)에서 서버제어정책(server control policy)이란 유휴 중인(idle) 서버가 시스템에 대기 중인 고객들이 존재함에도 불구하고 일정 조건이 만족될 때까지 기다렸다가 다시 가동하게 하는 운영정책으로서 제조·생산, 통신, 서비스 분야에서 단위시간당 준비비용(setup cost)이 큰 경우 비용 효율적으로 시스템을 운영하기 위해 많이 사용되어 왔다.

이러한 서버제어정책의 대표적인 예로는 유휴기간 동안 도착한 고객수가 N 명이 되었을 때 서버를 재가동하는 N -정책(number-dependent policy), 유휴기간 동안에 쌓인 총 일량(도착고객들의 서비스의 총량)이 임계값 D 를 초과하였을 때 재가동하는 D -정책(delay-dependent policy, 일량제어정책에 해당), 유휴기간을 시작할 때 일정시간(확률변수) T 만큼의 휴가를 떠났다가 돌아와서 대기 중인 고객이 존재하면 비로소 서비스를 시작하는 T -정책(time-dependent policy, 복수휴가정책에 해당)이 있다. 서버제어정책에 관한 보다 자세한 내용은 Crabill et al.[1]과 Tadj and Choudhury[2]에서 찾아 볼 수 있다.

T -정책에 관한 연구는 Heyman[3]으로부터 활발하게 이루어져 왔다. Heyman[3]의 연구는 내장컴퓨터가 있는 전화 스위칭 장비를 어떻게 효율적으로 운영할 것인가 하는 문제로부터 시작되었는데, 지금도 T -정책과 관련된 연구들은 통신 시스템 또는 모바일 기기에서 CPU(central processing unit)가 연산에 필요한 자원을 효율적으로 활용할 수 있도록 하는 운영행태를 모델링하는데 널리 사용되고 있다.

D -정책을 갖는 대기행렬시스템을 최초로 분석한 연구는 Balachandran[4], Balachandran and Tijms[5]으로부터 시작된다. 대기시간 분석은 Balachandran[4]으로부터 20년 후나 지나 Li and Niu[6]에 의해 연구되었다. 이들은 D -정책을 갖는 GI/G/1 대기행렬시스템의 대기시간 분포함수를 구하고 이로부터 평균대기시간을 유도하였다. 고객수 분석은 Dshalalow[7,8]에 의해 최초로 분석되어 이후 D -정책 대기행렬시스템에 대한 연

구들이 활발하게 이루어졌다.

순수 D -정책을 포함하여 두 개 또는 그 이상의 서버제어정책을 혼합한 시스템에 대한 연구도 이루어졌다. Lee et al.[9]는 D -정책과 복수휴가를 갖는 M/G/1 시스템의 고객수와 대기시간을 분석하였는데 본 연구는 Lee et al.[9]이 다루었던 연속시간 시스템의 이산시간 버전에 해당하는 연구라 할 수 있다. Lee and Seo[10]는 D -정책과 N -정책이 혼합된 M/G/1 대기행렬을, Lee et al.[11]은 도착간격들 간에 상관관계가 존재하는 MAP/G/1 대기행렬을 분석하였다. Lee et al.[12]은 M/G/1 시스템을 대상으로 N -, D -, T -정책이 모두 혼합된 연속시간 시스템을 분석하였고, Lee et al.[13]은 단수휴가와 D -정책을 갖는 MAP/G/1 대기행렬을 분석하였다. 이상에서 언급한 모든 연구들은 모두 연속시간 시스템을 대상으로 이루어진 연구들이다.

하지만, 실제로 통신시스템, 교통시스템 등의 응용분야에서 연속시간 시스템보다는 이산시간 시스템으로의 모델링이 더 적합하기에(Brunel and Kim[14]) 최근 들어 서버제어정책이 포함된 이산시간 대기행렬시스템의 분석에 대한 관심이 높아지고 D -정책에 관한 이산시간 시스템의 분석 또한 많은 연구자들에 의해 이루어졌다. Lee et al.[15]은 D -정책을 갖는 Geo/G/1 대기행렬시스템의 일량, 고객수, 대기시간, 체제시간의 분포를 하나의 틀/framework 안에서 유도하였다. Lee et al.[16]는 고객들의 도착간격 사이에 상관관계가 존재하는 도착모형을 고려하여 D -정책을 갖는 이산시간 MAP/G/1 대기행렬시스템의 일량, 고객수, 대기시간, 체제시간의 분포를 모두 분석하였다. Lee[17]는 D -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 일량을 분석하였고, Lee[18]는 집단도착과 D -정책을 갖는 MAP/G/1 대기행렬시스템의 대기시간을 분석하였다. Kim et al.[19]은 N -정책과 단수휴가, 복수휴가를 갖는 이산시간 Geo^X/G/1 대기행렬시스템의 고객수 분포를 잘 알려진 확률적 분해성질(stochastic decomposition property)을 이용하여

분석하였다. Liu and Deng[20]은 변조된 (modified) D -정책과 베르누이피드백을 가지는 이산시간 대기행렬시스템의 고객수분포를 분석하였다. 여기서 말하는 변조된 D -정책이란 바쁜기간 시작점에서의 고객들의 서비스시간이 iid (identically independently distributed)하지 않아도 된다는 가정을 뜻하는데 엄밀히 말하면 이는 진정한 의미의 D -정책이라고는 할 수 없다. Lan and Tang[21]은 N -정책과 D -정책이 혼합된 혼합제어정책을 갖는 이산시간 대기행렬시스템을 분석하였다.

본 논문에서는 Lee et al.[15]이 제안한 D -정책을 갖는 이산시간 대기행렬시스템의 분석을 위한 통합적 접근방법을 응용하여 일량제어정책과 복수휴가정책이 혼합된 이산시간 시스템의 대기시간, 체재시간, 고객수 분석의 근간이 되는 유휴기간의 분석과 안정상태 일량분석을 연구범위로 한다. Lee[22]를 확장하여 평균일량의 구체적인

형태를 유도하였으며, 일부 오류를 바로 잡고 복잡한 결과들을 정리하여 수치계산을 실시, 실제 계산에서 발생하는 어려움들을 해결하였다.

2. 시스템

본 연구에서 다룰 대상시스템의 운영특성은 다음과 같다:

- 1) 고객들의 도착간격은 iid 기하분포 (geometric distribution)를 따르고 서버의 서비스시간은 이산시간 일반분포를 따른다.
- 2) 서버는 시스템에 더 이상 서비스 할 고객이 없으면 확률변수 V 만큼의 휴가를 보낸 후 다시 돌아와서 시스템에 대기 중인 총 일량이 미리 정해 놓은 일량 임계값 D 를 넘지 못하면 이를 초과할 때까지 반복적으로 휴가를 떠나는 시스템이다.

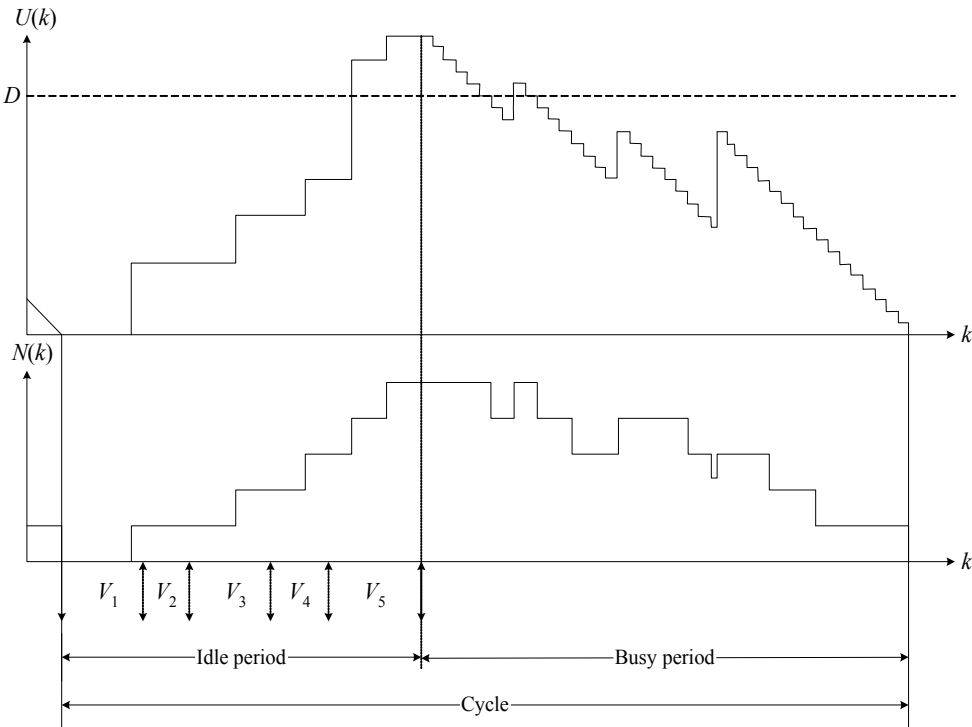


Fig. 1 A Sample Path of Workload and Queue Length Process of the System

3) 이산시간 시스템은 지연도착시스템(LAS-DA, late arrival system with delayed access)을 가정한다.

Fig. 1은 본 연구에서 다루는 대기행렬시스템의 일량과정과 고객수 과정을 동일한 이산시간 축선 상에 그린 것이다. 이 경우 서버는 시스템에 더 이상 서비스할 고객이 없어서 첫 휴가를 떠났다가 5번의 휴가 만에 일량 임계값을 D 를 넘어 비로소 재가동하여 서비스를 제공한다. 특이한 점은 유휴기간(idle period) 동안 도착한 고객 중 4번째 고객에 의해서 시스템 내 총 일량이 임계값 D 를 넘었음에도 불구하고 서버는 아직 마지막 휴가 중이기 때문에 일반적인 D -정책 대기행렬시스템에서와는 달리 휴가에서 돌아오기 전까지는 재가동시간이 지연된다.

분석을 위해 필요한 기호와 확률들을 다음과 같이 정의하자.

- λ : 한 슬롯 동안에 고객이 도착할 확률
- S : 임의의 고객의 서비스 시간, 확률변수
- S_n : S 의 n 차 중합(n -th convolution)
- V : 휴가의 길이, 확률변수
- v_x : 휴가의 길이가 x 일 확률
- $V(\omega) = \sum_{x=1}^{\infty} \omega^x v_x$: 휴가 길이의 확률생성함수 (PGF, probability generating function)
- S : 서비스시간의 길이(이산확률변수)
- $s_k = \Pr(S = k), (s(0) = 0)$: S 의 확률질량함수 (pmf, probability mass function),
- $S^*(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega^k s_k$: S 의 확률생성함수(PGF)
- $S^{(n)}(k) = \Pr(S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq k)$: S 의 n 차 중합의 분포함수(DF), ($S^{(0)}(k) = 1$)
- $s^{(n)}(k) = S^{(n)}(k) - S^{(n)}(k-1)$: S 의 n 차 중합의 확률질량함수(pmf)
- $M_k = \sum_{n=1}^{\infty} S^{(n)}(k)$: iid 서비스 시간으로 이루어진 재생과정의 재생함수(renewal function)

- $m_k = \sum_{n=1}^{\infty} s^{(n)}(k) = M_k - M_{k-1}$: iid 서비스 시간으로 이루어진 재생과정의 재생 질량 함수
- I : 유휴기간(idle period)의 길이
- B : 바쁜 기간(busy period)의 길이
- C : 사이클(cycle)의 길이
- N_B : 바쁜기간 시작점에서의 고객수
- U_B : 바쁜기간 시작점에서의 일량
- $E(\cdot)$: 확률변수의 평균(expectation)
- $\rho = \lambda E(S)$: 서버가 바쁠 확률

3. 유휴기간 분석

휴가형 대기행렬시스템의 다양한 성능척도들을 하나의 틀 안에서 분석할 수 있는 통합적 접근방법의 핵심은 유휴기간 동안의 일량과정을 추적하여 바쁜 기간 시작점에서의 고객수와 일량에 대한 정보를 획득하는 데 있다. 이를 위해 Lee et al.[9]에서 이용한 일량 군휴가 과정(grand vacation process of workload)을 이산시간 시스템으로 적용하여 사용한다. 일량 군휴가 과정을 이용한 방법은 각각의 휴가를 고려하여 분석하는 방법보다 더 쉽게 분석할 수 있는 장점이 있기 때문이다.

3.1 일량 군휴가 과정

일량 군휴가 과정에 대한 이해를 돕기 위해 Fig. 1에서 일량과정을 따로 떼어 설명하기로 한다. Fig. 2의 파란색 굵은 실선은 유휴기간 동안의 일량과정으로부터 파생되는 군휴가 과정을 나타낸 것이다.

시스템에 서비스할 고객이 없으면 서버는 첫번째 휴가(V_1)를 떠났다가 유휴기간 동안 쌓인 일량이 D 를 초과하지 않는 동안에는 돌아와서 다시 휴가를 떠나는데 매 휴가 종료시점에서의 일량이 휴가 시작점에서의 일량과 다른 경우 군휴가가 새로 시작된다. 따라서 Fig. 2의 샘플경로에

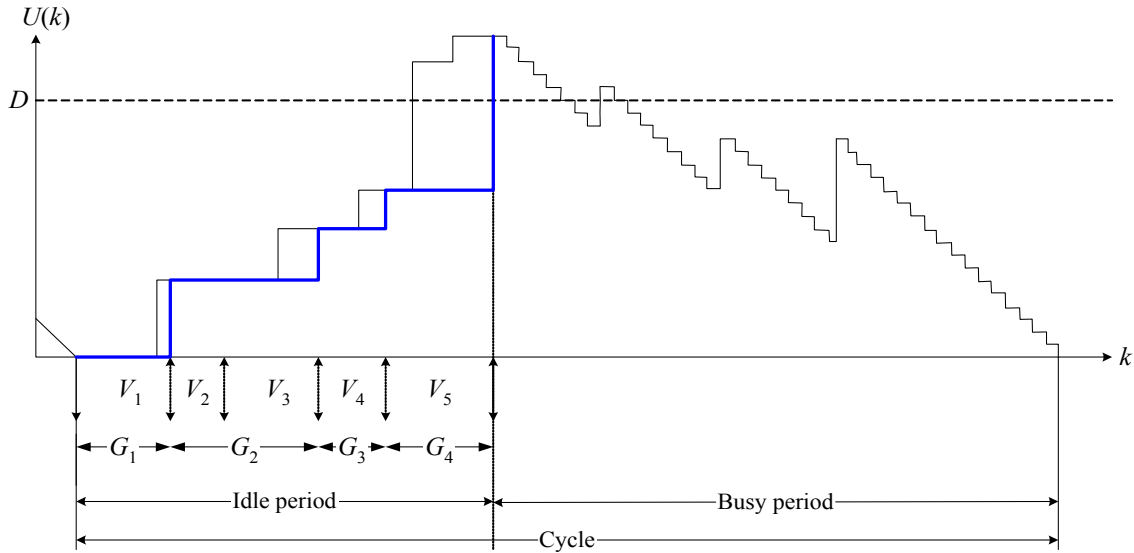


Fig. 2 Grand Vacation Process of Workload

서는 총 4개의 군휴가 생성되며 마지막 군휴가가 끝나는 시점이 바쁜기간 시작점이 된다.

군휴가의 길이는 복수휴가가 있는 일반적인 Geo/G/1 대기행렬시스템의 유휴기간과 확률적으로 동일하므로 군휴가의 길이를 확률변수 G 로 정의하면 임의의 군휴가의 평균길이는 Takagi [23]로부터 다음과 같다.

$$E(G) = \frac{E(V)}{1 - V(1 - \lambda)} \quad (1)$$

여기서, $V(1 - \lambda)$ 는 하나의 휴가 동안 고객이 아무도 도착하지 않을 확률을 의미한다.

일량의 군휴가 과정을 분석하기 위해 다음의 기호들을 정의하자.

- G : 군휴가의 길이, 확률변수
- H : 하나의 군휴가 동안 증가한 일량
- A_G : 하나의 군휴가 동안 도착한 고객수
- N_G : 유휴기간 동안 발생한 군휴가의 개수

앞서 정의한 바에 의하면 유휴기간의 길이 I 는 첫 번째부터 N_G 번째까지 군휴가의 길이의

합이다. 따라서 유휴기간의 길이는 식 (2)와 같이 표현가능하다.

$$I = G_1 + G_2 + \dots + G_{N_G}. \quad (2)$$

그리고 식 (2)의 N_G 는 정지시간(stopping time)이므로 유휴기간의 평균길이는 다음과 같다 (Lee[24]).

$$E(I) = E(N_G)E(G) \quad (3)$$

여기서 $E(N_G)$ 는 아직 구하지 않았으므로 이를 해결하기 위해 한 군휴가 동안의 일량 증가분 확률과정을 사용한다. A_G 를 임의의 군휴가 동안 도착한 고객수라고 하면 그 군휴가 동안의 일량 증가분은 $H = S_1 + S_2 + \dots + S_{A_G}$ 이고, H 의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$h_x = \frac{\sum_{y=1n=1}^{\infty} \sum_y v_y \binom{y}{n} \lambda^n (1-\lambda)^{y-n} s^{(n)}(x)}{1 - V(1-\lambda)}, (x \geq 1) \quad (4)$$

lid 확률변수 H 들로 이루어지는 확률과정

H -process의 재생밀도함수와 재생함수를 식 (5)와 같이 정의하면 본 연구에서 다루는 대상시스템의 유휴기간 동안 발생한 균휴가의 평균개수 $E(N_G) = 1 + M_D^H$ 가 된다.

$$m_k^H = \sum_{n=1}^{\infty} h_k^{(n)}, \quad M_k^H = \sum_{n=1}^{\infty} H_k^{(n)} \quad (5)$$

식 (5)에서 $h_k^{(n)} = \sum_{y=1}^k h_y h_{k-y}^{(n)}$ 으로 식 (4)로부터 재귀적으로 계산이 가능하다.

3.2 바쁜기간 시작점에서의 일량과 고객수

바쁜기간 시작점에서의 일량은 유휴기간이 시작된 후로 몇 번째의 균휴가로 일량 임계점 D 를 넘었는지, 그리고 그 균휴가에 도착한 고객들 중에 몇 번째 고객으로 D 를 넘었는지를 고려하여 구할 수 있다.

바쁜기간 시작점에서 고객수가 한 명이려면 첫 번째 균휴가에는 한 명만 도착하고 그 고객의 서비스시간(일량)으로 D 를 넘어야 한다.

만약 바쁜기간 시작점에서 고객수가 $n(n \geq 2)$ 명인 경우는 다음 두 가지로 나뉜다.

- (i) 첫 번째 균휴가 동안 도착한 n 명 중 k 번째 고객까지의 일량의 합이 D 를 넘어 바쁜기간을 시작하는 경우 ($k = 1, \dots, n$)
- (ii) 마지막 균휴가 직전 균휴가 종료까지 도착한 고객이 j 명($j = 1, \dots, k-1$)이고, 마지막 균휴가에 도착한 $n-j$ 명 중 k 번째 고객으로 D 를 넘어 바쁜기간을 시작하는 경우 ($k = 2, \dots, n$)

따라서, 바쁜기간 시작점에서의 고객수 분포는 다음과 같이 정리된다.

$$\Pr(N_B = n)$$

$$= \begin{cases} \Pr(A_G = 1)(1 - S(D)), & (n = 1) \\ \Pr(A_G = n) \sum_{k=1}^n [S^{(k-1)}(D) - S^{(k)}(D)] \\ \quad + \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} m_j \cdot \Pr(A_G = n-j) \\ \quad \times [S^{(k-1)}(D) - S^{(k)}(D)], & (n = 2, 3, \dots) \end{cases}$$

그리고 바쁜기간 시작점에서의 평균 고객수는 유휴기간 동안 생성된 균휴가의 개수와 임의의 균휴가 동안 도착한 고객수에 대한 정보로부터 다음과 같다.

$$E(N_B) = E(N_G)E(A_G) \quad (6)$$

식 (6)에서 하나의 균휴가 동안 도착한 고객수 A_G 의 PGF는 Takagi[23]로부터 다음과 같다.

$$A_G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cdot \Pr(A_G = n) \quad (7)$$

$$= \frac{V(1 - \lambda + \lambda z) - V(1 - \lambda)}{1 - V(1 - \lambda)}$$

따라서, 하나의 균휴가 동안 도착한 평균 고객수 $E(A_G)$ 는 식 (8)과 같다.

$$E(A_G) = \left. \frac{d}{dz} A_G(z) \right|_{z=1} = \frac{\lambda E(V)}{1 - V(1 - \lambda)}. \quad (8)$$

일량 임계값 D 를 넘기 전의 일량 균휴가과정 중 마지막 재생사건에 조건을 취하면 바쁜기간 시작점에서의 일량의 분포와 PGF를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_B(x) = \Pr(U_D = x) \quad (9)$$

$$= h_x + \sum_{y=1}^D m_y h_{x-y}, \quad (x \geq D+1)$$

$$U_B(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x u_B(x) \quad (10)$$

식 (10)을 정리한 후 ω 에 대하여 미분하여 $\omega = 1$ 을 대입하면 다음을 얻는다.

$$E(U_B) = E(H)[1 + M_D^H] \quad (11)$$

$$= \frac{\lambda E(S)E(V)}{1 - V(1 - \lambda)} \left[1 + \sum_{n=1}^D H_D^{(n)} \right]$$

4. 일량 분석

본 절에서는 임의 슬롯시작점에서 일량의 분포를 분석한다. 전체 시간을 대표하는 하나의 사이클은 유휴기간과 바쁜기간으로 구성되므로 임의시점에서의 일량 생성함수는 서버의 상태에 조건을 취하여 구한다. 일량분석을 위해 다음의 확률과 기호를 추가로 정의하자.

u_x^{idle} : 유휴기간 임의 슬롯시작점에서 일량이 x 일 확률 ($x = 0, 1, \dots$)

u_x^{busy} : 바쁜기간 임의 슬롯시작점에서 일량이 x 일 확률 ($x = 1, 2, \dots$)

$U_{idle}(\omega) = \sum_{x=0}^{\infty} \omega^x u_x^{idle}$: 유휴기간 임의시점 일량의 생성함수(GF, generating function)

$U_{busy}(\omega)$: 바쁜기간 임의시점에서 일량의 GF

$U(\omega)$: 임의시점에서 일량의 PGF

위 정의에 따르면 임의시점(슬롯시작점)에서의 일량 확률생성함수는 다음과 같다.

$$U(\omega) = p_{idle} U_{idle}(\omega) + p_{busy} U_{busy}(\omega) \quad (12)$$

여기서 $p_{idle} = 1 - \rho$, $p_{busy} = \rho$ 는 각각 서버가 유휴할 확률과 바쁜 확률이다. 이제 유휴기간 임의슬롯시작점에서의 일량과 바쁜기간 임의시점에서의 일량을 각각 분석하자.

4.1 유휴기간 중의 임의슬롯 시작점에서의 일량

유휴기간 중의 임의시점에서의 일량은 그 값에 따라 시간평균확률(time average probability)의 개념을 사용하여 다음 세 가지 경우로 나누어 표현할 수 있다.

(i) 일량이 0인 경우

$$u_0^{idle} = \frac{1/\lambda}{E(I)} \quad (13.1)$$

(ii) 일량이 1보다 크고 D 이하인 경우

$$u_{1,x}^{idle} = \frac{m_x \cdot 1/\lambda}{E(I)}, \quad (x = 1, 2, \dots, D) \quad (13.2)$$

(iii) 일량이 D 를 초과하는 경우

$$u_{2,x}^{idle} = \frac{1/\lambda}{E(I)} \left[s_x + \sum_{y=x-D+1}^x m_{x-y} s_y - u_D(x) \right] \quad (13.3)$$

$$+ \sum_{y=1}^{x-D} u_{2,x-y}^{idle} s_y, \quad (x = D+1, \dots)$$

식 (13.1)-(13.3)으로부터 유휴기간 임의슬롯시작점에서의 일량의 PGF를 구하여 정리하면 다음과 같다.

$$U_{idle}(\omega) \quad (14)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \omega^x u_x^{idle}$$

$$= U_0^{idle}(\omega) + U_1^{idle}(\omega) + U_2^{idle}(\omega)$$

$$= \omega^0 u_0^{idle} + \sum_{x=1}^D \omega^x u_{1,x}^{idle} + \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x u_{2,x}^{idle}$$

$$= \frac{1}{E(N_B)} \left[1 + \sum_{x=1}^D \omega^x m_x \right] + \frac{T(\omega)}{1 - S(\omega)}$$

여기서, $E(N_B) = \lambda E(I)$, $T(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x T_x$

이고, T_x 는 식 (13.3)의 우변 첫째 항을 다른 기호로 표현한 것으로서 이는 복수휴가가 없는 순수 D -정책을 갖는 Geo/G/1 대기행렬시스템에서 바쁜기간 시작점 일량($U_{D,Geo/G/1}$)이 x 일 확률

$(s_x + \sum_{y=x-D+1}^x m_{x-y} s_y)$ 에서 본 논문에서 다루는

대상시스템의 바쁜기간 시작점 일량이 x 일 확률 ($u_B(x)$)을 뺀 값이다. 따라서 다음과 같이 다시 표현할 수 있다:

$$T_x = \frac{1/\lambda}{E(I)} [\Pr(U_{D,Geo/G/1} = x) - u_B(x)].$$

그리고 $T(\omega)$ 는 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x T_x \quad (15) \\ &= \frac{1/\lambda}{E(I)} \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \left[s_x + \sum_{y=x-D+1}^x m_{x-y} s_y - u_B(x) \right] \\ &= \frac{1/\lambda}{E(I)} [U_{D,Geo/G/1}(\omega) - U_B(\omega)] \end{aligned}$$

4.2 바쁜기간 중의 임의슬롯 시작점에서의 일량

바쁜기간은 U_B 를 최초지체기간(initial delay)으로 가지는 지체사이클(delay cycle)이다. 따라서 앞서 분석한 유희기간 분석결과와 Takagi[23]로부터 바쁜기간 일량생성함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_{busy}(\omega) & \quad (16) \\ &= U_{Geo/G/1}(\omega) \cdot U_B^-(\omega) \\ &= \frac{(1-\rho)(1-\omega)}{1-\lambda+\lambda S(\omega)-\omega} \cdot \frac{1-U_B(\omega)}{E(U_B)(1-\omega)} \end{aligned}$$

지체사이클 이론에 의하면 바쁜기간의 길이는 $E(B) = \frac{E(U_B)}{1-\rho}$ 이고, 사이클의 길이 $E(C)$ 는 다음과 같다.

$$E(C) = E(I) + E(B) = \frac{E(U_B)}{(1-\rho)\rho} \quad (17)$$

따라서, 식 (17)을 이용하여 식 (16)을 다시 정리하면,

$$U_{busy}(\omega) = \frac{1}{\rho E(C)} \cdot \frac{1-U_B(\omega)}{1-\lambda+\lambda S(\omega)-\omega}. \quad (18)$$

식 (14-18)에서 각각 구한 유희기간과 바쁜기간의 임의시점 일량분포를 식 (12)에 대입하여 정리하면 최종적으로 다음과 같이 임의슬롯 시작점에서의 일량의 분포에 대한 변환을 얻는다.

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{1-\rho}{E(N_B)} \left[1 + \sum_{x=1}^D \omega^x m_x \right] \quad (19) \\ &+ \frac{1-\rho}{E(N_B)} \cdot \frac{U_{D,Geo/G/1}(\omega) - U_B(\omega)}{1-S(\omega)} \\ &+ \frac{1-\rho}{E(U_B)} \cdot \frac{1-U_B(\omega)}{1-\lambda+\lambda S(\omega)-\omega}. \end{aligned}$$

5. 성능척도

본 장에서는 시스템의 성능척도로서 평균일량을 유도한다. 평균일량은 $E(U) = \frac{d}{d\omega} U(\omega) \Big|_{\omega=1}$ 으로부터 구한다. $E(U_B) = E(N_B)E(S)$ 를 사용하여 식 (19)를 다시 정리한 후, ω 에 대하여 1차 미분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} U'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} U(\omega) \quad (20) \\ &= \frac{1-\rho}{E(N_B)} \left[\sum_{x=1}^D x \omega^{x-1} m_x \right. \\ &+ \frac{U'_{D,Geo/G/1}(\omega) - U'_B(\omega)}{1-S(\omega)} \\ &+ \frac{(U_{D,Geo/G/1}(\omega) - U_B(\omega))(S'(\omega))}{(1-S(\omega))^2} \\ &+ \frac{1}{E(S)} \frac{-U'_B(\omega)}{1-\lambda+\lambda S(\omega)-\omega} \\ &\left. + \frac{1}{E(S)} \frac{(1-U_B(\omega))(\lambda S'(\omega)-1)}{(1-\lambda+\lambda S(\omega)-\omega)^2} \right]. \end{aligned}$$

식 (20)에 $\omega = 1$ 을 대입한 후, 로피탈의 정리(l'Hospital's rule)를 사용하여 정리하면

$$\begin{aligned}
 U'(\omega)|_{\omega=1} &= \frac{1-\rho}{E(N_B)} \left[\sum_{x=1}^D x m_x \right. \\
 &+ \frac{E(U_{D,Geo/G/1}) - E(U_{D,Geo/G/1}^2)}{2E(S)} \\
 &+ \frac{E(U_B^2) - E(U_B)}{(1-\rho)E(S)} \\
 &+ \frac{E(U_B^2) - E(U_B)}{E(S)} \\
 &\left. + \frac{\rho E(N_B)[E(S^2) - E(S)]}{(1-\rho)^2 E(S)} \right].
 \end{aligned}$$

앞의 결과를 정리하면 평균일량은 최종적으로 식 (21)과 같다.

$$\begin{aligned}
 E(U) & \tag{21} \\
 = & \frac{1-\rho}{E(N_B)} \sum_{x=1}^D x m_x \\
 & + \frac{1-\rho}{E(N_B)} \frac{E(U_{D,Geo/G/1}) - E(U_{D,Geo/G/1}^2)}{2E(S)} \\
 & + \frac{\lambda(E(U_B^2) - E(U_B))}{E(N_B)} \\
 & + \frac{\lambda[E(S^2) - E(S)]}{1-\rho}.
 \end{aligned}$$

식 (21)에서 $E(U_{D,Geo/G/1}) = E(S)(1 + M_D)$ 이고, $E(U_{D,Geo/G/1}^2)$ 은 다음 식으로부터 구한다.

$$E(U_{D,Geo/G/1}^2) = \sum_{x=D+1}^{\infty} x^2 \left(s(x) + \sum_{y=1}^D m(y)s(x-y) \right)$$

5.1 수치예제

본 절에서는 유희기간 분석과 평균일량을 구하는데 사용하는 이론값들을 수치 예를 통해 계산한다. 본 논문의 대상 시스템은 복잡도가 높은 시스템이기에 엄밀해(exact solution)의 형태로 정리하는 데에는 큰 노력과 시간이 뒤따른다. 따라서 보다 빠른 계산을 위해 수치해법을 사용하였다. Table 1에는 아래와 같은 조건 하에서 운

영되는 시스템의 이론결과 값들이 담겨 있다.

$$D = 7, \lambda = 0.2, v = 0.5, p = 0.7,$$

$$v_x = (1-v)^{x-1}v, (x = 1, 2, \dots),$$

$$s_k = (1-p)^{k-1}p, (k = 1, 2, \dots).$$

Table 1 Results of the numerical example

Measure	Value
$E(N_G)$	5.08333
$E(A_G)$	1.2
$E(I)$	30.5
$E(N_B)$	6.10000
$E(U_B)$	8.71429
$E(U_B^2)$	77.1633
$E(U_{D,Geo/G/1})$	8.42857
$E(U_{D,Geo/G/1}^2)$	71.6531
$E(U)$	1.14814

6. 결론 및 추후연구과제

본 연구에서는 이중서버제어정책을 갖는 이산 시간 대기행렬시스템의 유희기간과 안정상태 일량을 분석하였다. 단일 서버는 시스템 내에 더 이상 서비스할 고객이 없으면 바쁜기간을 마치고 확률변수 V 만큼의 휴가를 떠난다. 휴가를 마치고 돌아왔을 때 서버는 시스템 내 총일량이 임계값 D 를 초과하면 바쁜 기간을 시작하고, 그렇지 않으면 다시 휴가를 떠나고 돌아오기를 반복한다. 고객들은 도착확률 λ 의 Bernoulli process로 시스템에 도착하고 선입선출(first come, first served)로 서비스를 받은 후 시스템을 떠난다.

이러한 운영방식은 cpu가 내장되어 있는 모바일 기기들이 최소한의 에너지를 사용하기 위한 작동방식과 매우 유사하다. 모바일 기기들은 실시간으로 도착하는 모든 신호 또는 작업들을 체크하기엔 cpu가 많은 자원들을 사용해야 하므로 일정 시간(휴가) 후에 시스템을 확인하여 대기 중인 작업이 있으면 그 때 처리함으로써 효율적으로 자원을 활용하는데, 이는 복수휴가를 갖는

이산시간 대기행렬시스템으로 모델링이 가능하다.

본 연구는 여기에 일량 임계값을 추가로 고려하여 유휴 중인 서버가 작업들을 쌓아 두었다가 총 일량(대기 중인 고객들의 서비스시간의 합)이 D 를 초과하면 바쁜기간을 시작하게 함으로써 시스템의 on-off 횟수를 더욱 적게 만들어 준 모델로 이해할 수 있다.

본 연구에서는 대상시스템을 통합적으로 분석하는데 필요한 기초 작업이라 할 수 있는 유휴기간과 일량을 분석하였다. 유휴기간을 분석함에 있어 분석의 효율성을 높이기 위해 일량 균류가 과정을 이용하였으며 이를 바탕으로 일량의 분포를 구하고 평균일량을 유도한 후 수치 예제를 보였다.

시스템의 주요 성능척도라 할 수 있는 고객수, 대기시간, 체제시간의 분석은 추후과제로 남긴다. 본 연구에서는 두 개의 서버제어정책이 혼합되어 운용되므로 각각의 제어변수에 대하여 비용최적화 문제를 푸는 것도 추후연구과제로 의미가 있을 것이다. 뿐만 아니라, 만약 휴가나 서비스시간이 복잡한 형태의 일반형 이산시간 확률분포를 따르는 경우에는 실제 계산에 어려움이 따를 수 있으므로 이러한 계산상의 개선을 위한 수치해법의 개발 또한 중요하다.

References

- [1] Crabill, T.B., Gross, D., and Magazine, M.J., "A Classified Bibliography of Research on Optimal Design and Control of Queue," *Operations Research*, Vol. 25, pp. 219-232, 1977.
- [2] Tadj, L. and Choudhury, G., "Optimal Design and Control of Queues," *TOP*, Vol. 13, No. 2, pp. 359-412, 2005.
- [3] Heyman, D.P., "The T -policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, Vol. 23, No. 7, 775-778, 1977.
- [4] Balachandran, K.R., "Control Policies for a Single Server System," *Management Science*, Vol. 19, pp. 1013-1018, 1973.
- [5] Bachandran, K.R. and Tijms, H., "On the D -policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, Vol. 21, No. 9, pp. 1073-1076, 1975.
- [6] Li, J. and Niu, S.C., "The Waiting Time Distribution for the GI/G/1 Queue under the D -policy," *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, Vol. 6, pp. 287-308, 1992.
- [7] Dshalalow, J.H., "Queueing Processes in Bulk Systems under the D -policy," *Journal of Applied Probability*, Vol. 35, pp. 976-989, 1998.
- [8] Dshalaow, J.H., "A Note on D -policy Bulk Queueing Systems," *Journal of Applied Probability*, Vol. 38, No. 1, pp. 280-283, 2001.
- [9] Lee, H.W., Cheon, S.H. and Seo, W.J., "Queue Length and Waiting Time of the M/G/1 Queue under the D -policy and Multiple Vacations," *Queueing Systems*, Vol. 54, pp. 261-280, 2006.
- [10] Lee, H.W. and Seo, W.J., "The Performance of the M/G/1 Queue under the Dyadic Min(N, D)-policy and its Cost Optimization," *Performance Evaluation*, Vol. 65, pp. 742-758, 2008.
- [11] Lee, H.W., Seo, W.J., Lee, S.W., Jeon, Jongwoo, "Analysis of MAP/G/1 Queue under Min(N, D)-policy," *Stochastic Models*, Vol. 26, No. 1, pp. 98-123, 2010.
- [12] Lee, H.W., Seo, W.J., Lee, S.W., "Analysis of the M/G/1 Queueing System under the Triadic (N, D, T)-policies," *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 8, No. 3, pp. 333-357, 2011.
- [13] Lee, H.W., Cheon, S.H., Lee, S.W. and Baek, J.W., "MAP/G/1 Queue under Workload Control and Postprocessing," *Stochastic Analysis and Applications*, Vol. 27, No. 2, pp. 331-352, 2009.

[14] Bruneel, H., and Kim, B.G., Discrete-time Models for Communication Systems including ATM, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[15] Lee, S.W., Lee, H.W., and Baek, J.W., "Analysis of Discrete-time Geo/G/1 Queue under the D -policy," Proceedings of the 6th International Conference on Queueing Theory and Network Analysis (QTNA2011), 2011.

[16] Lee, S.W., Lee, H.W., and Baek, J.W., "Analysis of Discrete-time MAP/G/1 Queue under Workload Control," Performance Evaluation, Vol. 69, No. 2, pp. 71-85, 2012.

[17] Lee, S.W., "Workload Analysis of Discrete-time BMAP/G/1 Queue under D -policy," Journal of the Korea Industrial Information Systems Research, Vol. 21, No. 6, pp. 1-12, 2016.

[18] Lee, S.W., "Waiting Time Analysis of Discrete-time BMAP/G/1 Queue under D -policy," Journal of the Korea Industrial Information Systems Research, Vol. 23, No. 1, pp. 53-63, 2018.

[19] Kim, S.J, Kim, N.K, Park, H.-M., Chae, K.C., and Lim D.-E., "On the Discrete-time Geo^X/G/1 Queues under N-policy with Single and Multiple Vacations," Journal of Applied Mathematics, 2013, Article ID 587163, 2013.

[20] Liu, R. and Deng, Z., "The Steady-state System Size Distribution for a Modified D -policy Geo/G/1 Queueing System," 2014, Article ID 345129, 2014.

[21] Lan, S. and Tang, Y., "Analysis of a Discrete-time $Geo^{\lambda_1, \lambda_2}$ /G/1 Queue with N -policy and D -policy," Journal of Applied Mathematics and Computing, 1-25, 2016.

[22] Lee, S.W., "Workload Analysis of Discrete-time Queueing System with D - and T -policy," Proceedings of the Korea Society for Industrial Systems Conference

(Fall, 2016), 2016.

[23] Takagi, H., Queueing Analysis: Vol III, Discrete-time Systems, North-Holland, 1993.

[24] Lee, H.W., Queueing Theory, Sigma Press, 2006 (in Korean).



이 세 원 (Se Won Lee)

- 종신회원
- 성균관대학교 산업공학과 학사
- 성균관대학교 산업공학과 석사
- 성균관대학교 산업공학과 박사
- 부경대학교 경영대학 경영학부 조교수
- 관심분야: 대기행렬이론, 확률모형, 시스템 최적화

부록 1. 식 (14)의 $U_2^{idle}(\omega)$ 의 유도과정

$$\begin{aligned}
 U_2^{idle}(\omega) &= \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x u_{2,x}^{idle} \\
 &= \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \frac{1/\lambda}{E(I)} \left[s_x + \sum_{y=x-D+1}^x m_{x-y} s_y - u_B(x) \right] \\
 &\quad + \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{y=1}^{x-D} u_{2,x-y}^{idle} s_y \\
 &= \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x T_x + \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{y=1}^{x-D} u_{2,x-y}^{idle} s_y \\
 &= T(\omega) + \sum_{y=1}^{\infty} \omega^y s_y \sum_{x=y+D}^{\infty} \omega^{x-y} u_{2,x-y}^{idle} \\
 &= T(\omega) + S(\omega) U_2^{idle}(\omega) \\
 &= \frac{T(\omega)}{1-S(\omega)}.
 \end{aligned}$$

$m(\omega) = \frac{S(\omega)}{1-S(\omega)}$ 임을 이용하면 위 결과는 $U_2^{idle}(\omega) = T(\omega) + T(\omega)m(\omega)$ 로도 표현이 가능하다.