

비선형 다개체 시스템의 관측기 기반의 일치

Observer based consensus of nonlinear multi-agent systems

이 성 렬^{*}

Sungryul Lee^{*}

Abstract

This paper addresses the consensus problem for nonlinear multi-agent systems using observer based controller. In order to solve this problem, the high gain approach is combined with the previous low gain controller. Also, it is shown that the proposed observer based controller can always guarantee the consensus of nonlinear systems with lower triangular nonlinearity.

요 약

본 논문은 관측기 기반의 제어를 이용한 비선형 다개체 시스템의 일치문제를 다룬다. 이를 위하여 기존의 제어기 제어기에 고이득 접근방법을 결합한다. 리아푸노프 방법을 이용하여 제안한 관측기 기반의 일치 제어기가 삼각 구조 비선형 시스템의 일치를 보장해줌을 보인다.

Key words : nonlinear multi-agent system, consensus, high gain approach, directed graph, observer

* Dept. of Control & Robotics Eng., Kunsan National University

★ Corresponding author

Email : 2sungryul@kunsan.ac.kr, Tel: 063-469-4687

Manuscript received Mar. 12, 2018; revised Mar. 25, 2018 ;
accepted Mar. 27, 2018

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. 서론

지난 10년 동안 제어분야에서 다개체 시스템에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 다개체 시스템의 일치문제는 공학, 생물학, 물리학 등 여러 분야에서 응용이 가능한 주제이므로 매우 중요하다[1]. 선형 다개체 시스템의 일치문제는 다양한 연구를 통하여 일반적인 해법이 잘 정립되어 왔다.[1]-[5]. 최근에는 기존에 개발된 선형 다개체 시스템 이론이 비선형 시스템으로 확장되고 있다. [6]에서는 적응제어기법을 이용하여 비선형 다개체 시스템의 일치제어를 제안하였다. [7], [8]에서는 M-matrix 접근방법을 이용하여 비선형 다개체 시스템의 일치문제를 다루었다. [9]에서는 스위칭 토폴로지를 갖는 네트워크 환경에서 LMI기반의 제어를 제안하였다. [10]에서는 고이득 제어방법을 이용한

비선형 시스템의 출력일치문제를 다루었다. 본 논문에서는 삼각구조를 갖는 비선형 다개체 시스템의 일치문제를 해결하기 위하여 관측기 기반의 고이득 제어기를 제안한다. 먼저 삼각구조 비선형 시스템을 위한 고이득 관측기를 설계하고 제어기는 이웃한 개체들의 관측기의 상태변수를 이용한다. 리아푸노프 방법을 이용하여 관측오차의 안정도와 일치를 증명한다. 존재하는 연구들과는 대조적으로 LMI를 사용하지 않기 때문에 비선형성이 매우 강한 경우에도 적용가능하다는 장점을 가진다. 또한, 개체의 상태변수 대신에 출력만을 사용하기 때문에 구현 비용을 줄일 수 있는 장점을 가진다. 마지막으로 모의실험을 통하여 제안한 방법의 유효성을 입증한다.

II. 문제 정의

본 논문에서는 다음과 같은 비선형 다개체 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + f(x_i(t)) + Bu_i(t), \\ y_i(t) &= Cx_i(t), i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $x_i(t) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^T \in R^n, u_i(t) \in R, y_i(t) \in R$ 는 개체 i 의 상태변수, 제어입력, 출력을 각각 나타낸다. 행렬 $A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, C \in R^{1 \times n}$ 과 벡터 함수 $f(x_i(t))$ 는 다음과 같다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad (2)$$

$$f(x_i(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x_{i1}) \\ f_2(x_{i1}, x_{i2}) \\ \vdots \\ f_n(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \end{pmatrix}$$

식 (1)의 네트워크 토폴로지는 방향(directed) 그래프 $G = (V, E, A)$ 를 이용하여 기술한다. $V = \{1, \dots, N\}$ 는 노드집합, $E \subset V \times V$ 는 에지 집합, $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$ 는 방향 그래프 G 의 인접(Adjacency) 행렬, $L = (l_{ij}) \in R^{N \times N}$ 은 G 의 라플라시안(Laplacian) 행렬을 의미한다. 각 행렬 및 용어 정의는 논문 [2]를 참조하라. 논문의 주요결과를 제공하기 전에 다음 가정 및 보조정리들이 필요하다.

가정1[2]: 방향 그래프 G 는 방향생성트리(directed spanning tree)를 포함한다.

가정2: 임의의 x_i, x_k 에 관하여 식 (3)을 만족시키는 상수 $\gamma > 0$ 가 항상 존재한다.

$$\|f_j(x_i) - f_j(x_k)\| \leq \gamma \|x_{[i1, ij]} - x_{[k1, kj]}\|, j = 1, \dots, n \quad (3)$$

여기서 $x_{[i1, ij]} = (x_{i1}, \dots, x_{ij})^T$ 이다.

보조정리1[10]: 식 (1)에 대하여 가정1이 만족한다면 식 (4)를 만족시키는 행렬 T 가 존재한다.

$$T^{-1}LT = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} \\ 0_{(N-1) \times 1} & L_{22} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (N-1)} \\ 1_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

여기서 $1_{N-1} = (1, \dots, 1)^T \in R^{N-1}$ 이고 $I_N \in R^{N \times N}, 0_{1 \times (N-1)} \in R^{1 \times (N-1)}$ 은 단위행렬과 영행렬을 각각 나타낸다. L_{12}, L_{22} 는 적당한 크기의 행렬이다. L_{22} 의 고유값들은 행렬 L 의 0을 제외한 고유값 $\lambda_i, i = 1, \dots, N-1$ 와 일치한다.

보조정리2[11]: 상수 $\epsilon \in (0, 1]$ 에 대하여 식 (5)를 만족시키는 행렬 $P_\epsilon = P_\epsilon^T > 0$ 이 존재한다.

$$A^T P_\epsilon + P_\epsilon A - P_\epsilon B B^T P_\epsilon + \epsilon I_n = 0 \quad (5)$$

여기서 $I_n \in R^{n \times n}$ 는 단위행렬을 나타내고 행렬 P_ϵ 은 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon = 0$ 을 만족시킨다.

보조정리3[11]: $\alpha = 1/(2\min_i Re(\lambda_i))$ 으로 정의하면 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ 를 만족하는 모든 ϵ 과 모든 $i = 1, \dots, N-1$ 에 대하여 행렬 $A - \alpha \lambda_i B B^T P_\epsilon$ 를 Hurwitz하도록 하는 상수 $\epsilon^* \in (0, 1]$ 이 항상 존재한다.

다음에서 논문에서 다룰 일치문제를 정의한다.

정의1: 다개체 시스템 (1)의 일치 문제는 임의의 $x_i(0), x_j(0)$ 와 $i, j = 1, \dots, N$ 에 대하여 식 (6)을 만족시키는 제어기 $u_i(t)$ 를 설계하는 문제로 정의한다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0 \quad (6)$$

본 논문의 목표는 식 (1)의 일치문제를 해결하는 관측기 기반의 제어기를 설계하는 것이다.

III 본론

식 (1)에 대하여 다음과 같은 로컬 관측기 기반의 일치 제어기를 제안한다. 각 개체는 식 (7)과 같이 단지 이웃한 개체들의 관측기의 상태 변수를 받을 수 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_i(t) &= A\zeta_i(t) + f(\zeta_i(t)) + Bu_i(t) + D_\theta H(y_i(t) - C\zeta_i(t)), \\ u_i(t) &= -\alpha B^T P_\epsilon K_\theta \sum_{j=1}^N a_{ij}(\zeta_i(t) - \zeta_j(t))\end{aligned}\quad (7)$$

위 식에서 $i=1, \dots, N$ 이고 $D_\theta = \text{diag}(\theta, \theta^2, \dots, \theta^n)$ 와 $K_\theta = \text{diag}(\theta^n, \theta^{n-1}, \dots, \theta)$ 는 이득 행렬을 나타내고 $\theta \in [1, \infty)$ 는 고이득 설계변수이다. P_ϵ 는 식 (5)의 해이다. 상수 $\epsilon \in (0, 1]$ 는 저이득 설계변수이다. 행렬 H 는 행렬 $A - HC$ 가 Hurwitz 하도록 설계한다. 상수 α 는 보조정리 3과 같다. ϵ, θ 의 설계방법은 정리 1의 증명과정에서 제시할 것이다.

정리1: 다개체 시스템 (1)에 대하여 가정 1,2가 성립한다면 관측기 기반의 제어기 (7)이 식 (1)의 일치치를 보장하도록 하는 설계변수들 ϵ, θ 이 존재한다.

증명: 먼저 관측오차의 동역학을 유도한다. $e_o(t) = (e_{o1}^T(t), \dots, e_{oN}^T(t))^T, e_{oi}(t) = x_i(t) - \zeta_i(t)$ 으로 정의하고 식 (1), (7)을 고려하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{e}_o(t) &= I_N \otimes (A - D_\theta HC) e_o(t) + f_o(t) \\ f_o(t) &= ((f(x_1(t)) - f(\zeta_1(t)))^T, \dots, (f(x_N(t)) - f(\zeta_N(t)))^T)^T\end{aligned}\quad (8)$$

좌표변환 $z_o(t) = I_N \otimes \Sigma e_o(t), \Sigma = \text{diag}(\theta^{-1}, \dots, \theta^{-n})$ 를 고려하면 식 (8)은 다음처럼 변환된다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_o(t) &= I_N \otimes (\Sigma A \Sigma^{-1} - \Sigma D_\theta HC \Sigma^{-1}) z_o(t) + (I_N \otimes \Sigma) f_o(t) \\ &= \theta I_N \otimes (A - HC) z_o(t) + (I_N \otimes \Sigma) f_o(t)\end{aligned}\quad (9)$$

여기서 등식 $\Sigma A \Sigma^{-1} = \theta A, \Sigma D_\theta HC \Sigma^{-1} = \theta HC$ 가 사용되었다[12]. 한편, 일치문제를 안정도문제로 변환하기 위해 식 (1), (7)을 고려하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + f(x_i(t)) - \alpha BB^T P_\epsilon K_\theta \sum_{j=1}^N l_{ij} \zeta_j(t) \\ &= Ax_i(t) + f(x_i(t)) - \alpha BB^T P_\epsilon K_\theta \sum_{j=1}^N l_{ij} (x_j(t) - e_{oj}(t))\end{aligned}\quad (10)$$

$x(t) = (x_1^T(t), \dots, x_N^T(t))^T$ 으로 정의하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= I_N \otimes Ax(t) + f_c(x(t)) - \alpha L \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta x(t) \\ &\quad + \alpha L \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta \Sigma^{-1} z_o(t) \\ f_c(x(t)) &= (f^T(x_1(t)), \dots, f^T(x_N(t)))^T\end{aligned}\quad (11)$$

보조정리1을 고려하면 행렬 T 의 역행렬은 다음과 같다.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (N-1)} \\ -1_{N-1} & I_{N-1} \end{pmatrix}\quad (12)$$

좌표 변환 $\xi(t) = (T^{-1} \otimes I_n) x(t)$ 를 고려하면 식 (11)은 식 (13)으로 변환된다.

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= I_N \otimes A \xi(t) + f_c(T \otimes I_n \xi(t)) \\ &\quad - \alpha T^{-1} L T \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta \xi(t) \\ &\quad + \alpha T^{-1} L \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta \Sigma^{-1} z_o(t)\end{aligned}\quad (13)$$

식 (12)로부터 다음 사실을 알 수 있다.

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) - x_1(t) \\ \vdots \\ x_N(t) - x_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ z(t) \end{pmatrix}\quad (14)$$

여기서 $z(t) = (z_1^T(t), \dots, z_{N-1}^T(t))^T$ 이다. 식 (14)를 고려하면 식 (13)은 다음처럼 2개의 하부시스템으로 분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + f(x_1(t)) \\ &\quad - \alpha L_{12} \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta z(t) \\ &\quad + \alpha L_1 \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta \Sigma^{-1} z_o(t) \\ L_1 &= (l_{11}, \dots, l_{1N})\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= I_{N-1} \otimes Az(t) + F(x(t)) \\ &\quad - \alpha L_{22} \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta z(t) \\ &\quad + \alpha \bar{L}_1 \otimes BB^T P_\epsilon K_\theta \Sigma^{-1} z_o(t) \\ F(x(t)) &= \begin{pmatrix} f(x_2(t)) - f(x_1(t)) \\ \vdots \\ f(x_N(t)) - f(x_1(t)) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (16)$$

여기서 \bar{L}_1 은 행렬 L 에서 1행을 제거한 부분행렬이다. 식 (14)로부터, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\| = 0$ 가 성립하면 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_1(t)\| = 0$ 이 만족됨을 알 수 있다. 따라서, 식 (1)의 일치문제는 식 (16)의 점근적 안정도를 증명하는 것으로 충분하다. 식 (15)는 일치상태의 동역학을 의미한다. 좌표변환 $z_c(t) = I_{N-1} \otimes \Sigma z(t)$ 를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{z}_c(t) &= \theta I_{N-1} \otimes Az_c(t) + I_{N-1} \otimes \Sigma F(x(t)) \\ &\quad - \alpha \theta L_{22} \otimes BB^T P_\epsilon z_c(t) \\ &\quad + \alpha \theta \bar{L}_1 \otimes BB^T P_\epsilon z_o(t)\end{aligned}\quad (17)$$

여기서 등식 $\Sigma BB^T P_\epsilon K_\theta \Sigma^{-1} = \theta BB^T P_\epsilon$ 가 사용되었다[12]. 선형이론으로부터 $U^{-1} L_{22} U = \Delta$ 을 성립시키는 행렬 U 가 항상 존재한다. Δ 는 $\lambda_i, i=1, \dots, N-1$ 를 대각요소로 가지는 상부 삼각 행렬이다. 다시, 좌표변환 $\delta(t) = (U^{-1} \otimes I_n) z_c(t)$ 를 고려하면 식 (17)은 식 (18)처럼 변환된다.

$$\begin{aligned}\dot{\delta}(t) &= \theta I_{N-1} \otimes A \delta(t) + U^{-1} \otimes \Sigma F(x(t)) \\ &\quad - \alpha \theta \Delta \otimes BB^T P_\epsilon \delta(t) \\ &\quad + \alpha \theta U^{-1} \bar{L}_1 \otimes BB^T P_\epsilon z_o(t)\end{aligned}\quad (18)$$

보조정리 3를 이용하여 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$ 을 만족하도록 설계하면 $I_{N-1} \otimes A - \alpha \Delta \otimes B B^T P_c$ 이 Hurwitz함을 증명하는 것은 어렵지 않다[12]. 따라서, 선형이론으로부터 다음 식을 만족시키는 $\Phi^H = \Phi > 0$ 가 항상 존재한다.

$$(I_{N-1} \otimes A + \Delta \otimes \bar{B})^H \Phi + \Phi (I_{N-1} \otimes A + \Delta \otimes \bar{B}) = -I_{n(N-1)} \quad (19)$$

여기서 $\bar{B} = -\alpha B B^T P_c$ 이다. 식 (9),(18)의 안정도 해석을 위하여 리아푸노프 후보함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) = \delta^H(t) \Phi \delta(t) + \theta z_o^H(t) (I_N \otimes Q) z_o(t) \quad (20)$$

행렬 $Q^T = Q > 0$ 는 다음 식의 해이다.

$$(A - HC)^T Q + Q(A - HC) = -3I_n \quad (21)$$

V_1 의 도함수를 유도하면 식 (22)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & \theta \delta^H(t) [(I_{N-1} \otimes A + \Delta \otimes \bar{B})^H \Phi + \Phi (I_{N-1} \otimes A + \Delta \otimes \bar{B})] \delta(t) \\ & + \delta^H(t) \Phi (U^{-1} \otimes \Sigma) F(x(t)) + F^H(x(t)) (U^{-1} \otimes \Sigma)^H \Phi \delta(t) \\ & - \theta \delta^H(t) \Phi U^{-1} \bar{L}_1 \otimes \bar{B} z_o(t) - \theta z_o^H(t) (U^{-1} \bar{L}_1 \otimes \bar{B})^H \Phi \delta(t) \end{aligned} \quad (22)$$

가정2와 $\theta \in [1, \infty)$ 를 고려하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} |\theta^{-j} (f_j(x_i) - f_j(x_1))| & \leq \gamma \sqrt{\sum_{k=1}^j (\theta^{-j} z_{ik})^2} \\ & \leq \gamma \sqrt{(\theta^{-1} z_{i1})^2 + \dots + (\theta^{-j} z_{ij})^2} \leq \gamma \|z_{i\alpha}(t)\| \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \|\theta \delta^H(t) \Phi (U^{-1} \otimes \Sigma) F(x(t))\| \\ & \leq \|\delta(t)\| \|\Phi\| \|(U^{-1} \otimes \Sigma) F(x(t))\| \\ & \leq \gamma \sqrt{n(N-1)} \|\delta(t)\| \|\Phi\| \|(U^{-1} \otimes I_n)\| \|z_c(t)\| \\ & \leq \sigma_1 \|\delta(t)\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 σ_1 은 적당한 상수이다. 또한, Young의 부등식을 이용하면 식 (25)를 얻는다.

$$\begin{aligned} & \|\theta \delta^H(t) \Phi U^{-1} \bar{L}_1 \otimes \bar{B} z_o(t)\| \\ & \leq \frac{1}{4} \|\Phi U^{-1} \bar{L}_1 \otimes \bar{B}\|^2 \|\delta(t)\|^2 + \theta^2 \|z_o(t)\|^2 \\ & = \sigma_2 \|\delta(t)\|^2 + \theta^2 \|z_o(t)\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 σ_2 은 적당한 상수이다. 식 (19),(24),(25)을 이용하면 식 (22)은 다음처럼 정리된다.

$$\dot{V}_1(t) = -\theta \|\delta(t)\|^2 + 2\sigma_1 \|\delta(t)\|^2 + 2\sigma_2 \|\delta(t)\|^2 + 2\theta^2 \|z_o(t)\|^2 \quad (26)$$

V_2 의 도함수를 유도하면 식 (27)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = & \theta^2 z_o^H(t) [(I_N \otimes ((A - HC)^H Q + Q(A - HC))] z_o(t) \\ & + \theta z_o^H(t) (I_N \otimes Q \Sigma) f_o(t) + \theta f_o^H(t) (I_N \otimes Q \Sigma)^H z_o(t) \end{aligned} \quad (27)$$

식 (23)을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \|z_o^H(t) (I_N \otimes Q \Sigma) f_o(t)\| \\ & \leq \|z_o(t)\| \|I_N \otimes Q\| \|I_N \otimes \Sigma f_o(t)\| \\ & \leq \gamma \sqrt{n(N-1)} \|z_o(t)\| \|I_N \otimes Q\| \|z_o(t)\| \\ & \leq \sigma_3 \|z_o(t)\|^2 \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 σ_3 은 적당한 상수이다. 식 (21), (28)을 이용하면 식 (27)은 다음과 같다.

$$\dot{V}_2(t) = -3\theta^2 \|z_o(t)\|^2 + 2\sigma_3 \theta \|z_o(t)\|^2 \quad (29)$$

결론적으로 V 의 도함수는 식 (30)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\theta \|\delta(t)\|^2 + 2\sigma_1 \|\delta(t)\|^2 \\ & + 2\sigma_2 \|\delta(t)\|^2 + 2\theta^2 \|z_o(t)\|^2 \\ & - 3\theta^2 \|z_o(t)\|^2 + 2\sigma_3 \theta \|z_o(t)\|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

여기서, $\dot{V}(t) < 0$ 을 만족시키기 위해서 식 (31)이 성립해야한다.

$$-\theta + 2\sigma_1 + 2\sigma_2 < 0, -\theta^2 + 2\sigma_3 \theta < 0 \quad (31)$$

설계변수 $\theta \in [1, \infty)$ 를 충분히 증가시키면 식 (31)를 항상 만족시킨다. 따라서, 식 (9), (18)은 점근적으로 안정하다. 이 사실은 식 (1)이 모든 개체가 일치상태에 도달함을 의미한다.

IV. 모의 실험

제안한 일치제어기의 타당성을 증명하기 위하여 다음과 같은 비선형 다개체 시스템을 고려해보자

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) & = A x_i(t) + B u_i(t), i = 1, \dots, 4 \\ y_i(t) & = C x_i(t) \end{aligned} \quad (32)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, f(x_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \sin 2x_{i2} \\ \cos x_{i3} \end{bmatrix}$$

$$x_i(t) = (x_{i1}(t) \ x_{i2}(t) \ x_{i3}(t))^T \in R^3$$

식 (32)의 네트워크 토폴로지는 그림 1과 같다[2]. 그림 1의 라플라시안 행렬은 식 (33)과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad (33)$$

그림 1의 그래프는 가정1을 만족시킨다. 또한, 식 (32)는 가정 2를 만족시킨다. 따라서, 보조정리 3에 따라 $\alpha = 0.15$, $\epsilon = 0.9$ 으로 설정하고 식 (5)를 풀면 다음을 얻는다.

$$P_c = \begin{bmatrix} 2.20 & 2.23 & 0.95 \\ 2.23 & 4.50 & 2.32 \\ 0.95 & 2.32 & 2.35 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

식 (31)를 이용하여 $\theta = 2$ 으로 설정한다. 개체의 초기값들은 식 (35)와 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} x_1(t) & = (0 \ 3 \ -1)^T, x_2(t) = (1 \ -2 \ 0)^T \\ x_3(t) & = (2 \ -1 \ 1)^T, x_4(t) = (3 \ 0 \ 2)^T \\ \zeta_i(t) & = (0 \ 0 \ 0)^T, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (35)$$

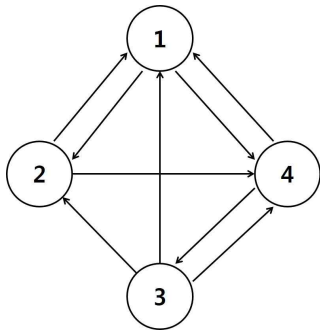


Fig. 1. Topology of directed graph
 그림 1. 방향 그래프의 토폴로지

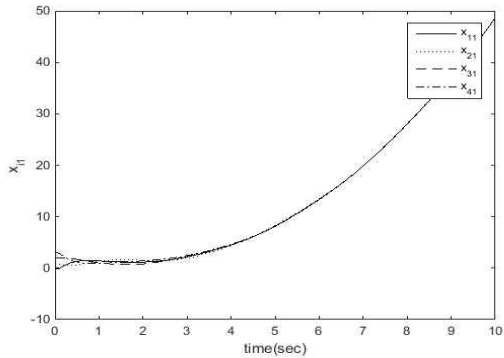


Fig. 2. The graph of $x_{i1}(t), i = 1, \dots, 4$
 그림 2. $x_{i1}(t), i = 1, \dots, 4$ 의 궤적

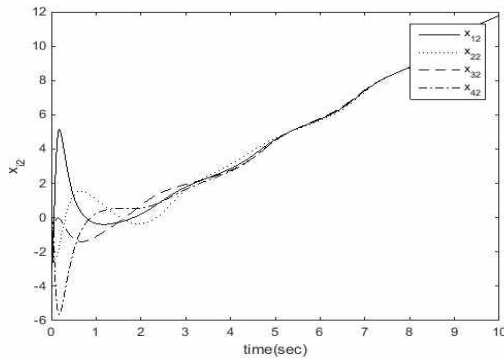


Fig. 3. The graph of $x_{i2}(t), i = 1, \dots, 4$
 그림 3. $x_{i2}(t), i = 1, \dots, 4$ 의 궤적

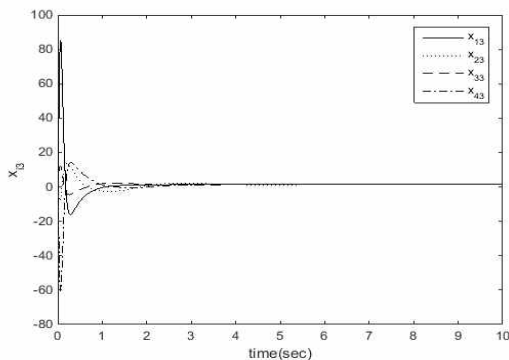


Fig. 4. The graph of $x_{i3}(t), i = 1, \dots, 4$
 그림 4. $x_{i3}(t), i = 1, \dots, 4$ 의 궤적

그림 2,3,4은 각 개체의 모든 상태변수들이 점근적으로 일치상태에 도달하고 있음을 보여준다. 관측기의 상태변수 $\zeta_i(t), i=1,2,3,4$ 도 각 개체의 상태변수를 잘 추정함을 확인하였고 지면관계상 결과는 생략하였다.

V. 결론

본 논문에서는 방향 네트워크로 연결된 삼각구조 비선형 시스템의 관측기 기반의 일치제어기를 제안하였다. 리아푸노프 방법을 이용하여 관측오차의 안정도와 일치상태에 도달함을 증명하였다.

References

[1]R. Olfati-Saber, and R. Murray, "Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.49, no.9, pp.1520-1533,2004..DOI: 10.1109/TAC.2004.834113

[2]J. Seo, H. Shim, and J. Back, "Consensus of high-order linear systems using dynamic output feedback compensator: Low gain approach," *Automatica*, vol.45, no.11, pp.2659-2664, 2009.DOI:10.1016/j.automatica.2009.07.022

[3]P. Wieland, R. Sepulchre, and F. Allgöwer, "An internal model principle is necessary and sufficient for linear output synchronization," *Automatica*, vol.47, no.5, pp.1068 - 1074, 2011.DOI:10.1016/j.automatica.2011.01.081

[4] Z. Li, Z. Duan, G. Chen, and L. Huang, "Consensus of Multiagent Systems and Synchronization of Complex Networks: A Unified Viewpoint," *IEEE Trans. Circuits & Systems-I: Regular Papers*, vol.57, no.1, pp.213-224, 2010.DOI:10.1109/TCSI.2009.2023937

[5] H. L. Trentelman, K. Takaba, and N. Monshizadeh, "Robust Synchronization of Uncertain Linear Multi-Agent Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.58, no.6, pp.1511-1523, 2013.DOI:10.1109/TAC.2013.2239011

[6] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and M. Fu, "Consensus of Multi-Agent Systems With

General Linear and Lipschitz Nonlinear Dynamics Using Distributed Adaptive Protocols," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.58, no.7, pp.1786-1791, 2013.DOI: 10.1109/TAC.2012.2235715

[7] J. Hu, J. Cao, J. Yu, and T. Hayat, "Consensus of nonlinear multi-agent systems with observer-based protocols," *Systems & Control Letters*, vol.72, pp.71-79, 2014,DOI:10.1016/j.sysconle.2014.07.004

[8] G. Wen, Z. Duan, G. Chen, and W. Yu, "Consensus Tracking of Multi-Agent Systems With Lipschitz-Type Node Dynamics and Switching Topologies," *IEEE Trans. Circuits & Systems I: Regular Papers*, vol.61, no.2, pp.499-511, 2014.DOI:10.1109/TCSI.2013.2268091

[9] W. Xu, J. Cao, W. Yu, and J. Lu, "Leader-following consensus of non-linear multi-agent systems with jointly connected topology," *IET Control Theory & Applications*, vol.8, no.6, pp.432-440, 2014.DOI:10.1049/iet-cta.2013.0813

[10] A. Isidori, L. Marconi, and G. Casadei, "Robust output synchronization of a network of heterogeneous nonlinear agents via nonlinear regulation theory," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.59, no.10, pp.2680-2691, 2014.DOI:10.1109/TAC.2014.2326213

[11] Z. Lin, *Low gain feedback*, Springer, 1999.

[12] S. Lee, "Output Feedback Consensus of High-order Integrators with a Communication Delay," *J. Inst. Korean. Electr. Electron. Eng.*, vol. 20, no. 4, pp. 378-384, 2016.

BIOGRAPHY

Sungryul Lee (Member)



1996 : B.S. degree in Electronic Engineering, Yonsei University.
1998 : M.S. degree in Electrical & Electronic Engineering, Yonsei University.

2003 : Ph.D. degree in Electrical & Electronic Engineering, Yonsei University.

2003~2006 : Research Engineer, Samsung Electronics.

2007~ : Professor, Kunsan National University