

## ZI 및 ZA형 웜기어의 치합전달오차 해석

이태훈<sup>1</sup> · 서준호<sup>2,\*</sup> · 박노길<sup>2</sup>

<sup>1</sup>부산대학교 대학원 기계공학부, <sup>2</sup>부산대학교 기계공학부

### Transmission Error Analysis of ZI and ZA Profile Worm Gears

Tae-Hoon Lee<sup>1</sup>, Junho Suh<sup>2,\*</sup> and Noh-Gill Park<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Graduate School, School of Mechanical Engineering, Pusan National University, Korea

<sup>2</sup>School of Mechanical Engineering, Pusan National University, Korea

(Received September 25, 2018; Revised November 28, 2018; Accepted November 29, 2018)

**Abstract** - Automobiles and systems requiring high gear ratios and high power densities generally use worm gears. In particular, as worm gears have a small volume and self-locking function, home appliances such as refrigerators and washers consist of worm gears. We can classify worm gears into cylindrical worms and rectangular worms. According to the AGMA standard, there are four types of cylindrical worms, ZA, ZN, ZK and ZI, depending on the machining of the worm shaft. It is preferable to use a ZI-type worm shaft, which is a combination of a worm wheel having an involute helical tooth surface and a conjugate tooth surface. However, in many cases, industries mostly use ZK, ZN, and ZA worm shafts because of the ease of processing. This paper presents numerical approaches to produce ZI and ZA worm surfaces and worm wheel. For the analysis of the transmission error of a worm gear system, this study (1) generates surface profile functions of ZI profile worm gear and worm shaft based on the common rack theory, (2) adopts the Newton-Raphson method for the analysis of the gear surface contact condition, and (3) presents and compares the corresponding transmission errors of ZI and ZA worm gears.

**Keywords** - worm gear system(웜기어시스템), ZI worm(ZI웜), ZA worm (ZA웜), gear transmission error (기어 치합전달오차)

#### Nomenclature

$\Omega_g$  : Rotational speed of worm shaft (rpm)  
 $\Omega_h$  : Rotational speed of worm wheel (rpm)  
 $Z_1$  : Tooth number of worm shaft  
 $Z_2$  : Tooth number of worm wheel  
 $v_g$  : Parameters of motion for worm shaft  
 $v_h$  : Parameters of motion for worm wheel  
 $\lambda_1 = \psi_2$  : Lead angles of worm shaft (deg.)

$\lambda_2 = \psi_1$  : Lead angles of worm wheel (deg.)  
 $\mathbf{n}_g$  : Normal vector of point  
 $\mathbf{n}_h$  : Normal vector of point  
 $\mathbf{V}_g$  : Velocity vector of worm shaft  
 $\mathbf{V}_h$  : Velocity vector of worm shaft  
 $\alpha$  : Normal pressure angle (deg.)  
 $A_g, B_g$  : Worm shaft surface parameters  
 $A_h, B_h$  : Worm wheel surface parameters  
 $d_1$  : Center distance between the rack and worm shaft (mm)  
 $d_2$  : Center distance between the rack and worm wheel (mm)  
 $\mathbf{N}_g$  : Normal plane of worm shaft at contact point

\*Corresponding author: junhosuh@pusan.ac.kr

Tel: +82-51-510-2332, Fax: +82-51-514-7640

<http://orcid.org/0000-0001-5516-9637>

© 2018, Korean Tribology Society

- $N_h$  : Normal plane of worm wheel at contact point
- $\theta_g$  : Rotational motion parameters of worm shaft
- $\theta_h$  : Rotational motion parameters of worm wheel
- $C$  : Coordinate system
- $T.E.$ : Transmission error

### 1. 서 론

기어는 다른 기계요소보다 동력 밀도가 높고 전달효율이 높기 때문에 주요 동력전달장치로 사용되고 있다. 그 중 워م 기어는 높은 기어비와 큰 동력밀도가 요구되는 전자동 주차브레이크 및 전동식 파워 스티어링과 같은 자동차 부품에 널리 사용된다. 특히 부피가 작고 자체 잠금 기능(self locking)의 장점으로 인하여 최근에는 냉장고, 에어컨과 같은 가전제품에 널리 사용된다. 큰 감속비를 가지며 피로에 강한 장점이 있는 반면에, 다른 기어들과 비교할 때 효율이 낮고 마모에는 취약한 단점을 가진다.

웜기어는 크게 실린더형 워م과 장구형 워프로 분류되며, AGMA규격[1]에 따르면 실린더형 워ムの 경우 워ム을 가공하는 방법에 따라 ZA, ZN, ZK, ZI형 4가지로 분류한다. ZA와 ZN워ムの 경우 직선 프로파일을 가진 선반틀을 이용하여 가공하고 ZK와 ZI 워ムの 경우 평면 프로파일을 이용하여 가공한다.

이와 짝을 이루는 기어인 워휠은 주로 인벌류트 치형의 나선형 헬리컬기어를 사용하는데, 이는 가공과 공구관리 측면에서의 장점으로 인해 대부분의 워머시시스템에서 사용되고 있다. 인벌류트 헬리컬 치면을 가지는 워휠과 기어 물림 법칙을 만족하는 공액 치면(conjugate tooth surface)[2]을 이루는 ZI형 워ム[3]을 사용하는 것이 가장 바람직하지만, 대부분의 경우 워 휠과 비공액 치면(non-conjugate teeth surface)을 이루지만 가공이 용이한 ZK, ZN, ZA 워ム을 사용한다. 이론적으로 완벽하지 않은 비공액 치면의 조합은 치합전달오차(gear Transmission Error)[4]를 필수적으로 동반하며 기어시스템의 소음진동특성과 내구성을 악화시킨다.

F. L. Litvin[5, 6]은 워ム 기어의 치면을 수학적으로 정의하였고, 워ム 기어 설계기술과 기어물림에 대한 연구를 하였다.

국내에서 기어의 내마멸성능, NVH성능, 구동성능 등을 향상시키기 위한 치형 수정 기술에 관한 연구가 있었으나[7-11], 공통랙(common rack) 이론을 사용한 새로운 치형의 창성에 관련한 연구는 많지 않다.

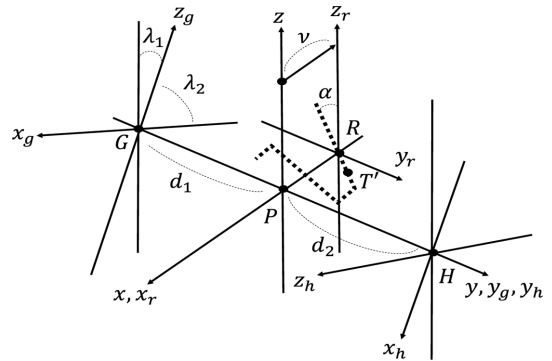


Fig. 1. Global and local coordinate system.

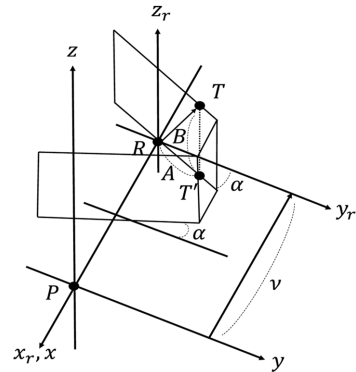


Fig. 2. Common rack coordinate system.

본 연구에서는 실린더형 워ム 중 ZA 및 ZI 워ム이 인벌류트 나선형 헬리컬 기어와 맞물릴 때 발생하는 전달오차를 면 방정식 접촉 이론과 뉴턴랩슨법(Newton-Raphson method)으로 계산하고 비교해보고자 한다.

## 2. 수치해석 모델

### 2-1. 워몌프트(ZI 워ム) 및 워휠 치면 창성 이론

Fig. 1과 Fig. 2와 같이 워몌프트와 워휠은 각각  $z_g$ ,  $z_r$ 축을 회전축으로 하여 양, 음의 방향으로  $\Omega_g$ ,  $\Omega_r$ 로 회전한다. 워ム과 워휠의 잇수는 각각  $Z_1$ ,  $Z_2$ 이고 속도비는  $\delta = (z_1/z_2) = (\Omega_2/\Omega_1)$ 으로 나타낼 수 있다. 공통랙은 기준좌표계 C의 x축 방향으로 병진운동한다. 절삭 운동 매개변수는 각각  $v_g$ ,  $v_r$ 로 놓는다.  $v_g$ ,  $v_r$ 은 각각 워몌프트 및 워휠 절삭에 사용된 랙 운동 매개변수이고 P에서 R까지의 거리이다. 그리고  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 는 각각 워몌프트와 워휠의 리드각이다. 이는 각각 워휠과 워몌프트의 헬리

**Table 1. Coordinate system and the corresponding unit vectors**

좌표계	기준점	단위벡터
$C(x, y, z)$	$P$	$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$
$C_g(x_g, y_g, z_g)$	$G$	$\mathbf{i}_g, \mathbf{j}_g, \mathbf{k}_g$
$C_h(x_h, y_h, z_h)$	$H$	$\mathbf{i}_h, \mathbf{j}_h, \mathbf{k}_h$
$C_r(x_r, y_r, z_r)$	$R$	$\mathbf{i}_r, \mathbf{j}_r, \mathbf{k}_r$
$C_{ws}(x_{ws}, y_{ws}, z_{ws})$	$G$	$\mathbf{i}_{ws}, \mathbf{j}_{ws}, \mathbf{k}_{ws}$
$C_{ww}(x_{ww}, y_{ww}, z_{ww})$	$H$	$\mathbf{i}_{ww}, \mathbf{j}_{ww}, \mathbf{k}_{ww}$

C: 기준좌표계 (공간고정 좌표계),  $C_r$ : 워샤프트 기준좌표계 (공간고정 좌표계),  $C_h$ : 워휠 기준좌표계 (공간고정 좌표계),  $C_r$ : 공통랙 좌표계 (물체고정 좌표계),  $C_{ws}$ : 워샤프트 좌표계 (물체고정 좌표계),  $C_{ww}$ : 워휠 좌표계 (물체고정 좌표계)

컬각과 동일하다. ( $\psi_h = \lambda_1, \psi_g = \psi_2$ )이 모델에서 사용된 좌표계는 Table 1에 있다.

워샤프트와 워휠의 치면 창성 이론에 따르면 래과 워샤프트 그리고 래과 워휠 사이에 기어 물림이 형성된다.

2-1-1. 공통랙 절삭면의 수학적 정의

워샤프트와 워휠의 기어 물림이 형성되기 위한 조건은 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{n}_g \cdot \Delta \mathbf{V}_g = 0 \tag{1}$$

$$\mathbf{n}_h \cdot \Delta \mathbf{V}_h = 0 \tag{2}$$

여기서,  $\mathbf{n}_g, \mathbf{n}_h$ 는 각각 점  $T_g, T_h$ 에서의 법선벡터이고 아래와 같다.

$$\mathbf{n}_g = \frac{\partial \mathbf{RT}_g}{\partial A_g} \times \frac{\partial \mathbf{RT}_g}{\partial B_g} = \cos\alpha \mathbf{i}_r - \sin\alpha \mathbf{j}_r \tag{3}$$

$$\mathbf{n}_h = \frac{\partial \mathbf{RT}_h}{\partial A_h} \times \frac{\partial \mathbf{RT}_h}{\partial B_h} = \cos\alpha \mathbf{i}_r - \sin\alpha \mathbf{j}_r \tag{4}$$

$\Delta \mathbf{V}_g, \Delta \mathbf{V}_h$ 는 각각 래과 워샤프트, 워휠의 상대속도이고 아래와 같다.

$$\Delta \mathbf{V}_g = \mathbf{V}_g - \mathbf{V}_r \tag{5}$$

$$\Delta \mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h - \mathbf{V}_r \tag{6}$$

따라서 식 (3), (5)을 물림방정식 (1)에 대입하여 정리하면,

$$A_g = \sin\alpha(v_g - \tan\psi_g B_g) \tag{7}$$

이고, 식 (4), (6)을 물림방정식 (2)에 대입하여 정리하면,

$$A_h = \sin\alpha(v_h - \tan\psi_h B_h) \tag{8}$$

과 같다.

2-1-2. 워샤프트 및 워휠의 치면 정의

물림방정식 (7), (8)을 적용하면 점  $T_g$  및  $T_h$ 는 각각 창성된 워샤프트 및 워휠 치면 상의 점이 된다. 따라서 워샤프트 및 워휠의 기준점  $G, H$ 에서  $T_g, T_h$ 까지의 위치벡터는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{GT}_g(A_g, B_g, v_g) &= \mathbf{GP} + \mathbf{PR} + \mathbf{RT}_g \\ &= d\mathbf{j} - v_g\mathbf{i} + A_g\mathbf{b} + B_g\mathbf{k}_r \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{HT}_h(A_h, B_h, v_h) &= \mathbf{HP} + \mathbf{PR} + \mathbf{RT}_h \\ &= -d_2\mathbf{j} - v_h\mathbf{i} + A_h\mathbf{b} + B_h\mathbf{k}_r \end{aligned} \tag{10}$$

여기서,  $\mathbf{b} = \sin\alpha\mathbf{i}_r + \cos\alpha\mathbf{j}_r$  이다.

식 (9), (10)을 각각  $C_{ws}, C_{ww}$  좌표 성분으로 나타내면, 각각 워샤프트와 워휠의 치면상의 점( $x_g, y_g, z_g$ ), ( $x_h, y_h, z_h$ )으로 표현된다.

여기서, 워샤프트 치면 상의 점은

$$x_g(A_g, B_g, v_g) = \mathbf{GT}_g(A_g, B_g, v_g) \cdot \mathbf{i}_{ws}$$

$$y_g(A_g, B_g, v_g) = \mathbf{GT}_g(A_g, B_g, v_g) \cdot \mathbf{j}_{ws}$$

$$z_g(A_g, B_g, v_g) = \mathbf{GT}_g(A_g, B_g, v_g) \cdot \mathbf{k}_{ws}$$

이고, 워휠 치면 상의 점은

$$x_h(A_h, B_h, v_h) = \mathbf{HT}_h(A_h, B_h, v_h) \cdot \mathbf{i}_{ww}$$

$$y_h(A_h, B_h, v_h) = \mathbf{HT}_h(A_h, B_h, v_h) \cdot \mathbf{j}_{ww}$$

$$z_h(A_h, B_h, v_h) = \mathbf{HT}_h(A_h, B_h, v_h) \cdot \mathbf{k}_{ww}$$

으로 나타낸다.

2-2. ZA 형 워샤프트 창성 이론

인벌루트 치형을 가지는 워휠과 이론적으로 완벽한 물림을 가지는 ZI형 워과 달리 ZA형 워은 일반적인 사가공법으로 제조한다. 생산방법의 간편함과 저렴한 제

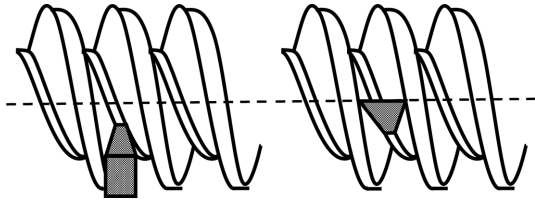


Fig. 3. ZA worm - top & side view.

작비로 인하여 일반 산업현장에서 널리 이용된다. 하지만 인블루트 치형을 가지는 워름과 필연적으로 치합전달오차를 가지며 이로 인하여 소음진동 문제 또는 내구성 문제를 가진다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 다양한 연구가 진행되어 왔다. Fig. 3은 ZA형 워름기어가 선삭되는 형상을 나타내며, 워름프트가 회전하며 지나가는 공구의 선 상에 치면이 생성된다.

2-3. 워름프트(ZI 및 ZA) 및 워름 물림 이론

워름프트와 워름의 물림 이론이 성립하기 위해서는 두 기어의 접촉점에서 기하학적 조건이 요구된다.

2-3-1. 접촉점에서의 법선 방향 일치성

워름프트와 워름 치면의 법선 방향이 일치해야 하는데 그 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{N}_g \times \mathbf{N}_h = 0 \tag{11}$$

식 (11)에서 두 개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$F_1(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_g, \theta_h) = \mathbf{N}_g \times \mathbf{N}_h \cdot \mathbf{i} = 0 \tag{12}$$

$$F_2(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_g, \theta_h) = \mathbf{N}_g \times \mathbf{N}_h \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{13}$$

2-3-2. 기하학적 적합성

접촉점에서의 기하학적 적합성이 성립하는데, 그 조건은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{S}_h + \mathbf{GH} \tag{14}$$

이고, 여기서  $\mathbf{S}_g$ 와  $\mathbf{S}_h$ 는 각각 워름프트와 워름의 운동에 의한 치면이다.

$$\mathbf{S}_g = \mathbf{GT}_g \cdot \mathbf{C}_{wg} \tag{15}$$

$$\mathbf{S}_h = \mathbf{HT}_h \cdot \mathbf{C}_{wh} \tag{16}$$

$$\mathbf{GH} = (d_1 + d_2) \cdot \mathbf{i} \tag{17}$$

이고, 식 (14)를 우변으로 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_s = 0 \quad (\mathbf{K}_s = \mathbf{S}_g - \mathbf{S}_h - \mathbf{GH}) \tag{18}$$

따라서, 식 (18)에서 세 개의 방정식을 얻을 수 있다.

$$F_3(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_g, \theta_h) = \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{i} = 0 \tag{19}$$

$$F_4(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_g, \theta_h) = \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{20}$$

$$F_5(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_g, \theta_h) = \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{21}$$

2-4. 치합전달오차 계산

식 (12), (13), (19), (20), (21)에서 주어진 변수 중  $\theta_g$ 를 기지수로 놓고, 나머지 변수들( $A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_h$ )을 미지수로 놓는다. 이를 다시 정리하면,

$$\begin{aligned} F_1(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_h) &= 0 \\ F_2(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_h) &= 0 \\ F_3(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_h) &= 0 \\ F_4(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_h) &= 0 \\ F_5(A_g, B_g, A_h, B_h, \theta_h) &= 0 \end{aligned} \tag{22}$$

으로 나타낼 수 있고, 뉴튼랩슨법(Newton-Raphson method)을 사용하여 주어진 변수들을 구한다. 따라서 구해진  $\theta_g$ 와  $\theta_h$ 로부터 치합전달오차를 다음 식 (23)으로 나타낼 수 있다. 또한 워름의 원주방향 치합전달오차(circumferential transmission error,  $TE_C$ )를 이용하는 것이 편리한 경우가 있으므로 원주방향 치합전달오차는 식 (24)와 같이 계산할 수 있다. 본 연구에서 치합전달오차는 원주방향 치합전달오차를 사용한다.

$$TE = \theta_h - \delta\theta_g \tag{23}$$

$$TE_C = d_2(\theta_h - \delta\theta_g) \tag{24}$$

2-5. 치합전달오차 계산 알고리즘

치합전달오차를 계산하기 위한 알고리즘이 Fig. 4에 도시되었다. 워름프트의 회전변위( $\theta_g$ )는 미리 주어지며 이에 따른 워름의 회전변위( $\theta_h$ )는 식 (22)를 뉴튼랩슨법

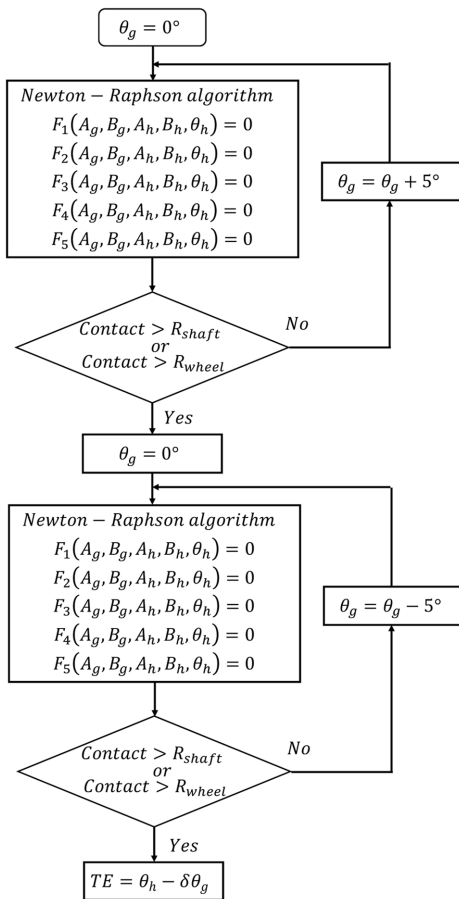


Fig. 4. T.E. analysis algorithm.

으로 계산함으로써 얻을 수 있다. 워샤프트의 초기 각 변위( $\theta_g = 0^\circ$ )를 기준으로 양의 방향과 음의 방향으로  $5^\circ$  씩 점진적으로 증감시키며 그에 따른 접촉시의 워휠 회전 변위( $\theta_h$ )를 계산한다. 다음 단계의 초기 변위는 전 단계에서의 해( $A_g, B_g, A_h, B_h$ )를 사용한다. 각 단계에서 해를 구한 후 워샤프트와 워휠에서의 접촉점 위치가 워샤프트와 워휠의 이끝지름 밖으로 나가게 되면 해 구하는 과정을 종료한다.  $S_g$ 와  $S_h$ 는 각각 기어 물림방정식을 이용하여 계산한 공간상의 무한곡면이며 뉴턴랩슨법을 이용하여 계산한 두 곡면의 접촉점은 실제 기어의 기하학적 범위를 벗어나서도 구해지므로 반드시 접촉점의 범위를 확인해야 한다.

2-6. 해석모델

Table 2는 치합전달오차를 계산하기 위한 워기어시스

Table 2. Worm gear system configuration

워샤프트	
피치원 지름( $U_1$ )	9.87 mm
잇수( $N_1$ )	1
압력각( $\alpha_1$ )	$20^\circ$
이끝지름	11.87 mm
축방향 피치	3.16 mm
워휠	
피치원 지름( $U_2$ )	26.13 mm
잇수( $N_2$ )	26
압력각( $\alpha_2$ )	$20^\circ$
이끝지름	28.13 mm

템의 제원을 나타낸다. 속도비는 26:1을 가지며 워와 워휠의 피치원 지름은 9.87 mm 및 26.13 mm이다. 워기어의 헬리컬각은 아래와 같은 식 (25)으로 계산 가능하다. 본 워기어 시스템의 치각 모듈은 1이며 축각 모듈의 경우 식 (26)을 이용하여 계산할 수 있으며 약 1.005이다. 헬리컬각( $\lambda$ )과 축각 모듈( $M_s$ )의 경우 Table 2에 주어진 기어 기본 제원을 통하여 간접적으로 구해지는 값이며, 설계변수로서 주어질 경우 반올림 오차로 인한 정확한 값 전달이 어려워 아래 식 (25) 및 (26)의 공식만을 제시하였다.

$$\lambda = \text{atan}\left(\frac{U_2}{U_1 N_2}\right) \tag{25}$$

$$M_s = \frac{M_n}{\cos \lambda} = \frac{U_2}{N_2} \tag{26}$$

3. 치합전달오차 해석결과

Table 2에 제시된 워기어시스템의 치합전달오차는 Fig. 4의 알고리즘을 사용하여 계산하였으며 계산결과는 Fig. 5와 같다. 본 연구에서는 식 (24)에 제시된 원주방향 치합전달오차를 사용하였다. 이는 원주방향 치합전달오차가 기어 가공시 정밀도와 연관이 깊기 때문이다. ZI형 워기어의 경우 워와 워휠의 공액치면 특성으로 인해 이론적으로 0의 치합전달오차를 가지며 본 연구에서 계산된 치합전달오차도 Fig. 5(a)와 같이 동일한 결과를 가진다. ZA형 워의 경우 일반적인 나사면을 가지게 되며 헬리컬치형을 가지는 워휠과 공액치면이 아니므로 0이 아닌 전달오차를 보인다. Fig. 5(b)는 워휠의 각 치들이

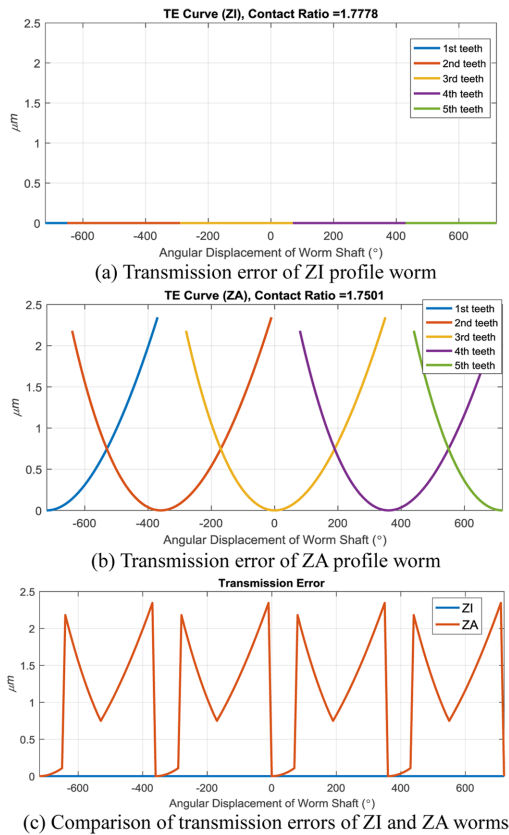


Fig. 5. Gear transmission error (ZI vs ZA).

웜샤프트와 맞물릴 때 발생하는 치합전달오차를 각각 도시한 것이며 실제 치합전달오차는 큰 값이 지배하게 되므로 Fig. 5(c)와 같은 값을 가진다. 특히 증가하는 형태의 치합전달오차는 소음진동 특성을 악화시키는 것으로 알려져 있으며, 줄어드는 형태의 오차는 내구성을 악화시키는 것으로 알려져 있으므로[2] 일반적인 나사 가공법으로 제작된 ZA형 웜의 경우 0의 오차를 가지는 ZI형 웜 대비 내구성 및 소음진동 측면에서 모두 좋지 않은 것을 예상할 수 있다. 물림률의 경우 ZI형 웜의 경우 1.78로 계산되었으며 ZA형 웜의 경우 이보다 작은 1.75로 계산되었다. 물림률은 본 연구에서 개발된 매트랩(MATLAB) 수치해석 코드를 이용하여 계산되었으며, 웜과 웜휠의 이끝반지름 정보와 웜-웜휠 접촉점의 비교를 통하여 계산되었다.

기어를 탄성체가 아닌 강체로 가정한다면 Fig. 5(b)에서 보는 바와 같이 ZA형 웜의 경우 웜과 웜휠은 항상 한 쌍의 치만 접촉하므로 물림률은 1.75가 아닌 1이 된다.

#### 4. 결 론

본 연구는 웜기어 시스템의 윤활 및 내구해석의 전단계로서 수행되었으며 아래와 같은 결론을 내릴 수 있다.

(a) 치합전달오차 분석을 통하여 ZI형 웜 치면이 이론상의 치면과 동일하게 생성되었음을 확인하였다.

(b) ZA형 웜이 ZI형 웜 대비 가지는 치합전달 오차량을 분석하였다.

(c) ZA형 웜의 경우 ZI형 웜샤프트 대비 내구성(감소하는 형태의 치합전달오차) 및 소음진동(증가하는 형태의 치합전달오차) 특성 모두가 악화될 것이라 예상할 수 있다[2].

#### Acknowledgements

이 논문은 부산대학교 기본연구지원사업(2년)에 의하여 연구되었음.

#### References

- [1] AGMA, 6022-C93, “Design Manual for Cylindrical Wormgearing”, pp. 5-8, 1993.
- [2] Litvin, F. L., “Gear Geometry and Applied Theory, 2<sup>nd</sup> edition”, Cambridge, 2004.
- [3] Crosner, W. P., “Design and Application of the Worm gear”, ASME Press, New York, pp. 38-61, 2002.
- [4] Harris, S. L., “Dynamic loads on the teeth of spur gears”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 172, pp. 87-100, 1958.
- [5] Litvin, F. L., Alfonso, Fuentes, “Gear Geometry and Applied Theory”, Cambridge, 2004.
- [6] Litvin, F. L., “Generalized concept of meshing and contact of involute crossed helical gears and its application”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, No. 34, pp. 3710-3745, 2005.
- [7] Kim, T. W., Hwang, J. Y., Cho, Y. J., “A study of spur gear tooth profile modification scheme for scuffing resistance improvement”, *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 18, No. 6, pp. 418-424, 2002.
- [8] Tak, S. H., Hwang, G. S., Son, Y. S., Bae, H. J., Lyu, S. K., “A study on the transmission error of the gear on contact load”, *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 23, No. 3, pp. 117-122, 2007.
- [9] Lee, S. C., “Tooth profile design of an oval gear according to the curvature of the pitch curve”, *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 28, No. 1, pp. 27-32, 2012.

- [10] Cheon, G. J., "Optimal design of a gear pump for yarn-  
ing", *J. Korean Soc. Tribol. Lubr. Eng.*, Vol. 18, No.  
4, pp. 279-284, 2002.
- [11] Choi, J. H., Ahn S. C., Park S. S., "Tooth profile

analysis for face gear with 1:2 gear ratio in hand-  
piece with  $160^\circ$  contra angle", *J. Korean Soc. Tri-  
bol. Lubr. Eng.*, Vol. 30, No. 2, pp. 86-91, 2014.