The Korean Journal of Applied Statistics (2018) DOI: https://doi.org/10.5351/KJAS.2018.31.6.751
31(6), 751–759

Further study on the risk model with a continuous type investment

Seung Kyoung Choi[a] · Eui Yong Lee[a,1]

[a]Department of Statistics, Sookmyung Women's University

(Received September 6, 2018; Revised October 3, 2018; Accepted October 10, 2018)

Abstract

Cho *et al.* (*Communications for Statistical Applications and Methods*, **23**, 423–432, 2016) introduced a risk model with a continuous type investment and studied the stationary distribution of the surplus process. In this paper, we extend the earlier analysis by assuming that additional instant investment is made when the surplus process reaches a certain sufficient level. We obtain the explicit form of the stationary distribution of the surplus process. The case is shown as an example, when the amount of claim is exponentially distributed.

Keywords: risk model, surplus process, stationary distribution, level crossing, martingale, optional sampling theorem

1. 서론

Cho 등 (2016)은 연속적으로 투자가 이루어지는 보험상품 리스크 모형(risk model)을 소개하고, 잉여금 과정(surplus process)의 정상분포함수(stationary distribution function)를 연구하였다. 보험상품의 잉여금은 단위시간당 $c > 0$씩 들어오는 보험료에 의해 증가하고, 포아송 과정(Poisson process)을 따라 발생하는 보험금 청구에 의해 감소하다. 보험금 청구는 단위시간당 평균 $\lambda > 0$개 발생하고, 청구액은 서로 독립이고 평균이 $\mu > 0$인 일반적인 분포함수 G를 따른다. 잉여금 수준이 적정수준에 이르면 단위시간당 a $(0 < a < c)$씩 연속적으로 다른 사업으로의 투자가 이루어진다. 여기서 보험료율 c는 단위시간당 빠져나가는 보험청구액의 평균 $\lambda\mu$보다 크고, $c - a$는 잉여금이 무한히 커지는 것을 방지하기 위해 $\lambda\mu$보다 작다고 가정한다. 잉여금이 적정수준 밑으로 떨어지면 다시 적정수준에 이를 때까지 투자가 중지된다

Cho 등 (2016)은 잉여금 과정 $\{U(t), t \geq 0\}$을 적성수준 위에 있는 $\{U_1(t), t \geq 0\}$와 적정수준 아래에 있는 $\{U_2(t), t \geq 0\}$로 분해한 후, 마팅게일(martingale) 변환 기법을 사용하여 $\{U_1(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수를 구하고, 전진미분방정식 방법을 이용하여 $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수의 특성함수(characteristic function)를 구하였다. 그리고 $\{U(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수를 $\{U_1(t), t \geq 0\}$와 $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수의 가중평균(weighted average)으로 유도할 수 있음을 보였다. Choi와 Lee (2018)는 Cho 등 (2016)의 리스크 모형에서 잉여금이 적정수준 미만일 때 부과되는 벌

[1]Corresponding author: Department of Statistics, Sookmyung Women's University, Cheongpa-ro 47-gil 100, Yongsan-Gu, Seoul 04310, Korea. E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr

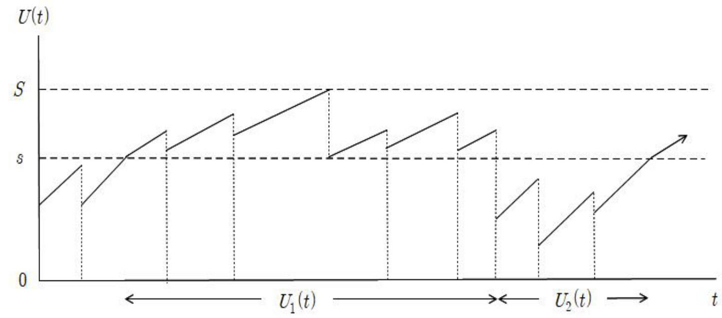

Figure 1.1. A sample path of $\{U(t), t \geq 0\}$.

금(penalty)과 잉여금이 쌓이므로 발생하는 기회비용(opportunity cost) 등을 고려한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용을 구하고 이를 최소화하는 단위시간당 투자량 a가 유일하게 존재함을 보였다.

본 논문에서는 Cho 등 (2016)의 모형을 좀더 현실적으로 일반화시킨 보험상품 리스크 모형을 제시한다. Cho 등 (2016)의 모형에서와 같이 잉여금 수준이 적정수준 $s > 0$를 넘어가면 단위시간당 a씩 연속적으로 다른 사업으로의 투자가 이루어지지만, 만일 또 다른 충분한 수준 $S > s$에 이르면 $S - s$만큼의 투자가 즉시(immediately) 이루어진다. 즉, 잉여금 수준이 S에 이르게 되면 $S - s$만큼 다른 사업으로의 투자가 이루어져 잉여금 수준이 즉시 s로 내려간다. 이와 같은 잉여금의 운용정책은 재고(inventory) 모형의 연구에서 많이 등장하는 $(s, S)-$정책과 일맥상통한다, $(s, S)-$정책은 Dvoretzky 등 (1953)에 의해 제시되고 최적성이 연구된 재고운용정책이다.

오랫동안 리스크 모형에서 잉여금 과정의 연구는 잉여금의 상태가 음수가 되는 파산(ruin)과 이와 관련된 특성들에 초점이 맞추어져 왔다. 이의 대표적인 연구 결과들을 간략히 소개하면, 리스크 모형에서 잉여금의 파산확률 연구는 Klugman 등 (2004)에 잘 요약되어 있고, 파산까지 걸리는 시간 연구는 Gerber (1990)에서 시작되어, Gerber와 Shiu (1997)는 파산까지의 시간, 파산 직전 잉여금의 상태와 파산 후 0 밑으로 떨어진 양의 결합분포(joint distribution)를 연구하였고, Dickson과 Willmot (2005)은 파산까지 걸리는 시간의 라플라스 변환(Laplace transform)을 구하였다.

최근 들어 Cho 등 (2013), Kim과 Lee (2015)와 Cho 등 (2016)에 의해 리스크 모형에서 잉여금 과정의 상태(level)에 대한 확률적 분석 연구가 시작되었다. 이들은 기존의 리스크 모형에서와 달리, 잉여금 과정이 음수가 되어도 계속해서 진행이 된다고 가정하고, 또 투자 개념을 도입하여 잉여금이 무한히 커지는 것을 방지하여, 잉여금 과정이 정상 상태에 들었을 때 이의 분포함수를 구하였다. 잉여금 과정의 정상분포함수를 알면, 장시간에 걸친 잉여금의 평균과 분산(변동성) 등을 계산할 수 있어, 보험상품의 설계 단계에서는 물론 운용 과정에서도 매우 유용하게 쓰일 수 있다.

Figure 1.1에 본 논문에서 연구되는 리스크 모형에서 잉여금 과정의 표본경로(sample path)가 그려져 있다. 잉여금 과정의 정상분포함수를 구하기 위해, Cho 등 (2016)에서와 같이, 잉여금 과정 $\{U(t), t \geq 0\}$을 적성수준 s와 충분수준 S 사이에 머무는 $\{U_1(t), t \geq 0\}$와 적정수준 s밑에 있는 $\{U_2(t), t \geq 0\}$로 분해한다. $\{U_1(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수를 마르코프 성질(Markov property)과 마팅게일 선택추출정리(optional sampling theorem)을 이용하여 구하고, $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수를 수준교차(level crossing) 기법을 활용하여 직접 구한다. Cho 등 (2016)에서는 $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수를 못 구하고 이의 특성함수를 구했었다. $\{U(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수는 $\{U_1(t), t \geq 0\}$와 $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수의 가중평균으로 표시될 수 있음을 보이고, 보험청구액의 분포 G가 지수분포인 경우를 예제로 다룬다.

2. $\{U(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수

잉여금 과정 $\{U(t), t \geq 0\}$에서 적성수준 s와 충분수준 S 사이에 있는 부분을 떼어내 연결하여 $\{U_1(t), t \geq 0\}$을 만들고, 적정수준 s 아래에 있는 부분을 떼어내 연결하여 $\{U_2(t), t \geq 0\}$을 만든다. 세 확률과정 모두 재생과정(regenerative process)되며 이들의 한 주기를 각각 T, T_1, T_2라 놓고, 이들의 정상분포함수를 각각 $F(x)$ $(-\infty < x \leq S)$, $F_1(x)$ $(s \leq x \leq S)$, $F_2(x)$ $(-\infty < x < s)$라 놓으면 재생보상정리(renewal reward theorem)에 의해

$$F(x) = \frac{E(T_1)F_1(x) + E(T_2)F_2(x)}{E(T)}, \quad -\infty < x \leq S$$

이 된다 (Ross, 1996, pp. 133–135). 여기서 $E(T) = E(T_1) + E(T_2)$이다. 그리고 $\{U_1(t), t \geq 0\}$와 $\{U_2(t), t \geq 0\}$는 각각의 주기 내에서는 마르코프 성질을 만족하게 됨을 알 수 있다. 지금부터 $F(x)$를 구하는데 필요한 $F_1(t)$, $E(T_1)$, $E(T_2)$와 $f_2(t) = (d/dx)F_2(t)$를 마팅게일 선택추출정리, 마르코프 성질, 수준교차 기법 등을 이용하여 차례로 유도해본다.

2.1. $\{U_1(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수

본 논문의 $\{U_1(t), t \geq 0\}$는 Cho 등 (2016)에서와 달리 잉여금 수준이 S $(0 \leq s < S)$에 이르면 다른 사업으로의 투자가 즉시 이루어져 s로 떨어진다. 즉, 잉여금 수준은 S를 초과할 수 없다. $U_1(t)$가 x $(s \leq x < S)$에서 출발하여 구간 $[x, S)$를 처음으로 벗어나는 시간을

$$T_x^S(x) = \inf\{t \geq 0 : U_1(t) \notin [x, S), U_1(0) = x\}$$

라 놓고, $U_1(t)$가 S에 먼저 이를 확률을 $P_x^S(x, S)$, x 밑으로 먼저 떨어질 확률을 $P_x^S(x, x-)$라 놓자. Cho 등 (2016)에서와 같이 두 마팅게일

$$M_1(t) = U_1(t) - E[U_1(t)], \qquad W_1(t) = \frac{e^{\theta U_1(t)}}{E[e^{\theta U_1(t)}]}$$

을 정의하자. 여기서 θ는 Cho 등 (2016)에서 보인 바와 같이

$$a(\theta) = \theta(c-a) + \lambda\{M_Y(-\theta) - 1\} = 0, \quad M_Y(-\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta y} dG(y)$$

을 만족하는 유일한 양의 해이다. 여기서 Y는 보험청구액을 나타내는 확률변수이다.

Cho 등 (2016)에서와 같은 방법으로 두 마팅게일에 정지시간(stopping time) $T_x^S(x)$를 가지고 Karlin과 Taylor (1975, pp. 257–262)에 있는 선택추출정리(optional sampling theorem)을 적용하면

$$E\left[T_x^S(x)\right] = \frac{(S-x)P_x^S(x,S) - E(Y_e)P_x^S(x,x-)}{c-a-\lambda\mu}, \quad s \leq x < S, \tag{2.1}$$

$$P_x^S(x,S) = \frac{e^{\theta x} - e^{\theta x}M_{Y_e}(-\theta)}{e^{\theta S} - e^{\theta x}M_{Y_e}(-\theta)} = 1 - P_x^S(x,x-), \quad s \leq x < S \tag{2.2}$$

을 얻을 수 있다. 여기서 Y_e는 $U_1(t)$가 보험청구에 의해 x 밑으로 떨어졌을 때, 떨어진 양을 나타내며 보험청구액 Y의 잔여(residual)량이 되며, G의 평형분포(equilibrium distribution) $G_e(y) = (1/\mu)\int_0^y [1 - G(x)]dx$ $(0 < y < \infty)$를 따른다 (Klugman 등, 2004, p.240). 따라서 $E(Y_e) = E(Y^2)/2\mu$이고, $M_{Y_e}(-\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta y} dG_e(y) = (1/\mu\theta)[1 - M_Y(-\theta)]$이다.

2.1.1. $F_1(t)$의 유도 $\{U_1(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수를 구하기 위해, $U_1(t)$가 x $(s \leq x < S)$에서 출발하여 구간 $[s, S)$를 벗어나는 기간 $T_s^S(x)$동안에 x 위에 있던 기간을 $T_1(x)$라 놓으면, $\{U_1(t), t \geq 0\}$의 마르코프 성질에 의해

$$E[T_1(x)] = E\left[T_x^S(x)\right] + E[T_1(x)]P_x^S(x, x-)P_s^x((x - Y_e) \vee s, x) \tag{2.3}$$

이 됨을 알 수 있다. 여기서 $E[T_x^S(x)]$와 $P_x^S(x, x-)$는 식 (2.1)과 (2.2)에 주어져 있고, $P_s^x((x - Y_e) \vee s, x)$는 $U_1(t)$가 s와 x 사이에 떨어지고 s 밑으로 가기 전에 다시 x에 이르는 확률로

$$P_s^x((x - Y_e) \vee s, x) = \int_0^{x-s} P_s^x(x - y, x) dG_e(y) \tag{2.4}$$

이다. 여기서 $P_s^x(x - y, x)$는 식 (2.2)를 얻을 때와 같은 방법으로, 마팅게일 $W_1(t)$에 선택추출정리를 적용하면

$$P_s^x(x - y, x) = \frac{e^{\theta(x-y)} - e^{\theta s} M_{Y_e}(-\theta)}{e^{\theta x} - e^{\theta s} M_{Y_e}(-\theta)}$$

이 됨을 유도할 수 있다. 식 (2.3)으로부터 $T_1(x)$의 기댓값은 아래와 같다.

$$E[T_1(x)] = \frac{E\left[T_x^S(x)\right]}{1 - P_x^S(x, x-)P_s^x((x - Y_e) \vee s, x)}, \quad s \leq x < S.$$

$U_1(t)$는 s에서 출발하여 구간 $[s, S)$를 벗어나면 다시 s에서 출발하고 이 과정이 확률적으로 반복된다. 이 기간 $T_s^S(s)$동안에 x 위에 있던 기간의 기댓값은, 일단 x에 먼저 도달해야 하므로, $P_s^x(s, x)E[T_1(x)]$이 되며, $\{U_1(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수는 아래와 같이 주어진다.

$$\overline{F_1}(x) = \frac{P_s^x(s, x)E[T_1(x)]}{E\left[T_s^S(s)\right]} = 1 - F_1(x), \quad s \leq x \leq S.$$

여기서 식 (2.2)를 응용하면 $P_s^x(s, x) = \{e^{\theta s} - e^{\theta s} M_{Y_e}(-\theta)\}/\{e^{\theta x} - e^{\theta s} M_{Y_e}(-\theta)\}$이 되며, $E[T_s^S(s)]$는 식 (2.1)에 주어져 있다. 참고로 $\overline{F_1}(s) = 1$, $\overline{F_1}(S) = 0$이 됨을 확인할 수 있다.

2.1.2. $E(T_1)$의 유도 $\{U_1(t), t \geq 0\}$의 한 주기 T_1의 기댓값은 마르코프 성질에 의해

$$E(T_1) = E\left[T_s^S(s)\right] + E(T_1)P_s^S(s, S)$$

를 만족함을 알 수 있다. 여기서 $P_s^S(s, S)$는 $U_1(t)$가 s에서 출발하여 s 밑으로 가기 전에 S에 이르는 확률로 식 (2.2)에 주어져 있다. 따라서 $E(T_1)$은 아래와 같이 주어진다.

$$E(T_1) = \frac{E\left[T_s^S(s)\right]}{1 - P_s^S(s, S)}.$$

2.2. $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수

본 논문의 $\{U_2(t), t \geq 0\}$는 Cho 등 (2016)의 $\{U_2(t), t \geq 0\}$와 확률적으로 같다. Cho 등 (2016)은 $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수를 직접 구하지 못하고 이의 특성함수를 구했다. 본 논문에서는 Brill과 Posner (1977)가 제안한 수준교차 기법을 이용하여 $\{U_2(t), t \geq 0\}$의 정상분포 밀도함수 $f_2(x) =$

$(d/dx)F_2(x)$ $(-\infty < x < s)$를 직접 구한다. $U_2(t)$가 x $(x < s)$에서 출발하여 구간 $[x, s)$를 처음으로 벗어나는 시간을

$$D_x^s(x) = \inf\{t \geq 0 : U_1(t) \notin [x, s),\, U_2(0) = x\}$$

라 놓고, s에 먼저 이를 확률을 $Q_x^s(x, s)$, x 밑으로 먼저 떨어질 확률을 $Q_x^s(x, x-)$라 놓자.
2.1절에서와 같은 방법으로 마팅게일

$$W_2(t) = \frac{e^{\eta U_2(t)}}{E\left[e^{\eta U_2(t)}\right]}$$

을 정의하자. 여기서 η는 Cho 등 (2016)에서 보인 방법과 유사한(similar) 방법으로

$$a(\eta) = \eta c + \lambda\{M_Y(-\eta) - 1\} = 0$$

을 만족하는 유일한 음의 해임을 보일 수 있다.
마팅게일 $W_2(t)$에 정지시간 $D_x^s(x)$를 가지고 선택추출정리를 적용하면

$$Q_x^s(x, s) = \frac{e^{\eta x} - e^{\eta x} M_{Y_e}(-\eta)}{e^{\eta s} - e^{\eta x} M_{Y_e}(-\eta)} = 1 - Q_x^s(x, x-), \quad -\infty < x < s \tag{2.5}$$

을 얻을 수 있다.

2.2.1. $E(T_2)$의 유도 $\{U_2(t), t \geq 0\}$에서 한 주기 T_2는 $U_2(t)$가 보험청구에 의해 s 밑으로 떨어진 후 다시 s에 이를 때까지의 기간이 된다. 이 때 s 밑으로 떨어진 양은 보험청구액 Y의 잔여량 Y_e가 되고 (Klugman 등, 2004, p.240), $U_2(t)$는 $s - Y_e$에서 한 주기를 시작한다. 한 주기 T_2의 기댓값은 마팅게일

$$M_2(t) = U_2(t) - E[U_2(t)]$$

에 선택추출정리를 적용하면 다음과 같이 주어짐을 보일 수 있다.

$$E(T_2) = \frac{E(Y_e)}{c - \lambda\mu} = \frac{E\left(Y^2\right)}{2\mu(c - \lambda\mu)}.$$

2.2.2. $f_2(t)$의 유도 한 주기 T_2 동안 $U_2(t)$가 $x\,(x < s)$를 지나는 횟수를 N_x라 하면 다음이 성립된다.

(i) $s - Y_e < x$인 경우

$$N_x = \begin{cases} 1, & \text{with prob. } Q_x^s(x, s) \\ 2, & \text{with prob. } Q_x^s(x, x-)Q_x^s(x, s) \\ \vdots & \quad\vdots \\ n, & \text{with prob. } [Q_x^s(x, x-)]^{n-1} Q_x^s(x, s) \\ \vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

(ii) $s - Y_e \geq x$인 경우

$$N_x = \begin{cases} 0, & \text{with prob. } Q_x^s(s-Y_e, s) \\ 1, & \text{with prob. } Q_x^s(s-Y_e, x-)Q_x^s(x,s) \\ \vdots & \quad \vdots \\ n, & \text{with prob. } Q_x^s(s-Y_e, x-)[Q_x^s(x,x-)]^{n-1}Q_x^s(x,s) \\ \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

여기서 $Q_x^s(s-Y_e, x-)$는 $U_2(t)$가 s 밑에서 시작한 후, s에 이르기 전에 x 밑으로 떨어지는 확률로

$$Q_x^s(s-Y_e, x-) = \int_0^{s-x} Q_x^s(s-y, x-)dG_e(y) \tag{2.6}$$

이다. $Q_x^s(s-y, x-)$는 식 (2.5)를 얻을 때와 같은 방법으로, 마팅게일 $W_2(t)$에 선택추출정리를 적용하면

$$Q_x^s(s-y, x-) = \frac{e^{\eta s} - e^{\eta(s-y)}}{e^{\eta s} - e^{\eta x} M_{Y_e}(-\eta)} = Q_x^s(s-y, s)$$

이 됨을 유도할 수 있다. 따라서 $E(N_x)$는 다음과 같이 계산되어진다.

$$E(N_x) = \frac{\overline{G_e}(s-x) + \int_0^{s-x} Q_x^s(s-y, x-)dG_e(y)}{Q_x^s(x,s)}. \tag{2.7}$$

Brill과 Posner (1977)의 수준교차기법을 이용하면

$$f_2(x)dx = \frac{E(N_x)dt}{E(T_2)}$$

이 되며, $f_2(x)$는 다음과 같이 주어진다. 여기서 $c = dx/dt$.

$$f_2(x) = \frac{E(N_x)}{cE(T_2)}, \quad -\infty < x < s.$$

앞의 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1과 2.2.2절에서 연구된 내용들을 종합하면 $\{U(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수 $f(x) = (d/dx)F(x)$는 최종적으로 아래와 같이 주어진다.

$$f(x) = \frac{E(T_1)f_1(x) + E(T_2)f_2(x)}{E(T)}, \quad -\infty < x \leq S.$$

여기서 $E(T) = E(T_1) + E(T_2)$이고, $f_1(x) = -(d/dx)\overline{F_1}(x)$이다.

2.3. 예제

이 절에서는 보험청구액 Y가 평균이 μ인 지수분포를 따를 때, 즉, $G(y) = 1 - e^{-y/\mu}(y > 0)$일 때, 잉여금 과정 $\{U(t), t \geq 0\}$의 정상분포함수 $f(x)\,(-\infty < x \leq S)$를 명확히 구해본다. 이 경우 지수분포의 비기억성(memoryless property)에 의해 Y의 잔여량 Y_e의 분포도 평균이 μ인 지수분포가 된다. 따라서

$$\theta = \frac{\lambda\mu - (c-a)}{(c-a)\mu} > 0, \qquad M_{Y_e}(-\theta) = \frac{1}{\mu\theta + 1}, \qquad \eta = \frac{\lambda\mu - c}{c\mu} < 0, \qquad M_{Y_e}(-\eta) = \frac{1}{\mu\eta + 1}$$

이 된다.

2.1절에 있는 식 (2.1), (2.2), 그리고 (2.4)의 중요 특성들과 $\overline{F_1}(x)$, $E(T_1)$는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
P_x^S(x,S) &= \frac{\mu\theta e^{\theta x}}{e^{\theta S}+\mu\theta e^{\theta S}-e^{\theta x}} = 1-P_x^S(x,x-), \quad s\le x<S,\\
E\left[T_x^S(x)\right] &= \frac{(S-x)\mu\theta e^{\theta x}-\mu(1+\mu\theta)\left(e^{\theta S}-e^{\theta x}\right)}{(c-a-\lambda\mu)\left(e^{\theta S}+\mu\theta e^{\theta S}-e^{\theta x}\right)}, \quad s\le x<S,\\
P_s^x((x-Y_e)\vee s,x) &= \frac{e^{\theta x}-e^{\theta s}}{e^{\theta x}+\mu\theta e^{\theta x}-e^{\theta s}},\\
\overline{F_1}(x) &= \frac{e^{\theta s}\left[(S-x)\mu\theta e^{\theta x}-\mu(1+\mu\theta)\left(e^{\theta S}-e^{\theta x}\right)\right]}{e^{\theta x}\left[(S-s)\mu\theta e^{\theta s}-\mu(1+\mu\theta)\left(e^{\theta S}-e^{\theta s}\right)\right]}, \quad s\le x\le S,\\
E(T_1) &= \frac{(S-s)\mu\theta e^{\theta s}-\mu(1+\mu\theta)\left(e^{\theta S}-e^{\theta s}\right)}{(c-a-\lambda\mu)(1+\mu\theta)\left(e^{\theta S}-e^{\theta s}\right)}.
\end{aligned}$$

참고로 $S\to\infty$이면 $\overline{F_1}(x)=e^{-\theta(x-s)}\,(s\le x<\infty)$이 되고, $E(T_1)=-\mu/(c-a-\lambda\mu)$이 된다. 또 $S\to s$이면 로피탈의 정리(l'Hopital's rule)를 써서 $E(T_1)=1/\lambda$이 됨을 알 수 있다. 또 $f_1(x)=-(d/dx)\overline{F_1}(x)$를 계산해보면 다음과 같다.

$$f_1(x)=\frac{\mu\theta e^{\theta s}\left[e^{\theta x}-(1+\mu\theta)e^{\theta S}\right]}{e^{\theta x}\left[(S-s)\mu\theta e^{\theta s}-\mu(1+\mu\theta)\left(e^{\theta S}-e^{\theta s}\right)\right]}, \quad s\le x\le S.$$

2.2절에 있는 식 (2.5)–(2.7)의 중요 특성들과 $\overline{F_2}(x)$, $E(T_2)$는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
Q_x^s(x,s) &= \frac{\mu\eta e^{\eta x}}{(\mu\eta+1)e^{\eta s}-e^{\eta x}} = 1-Q_x^s(x,x-), \quad -\infty<x<s,\\
Q_x^s(s-Y_e,x-) &= \frac{\mu\eta e^{\eta s}}{(\mu\eta+1)e^{\eta s}-e^{\eta x}} - e^{-\frac{s-x}{\mu}},\\
E(N_x) &= e^{\eta(s-x)}, \quad -\infty<x<s,\\
E(T_2) &= \frac{\mu}{c-\lambda\mu},\\
f_2(x) &= -\eta e^{-\eta(x-s)}, \quad -\infty<x<s.
\end{aligned}$$

참고로 이 경우 $\{U_2(t), t\ge 0\}$의 정상분포함수는 s만큼 오른쪽으로 이동되어(shifted) 평균이 $s+1/\eta$인 음의 지수분포(negative exponential distribution)을 알 수 있다.

최종적으로, 보험청구액 Y가 평균이 μ인 지수분포를 따를 때, $\{U(t), t\ge 0\}$의 정상분포함수 $f(x)$는 아래와 같이 주어진다.

$$f(x)=\frac{E(T_1)f_1(x)+E(T_2)f_2(x)}{E(T)}, \quad -\infty<x\le S.$$

References

Brill, P. H. and Posner, M. J. M. (1977). Level crossings in point processes applied to queue: single sever case, *Operations Research*, **25**, 662–674.

Cho, E. Y., Choi, S. K., and Lee, E. Y. (2013). Transient and stationary analyses of the surplus in a risk model, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **20**, 475–480.

Cho, Y. H., Choi, S. K., and Lee, E. Y. (2016). Stationary distribution of the surplus process in a risk model with a continuous type investment, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **23**, 423–432.

Choi, S. K. and Lee, E. Y. (2018). An optimal continuous type investment policy for the surplus in a risk model, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **25**, 91–97.

Dickson, D. C. M. and Willmot, G. E. (2005). The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model, *ASTIN Bulletin*, **35**, 45–60.

Dvoretzky, A., Kiefer, J., and Wolfowitz, J. (1953). On the optimal character of the (s, S) policy in inventory theory, *Econometrica*, **21**, 586–596.

Gerber, H. U. (1990). When does the surplus reach a given target? *Insurance: Mathematics* & *Economics*, **9**, 115–119.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1997). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics* & *Economics*, **21**, 129–137.

Karlin, S. and Taylor, H. M. (1975).*A First Course in Stochastic Processes* (2nd ed), Academic Press, New York.

Kim, S. and Lee, E. Y. (2015). Stationary distribution of the surplus in a risk model with dividends and reinvestments, *Journal of the Korean Statistical Society*, **44**, 516–529.

Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2004). *Loss Models: From Data to Decisions* (2nd ed), John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

Ross, S. M. (1996). *Stochastic Processes* (2nd ed), John Wiley & Sons, New York.

연속적으로 투자가 이루어지는 보험상품 리스크 모형의 추가 연구

최승경[a] · 이의용[a,1]

[a]숙명여자대학교 통계학과

(2018년 9월 6일 접수, 2018년 10월 3일 수정, 2018년 10월 10일 채택)

요 약

Cho 등 (*Communications for Statistical Applications and Methods*, **23**, 423–432, 2016)은 잉여금이 적정수준에 이르면 연속적으로 투자가 이루어지는 보험상품 리스크 모형을 소개하고, 잉여금 과정의 정상분포함수를 연구하였다. 본 논문에서는 잉여금이 적정수준을 넘어 또 다른 충분한 수준에 이르게 되면 추가로 즉시 투자가 이루어진다고 가정하고 기존의 연구를 확장한다. 잉여금 과정의 정상분포함수를 명확히 구하고, 보험청구액의 분포가 지수분포인 경우를 예제로 다룬다.

주요용어: 리스크 모형, 잉여금 과정, 정상분포함수, 수준교차, 마팅게일, 선택추출정리

[1]교신저자: (04310) 서울특별시 용산구 청파로 47길 100, 숙명여자대학교 통계학과.
E-mail: eylee@sookmyung.ac.kr