JANT 한국항행학회논문지
Journal of Advanced Navigation Technology

기반 기술

J. Adv. Navig. Technol. 22(6): 630-635, Dec. 2018

비구조화된 불확실성과 시변 지연을 갖는 이산 시스템의 안정 조건

Stability Condition of Discrete System with Time-varying Delay and Unstructured Uncertainty

한 형 석
가천대학교 전자공학과

Hyung-seok Han
Department of Electronic Engineering, Gachon University, Gyeonggi-do, 13120, Korea

[요 약]

본 논문에서는 시변 지연이 있는 선형 이산 시스템에 비구조화된 불확실성이 존재하는 경우에 대하여 시스템의 안정성을 다룬다. 고려된 시스템은 지연 없는 상태변수와 지연 상태 변수에 대한 시스템 행렬들은 시불변이나 지연시간이 구간범위에서 시변으로 변동하고, 크기에 대한 정보만을 얻을 수 있는 비구조화된 비선형 불확실성이 있는 시스템이다. 기존의 많은 결과들은 시변 지연과 비구조화된 불확실성을 동시에 고려하지 못하고 한 가지 요소만 고려하여 연구되었다. 본 논문에서는 이 두 가지 요소를 모두 고려하여 새로운 안정조건을 도출하였고, 한 가지 요소만 고려한 기존 연구 결과와 비교하였다. 새로운 안정조건은 기존의 결과를 포함하는 매우 효과적인 수식으로 제안되며, 이는 복잡한 선형행렬부등식 혹은 리아프노프 방정식 등과 같은 복잡한 수치 계산을 요구하지 않는 간단한 부등식이다. 수치예제를 통하여 제안된 안정조건이 기존의 결과들을 포함할 수 있음을 보이고 확장성과 효용성이 우수함을 확인한다.

[Abstract]

In this paper, we consider the stability condition for the linear discrete systems with time-varying delay and unstructured uncertainty. The considered system has time invariant system matrices for non-delayed and delayed state variables, but its delay time is time-varying within certain interval and it is subjected to nonlinear unstructured uncertainty which only gives information on uncertainty magnitude. In the many previous literatures, the time-varying delay and unstructured uncertainty can not be dealt in simultaneously but separately. In the paper, new stability conditions are derived for the case to which two factors are subjected together and compared with the existing results considering only one factor. The new stability conditions improving many previous results are proposed as very effective inequality equations without complex numerical algorithms such as LMI(Linear Matrix Inequality) or Lyapunov equation. By numerical examples, it is shown that the proposed conditions are able to include the many existing results and have better performances in the aspects of expandability and effectiveness.

Key word : Stability condition, Discrete system, Time-varying delay, Unstructured uncertainty, Nonlinear.

https://doi.org/10.12673/jant.2018.22.6.630

Received 16 October 2018; **Revised** 27 November 2018
Accepted (Publication) 11 December 2018 (30 December 2018)

***Corresponding Author; Hyung-seok Han**

Tel: +82-31-750-5561
E-mail: hshan@gachon.ac.kr

Ⅰ. 서 론

시스템에 인가되는 불확실성과 상태 지연 현상은 시스템의 안정성에 영향을 줄 수 있으며 이에 대한 많은 연구 결과들이 발표된 바 있다[1],[2]. 최근 선형 이산시스템에 대하여 시스템의 특성이 시변/시불변, 지연 시간의 특성이 시변/시불변의 다양한 경우에 대한 연구 결과가 발표되었다[3]-[9]. [3]과 [6]의 결과는 시불변 시스템의 시변 지연에 대한 안정조건을 선형행렬부등식의 형태[3]와 간단한 부등식 형태[6]로 제시하였다. 또한, 시변시스템에서 시변지연에 대한 안정조건도 [7]에서 제시되었다. 이러한 결과들에서는 시변지연에 대한 부분만 고려되었고, 그 외의 불확실성에 대하여서는 고려되지 못하였다. 반면에, 비구조화된 시변 불확실성이 인가되는 시스템의 안정성 결과는 [8]과 [9]에 발표되었으며, 최근에는 리아프노프의 상한해를 이용하여 대형 시스템에 적용한 결과도 발표되었다.[5] 이 경우 시스템의 특성은 시불변이고 지연시간 또한 시불변으로 고정된 경우를 고려하였다. [8]에서 제시된 안정조건은 간단한 행렬에 대한 부등식으로 표현되며, 행렬식이 아닌 대수부등식으로 제시된 결과도 함께 제시되었다. 그러나, 이 경우에는 시변 지연에 대하여 적용될 수 없는 한계를 가지고 있으며, 리아프노프 함수를 이용하여 리아프노프 방정식의 상한 해 한계(upper solution bound)를 이용하였다. 이 경우 리아프노프 방정식을 이용하여 안정조건을 유도함으로 인하여 시변지연을 고려하기 어려우며 또한 그 전개 과정이 비교적 복잡한 과정을 거치게 된다. 따라서, [9]에서는 [8]에서 사용한 상한 해 한계 방법과는 다른 접근으로 [8]과 유사한 결과를 도출하였다. 그러나 시변지연을 고려한 결과는 제시되지 못하였다.

본 논문에서는 [6],[8],[9]의 안정조건들이 고려하지 못한 시변지연과 비구조화된 시변 불확실성을 동시에 고려할 수 있고, [3],[5]에서 사용한 복잡한 선형행렬부등식이나 리아프노프 방정식과는 다른 간단한 형태의 부등식으로 표현되는 안정조건을 새롭게 제안한다. 또한, 제안된 조건이 기존의 결과를 포함하는 강력하고 포괄적인 것임을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 기존 결과를 요약하고 III장에서는 새로운 안정조건을 리아프노프 이론을 이용하여 제시하고, IV장에서는 기존 수치 예제에 대하여 새로운 조건을 적용하고 그 결과를 제시한다.

Ⅱ. 기존의 안정 조건

본 장에서는 논문의 주요 결과에 사용된 행렬에 관한 중요한 기초 이론을 정리한다. 본 논문에서 사용하는 기호로는 $\|X\|$는 행렬 X의 스펙트랄 노옴(spectral norm), ($\|X\|$: X^TX행렬의 최대 고유치의 제곱근)을 의미하며, $X>0$는 대칭행렬 X가 양의 정칙(positive definite), $\lambda_{\max}(X)$는 행렬 X의 최대 고유치, $\rho(X)$는 $max|\lambda_i(X)|$,즉, 스펙트랄 반경(spectral radius), I_n는 $n\times n$ 차원의 단위행렬(identity matrix)을 의미한다.

식 (1)과 같은 이산 시스템을 고려한다.

$$x(k+1)=A(\bullet)x(k)+B(\bullet)x(k-d(\bullet)) \\ +f(x(k),k)+f_1(x(k-d),k) \tag{1}$$

여기서 $A(\bullet),B(\bullet),d(\bullet)$의 시간에 따른 특성에 따라 다수의 결과가 발표되었다[1]-[9]. 특히, [8]과 [9]에서는 식 (2)와 같이 비선형 불확실성을 포함한 시스템을 다루었다. 이 시스템에서 지연시간은 시불변으로 고려하였음을 주목한다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d) \\ +f(x(k),k)+f_1(x(k-d),k) \tag{2}$$

여기서, A는 시불변 시스템 행렬, B는 지연 상태변수에 대한 시스템 행렬이며, $f(x(k),k),f_1(x(k-d),k)$는 비선형 불확실성을 나타내며 식 (3)의 조건을 만족한다.

$$\|f(x(k),k)\|\le\eta\|x(k)\|,f_1(x(k-d),k)\le\gamma\|x(k-d)\| \tag{3}$$

기존 결과 Ⅰ[8],[9]: 식 (2), (3)를 만족하는 이산시스템은 식 (4)의 조건을 만족하면

$$(\|A\|+\|B\|+\eta+\gamma)\ \left(\frac{A^TA}{\|A\|}+\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n+\gamma I_n\right)<I_n \tag{4}$$

점근안정하다.

기존 결과 [6]에서는 식 (5)와 같이 지연 시간이 시변인 경우에 대한 안정조건을 제시하였다. 고려된 시스템은 비선형 불확실성에 대한 부분이 포함되지 않은 점을 주목한다.

$$x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k)) \\ 0<d_m\le d(k)\le d_M \tag{5}$$

기존 결과 Ⅱ[6]: 수식 (5)의 시변 지연시간을 갖는 시스템은 다음 조건을 만족하면 점근안정하다.

$$(\|A\|+\sqrt{1+d_M-d_m}\,\|B\|) \\ \times\left(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{1+d_M-d_m}\,\frac{B^TB}{\|B\|}\right)<I_n \tag{6}$$

위의 기존 결과 I,II는 각각 시변 지연 시간과 비선형 불확실성에 대한 부분들을 동시에는 포함할 수 없는 결과임에 주목한다.

본 논문에서는 다음과 같은 잘 알려진 정리를 사용한다.

보조정리 I ([6],[7]) :임의의 벡터 x,y와 양의 상수 ϵ 에 대하

여 식 (7)이 성립한다.

$$2x^T y \le \epsilon^{-1} x^T x + \epsilon y^T y \tag{7}$$

Ⅲ. 새로운 안정 조건

본 장에서는 앞 장에서 소개한 기존 시스템과 다르게 일반적인 시불변 시스템의 경우에 대하여 구간 시변 지연을 갖는 시스템에 비구조화된 불확실성이 인가된 경우의 안정 조건을 유도한다. 이는 식 (2)의 시스템에서 시불변 지연시간 d를 시변 지연시간 $d(k)$로 고려하고 지연상태변수에 의한 불확실성은 제외한 것이다. 이는 식 (8)과 같이 표현된다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-d(k)) + f(x(k),k) \tag{8}$$

$$\|f(x(k),k)\| \le \eta \|x(k)\| \tag{9}$$

$$0 \le d_m \le d(k) \le d_M, \quad \forall k$$

리아프노프 함수를 식 (10)과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} V(x(k)) &= x^T(k)x(k) + \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &+ \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = V_1 + V_2 + V_3 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서, 대칭행렬 R은 양의 정칙행렬로 $R>0$.

보조정리 II: 식(8)의 시스템은 식(10)에 정의된 리아프노프 함수와 $\epsilon > 0, d_M - d_m \ge 0$ 에 대하여 식 (11)의 관계식을 만족한다.

$$\begin{aligned} & D \equiv 1 + d_M - d_m \\ & V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3 \\ & \le x^T(k)(A^T A - I_n + (1 + d_M - d_m)R)x(k) \\ & \quad + x^T(k-d(k))(B^T B - R)x(k-d(k)) \\ & \quad + 2x^T(k-d(k))B^T Ax(k) + 2f^T(x(k),k)Ax(k) \\ & \quad + 2f^T(x(k),k)Bx(k-d(k)) + f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\ & \le x^T(k)((1 + \epsilon^{-1} + \frac{\eta}{\|A\|})A^T A - I_n + DR + (\eta^2 + \eta\|A\| + \eta\|B\|)I_n)x(k) \\ & + x^T(k-d(k))((1 + \epsilon + \frac{\eta}{\|B\|})B^T B - R)x(k-d(k)) \end{aligned} \tag{11}$$

증명: $V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3$

$$\begin{aligned} & x_d(k) \equiv x(k-d(k)) \\ & \triangle V_1 = x^T(k+1)x(k+1) - x^T(k)x(k) \\ & = x^T(k)(A^T A - I_n)x(k) \\ & \quad + 2x_d^T(k)B^T Ax(k) + 2f^T(x(k),k)Bx_d(k) + 2f^T(x(k),k)Ax(k) \\ & \quad + x_d^T(k)B^T Bx_d(k) + f^T(x(k),k)f(x(k),k) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \triangle V_2 &= \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k} x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &= x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ &\quad - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \tag{13}$$

참고문헌 [10]에서와 같이 식 (14)을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k+1-d(k+1)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) \\ & \le (\sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) + \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i)) \\ & \quad - \sum_{i=k+1-d(k)}^{k-1} x^T(i)Rx(i) = \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \triangle V_3 &= \sum_{j=-d_M+2}^{-d_m+1} (x^T(k)Rx(k) - x^T(k+j-1)Rx(k+j-1)) \\ &= (-d_m + 1 - (-d_M + 2) + 1)x^T(k)Rx(k) \\ &\quad - (x^T(k-d_M+2-1)Rx(k-d_M+2-1) - \dots \\ &\quad - x^T(k-d_m+1-1)Rx(k-d_m+1-1)) \\ &= (d_M - d_m)x^T(k)Rx(k) - \sum_{i=k+1-d_M}^{k-d_m} x^T(i)Rx(i) \end{aligned} \tag{15}$$

그러므로, 보조정리 I과 잘 알려진 대칭행렬의 성질 $A^T A \le \|A\|^2 I_n,\ B^T B \le \|B\|^2 I_n, f^T f \le \eta^2 \|x(k)\|^2$ 을 이용하면 식 (16)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & 2x_d^T(k)B^T Ax(k) \\ & \le \frac{1}{\epsilon} x^T(k)A^T Ax(k) + \epsilon x_d^T(k)B^T Bx_d(k) \\ & 2f^T(x(k),k)Bx_d(k) \\ & \le \frac{\|B\|}{\eta} f^T f + \frac{\eta}{\|B\|} x_d^T(k)B^T Bx_d(k) \\ & \le \eta\|B\| x^T(k)x(k) + \frac{\eta}{\|B\|} x_d^T(k)B^T Bx_d(k) \\ & 2f^T(x(k),k)Ax(k) \\ & \le \frac{\|A\|}{\eta} f^T f + \frac{\eta}{\|A\|} x^T(k)A^T Ax(k) \\ & \le \eta\|A\| x^T(k)x(k) + \frac{\eta}{\|A\|} x^T(k)A^T Ax(k) \end{aligned} \tag{16}$$

$$D \equiv 1 + d_M - d_m$$

$$\begin{aligned} & V(x(k+1)) - V(x(k)) = \triangle V_1 + \triangle V_2 + \triangle V_3 \\ & \le x^T(k)(A^T A - I_n)x(k) \\ & \quad + 2x_d^T(k)B^T Ax(k) + 2f^T(x(k),k)Bx_d(k) + 2f^T(x(k),k)Ax(k) \\ & \quad + x_d^T(k)B^T Bx_d(k) + f^T(x(k),k)f(x(k),k) \\ & \quad + x^T(k)Rx(k) - x_d^T(k)Rx_d(k) + (d_M - d_m)x^T(k)Rx(k) \\ & \le x^T(k)(A^T A - I_n + (1 + d_M - d_m)R)x(k) \\ & + x_d^T(k)(B^T B - R)x_d(k) \\ & + 2x_d^T(k)B^T Ax(k) + 2f^T(x(k),k)Bx_d(k) + 2f^T(x(k),k)Ax(k) \\ & + f^T(x(k),k)f(x(k),k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le x^T(k)(A^TA-I_n+DR)x(k)\\
&+x_d^T(k)(B^TB-R)x_d(k)\\
&+\frac{1}{\epsilon}x^T(k)A^TAx(k)+\epsilon x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\
&+\eta\|B\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|B\|}x_d^T(k)B^TBx_d(k)\\
&+\eta\|A\|x^T(k)x(k)+\frac{\eta}{\|A\|}x^T(k)A^TAx(k)\\
&+\eta^2x^T(k)x(k)\\
&\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA-I_n+DR+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta\|B\|)I_n)x(k)\\
&+x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B\|})B^TB-R)x_d(k)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

위의 보조정리II을 이용하면 다음과 같은 안정조건을 얻을 수 있다.

정리 I: 주어진 $\epsilon>0, d_M-d_m\ge 0$에 대하여, 식 (18)의 행렬을 이용한다.

$$
-R=\frac{(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA-I_n+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta\|B\|)I_n}{1+d_M-d_m}<0
\tag{18}
$$

다음의 부등식을 만족하면 식 (8),(9)의 시스템은 안정하다.

$$
\begin{aligned}
&D\equiv 1+d_M-d_m \qquad (19)\\
&(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)\\
&\qquad +\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|}\quad < I_n
\end{aligned}
$$

증명 : 식 (18)과 같이 행렬 R을 선택하여 대입하면 식 (20)이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
&V(x(k+1))-V(x(k)) \qquad (20)\\
&\le x^T(k)((1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA-I_n\\
&\quad +DR+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta\|B\|)I_n)x(k)\\
&\quad +x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B\|})B^TB-R)x_d(k)\\
&=x_d^T(k)((1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B\|})B^TB-R)x_d(k)
\end{aligned}
$$

따라서

$$
\begin{aligned}
&(1+d_M-d_m)(1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B\|})B^TB+(1+\epsilon^{-1}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA-I_n\\
&+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta\|B\|)I_n<0
\end{aligned}
$$

이 되면 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 이 됨을 알 수 있다. 이를 보이기 위하여,

$$
\epsilon=\frac{\|A\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}>0
$$

로 하면, 식 (21)의 부등식이 성립함을 보이면 된다.

$$
\begin{aligned}
&(1+d_M-d_m)(1+\frac{\|A\|}{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}+\frac{\eta}{\|B\|})B^TB\\
&+(1+\frac{\sqrt{1+d_M-d_m}\ \|B\|}{\|A\|}+\frac{\eta}{\|A\|})A^TA+(\eta^2+\eta\|A\|+\eta\|B\|)I_n<I_n
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$D\equiv 1+d_M-d_m$로 하고 식(21)을 식 (22)과 같이 표현한다.

$$
\begin{aligned}
&(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)\\
&-\eta\sqrt{D}\|B\|I_n-\eta\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta D\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta\|B\|I_n<I_n
\end{aligned}
\tag{22}
$$

여기서, 위의 마지막 4개의 항은 식 (23)의 관계를 만족한다.

$$
\begin{aligned}
&\eta D\frac{B^TB}{\|B\|}-\eta\sqrt{D}\|B\|I_n-\eta\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta\|B\|I_n\\
&=\eta(D\frac{B^TB}{\|B\|}-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}-\sqrt{D}\|B\|I_n+\|B\|I_n)\\
&\le\eta(D\frac{B^TB}{\|B\|}-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\frac{B^TB}{\|B\|})\\
&=\frac{\eta}{\|B\|}(\sqrt{D}B-B)^T(\sqrt{D}B-B)\\
&=\frac{\eta}{\|B\|}(\sqrt{D}-1)^2B^TB=\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|}\\
&(\because D\ge 1, 1-\sqrt{D}\le 0, 0\le\frac{B^TB}{\|B\|}\le\|B\|I_n\\
&(-\sqrt{D}\|B\|+\|B\|)I_n=\|B\|(1-\sqrt{D})I_n\\
&\le\frac{B^TB}{\|B\|}(1-\sqrt{D})=-\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\frac{B^TB}{\|B\|})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

따라서, 식 (23)을 이용하여 식 (24)을 만족하면, 식(22)의 부등식도 만족한다.

$$
\begin{aligned}
&(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\sqrt{D}\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)\\
&+\eta(\sqrt{D}-1)^2\frac{B^TB}{\|B\|}<I_n
\end{aligned}
\tag{24}
$$

위의 부등식을 만족하면 식(20)의 $V(x(k+1))-V(x(k))<0$ 이 만족된다. 따라서, 식 $(1+\epsilon+\frac{\eta}{\|B\|})B^TB-R<0$이 만족되므로 $-R<0$ 은 당연히 만족하게 된다.

정리I의 행렬 부등식을 간단한 수식으로 표현하면 다음의 따름정리를 얻는다.

따름정리 I: 주어진 $d_M-d_m\ge 0$에 대하여, 식 (25)의 부등식을 만족하면 식 (8),(9)의 시스템은 안정하다.

$$
(\|A\|+\sqrt{D}\|B\|+\eta)^2+\eta(\sqrt{D}-1)^2\|B\|<1
\tag{25}
$$

증명: 식 (19)의 결과에서 $\frac{A^TA}{\|A\|}<\|A\|I_n, \frac{B^TB}{\|B\|}<\|B\|I_n$ 를 이용하면 증명된다.

위의 결과는 정리I의 충분조건이 되나 행렬 연산을 필요로 하지 않으므로 간단하게 계산될 수 있다. 위의 정리I 의 조건은 이전에 발표된 식(6)의 비구조화된 불확실성을 고려하지 못한 결과를 확장시킨 결과이다. 또한, 식(4)의 기존 결과와 비교하면, 시변지연에 대한 영향을 나타내는 항이 추가되어 있음을 알 수 있다. 이를 기존 [8].[9]과 비교하기 위하여 시불변 시스템에 적용하면 다음과 같은 따름정리를 얻는다.

따름정리 II: 시불변 지연에 대하여, 식 (26)의 부등식을 만족하면 식 (8),(9)의 시스템은 안정하다.

$$(\|A\|+\|B\|+\eta)(\frac{A^TA}{\|A\|}+\frac{B^TB}{\|B\|}+\eta I_n)<I_n \tag{26}$$

증명: 시불변 지연시간이므로 $d_M=d_m, D=1$이며, 식 (19)에 대입하면 식 (26)을 얻는다.

시불변 지연에 대한 결과는 참고문헌 [8],[9] 의 결과와 같음을 알 수 있다. 마찬가지로 불확실성을 고려하지 않은 시변이산시간에 대한 안정조건을 행렬 연산이 필요 없는 형태로 구하면 식 (27)과 같다.

따름정리 III: 비선형 불확실성이 없는 경우에 대하여, 식 (27)의 부등식을 만족하면 식 (8),(9)의 시스템은 안정하다.

$$\|A\|+\sqrt{1+d_M-d_m}\|B\|<1 \tag{27}$$

증명: 비구조화된 불확실성이 없는 경우는 $\eta\to 0$ 으로 고려될 수 있으며 이 경우 부등식 (27)을 얻는다.

따름정리 III은 참고문헌 [6]에서 식(6)에서 제시된 간단한 안정조건의 조건식과 같다.

위의 정리I의 조건은 시불변 이산 시스템에서 고려될 수 있는 주요 요소들을 모두 포함한 시스템에 대하여 안정 조건을 매우 간결하고 함축적으로 제시한 결과이다. 이 결과는 기존의 여러 측면에서 연구되어 제시된 안정 조건들을 포괄적으로 설명할 수 있는 결과이며, 각각의 결과들을 하나의 수식으로 표현한 효과적인 것이다. 특히, 기존의 연구들이 선형부등식의 형태로 표시된 안정조건을 복잡한 수치 연산을 통하여 해결하는 방법을 이용하는 것에 반하여 매우 용이하게 계산될 수 있는 부등식을 제시하여 매우 편리하게 적용될 수 있다.

다음 장에서는 제안된 안정조건을 기존의 예제에 적용하여 얻은 결과를 설명한다.

Ⅳ. 새로운 조건의 수치 예제 적용

예제 1[11],[12]: 식 (28)과 같이 표현되는 이산 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned}&x(k+1)=Ax(k)+Bx(k-d(k))+f(x(k),k)\\&A=\begin{pmatrix}-0.24 & 0.12\\-0.12 & 0.12\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0.12 & 0.12\\0.12 & 0.24\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{28}$$

[11],[12]에서는 지연시간이 시불변이고 $d_M=d_m=1$ 인 경우에 대하여 비선형 불확실성이 없는, 즉 $f(x(k),k)=0$ 인 경우에 대하여 안정함을 확인하였다. 새로운 조건을 적용하기 위하여 $f(x(k),k)\le 0.1\|x(k)\|$ 인 경우에 대하여 따름정리 I의 결과를 적용한다. $\|A\|=0.3142, \|B\|=0.3142, \eta=0.1, d_M-d_m=0$ 로 구하면 식 (29)의 결과를 얻으며 안정함을 판단할 수 있다.

$$(\|A\|+\|B\|+0.1)^2=0.5305<1 \tag{29}$$

지연시간이 시변인 경우를 고려하기 위하여 다음과 같이 $d_M-d_m=1$과 $d_M-d_m=2$ 인 경우에 대하여 안정조건은 식 (30)과 같이 계산되며 이를 통하여 시스템이 불확실성 $\eta=0.1$ 과 시변 지연시간에 대하여 안정함을 확인할 수 있다. 이는 기존 결과 [11] 보다 우수한 것으로 시변 지연시간과 불확실성을 동시에 고려한 것이다.

$$\begin{aligned}&(\|A\|+\sqrt{2}\|B\|+\eta)^2+\eta\|B\|(\sqrt{2}-1)^2=0.7423<1\\&(\|A\|+\sqrt{3}\|B\|+\eta)^2+\eta\|B\|(\sqrt{3}-1)^2=0.9352<1\end{aligned} \tag{30}$$

예제 2[7]: 다음과 같이 일반적인 시변지연시스템을 고려한다.

$$A=\begin{bmatrix}-0.1 & -0.1 & 0\\0 & -0.5 & -0.05\\0 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-0.2 & 0 & 0\\-0.5 & 0.1 & 0\\0 & 0 & 0.1\end{bmatrix} \tag{31}$$

따름정리 II와 같은 [9]의 안정조건을 적용하면 시불변 지연시간에 대한 결과는 불확실성의 크기가 $\eta<0.1809$ 로 제시된다. 이는 따름정리 II의 결과와 같은 결과이다. 위의 예제를 시변 지연시간에 확대 적용하기 위하여 식 (32)과 같이 수정하여 적용한다.

$$A=\begin{bmatrix}-0.1 & -0.1 & 0\\0 & -0.5 & -0.05\\0 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-0.2 & 0 & 0\\-0.2 & 0.1 & 0\\0 & 0 & 0.1\end{bmatrix} \tag{32}$$

따름정리 II를 이용하면 시불변 지연의 경우에는 $\eta < 0.3162$ 로 [9]와 같은 결과를 얻을 수 있다. 이를 시변 지연의 경우로 확장하면 [9]의 결과는 적용할 수 없으나 , 본 논문의 정리I의 새로운 조건을 이용하면 식 (33) 같이 여러 가지 시변지연에 대한 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &d_M - d_m = 1, \quad \eta < 0.2380 \\ &d_M - d_m = 2, \quad \eta < 0.1668 \\ &d_M - d_m = 3, \quad \eta < 0.1032 \\ &d_M - d_m = 4, \quad \eta < 0.0483 \end{aligned} \tag{33}$$

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 지연 이산시스템에서 지연 시간이 시변이고 비선형이며 비구조화된 불확실성이 있는 시스템의 안정조건을 새로이 제안하였다. 제안된 조건에는 시변 지연의 변동 범위와 불확실성의 크기가 부등식에 포함되어 있다. 따라서, 제안된 조건은 다수의 논문에 발표된 기존 결과를 포함할 수 있는 매우 효과적인 관계식이며, 이는 기존의 수치예제를 통하여 확인되었다. 제안된 조건은 시변 시스템과 구간 시스템의 안정 조건에 추후 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

References

[1] D. L. Debeljković, and S. Stojanović, “The stability of linear discrete time delay systems in the sense of Lyapunov: an overview,” *Scientific Technical Review,* Vol. 60, No. 3, pp. 67-81, Mar. 2010.

[2] P. G. Park, W. I. Lee, and S. Y. Lee, “Stability on time delay systems: A survey,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, Vol. 20, No. 3, pp. 289-297, Mar. 2014.

[3] S. Xu, J. Lam, B. Zhang and Y. Zou, “A new result on the delay-dependent stability of discrete systems with time-varying delays,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 24, No. 16, pp. 2512-2521, Oct. 2014.

[4] L. V. Hien, and H. Trinh, “New finite-sum inequalities with applications to stability of discrete time-delay systems,” *Automatica*, Vol. 71, pp. 197-201, Sep. 2016.

[5] C. H. Lee, “Sufficient conditions for robust stability of discrete large-scale interval systems with multiple time delays,” *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 5, No. 4, pp. 759-765, Apr. 2017.

[6] H. S. Han, “New stability conditions for networked control system with time-varying delay time,” *Journal of Korea Navigation Institute,* Vol. 17, No. 6, pp. 679-686, Dec. 2013.

[7] H. S. Han, “Stability condition for discrete interval time-varying system with time-varying delay time,” *Journal of Advanced Navigation Technology*, Vol. 20, No. 5, pp. 475-481, Oct. 2016.

[8] C. H. Lee, T. L. Hsien, and C. Y. Chen, “Robust stability of discrete uncertain time-delay systems by using a solution bound of the Lyapunov equation,” *Innovative Computing Information and Control Express Letters,* Vol. 8, No. 5, pp. 1547-1552, May 2011.

[9] C. H. Lee and C. Y. Chen, “Robust stability analysis of discrete time-delay systems subjected to nonlinear uncertainties,” in *5th International Conference on Biomedical Engineering and Informatics (BMEI 2012),* Chongqing: China, pp. 1245-1249, Oct. 2012.

[10] S. B. Stojanovic and D. Debeljkovic, “Delay-dependent stability analysis for discrete-time systems with time varying state delay,” *Chemical Industry & Chemical Engineering Quaterly,* Vol. 17, No. 4, pp. 497-503, Apr. 2011.

[11] M. A. Jordan, *Discrete Time Systems*, 1st ed. London, UK: IntechOpen Limited, pp. 334, 2011.

[12] C. S. Zhou and J. L. Deng, “Stability analysis of grey discrete-time systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 34, No. 2, pp. 173-175, Feb. 1989.

한 형 석 (Hyung-Seok Han)

1986년 2월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학사)
1993년 8월 : 서울대학교 제어계측공학과 (공학박사)
1993년 9월 ~ 1997년 8월: 순천향대학교 제어계측공학과 조교수
1997년 9월 ~ 현재 : 가천대학교 전자공학과 교수
※관심분야 : 유도제어, 견실제어, 센서 응용 시스템