Journal for History of Mathematics
Vol. 31 No. 1 (Feb. 2018), 37–51
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2018.31.1.037

On the history of the establishment of the Hungarian Debrecen School of Finsler geometry after L. Berwald

베어왈트에 의한 헝가리 데브레첸 핀슬러 기하학파의 형성의 역사

Won Dae Yeon 원대연

In this paper, our main concern is the historical development of the Finsler geometry in Debrecen, Hungary initiated by L. Berwald. First we look into the research trend in Berwald's days affected by the Göttingen mathematicians from C. Gauss and downward. Then we study how he was motivated to concentrate on the then completely new research area, Finsler geometry. Finally we examine the course of establishing Hungarian Debrecen school of Finsler geometry via the scholars including O. Varga, A. Rapcsák, L. Tamássy all deeply affected by Berwald after his settlement in Debrecen, Hungary.

Keywords: Finsler geometry, metric, connection, parallel transport, L. Berwald, P. Finsler, B. Riemann, O. Varga, variational method; 핀슬러 기하학, 계량, 접속, 평행이동, 베어왈트, 핀슬러, 리만, 바르가, 변분법.

MSC: 01A55, 01A60 ZDM: A30

1 서론

리만(B. Riemann)의 취임강연(Habilitationsvortrag)[1)]인 [27] 이후 그의 이름을 딴 리만 기하학이 19세기 중후반과 20세기 초반을 거처 20세기 중반 이후 현재까지 현대 수학 발전의 중요한 영역으로 자리 잡고 있다. 반면에 저자는 [40]에서 리만의 취임강연 이후 60여 년 동안 잠들어 있던 핀슬러 기하학이 괴팅겐 대학(Georg-August Universität Göttingen)의 수학자들에 의해 어떻게 유지되고 발전되어, 1918년 핀슬러(P. Finsler)가 마침내 리만이 취임강연에서 언급하였던 4차식의 네제곱근으로 이루어진 선소(line element)를 일반화한 핀

본 연구는 덕성여자대학교 2016년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.
Won Dae Yeon: Dept. of Math. Duksung Women's Univ. E-mail: dywon@duksung.ac.kr
Received on Jan. 23, 2018, revised on Feb. 19, 2018, accepted on Feb. 22, 2018.

1) 이것에 관해서는 저자의 [40]를 참고하던가 보다 본격적인 해설인 스피박(M. Spivak)의 주석을 단 영어 번역본 [28]을 참조.

슬러 계량(Finsler metric)이라고 불리게 되는 개념을 도입하고, 곡선과 곡면의 미분기하학에 관한 정리들을 일반화하게 되었는지 살펴보았다. 이 과정에서 특히 20세기 초반 당대의 최고 수학자로 모두 괴팅겐 대학의 교수이었던 힐버트(D. Hilbert), 민코프스키(H. Minkowski), 카라테오도리(C. Carathéodory)의 견해가 핀슬러에게 어떻게 영향을 미쳤는지 연구하였고 박사학위 논문지도교수에 따른 계보 대신 학문적 영향에 따른 새로운 계보를 제시하였다.

이 논문에서는 괴팅겐 대학의 수학자들, 특히 변분법(variational method)의 대가였던 당대 최고의 수학자 힐버트의 영향을 받은 베어왈트(L. Berwald)가 어떻게 리만의 업적 [27]을 일반화된 계량(핀슬러 계량)이 주어진 공간(핀슬러 공간)으로 확장하게 되었는지 살펴본다. 그리고 나치의 유태인 박해를 피해 그가 헝가리 데브레첸(Debrecen)에 정착한 이후 그의 영향을 크게 받은 바르가(O. Varga), 랍크삭(A. Rapcsák), 타마시(L. Tamássy)를 포함하는 후학들과 헝가리 데브레첸 핀슬러 기하학파를 형성하게 되는 과정을 살펴본다.

핀슬러 기하학의 역사는 1854년 리만의 취임강연까지 거슬러 올라간다는 것이 잘 알려져 있다. 리만이 괴팅겐 대학 학생이었을 당시 그의 지도교수이던 가우스(C. Gauss)는 이미 기하학 등 수학의 핵심 분야의 강의는 더 이상 하지 않고 통계학 등 수학 주변 분야에 대한 강의를 하였기 때문에 리만이 가우스로부터 기하학 분야에 어떤 직접적인 가르침을 받았는지는 의문이다. 다만 리만의 취임강연을 듣고 가우스가 동료 베버(W. Weber)에게 이야기한 것처럼 가우스가 리만의 착상의 깊이에 드물게 흥분하였다는 것이 데데킨트의 기록에 의해 알려져 있다. 이처럼 리만의 발상은 매우 독창적이기 때문에 더 이상 연대를 거슬러 올라가 핀슬러 기하학의 역사를 논할 수는 없을 것이다.

핀슬러는 그의 박사학위 논문 이후로는 더 이상 기하학에 관한 연구를 하지 않았다. 그는 관심을 수학 기초론으로 돌려 오늘날 그의 이름을 딴 핀슬러 집합론(Finsler Set Theory)으로 더 잘 알려져 있다.[2)] 따라서 접속을 도구로 하는 현대적인 관점에서 보면, 핀슬러 자신이 핀슬러 기하학의 발전에 기여한 바는 거의 없다고 해도 지나치지 않다.

핀슬러는 괴팅겐 대학의 선배였던 리만의 사후에 출판된 논문에 영향을 받았다기보다는 변분법의 대가였던 힐버트와 변분법을 사용하여 지시면(indicatrix)의 변분문제 해결에 대해 연구하였던 카라테오도리의 영향을 받은 바가 크다. 이런 당시의 연구 경향은 핀슬러에 앞서 이 분야에 업적이 있는 블리스(G. Bliss)와 랜즈버그(G. Landsberg)의 연구 방법에도 잘 나타나 있다.[3)]

1925년 싱(J. Synge)과 테일러(J. Taylor)는 거의 동시에 독립적으로 당시 유행하고 있던 변분법의 관점을 따른 핀슬러 기하학의 평행이동(parallel displacement)에 관한 논문을 미국수학회의 트란섹션스(Transections of American Mathematical Society)에 기고하였

2) 그의 취임논문(Habilitationsschrift)과 취임강연이 모두 집합론에 관한 것이다.

3) 이와 관련하여 저자의 [40] 참조.

다. 두 논문 중 테일러의 것 [32]이 먼저 투고 되었으나 출판은 싱의 것 [29]이 앞선다. 이후 테일러는 1927년 수학연보(Annals of Mathematics Studies)에 기고한 논문 [33]에서 핀슬러가 [18]에서 일반적인 계량이라고 한 리만 계량을 일반화한 계량을 핀슬러 계량이라고 이름 붙였다.

리만은 [27]에서 곡률과 접속의 개념을 암시하였으나 핀슬러는 단순히 변분학적인 관점에서 기하학 문제의 해결을 도모하였기 때문에 핀슬러가 리만 기하학을 일반화한 핀슬러 기하학을 창시했다고 하는 것은 적절하지 않다. 베어왈트가 [1]에서 리만의 발상을 따라 곡률과 접속의 개념을 테일러에 의해 핀슬러 공간이라고 이름 붙여진 일반화된 공간(allgemeinen Räumen)에 최초로 도입하였다. 오늘날 [27]에서 시작된 리만 기하학은 다양체 위에서 정의된 접속과 곡률이 주된 도구가 되기 때문에 이런 의미에서 베어왈트가 핀슬러 기하학을 창시했다고 하여도 지나치지 않다. 베어왈트의 논문 [1]이 더 빨리 더 저명한 논문집에 실렸다면 테일러가 이 일반화된 공간을 핀슬러 공간이라고 하는 대신 베어왈트 공간이라고 했을 가능성도 있다.

한국수학사학회지(The Korean Journal for History of Mathematics)에서도 기하학 분야의 특정한 주제나 인물들을 통해 당시 수학의 역사를 살펴보려는 시도가 있었다. 이런 시도로 20세기 기하학과 대수학의 한 획을 그은 업적을 낸 수학자인 엘리 카르탕(Élie Cartan)을 통해 20세기 리만 기하학이 어떻게 발전해 왔는지를 조망한 김영욱과 Yuzi Jin의 [21], 수학 거의 모든 분야와 수리물리학 등에 훌륭한 업적을 남긴 독일 수학자 리만의 생애와 업적을 살펴보고 리만 방정식에 대해 고찰한 한길준의 [20], 어떤 기하학적 양이 핀치되어 있으면 위상적 또는 미분위상적인 구면이 된다는 구면정리의 발전과 역사를 다룬 조민식의 [17], 비유클리드기하학의 창시자 중 한 사람인 로바체프스키(N. Lobachevsky)의 수학철학이 현대철학의 일종의 저수지였음을 보이고 그의 수학철학이 비유클리드기하의 탄생에 기여했음을 밝힌 박창균의 [24], 가우스의 3차원 공간 안의 2차원 곡면에 관한 미분기하학과 이를 일반적인 N-차원 다양체로 확장시킨 리만의 업적을 따라 19세기 중반부터 20세기 초반까지 크리스토펠, 리치, 레비-치비타에 의해 미분기하학의 발전의 역사를 연구한 본 저자의 [39] 등이 있다.

저자는 본 논문에서 기하학 분야의 특정한 주제(핀슬러 기하학)가 특정한 지역(헝가리 데브레첸)에서 어떻게 100여 년간 세대를 이어 지속적으로 발전하고 있는지를 고찰한다.

본문에는 지명과 인명 등은 가능하면 원어 발음을 그대로 표기하되 그 발음이 알려져 있지않을 때는 영어 발음을 사용하였고 각주에는 학위를 받은 대학과 학위 논문의 제목 등을 해당 원어로 표기하였다. 외국어로 된 이름이나 지명 등이 처음 나왔을 때 한 번만 괄호 안에 관련된 모국어 표기를 덧붙였다. 이 논문에서는 식을 간단하게 표기하기 위하여 아래 첨자와 위 첨자가 같을 때 이 첨자에 대해서 더하는 것으로 보는 아인슈타인의 약속을 사용하였다.

미국수학회(American Mathematical Society)에서 만들고 노스 다코타 주립대학(North Dakota State University)에서 제공하는 수학 계보 프로젝트(Mathematics Genealogy

Project) [43] 를 이용하여 등장하는 인물들의 계보를 확인하였고 인물에 관한 정보는 맥튜터 수학사 기록 보관소(The MacTutor History of Mathematics Archive) [42] 와 인터넷 백과 사전인 위키백과(Wikipedia) [44] 를 참조하였다.

2 소개

이 절에서는 핀슬러 기하학의 역사를 이해할 수 있을 정도로 리만 계량과 핀슬러 계량에 대해서 소개하고 20세기 초에 유행하던 변분법을 이용하여 곡선의 길이의 일차 변분 공식으로 얻은 오일러-라그랑주 방정식을 잘 이해하기 위해 도입한 접속의 개념을 간단히 서술한다. 마지막으로 이 방법을 이용하여 천(S. S. Chern)이 리만 계량의 동치 문제를 핀슬러 배경으로 일반화한 문제를 해결하기 위해 도입한 천 접속을 소개한다.

2.1 핀슬러 공간

천은 [16] 에서 핀슬러 기하학이 무엇인지 소개하였다. 그의 핀슬러 기하학에 관한 모토는 논문의 제목처럼 '핀슬러 기하학은 2차 형식이라는 제한이 없는 리만 기하학이다(Finsler Geometry Is Just Riemannian Geometry without the Quadratic Restriction)' 였고 결론적으로 "리만 기하학의 거의 모든 결과들을 핀슬러 공간으로 확장할 수 있을 것으로 믿는다.(I believe I have shown that almost all the results of Riemannian geometry can be developed in the Finsler setting.)" 라고 하였다.

리만 기하학은 보통

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{1}$$

로 표기되는 리만 계량이라고 불리는 2차 형식이 주어진 (미분 가능한) 다양체를 연구 대상으로 하고 있다. 여기서 (x^i) 는 다양체의 좌표계이다. 이 리만 계량은 다양체의 각 점에 대해 미분 가능하게 변하면서 각 접벡터 공간에 힐버트 노옴, 즉 내적을 준다. 이 리만 계량을 일반화한 핀슬러 계량은 각 접벡터 공간에 힐버트 노옴 대신 민코프스키 노옴이 주어진 것이다.

더 자세하게 표현하면 다양체 M 이 주어졌을 때 접벡터 번들 TM 위의 함수 $F : TM \to \mathbb{R}$ 가

(a) F 가 접벡터 번들 TM 의 영단면을 제외하고는 미분가능하다.

(b) $F(x, y) \geq 0$ 이고 $F(x, y) = 0$ 인 경우는 $y = 0$ 뿐이다.

(c) 모든 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대해서 $F(x, \lambda y) = |\lambda| F(x, y)$ 이다.

(d) $\left[\frac{\partial^2 F^2}{dy^i dy^j}\right]$ 이 양의 정부호이다.

를 만족할 때 F를 핀슬러 계량이라고 한다. 핀슬러 계량 F가 주어진 다양체 (M, F)를 핀슬러 공간이라고 한다.

여기서 핀슬러 계량 F의 성질 (c)에 의해

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j \tag{2}$$

이 성립한다.[4] 리만 계량을 F로 표기하면 (1)을

$$F^2(x, y) = g_{ij}(x)y^i y^j \tag{3}$$

로 쓸 수 있다. (3)을 (2)와 비교하면 리만 계량의 계수 $g_{ij}(x)$는 다양체에서 위치를 나타내는 x에만 의존하는 반면 핀슬러 계량의 계수 $g_{ij}(x, y)$는 x뿐만 아니라 벡터를 나타내는 y에도 의존하므로 핀슬러 계량이 리만 계량을 일반화한 것임을 알 수 있다. 또는 리만 계량은 핀슬러 계량의 특수한 경우라고 할 수 있다.[5]

2.2 변분법과 접속의 도입

여기서 힐버트와 그 당시 유행하고 있던 변분법을 간단히 살펴보고 넘어가자. 힐버트는 1900년 프랑스 파리에서 열린 세계수학자대회에서 20세기 수학자들이 해결해야할 문제 목록을 제시하였다. 당시 강연에서는 10개의 문제에 대해서만 설명하였지만 후에 논문으로 출간될 때는 23개의 문제로 확장되었다. 영어로 된 번역은 1902년 미국수학회 회보(Bulletin of American Mathematical Society)에 실렸다. 그의 변분학에 대한 관심은 이 23개의 문제에도 영향을 미쳐 문제 4, 19, 20, 23이 이와 관련된 것이다. 특히 23번 문제는 변분법의 새로운 발전에 대한 것으로 매우 모호하게 서술되어 있다. 의심할 여지없이 힐버트는 변분법에 관한 당대 최고 권위자의 한 사람이었고 이런 영향이 후대에 미쳐 변분법의 관점에서 새로운 기하학의 창조가 일어나게 된다.

위에서 언급된 싱, 테일러와 베어왈트는 모두 공간 위의 두 점을 잇는 곡선들의 길이를 최소화하는 문제를 해결하려고 하였다. 두 점 $P = c(a)$와 $Q = c(b)$를 잇는 곡선 c의 길이 $L(c)$는

$$L(c) = \int_a^b F(c(t), \dot{c}(t))dt \tag{4}$$

로 정의할 수 있다. 이때 곡선의 길이 $L(c)$는 핀슬러 계량이 만족해야하는 성질 (c)에 의해 곡선 c의 매개변수의 선택에 상관없이 잘 정의된다. (4)의 오일러-라그랑주 방정식(Euler-Lagrange equation)

$$\frac{d}{ds}L(c_s)\Big|_{s=0} = 0 \tag{5}$$

이

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{6}$$

4) 미분적분학의 오일러 공식에 의해 (2)가 성립한다.

5) 보통, 리만 계량을 핀슬러 계량의 특수한 경우라고 하는 것보다 핀슬러 계량을 리만 계량의 일반화라고 한다.

이다. 여기서 G^i 는 핀슬러 계량 F 에 의해 정의되는 함수이다. 베어왈트는

$$D\xi^i = d\xi^i + C_j{}^i{}_k(x,\dot{x})\xi^j d\dot{x}^k + \Gamma_j{}^i{}_k(x,\dot{x})\xi^j dx^k \tag{7}$$

으로 정의되는 접속을 도입하여 평행 이론을 연구할 수 있게 되었다. 여기서 접속 계수 $C_j{}^i{}_k, \Gamma_j{}^i{}_k$ 는 핀슬러 계량 F 에 의해 정의된다.

베어왈트의 접속과 대비되는 카르탕과 천의 접속도 1차변분공식 (first variational formula) 으로 얻을 수 있는 오일러-라그랑주 방정식 (6)을 쉽게 해석하기 위해 제안된 것이다.

2.3 천의 기여

천은 1948년 [14] 에서 변분법 관점을 따라 핀슬러 공간 위의 새로운 접속을 도입하였다. 이 논문에는 외미분을 사용한 계산만이 나열되어 있을 뿐 기하학적인 얼개가 나타나 있지 않지만 카르탕의 움직이는 좌표계를 이용하여 새로운 접속을 제안하였다.6) 1992년 [15] 에서 벡터 번들 위의 접속에 대한 이론을 바탕으로 엄밀하게 재해석된 이후 1990년대 이후 핀슬러 기하학을 잠에서 깨우는 데 큰 역할을 하였다. 천의 접속은 카르탕의 접속과는 달리 계량적이지 않은 (non-metrical) 대신 꼬임이 없다 (torsion free).

핀슬러 계량 F 가 주어졌을 때 접벡터 번들 전체에서 잘 정의되는 힐버트 형식 (Hilbert form)

$$\omega = \frac{\partial F}{\partial y^i} dx^i$$

이 중요한 역할을 한다. 천은

$$L(c) = \int_c \omega$$

임에 착안하여 계량적이지는 않지만 꼬임이 영인 새로운 접속을 제안하였는데 그의 접속은 힐버트 형식 ω 와 관련이 있다.

핀슬러 공간 위의 카르탕의 접속과 일반적인 움직이는 좌표계를 이용한 계산 방법은 20세기 중반 이후 미분기하학의 발전에 많은 영향을 미쳤기 때문에7) 이와 관련된 역사적 고찰도 필요하다.

현대적인 관점에서 핀슬러 기하학의 진보는 파이버 번들의 개념이 정립되고 이 위에서 정의되는 접속 이론이 개발된 이후에 이루어졌다고 보는 것이 타당하다. 이런 이론의 체계가 완성되기 전 베어왈트, 카르탕, 천 등은 핀슬러 계량을 이용하여 접속 계수 (connection coefficient) 를 도입하여 공변미분 (covariant derivative) 과 평행성 (parallelism) 을 정의하였다. 이 이론을

6) 천은 1934년 함부르크에 도착하여 블라쉬케의 지도 아래 카르탕 방법론을 기하학에 적용하는 연구를 하여 1936년 박사학위 (Doctor of Science) 를 받았다. 이후 1936년 파리의 카르탕을 방문하여 카르탕-케일러 이론 (Cartan-Kähler theory) 을 연구하였다. 이 연구가 기초가 되어 [14] 에서 핀슬러 계량의 국소적 동치 문제를 해결하기 위해 새로운 접속을 제안하였다.

7) [13] 이 카르탕이 핀슬러 기하학에 관해 쓴 마지막 논저이다. 그의 방법론이 에레스만 (C. Ehresmann) 이후 파이버 번들 위에서 정의된 접속 이론으로 일반화되어 오늘날 기하학자들이 많이 사용하는 도구가 되었다.

후에 파이버 번들 위의 접속 이론을 이용하여 재해석한 학자가 핀슬러 기하학의 일본 학파를 창시한 마쭈모토(M. Matsumoto)이다.[8)]

3 본론

이 절에서는 헝가리 데브르첸에서 핀슬러 기하학을 연구한 베어왈트, 바르가, 랍크삭, 타마시에 대해서 알아보고 어떻게 수학적 영향을 미쳤는지 알아본다.

3.1 베어왈트

오늘날 핀슬러 기하학을 연구하는 학자들이 빼놓고 지날 수 없는 사람이 베어왈트(Ludwig Berwald)이다. 베어왈트는 1883년 12월 8일 체코(당시 보헤미아)의 프라하(Prague)에서 태어났다. 1902년 독일 뮌헨의 루드비히-막시밀리안 대학(Ludwig-Maximilians-Universität München)에 진학하여 1908년 포스(A. Voss) 교수를 지도교수로 하여 박사학위를 받았다.[9)]. 건강상의 이유로 취임논문이나 취임강연을 위한 후속 연구를 하지 못하고 코발레프스키(G. Kowalewski)와 픽(G. Pick)의 주선으로 고향 프라하의 독일 대학(German University of Plague, 현재는 찰스 대학(Charles University))으로 돌아와 강사 생활을 시작하였고 1924년에 정교수가 되었다.[10)]

베어왈트(L. Berwald)의 주요 업적은 리만 계량을 일반화한 계량이 주어진 핀슬러 공간 위에 소위 베어왈트 접속이라고 불리는 접속과 평행성을 도입한 것이다. 그는 박사학위 논문을 더 다듬어 1924년 독일 수학회에서 발표하고 1926년 그 완결본 [1]을 발표하였다. 베어왈트보다 당시에 더 유명했던 씽이나 테일러의[11)] 연구가 후속 세대로 이어지지 못하고 당대에 끝나버렸다. 수학 계보 프로젝트에 의하면 테일러는 [40]에 언급된 블리스의 학생으로 3명의 박사학생을 배출하였고 씽도 박사학생 10명을 포함하여 모두 98명의 후속 세대가 있지만 더 이상 핀슬러 기하학을 연구하지는 않았다. 이는 20세기 중반 미분기하학 분야가 폭발적으로 발전하면서 더 이상 핀슬러 기하학에 관심을 가질 필요가 없어졌기 때문이다.

반면 베어왈트는 그의 제자였던 바르가(O. Varga) 등을 통해 그가 정착했던 헝가리 데브레첸을 중심으로 오늘날까지 꾸준히 핀슬러 기하학자를 배출하여 헝가리 데브레첸 핀슬러 기하학파가 만들어지는 단초를 제공했다고 할 수 있다. 2차 세계대전 후 동유럽은 공산권

8) 이에 관해서는 [22]이나 [23] 참조.

9) 학위 논문의 제목은 Krümmungseigenschaften der Brennflächen eines geradlinigen Strahlensystems und der in ihm enthaltenen Regelflächen이다. 미국수학회의 수학 계보 프로젝트에 의하면 베어왈트는 12명의 후학을 두었다.

10) 1929년 픽이 은퇴한 이후 이 대학의 학과장이 되었다.

11) 씽은 토론토 대학(University of Toronto), 아일랜드 국립 대학(National University of Ireland) 등의 교수였고 테일러는 위스콘신 대학(University of Wisconsin-Madison)과 프린스턴 대학(Princeton University)의 교수였다.

국가가 되어 서방 국가들과의 교류가 원활하지 못 했었는데 이런 정치적인 어려움을 극복하고 1975년부터 일본의 마쯔모토에 의해 창시된 일본 핀슬러 학파와의 교류를 통하여 비약적인 발전을 이루게 되었으며 오늘날까지 핀슬러 기하학에 관한 국제적인 회의가 지속되고 있다.

베어왈트의 업적은 오늘날 미분기하학자들이 이론 전개의 기초가 되는 파이버 번들이나 벡터 번들의 개념과 이 위에서의 접속 이론이 개발되기 전에 국소적인 텐서 계산을 이용하여 접속 계수와 평행이동을 소개하고 이를 기하학적인 문제 해결의 도구로 사용하였다는 점에서 높이 평가할 만하다. 비록 그의 접속이 오늘날 널리 사용되지 않지만 현대적 의미에서 핀슬러 기하학의 창시자라고 하여도 지나치지 않다. 핀슬러의 박사학위 논문(1918년)은 베어왈트의 박사학위 논문(1908년)보다 후의 것이지만 베어왈트의 결과가 널리 알려진 것은 1926년의 [1] 이후이다. 이런 이유로 오늘날 리만 기하학을 일반화한 기하학에 핀슬러 이름을 붙여 핀슬러 기하학이라고 하지만 오히려 베어왈트가 핀슬러 기하학의 실질적인 창시자(virtual founder)라고 할 수 있다.

[1]에서 베어왈트는 힐버트의 영향으로 당시에 유행하고 있던 변분법에 기초하여 측지선에 관한 미분방정식[12] (6)을 도출하였고 이 과정에서 (7)로 정의되는 베어왈트 접속 D를 제안하였다. 이 접속을 이용하면 평행이동도 정의할 수 있다. 이때 주어진 계량이 리만 계량일 필요충분조건이 $C_{j\,k}^{\,i} = 0$인 것이다. 이 경우 (6)이 리만 기하학의 측지선의 미분방정식, (7)의 D가 레비-치비타 접속이다. 즉, 리만 기하학이 핀슬러 기하학의 특별한 경우이다.

베어왈트는 1939년 카르탕의 70세 생일에 헌정한 논문 [3]을 쓴 것을 계기로 카르탕이 개발한 이론과 그의 착상을 결합하여 [4], [5], [6], [7]에서 리만 기하학의 중요한 문제들을 핀슬러 공간으로 일반화하여 해결하였다. 불행히도 베어왈트 자신의 연구는 그가 1941년 폴란드의 우즈 게토(Lódź Ghetto)로 추방되어 1942년 사망하여 때 이른 종말을 고하게 되었다. [7]은 그의 사후인 1947년에 출간된 논문이다.

베어왈트의 이론은 현 세대의 기하학자들이 익숙한 도구(번들이나 그 위의 접속 이론)를 이용하지 않은 국소적인 텐서 계산이었지만 시대를 앞서갔기 때문에 오늘날 그의 논문을 읽는 것은 쉬운 일이 아니다. 오늘날 그의 접속은 보통 마쯔모토의 공리화를 통하여 현대적으로 해석되고 있다([22, 23] 참조). 베어왈트는 리만 곡률을 핀슬러 공간으로 일반화한 베어왈트 접속, 베어왈트-모오 계량, 베어왈트 스프레이 등에 그의 이름을 남겼다.

3.2 바르가

바르가(Ottó Varga)는 1909년 헝가리 제페트넥(Szepetnek)에서 태어났다. 1927년 빈 공대(Technical University of Vienna)의 건축과에 입학하였으나 1년 후 프라하의 독일 대학(German University of Prague)으로 편입하였다. 여기서 베어왈트의 눈에 띄어 그의 조언에

12) 미분기하학이나 리만 기하학에 나오는 측지선의 방정식이 이 방정식의 특별한 경우이다.

따라 기하학 분야를 집중적으로 연구하여 1933년 핀슬러 공간에 대한 논문으로 박사학위를 받았다.[13)]

박사학위 후 베어왈트의 추천으로 1년간 함부르크 대학(Hamburg Universität)에서 당시 세계적인 기하학자였던 블라쉬케(W. Blaschke)와[14)] 적분기하학에 대해 연구하였으나[15)] 블라쉬케와 관계가 좋지 않아 다시 프라하로 돌아갈 수밖에 없었다. 이때 함부르크에서 바르가는 중국에서 박사학위를 마치고 여기서 박사학위후과정을 하고 있던 천[16)]과 만났다.

바르가의 접속은 카르탕의 접속과 유사한 반면 천의 핀슬러 기하학에 관한 논문 [14, 15]에 나타난 접속은 베어왈트의 접속과 유사한 성질을 갖는다. 미국 수학회의 수학 논평(Math. Review)을 보면 천은 카르탕 접속과 유사한 접속을 이용한 바르가의 핀슬러 기하학에 관한 업적을 알고 있었으나[17)] 바르가가 핀슬러 기하학에 관한 천의 업적, 특히 천 접속을 도입하여 핀슬러 계량의 국소적 동치 문제를 해결한 사실을 알고 있었다는 자료는 없다.

1939년 독일의 히틀러가 프라하를 점령하고 유태인들을 강제로 추방하기 시작하였다. 이때 바르가는 베어왈트의 조수였는데 1941년 유태인인 베어왈트가 추방되는 등 프라하에서 안정적인 연구를 할 여건이 되지 않아 헝가리로 돌아와 콜로즈바르(Kolozsvár)(지금 루마니아의 클루즈(Cluj))에서 교수직을 얻었는데 1년 후 데브레첸 대학(Debrecen University)으로 이직하였다. 당시 그가 대학의 유일한 수학자였다. 1947년에는 부교수, 1948년에는 정교수가 되었다.

바르가는 카르탕과 거의 같은 시기에 계량적 선형 접속(linear metrical connection)[18)]에 대해서 연구하였으나 이 접속은 베어왈트의 접속과는 달리 계량적이지만 꼬임이 영이 아니다. 이런 의미에서 바르가의 접속은 카르탕의 접속과 성질이 같다. 바르가의 연구 결과가 카르탕의 연구 결과와 겹치는 부분이 많아서 바르가의 논문 [34]이 카르탕의 논문보다 3년 후 잘 알려져 있지 않던 지역 논문집(Lotos, Prague)에 요약본으로 실릴 수밖에 없었다.

[38]에서 바르가는 베어왈트의 영향으로 당시에 유행하던 변분법을 적용하여 핀슬러 공간 위의 카르탕 접속을 유도해냈다. 여기서 카라테오도리의 지시면을 이용하여 카르탕 접속을 기하학적으로 해석할 수 있게 되었다. 그는 이후 핀슬러 공간 위에서 평행이동과 선형접속에 대한 많은 논문을 출판하였지만 텐서 계산을 이용하였기 때문에 국소적인 계산에서 벗어나지 못 했다.

---

13) 그의 박사학위 논문 제목은 On Finsler spaces이다.
14) 당대 최고의 기하학자 중 한 사람이었으며, 다른 한 사람은 카르탕이다.
15) 이 당시 연구 결과가 [35, 36, 8, 37, 2]로 나타났다. 적분 기하학에 관한 논문은 특이하게도 번호가 달려 있는데 첫 두 논문이 블라쉬케의 것이다. 따라서 적분 기하학 발전 초기에 바르가가 큰 공헌한 것을 알 수 있다.
16) 박사학위후과정 지도 교수가 블라쉬케와 카르탕이다.
17) 천은 수학 논평에 바르가의 논문들에 관해 보고하였다.
18) 카르탕은 이에 관한 연구의 요약본 [12]을 1933년 Comptes Rendus에 기고하고 이 주제에 관한 단행본《핀슬러 공간(Les espaces de Finsler)》 [13]을 1934년에 출판하였다. 이것이 핀슬러 기하학에 관한 카르탕의 마지막 업적이다.

바르가는 헝가리 동쪽 끝의 소도시 데브레첸을 떠나 대도시에서의 삶을 갈망했는데 그 일환으로 1950년부터 헝가리 학술원 소속으로 소오스(G. Soós), 파카스(M. Farkas), 모오(A. Moór), 젠테(J. Szenthe) 등의 박사학위 논문을 지도하였다. 마침내 1959년 그는 부다페스트로 이직하여 1962년 여기서 사망하였으나 핀슬러 기하학의 학파를 만든 것은 데브레첸에서였다.

3.3 랍크삭

랍크삭(András Rapcsák)은 1914년 헝가리 호드메죄바샤르헤이(Hódmezövásárhely)에서 태어나 1993년 헝가리 데브레첸(Debrecen)에서 사망하였다. 그는 대학에 입학하기 전 헝가리의 전국수학경시대회에 참가하면서 헝가리 출신 수학자인 파카스 보야이(Farkas Bolyai)와 그의 아들 야노 보야이(Janos Bolyai)의 비유클리드 기하학에 관한 업적에 대해서 공부하였다. 1933년 세게드 대학(Ferenc József University of Szeged)에 진학하여 리츠(F. Riesz), 하르(A. Haar) 등 당대의 저명한 수학자에게서 배웠다. 19세에 발병한 골육종을 치료하느라 많은 시간을 보낸 끝에 2차 세계대전 중인 1942년 9년 만에 대학을 졸업하였다.[19] 악성 종양에도 불구하고 79세까지 살았으나 인생의 많은 시간을 이 병을 치료하는 데 보내야 했다.

대학을 졸업하고 학교 교사로 취업했으나 1945년부터 데브레첸 대학의 사범대학에서 가르치기 시작했다. 이때 이 대학의 유일한 수학을 전공한 교수이던 바르가의 눈에 띄어 그의 지도로 기하학 분야를 전공하여 1947년 박사학위를 받았다.[20] 1949년 [25]에서 핀슬러 공간의 초곡면 위의 곡선에 대해서 다뤘는데 바르가의 절대미분을 이용하여 오늘날 학부 미분기하학 시간에 배우는 정칙곡선에 관한 프레네(Frenet) 정리를 일반화할 수 있음을 보였다.

그는 사범대학에 대한 국가 정책의 변화로 데브레첸에서 에거(Eger)의 대학으로 합병되어 이직하였다가 1951년 부교수가 되어 데브레첸으로 돌아오게 되었다. 1949년에 [25]에서 바르가가 제안한 새로운 직교 좌표계를 이용하여 리만 기하학의 텐서 미분에 관한 계산을 핀슬러 공간으로 일반화하였다.[21]

베어왈트는 1947년 논문 [7]에서 스칼라 곡률이 상수인 개념을 핀슬러 공간으로 일반화하였는데 랍크삭이 1957년 논문 [26]에서 바르가가 정의한 준-측지선(quasi-geodesic)등의

19) 1939년 2차 세계대전이 발발하였고 1940년 헝가리는 독일과 불가침조약을 맺었으나 1941년 독일이 헝가리를 점령하였다.

20) 세게드 대학(University of Szeged)에서 박사학위를 받았는데 논문 제목은 Felületelmélet a Minkowski-térben(The theory of surfaces in Minkowski space)이다. 세게드 대학은 헝가리 최고 명문대학이며 그의 부속기관으로 보야이 수학 연구소(Bolyai Mathematical Institute)가 있다.

21) 그 당시 부스만 [9]에 의해 리만 기하학의 직교 좌표의 존재에 관한 정리가 핀슬러 공간에서는 성립하지 않는다는 것이 알려져 있었다([10, 11] 참조). 이 때문에 리만 기하학의 텐서 계산을 핀슬러 공간으로 일반화하는 것이 매우 복잡한 일이었다.

개념을 이용하여 베어왈트의 스칼라 곡률이 상수인 핀슬러 공간을 특징짓는 초곡면이 만족해야할 필요충분조건을 구하였다.

랍크삭은 1957년부터 1973년까지 바르가의 뒤를 이어 데브레첸 대학의 수학과 학과장 역할을 하다가 1973년 타마시에게 물려주었다. 바르가와 그의 학생인 소오스 등이 큰 도시에서의 삶을 갈망하여 부다페스트로 떠난 반면 랍크삭은 1993년 그가 사망할 때까지 데브레첸을 지켰다. 수학 계보 프로젝트에 의하면 그의 박사학위 지도 학생은 한 명도 없다.

3.4 타마시

타마시 (Lajos Tamássy) 는 1923년 데브레첸에서 태어났다. 2차 세계대전 당시 징집 중 부상을 당하고 전쟁 포로가 되었다. 1946년 데브레첸 대학으로 진학하여 수학과 물리학을 공부하였다. 이후 세게드 대학 등에서 연구 후 1953년 데브레첸 대학에 조교수로 임용되어 돌아왔다. 그가 임용될 당시에는 바르가가 수학과 학과장이었다.

바르가의 첫 공동연구자였던 랍크삭이 1957년부터 1973년까지 데브레첸 대학 수학과 학과장이었고 타마시가 1973년에 학과장 자리를 물려받아 데브레첸 대학 수학과의 핀슬러 기하학의 전통을 이어가게 되었다. 타마시는 1988년까지 15년간 학과장이었는데 1975년에 처음 일본을 방문하여 일본 핀슬러 기하학파의 창립자인 마쭈모토와 교류를 시작한 이래 격년으로 일본과 헝가리에서 핀슬러 기하학에 관한 국제회의를 개최해오고 있다.

미국수학회의 수학 계보 프로젝트나 헝가리 박사학위 협의회 (Hungarian Doctoral Council) 의 자료의하면 타마시가 박사학위를 받은 기록은 없다. 미국수학회의 수학 계보 프로젝트에 의하면 타마시의 박사학위 지도 학생은 두 명 (코박스 (Zoltán Kovács), 필렙 (László Filep)) 이다. 헝가리 박사학위 협의회의 자료 [41] 에 의하면 9명의 박사 학생을 배출하였다.[22] 이들이 현재 데브레첸 대학 수학과 기하학 분야의 중심을 이루고 있다.

국소적인 텐서 계산을 이용한 미분기하학의 발전은 1950년을 전후로 파이버 번들이나 벡터 번들의 개념의 정립과 그 위에서의 접속에 관한 이론이 등장한 이후 종말을 고한 듯이 보이지만 헝가리 데브레첸 핀슬러 기하학파가 이룬 지난 100여 년간의 업적을 새롭게 해석하는 것도 중요한 일의 하나이다. 현재 헝가리 데브레첸 대학 수학과 교수 중 기하학 분야 전공자는 코박스 (Z. Kovács), 코즈마 (L. Kozma), 무즈나이 (Z. Muzsnay), 조셉 질라시 (J. Szilasi), 졸탄 질라시 (Z. Szilasi), 바크소 (S. Bácso) 로 이들이 집단을 이뤄 핀슬러 기하학과 그 응용에 대해서 연구하고 있다. 타마시 다음 세대인 이들은 현대적인 관점에서 접근하여 대역적인 핀슬러 기하학의 발전을 도모하고 있다. 특히 조셉 질라시는 1960년대 마쭈모토의 업적 [22]

22) 최근 학생부터 나열하면 다음과 같다. 괄호 안의 숫자는 학위 취득 연도. Bela Kis(1993), Zoltán Muzsnay(1992), Lászlo Kozma(1990), Quoc Binh Tran(1989), Zóltan Kovács(1987), Hideo Shimada(1983), József Szilasi(1982), Sándor Bácso(1981), József Csorba(1980), Van Tu Nguyen(1975).

을 뛰어 넘어 스프레이(spray) 이론을 이용하여 핀슬러 공간의 접속을 해석한 단행본 수준의 논문 [30]과 교과서 [31]를 출간하였다.

바르가는 1950년 데브레첸 대학 수학과의 논문집인 《데브레첸 수학 출판물(Publicationes Mathematicae Debrecen)》을 창간하여 30년간 편집장이었고 그 뒤로 랍크삭이 이 역할을 물려받았고 현재의 편집장은 타마시이다. 이 논문집에는 핀슬러 기하학에 관한 많은 논문이 실려 이 분야에 관한 전문 논문집의 역할을 하고 있다. 《데브레첸 수학 출판물》은 핀슬러 기하학에 관한 전문 논문집 역할을 하는 일본의 《텐서(Tensor, New Series)》와 유사한 역할을 하고 있다.

4 결론

베어왈트는 힐버트 (또는 그 당시 유행하고 있던 변분법) 의 영향으로 곡선의 길이의 1차 변분공식으로부터 오일러-라그랑주 공식을 유도해내고 이 방정식을 이해하기 위해 접속을 도입하였다. 베어왈트의 지도교수인 포스는 괴팅겐 대학교 출신이지만 포스가 학위를 받은 해가 1869년, 힐버트가 괴팅겐 대학에 부임한 해가 1895년임을 고려하면 포스와 힐버트는 직접적인 관계가 없었다고 할 수 있다. 베어왈트의 학생이었던 바르가는 베어왈트의 영향뿐 아니라 카르탕과 카라테오도리의 연구에도 많은 영향을 받았고 연구 결과가 겹치는 것도 많다. 랍크삭은 베어왈트와 바르가의 영향을 받았다. 타마시는 박사학위를 받았다는 기록조차 없지만 그는 가장 많은 논문을 썼으며 9명의 박사학생을 배출하였다. 타마시부터 국소적인 계산에서 벗어나 대역적인 방법론을 사용하기 시작했고 국제 교류가 시작되었으며 지도 학생을 포함한 연구자들 사이에 쌍방향으로 영향을 주고받기 시작하였다.

이 논문에서 언급된 접속의 성질을 비교하면 다음 표와 같다. 리만 기하학의 레비-치비타 접속이 계량적이고 꼬임이 영임에 비해 리만 다양체가 아닌 핀슬러 공간의 접속은 동시에 계량적이고 꼬임이 영일 수 없다. 핀슬러 기하학에서는 문제의 성질에 따라 여러 가지 접속 중에 골라 적용할 수 있는 장점이 있다.

	베어왈트	카르탕	천
계량적(metric compatible)	X	O	X
꼬임이 없다(torsion free)	O	X	O

Table 1. 접속의 성질 비교

리만이 취임강연에서 소개한 n차원 리만 다양체 위에서의 접속과 곡률의 개념을 리만 계량을 일반화한 핀슬러 계량이 주어진 핀슬러 다양체 위로 확장한 사람이 베어왈트다. 베어왈트의 이 업적은 핀슬러의 박사학위 논문보다 시기적으로 앞서는데 독일수학회에서 강의하고 1926년 논문으로 출간하기까지 잘 알려져 있지 않았다. 뿐만 아니라 핀슬러의 결과가 진정한 의미에서

리만의 발상을 일반화한 것이라고 할 수 없기 때문에 베어왈트가 오늘날 핀슬러 기하학이라고 불리는 이 분야의 실질적인 창시자라고 할 수 있다.

프라하 대학의 베어왈트의 학생이었던 바르가는 데브레첸에 정착한 이후 바르가, 랍스칵, 모오, 타마시, 소오스 등으로 내려오는 계보를 만들게 된다. 이때부터 핀슬러 기하학에 관해 연구하는 학자들의 수가 늘어나 학파를 형성하게 되었다고 할 수 있다. 따라서 바르가를 헝가리 데브레첸 핀슬러 기하학파의 창시자라고 할 수 있다. 일본 핀슬러 기하학파가 일본 전국에 퍼져있는 반면 헝가리 핀슬러 기하학파는 데브레첸에 집중되어 있다.

1950년 데브레첸에서 바르가 등에 의해 창간된 학술지 《데브레첸 수학 출판물》은 지역 학술지로 시작하였으나 당시 그 수가 급격히 불어나던 핀슬러 기하학자의 연구 결과들을 실어 핀슬러 기하학 전문지의 역할을 하였고 데브레첸 학파의 결과들을 세계적으로 알리는데도 많은 기여를 하고 있다. 이와 같은 성격의 전문지로 일본 핀슬러 기하학파의 사적 학술지에 해당하는 《텐서》가 있다.

감사의 글 더 좋은 논문이 될 수 있도록 정성어린 논문 심사 의견서를 보내 주신 심사위원 세 분께 감사의 마음을 전합니다. 심사위원들의 조언이 논문의 일부 구성을 새롭게 하고 문장을 매끄럽게 하여 저자의 의도를 명확하게 전달할 수 있도록 바로잡는 데 많은 도움이 되었습니다. 또 완전한 논문이 될 수 있도록 본 논문 내의 용어의 통일과 우리말 표현과 관련한 세세한 점까지 지적하여 주셔서 감사합니다. 이 논문의 초고를 읽고 더 발전할 수 있는 방향을 제시하여 주신 분들에게도 감사의 말을 전합니다. 본 연구는 덕성여자대학교 2016년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었습니다.

References

1. L. Berwald, Untersuchung der Krum̈mung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus, *Math. Z.* 25(1) (1926), 40–73.
2. L. Berwald and O. Varga, Integralgeometrie 24. Über die Schiebungen im Raum, *Math. Z.* 42 (1937), 710–736.
3. L. Berwald, Überdie n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-fachen Oberflächenintegrals, *Acta Math.* 71 (1939), 191–248
4. L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. I. Geometrische Erklärungen der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen Finslerschen Raumes, *Mathematica, Timisoara* 17 (1941), 34–58
5. L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie II. InvariantenbeiderVariation vielfacher Integrale und Parallelhyperfl ̈achen in Cartanschen Räumen, *Compositio Math.* 7 (1939), 141–176
6. L. Berwald On Finsler and Cartan geometries. III. Two-dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals, *Ann. of Math.* 42(2) (1941), 84–112

7. L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung, *Ann. of Math.* 48(2) (1947), 755–781
8. W. Blaschke and O. Varga, Integralgeometrie 9. Über Mittelwerte an Eikörpern, *Mathematica* 12 (1936) 65–80.
9. H. Busemann, The Geometry of Finsler space, *Bull. of the Amer. Math. Soc.* 56(1) (1950), 5–16.
10. H. Busemann, On Normal Coordinates in Finsler spaces, *Math. Ann.* 129 (1955), ??–??.
11. H. Busemann, *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, 1955.
12. É. Cartan, Sur les espaces de Finsler, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 196 (1933), 582–586.
13. É. Cartan, Les espaces de Finsler, Actual. Sci. Ind., no. 79, Herman, 1934.
14. S. S. Chern, Local Equivalence and Euclidean Connections in Finsler Spaces, *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Ser. A* 5 (1948), 95–121.
15. S. S. Chern, On Finsler Geometry, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 314 (1992), 757–761.
16. S. S. Chern, Finsler Geometry is just Riemannian Geometry without quadratic restriction, *Notices of AMS* 1 (1996), 959–963.
17. Cho M., History and Development of Sphere Theorems in Riemannian Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(3) (2011), 23–35. 조민식, 리만기하학에서 구면정리의 발전과 역사, 한국수학사학회지 24(3) (2011), 23–35.
18. P. Finsler, *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, Dissertation at the University of Göttingen, 1919.
19. C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingesis Recentiores* 6 (1827), 99–146.
20. Han G., A Historical Note on Riemann's life and Achievement, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(2) (2011), 61–70. 한길준, 리이만의 생애와 그의 업적에 대한 역사적 소고, 한국수학사학회지 24(2) (2011), 61–70.
21. Kim Y. -W., Jin Y., Élie Cartan and Riemannian Geometry of 20th Century, *The Korean Journal for History of Mathematics* 22(2) (2009), 13–26. 김영욱, 김옥자, 엘리 카르탕과 20세기 리만기하학, 한국수학사학회지 22(2) (2009), 13–26.
22. M. Matsumoto, *Foundations of Finsler Geometry and special Finsler spaces*, Kasheisha Press, 1986.
23. M. Matsumoto, Finsler Geometry in the 20th-Centry in *In Foundations of Finsler Geometry and special Finsler spaces*, Kluwer Academic Press, 2003, 557–966
24. Park C. K., Lobachevsky's Philosophy of Mathematics and Non-Euclidean Geometry, *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(4) (2011), 21–31. 박창균, 로바체프스키의 수리철학과 비유클리드기하, 한국수학사학회지 24(4) (2011), 21–31.
25. A. Rapcsák, Kurven auf Hyperflächen im Finslerschen Raume, *Hungarica Acta Math.* 1(4) (1949), 21–27
26. A. Rapcsák, Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektivebene Räume, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 8 (1957), 1–18.
27. B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13 (1867), 1–15.

28. M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol. II*, 2nd Ed., Publish or Perish, 1999.
29. J. Synge, A generalization of the Riemannian line-element, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 27(2) (1925), 61–67.
30. J. Szilasi, A Setting for Spray and Finsler Geometry in *In Foundations of Finsler Geometry and special Finsler spaces*, Kluwer Academic Press, 2003, 1183–1426
31. J. Szilasi, R. Lovas and D. Kertész, *Connections, Sprays and Finsler Structures*, World Scientific, 2014.
32. J. Taylor, A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas, *Trans. of the Amer. Math. Soc.* 27(2) (1925), 246–264.
33. J. Taylor, Parallelism and transversality in a sub-space of a general (Finsler) space, *Ann. of Math.* 28(2) (1927), 620–628.
34. O. Varga, Beiträge zur Theorie der Finslerschen Räume und der affinzusammenhängenden Räume von Linienelementen *Lotos, Prague* 84 (1936), 1–4.
35. O. Varga, Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum, *Math. Z.* 40 (1935), 384–405.
36. O. Varga, Integralgeometrie 8. Über Masse von Paaren linearer Mannigfaltigkeiten im projektiven Raum P^n, *Rev. Mat Hispano - Americana* (1935), 241–279.
37. O. Varga, Integralgeometrie 19. Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen, *Math. Z.* 41 (1936), 768–784.
38. O. Varga, Bestimmung des invarianten Differentials in Finsler'schen Räumen, *Mat. Fiz. Lapok* 48 (1941). 423–435.
39. Won D. Y., On the Development of Differential Geometry from mid 19C to early 20C by Christoffel, Ricci and Levi-Civita, *Journal for History of Mathematics* 28(2) (2015), 103–115. 원대연, 크리스토펠, 리치, 레비-치비타에 의한 19세기 중반부터 20세기 초반까지 미분기하학의 발전, 한국수학사학회지 28(2) (2015), 103–115.
40. Won D. Y., On the History of the Birth of Finsler Geometry at Göttingen, *Journal for History of Mathematics* 28(3) (2015), 133–149. 원대연, 괴팅겐에서 핀슬러 기하가 탄생한 역사, 한국수학사학회지 28(3) (2015), 133–149.
41. Hungarian Doctoral Council, 헝가리 박사학위 협의회, `https://doktori.hu/index.php?menuid=192&lang=EN&sz_ID=4002`.
42. The MacTutor History of Mathematics Archive, 맥튜터 수학사 기록 보관소, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies`.
43. Mathematics Genealogy Project, 수학 계보 프로젝트, `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.php`.
44. Wikipedia 위키백과, `http://en.wikipedia.org/wiki`.