J. Soc. Korea Ind. Syst. Eng Vol. 41, No. 4 : 220-227, December 2018
https://doi.org/10.11627/jkise.2018.41.4.220

ISSN : 2005-0461(print)
ISSN : 2287-7975(online)

The Proportional Method for Inventory Cost Allocation

Dongju Lee†

Industrial & Systems Engineering, Kongju National University

재고비용할당을 위한 비례적 접근법

이 동 주†

공주대학교 산업시스템공학과

The cooperative game theory consists of a set of players and utility function that has positive values for a subset of players, called coalition, in the game. The purpose of cost allocation method is to allocate the relevant cost among game players in a fair and rational way. Therefore, cost allocation method based on cooperative game theory has been applied in many areas for fair and reasonable cost allocation. On the other hand, the desirable characteristics of the cost allocation method are Pareto optimality, rationality, and marginality. Pareto optimality means that costs are entirely paid by participating players. Rationality means that by joining the grand coalition, players do not pay more than they would if they chose to be part of any smaller coalition of players. Marginality means that players are charged at least enough to cover their marginal costs. If these characteristics are all met, the solution of cost allocation method exists in the core. In this study, proportional method is applied to EOQ inventory game and EPQ inventory game with shortage. Proportional method is a method that allocates costs proportionally to a certain allocator. This method has been applied to a variety of problems because of its convenience and simple calculations. However, depending on what the allocator is used for, the proportional method has a weakness that its solution may not exist in the core. Three allocators such as demand, marginal cost, and cost are considered. We prove that the solution of the proportional method to demand and the proportional method to marginal cost for EOQ game and EPQ game with shortage is in the core. The counter-example also shows that the solution of the proportional method to cost does not exist in the core.

Keywords : Cooperative Game Theory, Core, Inventory Cost Allocation

1. 서 론

비용배분문제는 여러 분야에서 발생해왔는데, 특히 공동시설의 비용배분 등에 대해 협조적 게임이론(cooperative game theory)을 적용한 연구들이 이루어져 왔다. 협조적 게임이론은 게임 참가자의 집합과 그 게임 참가자들의 부분집합인 연합에 대하여 효용이 양의 값을 가지는 효용가능집합으로 구성된다. 이러한 효용가능집합으로 구성될 때, 게임 참가자들의 공정한 이익 및 비용배분이 어떤 것인가를 연구대상으로 하고 있다[12, 15].

비용할당문제에 협조적 게임이론을 적용한 연구들은 다음과 같다. Kim and Lee[5]는 기업 간 공유경제에서는 이익을 배분할 방안이 있어야 한다는 것에 주목하고 기업 간 발생하는 계약비용과 이행비용으로 구성된 거래비용을 고려한 협조적 게임이론에 기초한 방법들을 제안하였다. 특히, 조선기자재 공동물류센터 사례를 제시하고 여러 가지 이익분배방법들을 적용하였다. 2004년부터 서울시에 대중교통 수단간 무료환승시스템이 도입되었는데, Park [13]은 이용객들로부터 받은 교통요금을 버스, 지하철 등의 교통수단간에 배분하는 문제에서 샤플리 값(Shapley

Received 24 October 2018; Finally Revised 20 December 2018; Accepted 21 December 2018
† Corresponding Author : djlee@kongju.ac.kr

Value)에 근거한 방법을 제시하고 기존의 방법과 비교하였다. Lee and Lee[8]는 샤플리값을 이용하여 우리나라의 소득 및 자산 불평등의 원천별 기여도를 분석하였다. 평균 샤플리값 분해를 적용하면 노동소득이 소득불평등의 주요 요인으로 분석되었고, 영점 샤플리값 분해를 적용하면 자산소득이 소득불평등의 주요요인으로 분석되었다. Bernstein et al.[1]은 조립업자가 공급업체들로부터 받은 지식을 타 공급업체들과 공유하여 공급업자들의 생산비용을 절감시킬 때 절감된 비용을 배분하는 이타적 배분법(altruistic allocation)을 제안하였다. 이타적배분법이란 가장 비용절감을 잘하는 공급업체가 지식을 공유하여 모든 공급업체들에게 비용절감을 이루게 하고 그 비용절감액은 비용절감을 이룬 업체들에게만 배분하는 방법이다. 모든 공급업체들이 EOQ 재고정책을 쓴다고 가정할 때 이타적 배분법은 항상 코어에 존재함을 입증하고, 예제를 통해 샤플리값은 코어에 존재하지 않는 경우도 있음을 보였다. 협조적 게임이론에서 특정한 바람직한 특성들을 가지는 해들의 집합을 코어(Core)라고 하며 바람직한 특성들은 제 2장에서 소개하였다.

본 연구에서 다루는 문제는 재고게임문제인데, 재고게임문제는 게임 참여자들이 제품을 공동으로 주문하므로써 주문비, 재고유지비용 등의 재고관련비용을 절감할 수 있게 되는데, 이때 발생하는 재고비용을 게임 참여자들에게 할당하는 문제로 많은 연구들이 이루어져 왔다. Shin and Ahn[14]과 Lee[7]는 제품 판매자가 구매자의 재고관리를 책임지는 판매자재고관리 문제에 대한 효과적인 해법을 개발하였다. Hartman and Dror[4]는 다양한 연속적 재고관리 정책을 고려한 재고게임문제에 다양한 협조적 게임이론 기법들을 적용하고 기법들의 장단점을 논하였다. Meca et al.[9]와 Fiestras-Janeiro et al.[2]은 게임 참여자들의 최적주문횟수의 제곱에 비례하여 비용을 할당하는 SOC(Share the Ordering Cost) 기법을 제시하고 재고게임문제에 적용하였다. Meca et al.[10]은 EOQ 재고게임의 경우 수요비례방법(Proportional method to demand)의 해는 항상 코어에 존재한다는 것을 입증하였다. Hartman and Dror[4]는 다양한 연속적 재고관리 정책을 고려한 재고게임문제에 다양한 협조적 게임이론 기법들을 적용하고 기법들의 장단점을 논하였다. Hartman and Dror[3]과 Müller et al.[11]은 재고게임 문제 중 하나인 신문팔이소년(News-vendor Problem) 게임 문제에는 코어(core)가 항상 존재함을 증명하였다. Lee and Lee[6]는 재고게임문제에 다양한 비용할당기법들을 적용하고 기법 별로 예제를 통해 해가 코어에 존재하는지 살펴보았다.

본 논문에서는 재고게임문제에 다양한 비례적 기법들을 적용하여 해가 코어에 존재하는지 여부를 살펴보고, 일부 경우에는 해가 항상 코어에 존재한다는 것을 증명하였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 이어지는 제 2장에서는 비용할당기법의 해가 가져야 할 특성들을 소개하고 코어의 정의에 대해 설명하였다. 제 3장에서는 수요비례기법과 한계비용비례기법을 소개하고 이들의 해가 코어에 존재한다는 것을 입증한다. 제 4장에서는 예제를 통해 비용비례기법의 경우에는 해가 코어에 존재하지 않을 수도 있다는 것을 보여주었다. 마지막으로 제 5장에서는 본 연구의 내용을 요약하고 미래연구과제에 대하여 살펴보았다.

2. 코어(Core)

$|N|$ = n명의 게임 참가자들 중 일부가 협력하여 이룰 수 있는 부분집합 S를 연합(coalition)이라고 하고, n명의 게임 참가자 모두가 참여하는 연합을 대연합(grand coalition)이라고 한다. 또한, c를 비용함수라고 할 때 (N, c)는 비용게임이다.

협조적 게임이론을 이용한 비용할당방법들에게 권장되는 세 가지 특성들은 다음과 같다[5, 8].

- 파레토 최적(pareto optimality) : 자원배분이 가장 효율적으로 이루어진 상태를 일컫는데, 이는 대연합을 구성할 때 발생하는 총비용은 각 참가자들에게 할당되는 비용의 합과 같아야 한다는 것을 의미한다.

$$\sum_{i \in N} x_i = c(N)$$

여기서 x_i는 참가자 i에게 할당된 비용이다.

- 합리성(rationality) : 연합의 비용을 공정하게 배분되기 위해서는 합리성을 만족해야 한다. 연합에 참가할 때 게임 참가자에게 할당되는 비용은 연합에 참가하지 않을 때의 비용보다 작아야 한다.

$$\sum_{i \in S} x_i \le c(S)$$

- 한계비용성(marginality) : 게임 참여자들은 연합에 참여하므로써 발생하는 자신들의 한계비용 이상의 비용이 게임 참여자들에게 할당되어야 한다.

$$\sum_{i \in S} x_i \ge c(N) - c(N \backslash S)$$

파레토 최적이 충족되는 조건에서는 합리성과 한계비용성 중 하나만 충족되면 다른 것은 자동적으로 충족된다. 파레토 최적, 합리성, 한계비용성을 모두 만족시키는 해들의 집합을 코어라고 한다.

3. 재고게임에서 비례기법의 해의 코어에 존재 여부

협조적 게임이론 기법 중 계산량이 적어 자주 쓰이는 기법 중 하나인 비례기법(Proportional Method)은 비용을 특정한 지표(allocator)에 비례하여 게임 참여자들에게 할당하는 것이다. 파레토 최적은 항상 충족하지만, 합리성과 한계비용성은 지표에 따라 만족할 수 있다. 본 연구에서 고려하는 비례기법들은 다음과 같다.

- 수요비례기법 : 고객의 수요량에 비례하여 전체비용을 할당하는 기법이다.

$$x_i = \frac{d_i}{\sum_{i \in N} d_i} c(N)$$

여기서 d_i는 게임 참여자 i의 수요율(demand rate of agent i)이다.

- 비용비례기법 : 게임 참여자가 단독으로 재고시스템을 운영할 때의 비용에 비례하여 전체비용을 할당하는 기법이다.

$$x_i = \frac{c(\{i\})}{\sum_{i \in N} c(\{i\})} c(N)$$

여기서 $c(\{i\})$는 게임 참여자 i가 단독으로 재고시스템을 운영할 때의 비용이다.

- 한계비용비례기법 : 대연합에 게임 참여자가 마지막으로 참여할 때의 한계비용에 비례하여 전체비용을 할당하는 기법이다.

$$x_i = \frac{m_i}{\sum_{i \in N} m_i} c(N)$$

여기서 $m_i = c(N) - c(N \backslash \{i\})$으로 대연합에 게임 참여자 i가 마지막으로 참여할 때의 한계비용이다.

이어지는 제 3.1절과 제 3.2절에서는 EOQ 게임과 재고부족이 있는 EPQ 재고게임문제에 수요비례기법과 한계비용비례기법의 해가 코어에 존재한다는 것을 입증하였다.

3.1 EOQ 재고게임

경제적 주문량(EOQ, Economic Order Quantity)는 총비용이 주문비용과 재고유지비용으로 구성되는 재고관리의 가장 기초적인 재고모형으로 각광을 받아왔다[9]. 사용되는 기호(notation)는 다음과 같다.

a : 고정주문비용(the fixed ordering cost)
g : 단위당 재고유지비용(holding cost per unit of agent i)
d_i : 참여자 i의 수요율(demand rate of agent i)

게임 참여자 i의 주문량을 Q_i라고 할 때 총비용은 다음과 같다.

$$c(Q_i) = a\frac{d_i}{Q_i} + h\frac{Q_i}{2}$$

$c(Q_i)$의 비용을 최소화하는 Q_i^*는

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2ad_i}{h}}$$

그러므로 최소비용은

$$c(Q_i^*) = \sqrt{2ahd_i}$$

N은 게임 참여자의 집합이고, c는 비용함수라고 할 때 비용게임(cost game)은 (N, c)이다. 파레토 최적과 합리성을 만족하는 코어는 다음과 같이 정의된다.

$$C(c) = \left\{ x \in R^N \middle| \begin{array}{l} \sum_{i \in N} x_i = c(N) \text{ and } \sum_{i \in S} x_i \le c(S) \\ \text{for } all\ S \subset N,\ S \ne \phi \end{array} \right\}$$

EOQ 재고게임에서는 수요비례기법과 한계비용비례기법의 해는 항상 코어에 속하게 된다. 이에 대한 증명은 Theorem 1과 2와 같다.

Theorem 1. EOQ 재고게임에서 수요비례방법의 해는 항상 코어에 속한다.

증명) $x_i = \frac{d_i}{\sum_{i \in N} d_i} c(N)$이므로 $\sum_{(i \in N)} x_i = \sum_{i \in N} \frac{d_i}{\sum_{i \in N} d_i}$ $c(N) = c(N)$이다.

아래 식 (1)은 성립한다.

$$\sum_{i \in S} \frac{d_i}{\sqrt{\sum_{i \in N} d_i}} \le \sum_{i \in S} \frac{d_i}{\sqrt{\sum_{i \in S} d_i}} \tag{1}$$

식 (1)의 양변에 $\sqrt{2ah}$를 곱하고 다시 정리하면

$$\sum_{i \in S} \frac{d_i}{\sum_{i \in N} d_i} \sqrt{2ah \sum_{I \in N} d_i} \le \sum_{i \in S} \frac{d_i}{\sum_{i \in S} d_i} \sqrt{2ah \sum_{i \in S} d_i}$$

좌변은 $\sum_{i\in S}\frac{d_i}{\sum_{i\in N}d_i}\sqrt{2ah\sum_{i\in N}d_i}=\sum_{i\in S}\frac{d_i}{\sum_{i\in N}d_i}c(N)$ $=\sum_{i\in S}x_i$이다.

우변은 $\sum_{i\in S}\frac{d_i}{\sum_{i\in S}d_i}\sqrt{2ah\sum_{i\in S}d_i}=\sum_{i\in S}\frac{d_i}{\sum_{i\in S}d_i}c(S)$ 이다.

그러므로, $\sum_{i\in S}x_i\le c(S)$.

Meca et al.[10]가 증명하였듯이 EOQ 게임의 경우 수요비례기법의 해는 코어에 존재한다.

Theorem 2. EOQ 재고게임에서 한계비용비례방법의 해는 항상 코어에 속한다.

증명) $m_i=c(N)-c(N\backslash\{i\})$라고 할 때 $x_i=\frac{m_i}{\sum_{i\in N}m_i}c(N)$ 이므로 $\sum_{i\in N}x_i=\sum_{i\in N}\frac{m_i}{\sum_{i\in N}m_i}c(N)=\frac{\sum_{i\in N}m_i}{\sum_{i\in N}m_i}c(N)=c(N)$이다.

합리성을 증명하려면 식 (2)를 증명하면 된다.

$$\sum_{i\in S}x_i=\sum_{i\in S}\frac{m_i}{\sum_{j\in N}m_j}c(N)\le c(S) \tag{2}$$

식 (4)를 다시 풀어 쓰면

$$\sum_{i\in S}x_i=\frac{\sum_{i\in S}c(N)-c(N\setminus\{i\})}{\sum_{i\in N}(c(N)-c(N\setminus\{j\})}c(N) \tag{3}$$

$$=\frac{\sum_{i\in S}\sqrt{2ah\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{2ah\sum_{k\neq i}d_k}}{\sum_{i\in N}(\sqrt{2ah\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{2ah\sum_{k\neq i}d_k})}$$

$$\sqrt{2ah\sum_{j\in N}d_j}\le c(S)=\sqrt{2ah\sum_{i\in S}d_i}$$

식 (3)의 양변에 $1/\sqrt{2ah}$를 곱하고 정리하면

$$\frac{\sum_{\in S}\sqrt{\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k}}{\sum_{i\in N}(\sqrt{\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k})}\sqrt{\sum_{i\in N}d_i}\le\sqrt{\sum_{i\in S}d_i} \tag{4}$$

식 (4)를 다시 정리하면

$$\frac{\sum_{i\in S}(\sqrt{\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k})}{\sqrt{\sum_{i\in S}d_i}} \tag{5}$$

$$\le\frac{\sum_{i\in N}(\sqrt{\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k})}{\sqrt{\sum_{i\in N}d_i}}$$

식 (5)의 우변항은 게임 참여자의 전체집합인 N에 대해서이다. N대신 연합 S에 하나의 게임 참여자 j가 추가되는 경우를 고려해도 일반성을 잃지 않는다. 그러므로, 식 (5)의 우변항에 N대신 연합 S에 새로운 참여자 j를 추가하는 경우를 고려한다면 식 (6)과 같다.

$$\frac{\sum_{i\in S}(\sqrt{\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k})}{\sqrt{\sum_{i\in S}d_i}} \tag{6}$$

$$\le\frac{\sum_{i\in S\cup j}(\sqrt{\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k})}{\sqrt{\sum_{i\in S\cup\{j\}}d_i}}$$

식 (6)이 성립한다면 식 (5)도 성립한다고 할 수 있다. 식 (6)을 간단히 하기 위해 다음의 기호를 사용하였다. 즉, $A=\sum_{i\in S}d_i$, $B=\sum_{i\in S}(\sqrt{\sum_{j\in N}d_j}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k})$, $C=\sum_{j\in N}d_j$, $a=d_j$라 하자.

그러면 식 (6)은

$$\frac{B}{\sqrt{A}}\le\frac{B+(\sqrt{C}-\sqrt{C-a})}{\sqrt{A+a}} \tag{7}$$

식 (7)을 다시 정리하면

$$\frac{B}{\sqrt{C}-\sqrt{C-a}}\le\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+a}-\sqrt{A}} \tag{8}$$

$B=\sum_{i\in S}(\sqrt{C}-\sqrt{\sum_{k\neq i}d_k})$인데 B가 가장 큰 경우는 $\sqrt{C}-\sqrt{(C-A)}$이다. 그러므로, 아래 식 (9)가 성립하면 식 (8)도 성립한다.

$$\frac{\sqrt{C}-\sqrt{C-A}}{\sqrt{C}-\sqrt{C-a}}\le\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+a}-\sqrt{A}} \tag{9}$$

여기서 $C\ge A+a$이다.

i) $A\ge a$인 경우 식 (9)의 좌변의 값이 가장 큰 경우는 $C=A+a$이다.
$C=A+a$를 식 (9)의 좌변에 대입하면

$$\frac{\sqrt{A+a}-\sqrt{A+a-A}}{\sqrt{A+a}-\sqrt{A+a-a}}=\frac{\sqrt{A+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{A+a}-\sqrt{A}}$$

이것을 식 (9)의 우변과 비교하여 식 (10)이 성립함을 보이면 된다.

$$\frac{\sqrt{A+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{A+a}-\sqrt{A}}\le\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+a}-\sqrt{A}} \tag{10}$$

식 (10)의 양변에 $(\sqrt{A+a}-\sqrt{A})(\sqrt{A+a}+\sqrt{a})$을 곱

하고 정리하면

$$A \leq \sqrt{A^2+Aa}+\sqrt{Aa} \tag{11}$$

식 (11)은 성립하므로, 식 (9)는 성립한다.

ii) $A < a$인 경우 식 (9)의 좌변의 값이 가장 큰 경우는 $C \to \infty$이다.

$$\lim_{c\to\infty}\frac{\sqrt{C}-\sqrt{C-A}}{\sqrt{C}-\sqrt{C-a}}$$

분모와 분자를 모두 유리화하면

$$\lim_{c\to\infty}\frac{\sqrt{C}-\sqrt{C-A}(\sqrt{C}+\sqrt{C-a})(\sqrt{C}+\sqrt{C-A})}{\sqrt{C}-\sqrt{C-a}(\sqrt{C}+\sqrt{C-a})(\sqrt{C}+\sqrt{C-A})}$$

$$=\lim_{c\to\infty}\frac{A(\sqrt{C}+\sqrt{C-a})}{a(\sqrt{C}+\sqrt{C-A})}=\lim_{c\to\infty}\frac{A(2\sqrt{C})}{a(2\sqrt{C})}=\frac{A}{a}$$

식 (9)의 우변을 정리하면

$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A+a}-\sqrt{A}}=\frac{\sqrt{A}(\sqrt{A+a}+\sqrt{A})}{(\sqrt{A+a}-\sqrt{A})(\sqrt{A+a}+\sqrt{A})}$$

$$=\frac{\sqrt{A}\sqrt{A+a}+A}{A+a-A}=\frac{\sqrt{A}\sqrt{A+a}+A}{a}$$

그러므로, $C\to\infty$일때, 식 (9)의 좌변을 정리하면 $\frac{A}{a}$, 우변을 정리하면 $\frac{\sqrt{A}\sqrt{A+a}+A}{a}$이다. 그런데, 식 (12)는 성립하므로 식 (9)가 성립한다.

$$\frac{A}{a}\leq\frac{\sqrt{A}\sqrt{A+a}+A}{a} \tag{12}$$

3.2 재고부족이 있는 EPQ

재고부족이 있는 경제적생산량(Economic Production Quantity with shortages)은 잘 알려진 모형이다[9]. 사용되는 기호는 다음과 같다.

d_i : 참여자 i의 수요율(demand rate of agent i)
r_i : 참여자 i의 보충률(replacement rate of agent i)
a : 고정주문비용(the fixed ordering cost)
h_i : 참여자 i의 단위당 재고유지비용(holding cost per unit of agent i)
s_i : 참여자 i의 단위당 재고부족 벌과비용(shortage cost per unit of agent i)

주문이 발생하면 정해진 리드타임 후에 참여자 i는 r_i개의 제품을 단위시간당 받게 되며 재고부족이 발생할 수 있다. 참여자 i의 주문량을 Q_i, 최대부족량을 M_i라 할 때 총비용은 다음과 같다.

$$c(Q_i, M_i)=a\frac{d_i}{Q_i}+h_i\frac{\left(Q_i\left(1-\frac{d_i}{r_i}\right)-M_i\right)^2}{2Q_i\left(1-\frac{d_i}{r_i}\right)}+s_i\frac{M_i^2}{2Q_i\left(1-\frac{d_i}{r_i}\right)}$$

$c(Q_i, M_i)$의 비용을 최소화하는 Q_i^*, M_i^*는

$$Q_i^*=\sqrt{\frac{2ad_i}{h_i\left(1-\frac{d_i}{r_1}\right)}\frac{h_i+s_i}{s_i}},\ M_i^*=\sqrt{\frac{2ad_ih_i}{s_i(h_i+s_i)}\left(1-\frac{d_i}{r_i}\right)}$$

그러므로 최소비용은

$$c(Q_i^*, M_i^*)=\sqrt{2ad_ih_i\frac{s_i}{h_i+s_i}\left(1-\frac{d_i}{r_i}\right)}$$

재고부족이 있는 EPQ 재고게임에서는 수요비례기법과 한계비용비례기법의 해는 항상 코어에 속하게 되는데, 이에 대한 증명은 Theorem 3과 4와 같다.

Theorem 3. 재고부족이 있는 EPQ 재고게임에서 수요비례방법의 해는 항상 코어에 속한다.

증명) $d_i'=d_ih_i\frac{s_i}{h_i+s_i}\left(1-\frac{d_i}{r_i}\right)$로 두자. $x_i=\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in N}d_{i'}}C(N)$이라고 할 때, $\sum_{i\in N}x_i=\sum_{i\in N}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in N}d_i'}C(N)=C(N)$이다.

$$\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sqrt{\sum_{i\in N}d_{i'}}}\leq\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sqrt{\sum_{i\in S}d_{i'}}}$$

$$\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in N}d_{i'}}\sqrt{\sum_{i\in N}d_{i'}}\leq\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in S}d_{i'}}\sqrt{\sum_{i\in S}d_{i'}}$$

각 항에 $\sqrt{2a}$를 곱하고 다시 정리하면

$$\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in N}d_{i'}}\sqrt{\sum_{i\in N}2ad_{i'}}\leq\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in S}d_{i'}}\sqrt{\sum_{i\in S}2ad_{i'}}$$

좌변은 $\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in N}d_{i'}}\sqrt{\sum_{i\in N}2ad_{i'}}=\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in N}d_{i'}}c(N)=\sum_{i\in S}x_i$이다.

우변은 $\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in S}d_{i'}}\sqrt{\sum_{i\in S}2ad_{i'}}=\sum_{i\in S}\frac{d_{i'}}{\sum_{i\in S}d_{i'}}c(S)=c(S)$

Theorem 4. 재고부족이 있는 EPQ 재고게임에서 한계비용 비례방법의 해는 항상 코어에 속한다.

증명) $m_i = c(N) - c(N\backslash\{i\})$라고 할 때 $x_i = \frac{m_i}{\sum_{i \in N} m_i} c(N)$

이므로 $\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \frac{m_i}{\sum_{i \in N} m_i} c(N) = \frac{\sum_{i \in N} m_i}{\sum_{i \in N} m_i}$

$c(N) = c(N)$이다. $d_{i'} = d_i h_i \frac{s_i}{h_i + s_i}\left(1 - \frac{d_i}{r_i}\right)$로 두자.

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} \frac{m_i}{\sum_{j \in N} m_j} c(U) \le c(S)$$

임을 입증하면 된다.

$$\sum_{i \in S} x_i = \frac{\sum_{i \in S}(c(N) - c(N \setminus \{i\}))}{\sum_{j \in N}(c(N) - c(N \setminus \{j\}))} c(N)$$

$$= \frac{\sum_{i \in S}\sqrt{2a\sum_{j \in N} d_{j'}} - \sqrt{2a\sum_{k \ne i} d_{k'}}}{\sum_{i \in N}(\sqrt{2a\sum_{j \in N} d_{j'}} - \sqrt{2a\sum_{k \ne i} d_{k'}})} \sqrt{2a\sum_{i \in N} d_{j'}}$$

$$\le c(S) = \sqrt{2a\sum_{i \in S} d_{i'}}$$

양변에 $1/\sqrt{2a}$를 곱하면

$$\frac{\sum_{i \in S}\sqrt{\sum_{j \in N} d_{j'}} - \sqrt{\sum_{k \ne i} d_{k'}}}{\sum_{i \in N}(\sqrt{\sum_{j \in N} d_{j'}} - \sqrt{\sum_{k \ne i} d_{k'}})} \sqrt{\sum_{i \in N} d_{j'}} \le \sqrt{\sum_{i \in S} d_{i'}}$$

이를 다시 정리하면,

$$\frac{\sum_{i \in S}\sqrt{\sum_{j \in N} d_{j'}} - \sqrt{\sum_{k \ne i} d_{k'}}}{\sqrt{\sum_{i \in S} d_{i'}}}$$

$$\le \frac{\sum_{i \in N}(\sqrt{\sum_{j \in N} d_{j'}} - \sqrt{\sum_{k \ne i} d_{k'}})}{\sqrt{\sum_{i \in N} d_{j'}}}$$

이는 식 (5)와 동일하며 이미 증명되었다.

4. 예 제

예제를 이용하여 EOQ 재고게임과 EPQ 재고게임문제에 수요비례기법, 비용비례기법, 한계비용비례기법을 적용하였다. 특히, 수요비례기법과 한계비용비례기법의 해는 코어에 존재하고 비용비례기법은 코어에 존재하지 않는 것을 예제를 통해 살펴보고자 한다.

4.1 EOQ 게임 예제

게임 참여자 1은 1,000개, 게임 참여자 2는 20개, 게임 참여자 3은 10개의 수요가 있다. 이때의 준비비용(a)은 \$100이고, 재고유지비용(h)은 \$1이다. 수요비례기법(Proportional to Demand), 비용비례기법(Proportional to Cost), 한계비용비례기법(Proportional to Marginal Cost)에 따른 게임 참여자 별 비용할당액은 <Table 1>과 같다.

<Table 1> Cost Allocation Result of EOQ Game by Method (Unit : \$)

Player	Proportional to Demand	Proportional to Cost	Proportional to Marginal Cost
x_1	440.7	365.6	446.0
x_2	8.8	51.7	5.2
x_3	4.4	36.6	2.6
Total	453.9	453.9	453.9

파레토 최적은 453.9로 세 기법 모두 만족하므로 코어에 해가 존재하는지 확인하기 위해서는 합리성을 만족하는지 확인하면 된다. 각 연합 별 비용과 각 연합에 대한 비례기법 별 합이 <Table 2>와 같다. 합리성은 $\sum_{i \in S} x_i \le c(S)$을 만족하는지 확인하면 된다. <Table 2>에서 비용비례기법의 경우 연합 {2, 3}에서 $x_2 + x_3$ = 88.3이고 c({2, 3}) = 77.5이므로 합리성을 위반하므로 코어에 해가 존재하지 않는다. 즉, 게임 참여자 2와 3은 대연합에 참여하는 경우의 비용할당액이 {2, 3}의 연합으로 생기는 비용보다 크므로 대연합에 참여할 이유가 없게 된다. 제 3장에서 증명하였듯이, 수요비례기법과 한계비용비례기법의 해는 합리성을 만족하므로 코어에 존재한다.

<Table 2> EOQ Cost and Allocated Costs of Proportional Method by Coalition(Unit : \$)

Coalition	EOQ Cost	Proportional to Demand	Proportional to Cost	Proportional to Marginal Cost
{1}	447.2	440.7	365.6	446.0
{2}	63.2	8.8	51.7	5.2
{3}	44.7	4.4	36.6	2.6
{1,2}	451.7	449.5	417.3	451.3
{1,3}	449.4	445.1	402.2	448.6
{2,3}	77.5	13.2	88.3	7.9

4.2 재고부족이 있는 EPQ 게임 예제

게임 참여자 i의 수요율(d_i), 보충률(r_i), 단위당 재고유지비용(h_i), 단위당 재고부족벌과비용(s_i)은 <Table 3>과 같다. 또한, 고정주문비용은 \$100이다.

<Table 3> Parameter Values of EPQ Game with Shortage (Unit : $)

player	d_i	h_i	r_i	s_i
1	1,000	1	2,000	5
2	20	2	40	6
3	10	3	20	7

수요비례기법은 할당자(allocator)를 d_i와 d_i'을 할 때의 2가지를 적용하였다. 이미 언급하였듯이 $d_i' = d_i h_i \frac{s_i}{h_i + s_i} \left(1 - \frac{d_i}{r_i}\right)$이다. 기법 별 비용할당액은 <Table 4>와 같다. 각 연합 별 비용과 각 연합에 대한 비례기법 별 합이 <Table 5>와 같다. 수요비례기법(d_i)은 연합 {1, 2}의 경우 $x_1 + x_2$ = 294.5이고 c({1, 2}) = 293.8이므로 합리성을 위반한다. 또한, 비용비례기법은 연합 {2, 3}에서 $x_2 + x_3$ = 76.8이고 c({2, 3}) = 71.4로 합리성을 위반한다.

그러므로, 수요비례기법(d_i)과 비용비례기법은 파레토 최적은 만족하지만, 합리성을 만족하지 못하므로 해가 코어에 존재하지 않는다. 이미 증명하였듯이, 수요비례기법(d_i')과 한계비용비례기법의 해는 합리성을 만족하므로 코어에 존재한다.

5. 결 론

협조적 게임이론에 기반한 비용할당기법은 공평하고 합리적인 비용배분을 위해 많은 분야에 적용되어왔다. 한편, 비용할당기법들의 해가 가져야 할 바람직한 특성들이 있는데 이들 특성을 만족하는 경우에는 해가 코어에 존재한다고 부른다.

본 연구에서는 협조적 게임이론 기법 중 하나인 비례기법에 대해 살펴보고, EOQ 재고 게임과 EPQ 재고게임에 적용하였다. 비례기법은 계산량이 적고 간편하여 다양한 문제들에 적용되어 왔다. 하지만, 할당자(allocator)를 무엇으로 하느냐에 따라 비례기법의 해는 코어에 존재하지 않을 수도 있는 약점을 지니고 있다. 이에 수요비례기법과 한계비용비례기법의 해는 코어에 존재한다는 것을 입증하였다. 또한, 비용비례기법의 경우에는 반례(counterexample)를 통해 해가 코어에 존재하지 않을 수도 있음을 보였다.

본 연구에서 다루지 않는 할당자를 사용하는 경우에 해가 코어에 존재하는지에 대한 연구가 필요하다. 또한, EOQ 게임과 재고부족이 있는 EPQ 게임 이외의 재고게임에서는 비례기법들의 해가 코어에 존재하는지에 대한 연구가 필요하다.

Acknowledgement

This work was supported by the research grant of the Kongju National University in 2018.

References

[1] Bernstein, F., Kok, A.G., and Meca A., Cooperation in assembly systems : The role of knowledge sharing

<Table 4> Cost Allocation Result of EPQ Game with Shortage by Method(Unit : $)

Player	Proportional to Demand (d_i)	Proportional to Demand (d_i')	Proportional to Cost	Proportional to Marginal Cost
x_1	288.7	280.2	220.5	286.4
x_2	5.8	10.1	41.8	6.4
x_3	2.9	7.1	35.0	4.5
Total	297.4	297.4	297.4	297.4

<Table 5> EPQ Cost with Shortage and Allocated Costs of Proportional Method by Coalition(Unit : $)

Coalition	EPQ Cost with Shortage	Proportional to Demand(d_i)	Proportional to Demand(d_i')	Proportional to Cost	Proportional to Marginal Cost
{1}	288.7	288.7	280.2	220.5	286.4
{2}	54.8	5.8	10.1	41.8	6.4
{3}	45.8	2.9	7.1	35.0	4.5
{1, 2}	293.8	294.5	290.3	262.4	292.9
{1, 3}	292.3	291.6	287.3	255.5	290.9
{2, 3}	71.4	8.7	17.1	76.8	11.0

networks, *European Journal of Operational Research*, 2015, Vol. 240, No. 1, pp. 160-171.

[2] Fiestras-Janeiro, M.G., Garcia-Jurado, I., Meca, A., and Mosquera, M.A., Cooperative game theory and inventory management, *European Journal of Operational Research*, 2011, Vol. 210, No. 3, pp. 459-466.

[3] Hartman, B.C. and Dror, M., Cores of Inventory Centralization Games, *Games and Economic Behavior*, 2000, Vol. 31, No. 1, pp. 26-49.

[4] Hartman, B.C. and Dror, M., Cost Allocation in Continuous-Review Inventory Models, *Naval Research Logistics*, 1996, Vol. 43, No. 4, pp. 549-561.

[5] Kim, D.H. and Lee, K.B., A Method of Profit Allocation for Sharing Economy among Companies Considering The Transaction Costs, *Journal of the Korea Industrial Information System Research*, 2015, Vol. 20, No. 4, pp. 111-126.

[6] Lee, D.J. and Lee, C.Y., Cooperative Game Theory Approach for Inventory Cost Allocation, *Journal of the Korean Institute of Plant Engineering*, 2018, Vol. 23, No. 2, pp. 35-44.

[7] Lee, D.J., VMI with Upper Limit of Inventory for Vendor and Retailer, *Journal of Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2017, Vol. 40, No. 4, pp. 105-111.

[8] Lee, S.J. and Lee, W.J., Shapley-Value Decomposition Analysis of Income and Asset Inequality in South Korea, *Analysis of Korean Economy*, 2017, Vol. 23, No. 10, pp. 57-109.

[9] Meca, A., Garcia-Jurado, I., and Borm, P., Cooperation and competition in inventory games, *Mathematical Methods Operations Research*, 2003, Vol. 57, No.3, pp. 481-493.

[10] Meca, A., Timmer, J., Garcia-Jurado, I., and Borm, P., Inventory games, *European Journal of Operational Research*, 2004, Vol. 156, No.1, pp. 127-139.

[11] Muller, A., Scarsini, M., and Shaked, M., The Newsvendor Game Has a Nonempty Core, *Games and Economic Behavior*, 2002, Vol. 38, No. 1, pp. 118-126.

[12] Owen, G., Game Theory, Academic Press, San Diego, 1995.

[13] Park, S.Y., Fair Revenue Sharing for Public Transportation System in Seoul Metropolitan Area, *Korean Journal of Public Finance*, 2011, Vol. 4, No. 3, pp. 135-162.

[14] Shin H.J. and Ahn, B.J., Collaborative Vendor Managed Inventory Models for Managing 2-Echelon Supply Chains with the Consideration of Shortage in Demand, *Journal of the Korea Academia-Industrial cooperation Society*, 2008, Vol. 9, No. 2, pp. 556-563.

[15] Straffin, P.D., Game Theory and Strategy, The Mathematical Association of America, Washington, 1993.

ORCID

Dongju Lee | http://orcid.org/0000-0001-6650-9270