

# $D$ -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬의 대기시간 분석

(Waiting Time Analysis of Discrete-Time BMAP/G/1 Queue Under  
 $D$ -policy)

이 세 원<sup>1)\*</sup>  
(Se Won Lee)

**요 약** 본 논문에서는  $D$ -정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 대기시간을 분석한다. 고객(또는 패킷)들은 마코비안 도착과정을 따라 집단으로 시스템에 도착하며, 유힌한 서버는 시스템에 도착한 고객집단의 서비스시간의 총합이 이미 정해놓은 임계값  $D$ 를 초과하면 시스템에 더 이상 서비스할 고객이 없을 때까지 서비스를 제공한다. 시스템의 안정상태 대기시간 분포를 변환 형태로 구하고 성능척도로서 평균값을 유도하였다. 시뮬레이션을 통하여 이론값들의 타당성을 검증하고 간단한 수치예제를 보였다.

**핵심주제어** : 이산시간 집단 마코비안 도착과정(D-BMAP),  $D$ -정책, 서버제어정책, 대기시간

**Abstract** In this paper, we analyze the waiting time of a queueing system with D-BMAP (discrete-time batch Markovian arrival process) and  $D$ -policy. Customer group or packets arrives at the system according to discrete-time Markovian arrival process, and an idle single server becomes busy when the total service time of waiting customer group exceeds the predetermined workload threshold  $D$ . Once the server starts busy period, the server provides service until there is no customer in the system. The steady-state waiting time distribution is derived in the form of a generating function. Mean waiting time is derived as a performance measure. Simulation is also performed for the purpose of verification and validation. Two simple numerical examples are shown.

**Key Words** : Discrete-Time Batch Markovian Arrival Process(D-BMAP),  $D$ -policy, Server Control Policy, Waiting Time

## 1. 서 론

본 연구에서는 집단고객이 상관성을 띠고 시스템에 도착하는 BMAP(Batch Markovian Arrival Process)을 도착과정으로 갖고, 서버는  $D$ -정책에

\* Corresponding Author : swlee@pknu.ac.kr

이 논문은 부경대학교 자율창의학술연구비(2015년)에 의하여 연구되었음(C-D-2015-1124)

Manuscript received January 22, 2018 / accepted February 14, 2018

1) 부경대학교 경영학부

의해 on-off를 제어하는 이산시간 대기행렬시스템을 다룬다.

이산시간 시스템에 대한 자세한 내용은 Takagi[1]에서 찾아볼 수 있다. Bruneel and Kim[2]은 통신·교통시스템 등의 응용분야에서 단위시간(슬롯)을 고려하는 이산시간 시스템 모델링이 연속시간보다 더 적합하다는 것을 보였는데, 기존 네트워크 도착과정의 모델링에서는 분석의 용이함 때문에 대부분의 연구들이 포아송 도착과정을 가정하였으나 실제 인터넷 트래픽의 모델링에는 패킷 도착간격들 사이에 존재하는 상관성으로 인하여 포아송 도착과정으로는 모델링에 한계가 있음이 밝혀졌다(Paxon and Floyd[3]).

도착과정이 이산시간 BMAP을 따르는 대기행렬시스템의 분석은 Lucantoni[4], Latouche and Ramaswami[5], Ramaswami and Latouche[6], Wang and Silverster[7] 등에 의해 주로 네트워크 모형에서 패킷도착과정을 묘사하는 데 사용되었다. 이산시간 대기행렬시스템과 BMAP에 대한 보다 자세한 내용은 Lee[8]에서 찾아 볼 수 있다.

$D$ -정책을 갖는 대기행렬시스템의 분석의 초기 연구로는 Balachandran[9], Balachandran and Tijms[10]를 찾아볼 수 있다. 대기시간에 관한 연구로는 Li and Niu[11]가 최초의 연구인데 이들은  $D$ -정책을 갖는 GI/G/1 대기행렬시스템의 대기시간 분포함수를 구하고, 평균대기시간을 유도하였다. Lee et al.[12]은  $D$ -정책과 복수휴가를 갖는 M/G/1 시스템의 고객수와 대기시간을 분석하였으며, Baek and Lee[13]는  $D$ -정책을 갖는  $M^X/G/1$  시스템의 대기시간을 분석하였다. 이들은 모두 연속시간 시스템에 관한 연구들인 반면  $D$ -정책을 포함한 이산시간 대기행렬시스템의 분석에 대한 연구로는 다음을 찾아 볼 수 있다: Lee et al.[14]은  $D$ -정책 하에서 운영되는 Geo/G/1 시스템의 일량, 고객수, 대기시간, 체재시간의 분포를 유도하였다. Lee et al.[15]은 고객 도착간격들 사이에 상관성이 존재하는 이산시간 MAP 도착과정과  $D$ -정책 하에서의 대기행렬시

스템의 일량, 고객수, 대기시간, 체재시간의 분포를 분석하였다. Liu and Deng[16]은 변조된  $D$ -정책과 베르누이피드백을 갖는 이산시간 대기행렬시스템의 고객수분포를 분석하였으며, Lan and Tang[17]은  $N$ -,  $D$ -정책이 혼합된 이중제어 정책을 갖는 이산시간 대기행렬시스템을 분석하였다.

본 연구는 Lee[18]의 후속연구로서 Lee[18]의 유희기간 분석결과와 일량 분석결과를 기반으로 하여  $D$ -정책과 집단도착을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 대기시간 분석을 목표로 한다.

## 2. 시스템

본 연구에서 다루는 시스템의 운영방식은 다음과 같다:

- (1) 고객들은 파라미터 행렬  $\{D_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  을 갖는 이산시간 BMAP(Batch Markovian Arrival Process)으로 시스템에 도착한다. 집단에 속한 각 고객들의 서비스시간은 길이가 1 이상인 이산시간 일반분포  $s(x)$ 를 따르며, 이산시간 모형은 Bruneel and Kim[2]의 LAS-DA(Late Arrival System with Delayed Access)를 가정한다.
- (2) 서버는 시스템에 한 명 존재하며, 유희기간 동안 쌓인 시스템 내 총 일량이 임계값  $D$ 를 초과하면 바쁘기 시작하여 더 이상 서비스할 고객이 없을 때까지 서비스하고 이러한 과정이 반복된다. 선입선출(FCFS) 서비스규칙을 따른다.
- (3) 고객들의 서비스시간은 도착과정과는 독립이며 일량 보존 시스템, 완전 서비스 시스템이다.

이해를 돕기 위해, 본 연구의 대상시스템의 운영방식을 Fig. 1과 같이 고객수 과정과 일량 과정으로 구분하여 동일한 시간 축선 상에 표현하

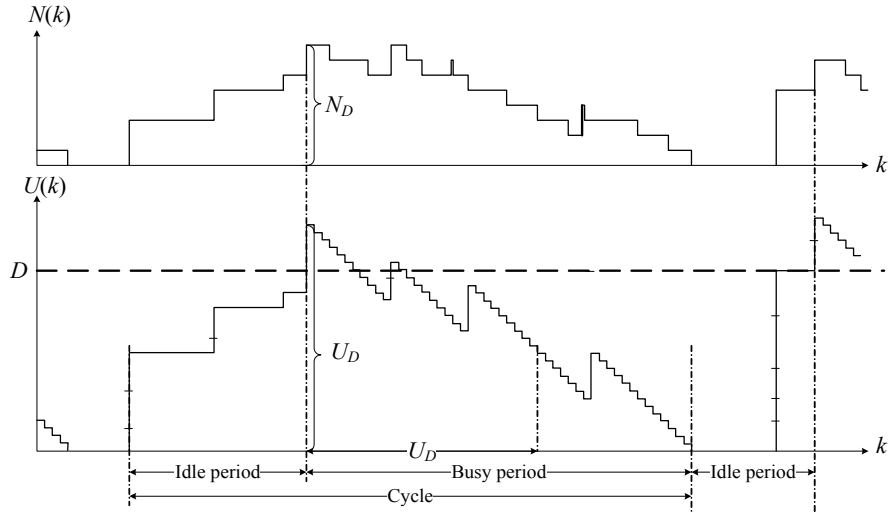


Fig. 1 Operation Behavior of the System

였다. 유희한 서버는 시스템에 도착한 고객들의 서비스 시간의 총합이 미리 정해 놓은 일량 임계값  $D$ 를 초과하기 전까지 기다렸다가 바쁜기간을 시작하는  $D$ -정책을 따른다. Fig. 1에서 첫 번째 사이클은 네 번째 고객집단이 도착하여 이들의 총 누적 서비스시간이  $D$ 를 초과해 바쁜기간을 시작하며, 두 번째 사이클은 첫 번째 고객집단으로는  $D$ 를 넘지 못하여 계속 유희기간을 보내다가 두 번째 고객집단으로 바쁜기간을 시작한다.

논문 전반에 걸쳐 사용할 기호와 함수들을 다음과 같이 정의하자.

$D_n, (n = 0, 1, 2, \dots)$ : 이산시간 BMAP의 UMC (Underlying Markov Chain) 파라미터 행렬

$(E)_{i,j}$ : 행렬  $E$ 의  $(i, j)$ -원소

$m$ : UMC 위상의 갯수

$J(k)$ :  $k$  슬롯 시작점에서의 UMC 위상

$\pi_i = \lim_{k \rightarrow \infty} Pr[J(k) = i], (i = 1, 2, \dots, m)$ : UMC

위상의 안정상태확률

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$

$\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ : 바쁜 기간 종료점에서의 UMC

위상을 나타내는 확률벡터

$e$ : 모든 원소가 1인 크기  $(m \times 1)$ 의 열벡터

$S$ : 서비스시간의 길이(이산확률변수)

$s(k) = Pr(S = k)$ :  $S$ 의 확률질량함수(PMF),  
( $s(0) = 0$ )

$S^*(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} s(k)\omega^k$ :  $S$ 의 확률생성함수(PGF)

$S^{(n)}(k) = Pr(S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq k)$ :  $S$ 의  $n$ 차 중합의 분포함수(DF), ( $S^{(0)}(k) = 1$ )

$s^{(n)}(k) = S^{(n)}(k) - S^{(n)}(k-1)$ :  $S$ 의  $n$ 차 중합의 확률질량함수

$\lambda_g = \pi \sum_{n=1}^{\infty} D_n e$ : 단위시간(슬롯)당 평균도착  
집단수

$\lambda = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n D_n e$ : 단위시간(슬롯)당 평균도착  
객수

$\rho = \lambda E(S)$ : 교통밀도(Traffic Intensity)

$N_D$ : 바쁜기간 시작점에서의 고객수

$U_D$ : 바쁜기간 시작점에서의 일량

$I_D$ : 유희기간의 길이

### 3. 선행 연구결과 정리

본 장에서는 대상시스템의 대기시간 분석의 선행연구라 할 수 있는 Lee[18]의 연구결과들을 요

약하여 소개하고 정리한다. 본 장의 기호와 확률, 함수들은 증명 없이 Lee[18]를 그대로 따른다.

유휴기간의 평균 길이는 다음과 같다.

$$E(I_D) = \kappa \sum_{x=0}^D \sum_{k=0}^x \Phi(k, x) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{e} \quad (1)$$

여기서,

$$\Phi(k, x) = \begin{cases} \mathbf{I}, & (k=0, x=0) \\ \mathbf{I}_k^* \cdot s^{(k)}(x), & (x=1, 2, \dots, D) (k=1, 2, \dots, x) \end{cases},$$

$$\mathbf{I}_k^* = \sum_{n=1}^k (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_n \mathbf{I}_{k-n}^*, \quad (\mathbf{I}_0^* = \mathbf{I}).$$

$\Phi(k, x)$ 은 크기  $(m \times m)$ 의 정방행렬로서, 유휴기간 시작점의 UMC 위상  $i$ 에서 출발한 일량과정이 유휴기간 동안에  $k$ 명의 고객들에 의해 일량 레벨  $x$ 를 지나고 방문 직후의 UMC 위상이  $j$ 일 방문확률  $\phi_{i,j}(k, x)$ 를  $(i, j)$ -원소로 갖는다.

임의의 슬롯 시작점에서 서버가 유휴하고, 그때의 일량이  $x$ 일 결합확률벡터는 다음과 같다 ( $x = 0, 1, 2, \dots, D$ ).

$$\mathbf{u}_x^{idle} = (1 - \rho) \frac{\kappa \sum_{k=0}^x \Phi(k, x) (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1}}{E(I_D)} \quad (2)$$

임의의 사이클에서 유휴기간 시작점과 바쁜기간 시작점에서의 UMC 위상을 포함하고, 바쁜기간 시작점에서의 고객수( $N_D$ )와 일량( $U_D$ )이 각각  $n$ 명,  $x$ 인 행렬  $\mathbf{N}_D(n)$ ,  $\mathbf{U}_D(x)$ 와 이들의 확률생성함수는 다음과 같다.

$$\mathbf{N}_D(n) = \begin{cases} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 \sum_{x=D+1}^{\infty} s(x), & (n=1) \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_n \sum_{x=D+1}^{\infty} s^{(n)}(x) \\ + \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{y=n-1}^D \sum_{k=1}^y [\Phi(k, y) \times \\ (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_{n-k} s^{(n-k)}(x-y)], & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_n s^{(n)}(x) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{y=n-1}^D \sum_{k=1}^y [\Phi(k, y) \times \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_{n-k} s^{(n-k)}(x-y)], \quad (x \geq D+1) \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_D^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{N}_D(n) z^n, \quad \mathbf{U}_D^*(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \mathbf{U}_D(x) \omega^x.$$

$D$ -정책 하에서 유휴기간 시작점에서의 UMC 위상이  $i$ 라는 조건 하에 바쁜기간 시작점에서의 UMC 위상이  $j$ 인 유휴기간의 길이에 대한 조건부 결합변환  $[\mathbf{I}_D^*(\omega)]_{ij}$ 를 원소로 갖는 행렬은

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_D^*(\omega) &= \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}_0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}_k s^{(k)}(x) \omega \quad (3) \\ &+ \sum_{x=1}^D (\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}_0)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}_k s^{(k)}(x) \omega \mathbf{I}_{D-x}^*(\omega). \end{aligned}$$

바쁜기간 임의슬롯 시작점에서의 일량에 대한 결합변환행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{busy}^*(\omega) & \quad (4) \\ &= \frac{(1 - \rho) \kappa}{E(I_D)} [\mathbf{U}_D^*(\omega) - \mathbf{I}] [\omega \mathbf{I} - \mathbf{D} [S^*(\omega)]]^{-1} \omega \end{aligned}$$

바쁜 기간 종료점에서의 UMC 위상을 나타내는 확률벡터  $\kappa$ 는 식 (5)와  $\kappa = \kappa \mathbf{K}$ ,  $\kappa \mathbf{e} = 1$ 로부터 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{x=D+1}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_1 [\mathbf{D}(\mathbf{G})]^x s(x) \quad (5) \\ &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \mathbf{D}_k [\mathbf{D}(\mathbf{G})]^x s^{(k)}(x) \\ &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{y=1}^D \mathbf{I}_n^* (\mathbf{I} - \mathbf{D}_0)^{-1} \\ &\quad \times \mathbf{D}_{k-n} [\mathbf{D}(\mathbf{G})]^x s^{(n)}(y) s^{(k-n)}(x-y) \end{aligned}$$

#### 4. 대기시간 분석

시스템에 도착하는 임의 고객의 대기시간분포를 유도한다. 시스템에 도착하는 고객들은 유휴기간 동안 도착하는 집단에 속해 있는 특별고객이거나 바쁜기간 동안 도착하는 집단에 속한 일반고객이므로, 고객 유형에 조건을 취하면 임의 고객의 대기시간 분포의 벡터 GF를 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$W_q^*(w) = W_{q,sc}^*(w) + W_{q,oc}^*(w) \quad (6)$$

##### 4.1 특별고객의 대기시간 분석

먼저 유휴기간 동안 시스템에 도착하는 특별고객을 살펴보자. 특별고객의 유형은 Fig. 2와 같이 총 6가지로 분류할 수 있다.

(경우 ㉑) 유휴기간 중에 도착한 첫 집단에 속한 경우

- 1) 시험집단의 도착 이후 시스템 내 총일량이  $D$  이하
- 2) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이  $D$  초과
- 3) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이  $D$  이하, 시험집단의 도착으로  $D$  초과

(경우 ㉒) 첫 번째 집단에 속해 있지 않은 경우

- 1) 시험집단의 도착 이후 시스템 내 총일량이  $D$  이하
- 2) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이  $D$  초과
- 3) 자신의 서비스를 포함한 시스템 내 총일량이  $D$  이하, 시험집단의 도착으로  $D$  초과

임의의 특별시험집단이 도착하면서 보는 일량이  $v$ 이고 도착 직후의 UMC 위상이  $j$ , 특별시험고객이 자기가 속한 집단 내에서  $i$ 번째 고객이고 동일 집단 내에 자기 뒤에  $l$ 명이 있을 확률을  $\alpha(v,i,l,j)$ , 이를 원소로 갖는 확률벡터를 다음과 같이 정의하자.

$$\alpha(v,i,l) = (\alpha(v,i,l,1), \alpha(v,i,l,2), \dots, \alpha(v,i,l,m))$$

유휴기간의 분석결과인 식 (2)와 이산시간 재생과정이론을 이용하면 아래 정리를 얻는다.

<정리 1>

$$\alpha(v,i,l) = u_v^{idle} \frac{D_{i+l}}{\lambda} \quad (7)$$

(증명) 집단의 크기를 나타내는 이산확률변수를  $G$ , 시험고객이 크기  $j$ 의 집단에 속할 확률을  $a_j$ 라고 정의하면, 가상의 특별시험고객이 유휴기간 동안 일량  $v$ 를 보면서 도착하는 크기  $i+l$ 의 집

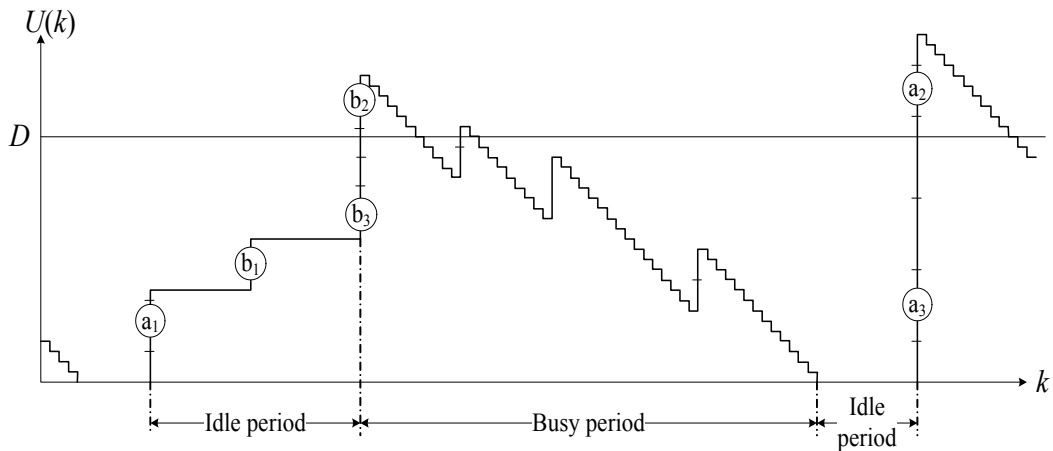


Fig. 2 The 6 Types of a Special Customer

단에 속해 있고 자기가 그 집단 내에서  $i$ 번째일 확률은  $\mathbf{u}_v^{idle} \cdot a_{i+l} \cdot \frac{1}{i+l}$ 이다. BMAP에서 실제 고객의 도착시점에서의 확률로 바꾸어 주기 위해 뒤에  $\frac{D_{i+l}}{\pi D_{i+l} \mathbf{e}}$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_v^{idle} \cdot a_{i+l} \cdot \frac{1}{i+l} \cdot \frac{D_{i+l}}{\pi D_{i+l} \mathbf{e}} \\ = & \mathbf{u}_v^{idle} \cdot \frac{(i+l) \Pr(G=i+l)}{E(G)} \cdot \frac{1}{i+l} \cdot \frac{D_{i+l}}{\pi D_{i+l} \mathbf{e}} \\ = & \mathbf{u}_v^{idle} \frac{\pi D_{i+l} \mathbf{e} / \lambda_g}{\lambda / \lambda_g} \frac{D_{i+l}}{\pi D_{i+l} \mathbf{e}} = \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+l}}{\lambda}. \quad \square \end{aligned}$$

Fig. 3은 확률벡터  $\alpha(v, i, l)$ 의 상황을 도식화한 것이다. 시스템 도착 직후의 상황을 고려하였을 때, 자기보다 먼저 서비스를 받는 고객들의 서비스시간의 총합이  $x$ 이고, 시험 집단 내에서 자기와 자기 뒤의 고객들의 서비스 시간의 총합이  $y$  라면, 이 특별고객의 대기시간은 다음 두 가지의 합이다.

- 1) 시험 집단의 도착시점에서의 잔여유희기간  $I_{D-x-y}^*$
- 2) 도착 직후 자기 앞에 대기 중인 모든 특별 고객들(시험 집단 내에서 자기 앞의 고객 포함)의 서비스시간의 총합  $S_F$

식 (2), (3)과  $\alpha(v, i, l)$ 을 이용하면 Fig. 2에서 분류한 6가지 유형에 따라 특별시험고객의 대기 시간분포의 벡터 GF  $\mathcal{W}_{q,sc}^*(\omega)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathcal{W}_{q,sc}^*(\omega) = \sum_{i=1}^3 \mathcal{W}_{q,sc}^{*(a_i)}(\omega) + \sum_{i=1}^3 \mathcal{W}_{q,sc}^{*(b_i)}(\omega). \quad (8)$$

여기서,

$$\mathcal{W}_{q,sc}^{*(a_1)}(\omega) = \sum_{x=0}^{D-1} \omega^x \sum_{y=1}^{D-x+1} \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{k=0}^{y-1} \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i-1)}(x) s^{(k+1)}(y) I_{D-x-y}^*(\omega) \quad (8.1)$$

$$\mathcal{W}_{q,sc}^{*(a_2)}(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{i=2n=0}^{\infty} \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i-1)}(x) \quad (8.2)$$

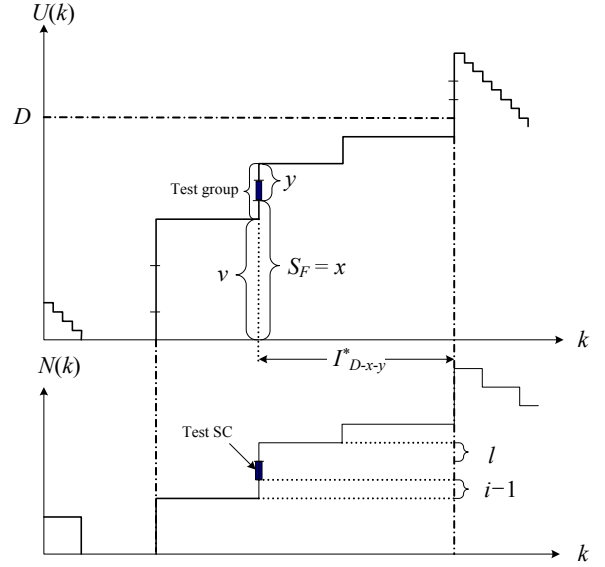


Fig. 3 Illustration of  $\alpha(v, i, l)$

$$\mathcal{W}_{q,sc}^{*(a_3)}(\omega) = \sum_{x=0}^D \omega^x \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D+1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \times s^{(i-1)}(x) s^{(n+1)}(y) \quad (8.3)$$

$$\mathcal{W}_{q,sc}^{*(b_1)}(\omega) = \sum_{x=1}^{D-1} \omega^x \sum_{y=1}^{D-x} \sum_{v=1}^x \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{k=0}^{y-1} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i-1)}(x-v) s^{(k+1)}(y) I_{D-x-y}^*(\omega) \quad (8.4)$$

$$\mathcal{W}_{q,sc}^{*(b_2)}(\omega) = \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{v=1}^D \sum_{i=2n=0}^{\infty} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i-1)}(x-v) \quad (8.5)$$

$$\mathcal{W}_{q,sc}^{*(b_3)}(\omega) = \sum_{x=1}^D \omega^x \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{v=1}^x \sum_{i=1}^{x-1} \sum_{k=0}^{y-1} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \times s^{(i-1)}(x-v) s^{(k+1)}(y) \quad (8.6)$$

## 4.2 보통고객의 대기시간 분석

보통고객의 대기시간의 변환은 바쁜기간 동안의 일량분석 결과 식 (4)로부터 다음과 같이 유도할 수 있다.

<정리 2>

$$W_{q,oc}^*(\omega) = u_{busy}^*(\omega)\omega^{-1} \frac{D-D[S^*(\omega)]}{\lambda(1-S^*(\omega))} \quad (9)$$

(증명) 바쁜기간에 도착하는 가상 고객의 대기시간은 바쁜기간 중 임의의 슬롯 시작점에서의 일량과 한 슬롯만큼의 차이가 난다. 본 논문에서 다루는 이산시간시스템은 LAS-DA를 가정하므로 도착은 슬롯 끝점에서 일어나기 때문이다. 따라서  $W_{q,oc}^{*V}(\omega) = u_{busy}^*(\omega)\omega^{-1}$ 이다.

이산시간 BMAP/G/1 시스템에서 실제고객의 대기시간은 가상고객의 대기시간에  $\frac{D-D[S^*(\omega)]}{\lambda(1-S^*(\omega))}$ 를 곱하여 얻을 수 있으므로 이를 정리하면 다음과 같다(Kim et al.[19]).

$$\begin{aligned} W_{q,oc}^*(\omega) &= W_{q,oc}^{*V}(\omega) \cdot \frac{D-D[S^*(\omega)]}{\lambda(1-S^*(\omega))} \\ &= u_{busy}^*(\omega)\omega^{-1} \frac{D-D[S^*(\omega)]}{\lambda(1-S^*(\omega))}. \quad \square \end{aligned}$$

이제 식 (4)를 이용하여 식 (9)를 다시 쓰면 보통시협고객의 대기시간의 변환은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_{q,oc}^*(\omega) &= \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [U_D^*(\omega) - I] \quad (10) \\ &\times [\omega I - D[S^*(\omega)]]^{-1} \frac{D-D[S^*(\omega)]}{\lambda(1-S^*(\omega))}. \end{aligned}$$

식 (8), (10)으로부터 식 (6)은 최종적으로 다음과 같다.

$$W_q^*(\omega) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^D \omega^x \sum_{y=1}^{D-x} \sum_{i=1}^D \sum_{k=0}^{D-i} u_0^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i-1)}(x) s^{(k+1)}(y) I_{D-x-y}^*(\omega) \\ &+ \sum_{x=0}^D \omega^x \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{D+1} \sum_{n=0}^{\infty} u_0^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i-1)}(x) s^{(n+1)}(y) \\ &+ \sum_{x=1}^{D-1} \omega^x \sum_{y=1}^{D-x} \sum_{v=1}^x \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^{y-1} u_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i-1)}(x-v) s^{(k+1)}(y) I_{D-x-y}^*(\omega) \\ &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \omega^x \sum_{v=0}^D \sum_{i=2n=0}^{\infty} u_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i-1)}(x-v) \\ &+ \sum_{x=1}^{D-1} \omega^x \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{v=1}^x \sum_{i=1}^x \sum_{k=0}^{y-1} u_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\ &\quad \times s^{(i-1)}(x-v) s^{(k+1)}(y) \\ &+ \frac{(1-\rho)\kappa}{E(I_D)} [U_D^*(\omega) - I] \\ &\quad \times [\omega I - D[S^*(\omega)]]^{-1} \frac{D-D[S^*(\omega)]}{\lambda(1-S^*(\omega))}. \end{aligned}$$

### 5. 성능척도

본 장에서는 시스템의 성능척도로서 평균대기시간을 유도한다. 어떤 행렬생성함수  $A(z)$ 에 대하여 다음을 정의하자.

$$A = A(z)|_{z=1}, \quad A^{(n)} = \left. \frac{d^n}{dz^n} A(z) \right|_{z=1}$$

식 (6)으로부터 임의의 고객의 평균대기시간은 다음과 같다.

$$W_q = W_q^{*(1)} \mathbf{e} = W_{q,sc}^{*(1)} \mathbf{e} + W_{q,oc}^{*(1)} \mathbf{e}$$

식 (8.1)-(8.6)으로부터 임의의 특별고객의 대기시간  $W_{q,sc} = W_{q,sc}^{*(1)} \mathbf{e}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{W}_{q,sc}^{*(1)} \mathbf{e} \quad (12) \\
 &= \sum_{x=0}^D \sum_{y=1}^{D-x} \sum_{i=1}^{x+1} \sum_{k=0}^{y-1} \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\
 & \quad \times s^{(i-1)}(x) s^{(k+1)}(y) [x \mathbf{I}_{D-x-y}^* + \mathbf{I}_{D-x-y}^{*(1)}] \mathbf{e} \\
 &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{i=2}^{x+1} \sum_{n=0}^{\infty} x \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} s^{(i-1)}(x) \mathbf{e} \\
 &+ \sum_{x=0}^D \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x+1} \sum_{n=0}^{y-1} x \mathbf{u}_0^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \\
 & \quad \times s^{(i-1)}(x) s^{(n+1)}(y) \mathbf{e} \\
 &+ \sum_{x=1}^{D-1} \sum_{y=1}^{D-x} \sum_{v=1}^x \sum_{i=1}^{x-v+1} \sum_{k=0}^{y-1} \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} s^{(i-1)}(x-v) \\
 & \quad \times s^{(k+1)}(y) [x \mathbf{I}_{D-x-y}^* + \mathbf{I}_{D-x-y}^{*(1)}] \mathbf{e} \\
 &+ \sum_{x=D+1}^{\infty} \sum_{v=1}^D \sum_{i=2}^{x-v+1} \sum_{n=0}^{\infty} x \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+n}}{\lambda} \\
 & \quad \times s^{(i-1)}(x-v) \mathbf{e} \\
 &+ \sum_{x=1}^D \sum_{y=D-x+1}^{\infty} \sum_{v=1}^x \sum_{i=1}^{x-v+1} \sum_{k=0}^{y-1} x \mathbf{u}_v^{idle} \frac{D_{i+k}}{\lambda} \\
 & \quad \times s^{(i-1)}(x-v) s^{(k+1)}(y) \mathbf{e}
 \end{aligned}$$

시험고객이 보통고객일 확률을 포함한 보통고객의 대기시간  $\mathbf{W}_{q,oc} = \mathbf{W}_{q,oc}^{*(1)} \mathbf{e}$ 는 식 (10)과 Lee[18]의 평균일량 계산결과로부터 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_{q,oc}^{*(1)} \mathbf{e} &= \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n}{\lambda} \mathbf{e} \quad (13) \\
 &+ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \mathbf{D}_n E(S)}{2\lambda} \mathbf{e} \\
 &- \mathbf{u}_{busy}^* \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n}{\lambda} \mathbf{e}
 \end{aligned}$$

식 (13) 우변의 첫째 항은 Lee[18]의 식 (6.6) 뒤에  $\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \mathbf{e}$ 를 곱한 후에  $\rho$ 로 나눈 결과

로부터 얻는다. 따라서  $\mathbf{W}_{q,oc}^{*(1)} \mathbf{e}$ 를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_{q,oc}^{*(1)} \mathbf{e} &= \frac{(1-\rho)\kappa}{\lambda E(I_D)} [U_D^{*(1)} + U_D^* - \mathbf{I}] \quad (14) \\
 & \quad \times [\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n \mathbf{e} \\
 & - \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}_{busy}^* [\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S)] \\
 & \quad \times [\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n \mathbf{e} \\
 & \quad + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \mathbf{D}_n E(S)}{2\lambda} \mathbf{e} \\
 & - \mathbf{u}_{busy}^* \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n}{\lambda} \mathbf{e} + \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \mathbf{e}
 \end{aligned}$$

Lee[18]에 따르면, 식 (14)의  $\mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \mathbf{e}$ 는 아래와 같고,  $\mathbf{u}_{busy}^* = \pi - \mathbf{u}_{idle}^* = \pi - \sum_{x=0}^D \mathbf{u}_x^{idle}$ 이다.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{u}_{busy}^{*(1)} \mathbf{e} \\
 &= \frac{1}{2E(I_D)} [E(U_D^2) + E(U_D)] \\
 & + \frac{\kappa}{E(I_D)} [U_D^{*(1)} + U_D^* - \mathbf{I}] \\
 & \quad \times [\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \mathbf{e} \\
 & + \frac{1}{2(1-\rho)} (\pi - \mathbf{u}_{idle}^*) \\
 & \quad \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) \mathbf{D}_n E^2(S) + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n S^{*(2)} \right] \mathbf{e} \\
 & - \frac{1}{1-\rho} (\pi - \mathbf{u}_{idle}^*) [\mathbf{I} - \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S)] \\
 & \quad \times [\mathbf{I} - \mathbf{D} + \mathbf{e}\pi]^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{D}_n E(S) \mathbf{e}.
 \end{aligned}$$

## 6. 수치예제

본 장에서는 대기시간 분석을 통하여 구한 이



론값들과 시뮬레이션 결과를 비교, 확인한다. 이론값의 계산은 Mathematica 8을, 시뮬레이션은 SIMSCRIPT II.5를 사용하여 100,000개의 사이클 시간 동안 수행하였다. 여러 가지 수치 예에 대하여 모두 0.1% 이내의 상대오차를 얻을 수 있었으며 두 가지 예제를 보이기로 한다.

서비스시간의 분포는 이산확률분포인 기하분포(Geom(p))와 음이항분포(NB(n,p))를 사용하였고, 각 분포의 확률질량함수(pmf)는 다음과 같다.

$$\text{Geom}(p): s(k) = (1-p)^{k-1}p, (k = 1, 2, \dots)$$

$$\text{NB}(n,p): s(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

$$(k = n, n+1, \dots)$$

이론값(T)과 시뮬레이션 결과(R)와의 비교를 위한 백분율 상대오차는 다음과 같다:

$$\text{상대오차}(\%) = \frac{T-R}{T} \times 100(\%).$$

(Example 1)

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.1 \\ 0.5 & 0.35 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$D = 15, \lambda_g = 0.075, \lambda = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n D_n e = 0.1$$

Table 1 Mean Waiting Time of Example 1

Measure	$W_q$	
	Geom(1/9)	NB(2,2/3)
Service Distribution	Geom(1/9)	NB(2,2/3)
$\rho$	0.9	0.3
Theoretical Value(T)	102.8430	24.6011
Simulation Result(R)	102.8833	24.6006
Relative Error(%)	-0.03919	0.002032

(Example 2)

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.05 \\ 0.45 & 0.35 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix},$$

$$D = 10, \lambda_g = 0.065, \lambda = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n D_n e = 0.116.$$

Table 2 Mean Waiting Time of Example 2

Measure	$W_q$	
	Geom(7/10)	NB(2,1/3)
Service Distribution	Geom(7/10)	NB(2,1/3)
$\rho$	0.166	0.696
Theoretical Value(T)	29.7774	22.8619
Simulation Result(R)	29.7495	22.9018
Relative Error(%)	0.09367	-0.17448

## 7. 결론 및 추후연구과제

고객(또는 패킷)이 집단으로 도착하고, 일량 임계값에 의해 바쁜기간을 시작하는 D-정책을 갖는 이산시간 BMAP/G/1 대기행렬시스템의 안정상태 대기시간을 분석하였다. 대기시간 벡터생성함수를 유도하고, 성능척도로서 평균대기시간을 계산한 후, 시뮬레이션을 수행하여 결과 값을 비교·확인하였다. 또한 Lee[20]의 MAP 관련 대기행렬시스템의 분석을 위한 통합적 접근방법이 집단도착의 경우에도 효과적으로 작동함을 확인하였다.

추후연구과제로서 고객수와 체제시간의 분석을 생각해 볼 수 있다. 본 연구에서 다룬 시스템은 복잡도가 매우 높은 시스템으로서 분석 자체만으로도 의의가 있지만 보다 빠른 계산 속도를 얻기 위한 알고리즘 개발이 요구된다. Lee et al.[21]은 D-정책 하에서 후입선출로 서비스하는 M/G/1 대기행렬시스템의 분석과 비용최적화를 해석적으로 다루었는데, Lee et al.[22]과 같이 시뮬레이션을 활용하여 우선순위 서비스규칙 하에서 운영되는 복잡한 대기행렬시스템을 근사적으로 분석하는 방법도 고려할 수 있다.

## References

- [1] Takagi, H., "Queueing Analysis: Vol III, Discrete-time Systems," North-Holland, 1993.
- [2] Bruneel, H. and Kim, B.G., "Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM," Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [3] Paxson, V. and Floyd, S., "Wide Area Traffic: The Failure of Poisson Modeling," IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol. 3, No. 3, pp. 226-244, 1995.
- [4] Lucantoni, D.M., "New Results for the Single Server Queue with a Batch Markovian Arrival Process," Stochastic Models, Vol. 7, No. 1, pp. 1-46, 1991.
- [5] Latouche, G. and Ramaswami, V., "A Unified Stochastic Model for the Packet Stream from Periodic Sources," Performance Evaluation, Vol 14, No. 12, pp. 103-121, 1992.
- [6] Ramaswami, V. and Latouche, G., Modeling Packet Arrivals from Asynchronous Input Lines, in "Teletraffic Science for New Cost-Effective Systems, Networks and Services," ITC-12, M. Bonatti Ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 721-727, 1989.
- [7] Wang, S.S. and Silvester, J.A., "A Discrete-Time Performance Model for Integrated Service ATM Multiplexers," Proceeding of IEEE COLBECOM, pp. 757-761, 1993.
- [8] Lee, H.W., "Queueing Theory," Sigma Press, 2006 (in Korean).
- [9] Balachandran, K.R., "Control Policies for a Single Server System," Management Science, Vol. 19, No. 9, pp. 1013-1018, 1973.
- [10] Bachandran, K.R. and Tijms, H., "On the  $D$ -policy for the M/G/1 Queue," Management Science, Vol. 21, No. 9, pp. 1073-1076, 1975.
- [11] Li, J. and Niu, S.C., "The Waiting Time Distribution for the GI/G/1 Queue under the  $D$ -policy," Probability in the Engineering and Informational Sciences, Vol. 6, No. 3, pp. 287-308, 1992.
- [12] Lee, H.W., Cheon, S.H. and Seo, W.J., "Queue Length and Waiting Time of the M/G/1 Queue under the  $D$ -policy and Multiple Vacations," Queueing Systems, Vol. 54, No. 4, pp. 261-280, 2006.
- [13] Baek, J.W. and Lee, H.W., "Waiting Time Analysis of a Batch Arrival Queue under a Workload Control," International Journal of Industrial Engineering Vol. 14, No. 3, pp. 298-306, 2007.
- [14] Lee, S.W., Lee, H.W., and Baek, J.W., "Analysis of Discrete-Time Geo/G/1 Queue under the  $D$ -policy," 6th International Conference on Queueing Theory and Network Analysis, 2011, Seoul, Korea, QTNA2011.
- [15] Lee, S.W., Lee, H.W., and Baek, J.W., "Analysis of Discrete-Time MAP/G/1 Queue under Workload Control," Performance Evaluation, Vol. 69, No. 2, pp. 71-85, 2012.
- [16] Liu, R. and Deng, Z., "The Steady-State System Size Distribution for a Modified  $D$ -policy Geo/G/1 Queueing System," Mathematical Problems in Engineering, Vol. 2014, Article ID 345129, 2014.
- [17] Lan, S. and Tang, Y., "Analysis of a Discrete-Time  $Geo^{\lambda_1, \lambda_2}/G/1$  Queue with  $N$ -policy and  $D$ -policy," Journal of Applied Mathematics and Computing, Vol. 53, No. 1-2, pp. 657-681, 2017.
- [18] Lee, S.W., "Workload Analysis of Discrete-Time BMAP/G/1 Queue under  $D$ -policy," Journal of the Korea Industrial Information Systems Research, Vol. 21, No. 6, pp. 1-12, 2016.
- [19] Kim, N.K., Chang, S.H. and Chae, K.C., "On the Relationships among Queue Lengths at Arrival, Departure, and Random Epochs on the Discrete-time Queue with D-BMAP Arrivals," Operations Research, Vol. 30, pp. 25-32, 2002.
- [20] Lee, S.W., "A Unified Approach for the Analysis of Discrete-time MAP/G/1 Queue: by Workload Analysis," Journal of the Korea

Industrial Information Systems Research, Vol. 22, No. 1, pp. 23-32, 2017.

- [21] Lee, H.W., Kim, S.A., Lee, S.W., "Analysis and Cost Optimization of the M/G/1 Queue under the  $D$ -policy and LCFS discipline," Stochastic Analysis and Applications, Vol. 26, No. 1, pp. 39-59, 2008.
- [22] Lee, K.-G., Choi, S. and Ryu, S.-W., "Development of Simulation System for Evaluating Performance of the Flat Display Manufacturing Line with Repetitive Process," The Journal of Information Systems, Vol. 17, No. 4, pp. 301-319, 2008.



이 세 원 (Se Won Lee)

- 종신회원
  - 성균관대학교 산업공학과 학사
  - 성균관대학교 산업공학과 석사
  - 성균관대학교 산업공학과 박사
- 부경대학교 경영대학 경영학부 조교수
- 관심분야: 대기행렬이론, 확률모형, 시스템 최적화