

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 45(9), 775-783(2017)

DOI:https://doi.org/10.5139/JKSAS.2017.45.9.775

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

에너지와 대기시간을 고려한 우주비행체 랑데부

오승렬*, 이현재**

Spacecraft Rendezvous Considering Orbital Energy and Wait Time

Snyoll Oghim* and Henzeh Leeghim**

Dept. of Aerospace Engineering, Chosun University* ,**

ABSTRACT

In this paper, an impulsive rendezvous problem by using minimum energy of spacecraft in different orbits is addressed. In particular, the orbits considered in this paper are the general orbits including the elliptic orbit, while most of the orbits considered in the literature have been restricted within co-planar or circular orbits. The constraints for solving this optimization problem are the Kepler's equation formulated with the universal variable, and the final position and velocity of two spacecraft. Also, the Lagrange coefficients, sometimes called as f and g solution, are used to describe the orbit transfer. The proposed method technique is demonstrated through numerical simulation by considering the minimum energy, and both the minimum energy and the wait time, respectively. Finally, it is also verified by comparing with the Hohmann transfer known as the minimum energy trajectory. Although a closed-form solution cannot be obtained, it shows that the suggested technique can provide a new insight to solve various orbital transfer problems.

초 록

본 논문에서는 서로 다른 궤도상에 있는 두 우주비행체의 랑데부를 위한 최소 에너지 순간추력을 구하는 문제를 다룬다. 두 우주비행체의 궤도는 공면 궤도나 원 궤도 같이 특정 지어진 궤도가 아닌 일반적인 궤도이다. 이러한 최적화 문제를 다루기 위해 범용변수를 사용한 케플러 방정식과 두 우주비행체의 최종 위치 및 속도를 구속조건으로 사용하며, 전이 궤도의 정보를 얻기 위해 라그랑지 계수를 이용한다. 이 방법은 최소 에너지를 고려한 예시와 대기시간까지 고려한 예시를 통해 보여지며, 최소 에너지 궤도로 알려진 호만 궤도와 비교함으로써 검증된다. 비록 닫힌 형태의 해를 얻을 수는 없었지만, 수치 해석적 방식을 적용함으로써 다양한 궤도 전이 문제의 해를 구할 수 있음을 보여준다.

Key Words : Spacecraft Rendezvous(우주비행체 랑데부), Minimum Energy(최소 에너지), Wait Time(대기 시간), Non-coplanar(비 공면), Conic Orbit(타원 궤도)

† Received : April 3, 2017 Revised : July 26, 2017 Accepted : August 8, 2017

** Corresponding author, E-mail : h.leeghim@controla.re.kr

I. 서론

우주임무에 있어서 에너지(혹은 연료)의 효율적인 사용은 우주비행체의 수명과 직간접적으로 관여되어있기 때문에 매우 중요한 문제 중 하나라고 할 수 있다. 만약 어떠한 기술로 우주비행체의 연료를 절약할 수 있다면, 그것은 우주비행체의 수명을 연장하는 데 큰 도움이 될 것이다.

본 논문에서는 서로 다른 궤도상에 존재하는 두 우주비행체의 랑데부를 위해 에너지를 최소화하는 순간추력 궤도전이 문제를 다룬다. 이러한 문제의 가장 간단한 형태는 같은 궤도면을 갖는 두 원 궤도 사이에서의 문제일 것이다. 그리고 이와 같은 문제에서 한 번의 순간추력을 사용한 최소 에너지 궤도 전이는 호만전이(Hohmann transfer)[1]라는 이름으로 잘 알려져 있다. 이 외에도 고정된 시간에서 여러 번의 순간추력(Multi-impulse)을 이용하는 연구[2, 3], 여러 번의 공전(Multi-revolution)을 고려하는 연구[4]나 이 둘 모두를 고려하는 연구[5] 등이 있을 뿐 아니라, 연료를 최적화하는 문제[6]나 무작위 탐색(Random searching) 알고리즘을 적용하는 연구[7] 등이 있다. 최근에는 다양한 교란을 고려하는 연구[8] 또한 진행되면서 우주비행체 랑데부를 위한 다양한 접근들이 제시되고 있으며, 이 외에도 랑데부를 위한 적응 제어기법[9], 지상 테스트 베드 개발[10] 등 다양한 분야에서 활발하게 연구가 진행되고 있다. 이러한 연구의 대부분은 램버트 문제를 기반으로 접근하고 있으며, 비행시간을 고정하거나 특정한 궤도로 상황을 제한하는 등의 제약조건을 갖는다.

본 논문에서는 공면 혹은 원 궤도 사이에서의 궤도전이가 아닌, 보다 일반적인 궤도 상황에 대한 해를 얻고자 한다. 원 궤도나 타원 궤도의 위치와 속도를 수치적으로 계산하는 것은 어려움이 없지만 포물선 궤도에 근접할수록 수치적인 계산이 아주 불안정해지는 특성이 있다. 따라서 여기서는 뉴턴역학에 따른 운동방정식이 아닌 범용변수(Universal variable)를 사용한 운동방정식을 사용한다. 범용변수를 사용하는 방법은 일반적인 궤도에 대해 충분히 정확한 궤도 정보를 제공할 수 있다. 또한, 비행시간이 고정되지 않고 에너지를 최소화하기 위한 미지수로써 사용되며 대기시간(Wait time)이라는 중요한 파라미터가 다루어진다. 이 파라미터는 랑데부를 위한 궤도전이를 수행하기에 앞서 에너지를 최소화 할 수 있는 위치까지 이동하기 위해 기다려야하는 시간을 의미한다. 즉, 초기 위치에서 속도변화를 일으키는 것이

아니라 에너지를 보다 최소화하는 새로운 위치를 찾고 해당 위치에서 랑데부를 위한 궤도전이가 진행되는 것이다.

본 논문에서는 최소 에너지를 고려한 순간추력 랑데부 문제와 관련하여 두 개의 문제를 다룬다. 첫 번째 문제는 타겟과 체이서의 위치 및 속도가 주어져 있을 때, 랑데부를 위한 초기위치와 최종위치에서의 속도변화(순간추력)를 찾고, 두 우주비행체가 최종위치에서 만나기까지 걸리는 비행시간을 계산한다. 두 번째 문제는 첫 번째 문제에서 대기시간이라는 파라미터를 추가하여 두 개의 속도변화를 찾는다.

본 논문은 다음과 같은 구조로 되어있다. 먼저, 범용변수를 기반으로 하는 케플러의 시간에 대한 방정식을 살펴본 후, 라그랑지 계수(Lagrange coefficient)와 라그랑지 곱(Lagrange multiplier)을 이용하여 랑데부를 위한 필요조건을 유도한다. 그리고 몇 가지의 시뮬레이션을 통하여 유도된 식의 검증이 이루어진다.

II. 본론

2.1 케플러의 시간에 대한 방정식

본 논문에서 다루고 있는 문제들을 이해하기 위해서는 라그랑지 계수와 범용변수에 대해 알아야 할 필요가 있으며, 이를 위해 케플러 방정식부터 간단히 살펴보고자 한다. 먼저 케플러 방정식은 다음과 같다[11].

$$M = n(t-T) = E - e \sin E \quad (1)$$

여기서 M 은 Mean anomaly를 나타내고, E 와 e 는 각각 Eccentric anomaly와 이심률(Eccentricity)을 나타낸다. 그리고 T 는 주기를, t 는 비행시간을 의미하며, n 은 $\sqrt{\mu/a^3}$ 으로 정의된 Mean motion이다. μ 는 지구의 중력상수이며, a 는 궤도의 장축의 길이이다. 케플러 방정식은 이심률 e 가 1에 근접할수록 계산의 정확도가 낮아지는 특성을 갖는데, 이러한 수치적 문제를 해결하기 위해 다음과 같이 정의된 범용변수를 사용한다.

$$x = \frac{\sqrt{\mu}}{r} \quad (2)$$

여기서 r 은 우주비행체의 위치를 나타낸다. 범용변수를 이용하면 다음과 같은 우주비행체의 위치와 시간에 대한 방정식들을 구할 수 있다.

$$\sqrt{\mu}t = a \left(x - \sqrt{a} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + \frac{\mathbf{r}_0^T \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + r_0 \sqrt{a} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} \quad (3)$$

$$\mathbf{r} = a + a \left[\frac{\mathbf{r}_0^T \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu a}} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} + \left(\frac{r_0}{a} - 1 \right) \cos \frac{x}{\sqrt{a}} \right] \quad (4)$$

여기서 \mathbf{r}_0 와 \mathbf{v}_0 는 각각 우주비행체의 초기 위치와 속도를 의미한다. 만약 주어진 비행시간 t 에 대해 식(3)으로부터 범용변수 x 를 알 수 있다면, 우주비행체의 위치 벡터의 크기가 계산될 수 있다. 그리고 비행시간 t 에서 우주비행체의 위치와 속도 벡터는 라그랑지 계수를 사용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0 \quad (5)$$

$$\mathbf{v} = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\mathbf{v}_0 \quad (6)$$

여기서 f, g, \dot{f} 그리고 \dot{g} 는 스칼라 값을 갖는 파라미터들이며 다음과 같이 정의 된다.

$$f = 1 - \frac{a}{r_0} \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (7)$$

$$g = t - \frac{a}{\sqrt{\mu}} \left(x - \sqrt{a} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (8)$$

$$\dot{f} = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r r_0} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} \quad (9)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{a}{r} \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{a}} \right) \quad (10)$$

이처럼 범용변수를 사용하여 표현된 케플러 방정식과 라그랑지 계수는 우주비행체의 궤도를 묘사하기 위해 사용되며, 최종적으로 구해진 우주비행체의 궤도 식은 본 논문에서 다루어지는 최적화 문제에 사용된다.

2.2 우주비행체의 랑데부

2.2.1 최소 에너지 고려한 문제

램버트 문제가 초기위치와 최종위치 그리고 비행시간이 주어져 있을 때 두 위치에서의 속도 벡터를 구하는 것이라면, 이 절에서 다루는 최소 에너지를 고려한 랑데부 문제는 타겟과 체이서의 초기 위치와 속도가 주어졌을 때를 고려하고 있다. 전체적인 문제의 정의는 Fig. 1과 같다. 세계의 궤도는 각각 타겟, 체이서 그리고 체이서의 전이궤도를 보여준다. $\bar{\mathbf{r}}_0$ 는 타겟의 초기 위치를

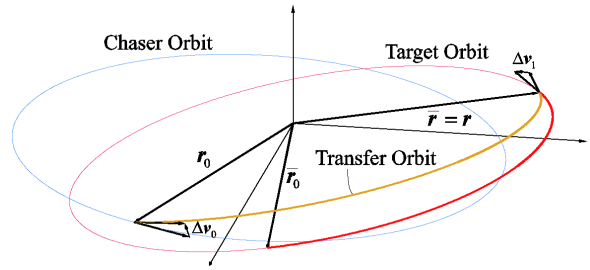


Fig. 1. Minimum energy problem

나타내며, \mathbf{r}_0 는 체이서의 초기를 가리킨다. 또한, $\Delta \mathbf{v}_0$ 와 $\Delta \mathbf{v}_1$ 은 전이궤도를 만들기 위한 속도변화 벡터와 최종 지점에서 랑데부를 수행하기 위한 속도변화 벡터를 의미한다.

에너지를 최소로 하는 랑데부 문제는 체이서의 속도변화를 최소로 하는 것과 동일하다고 할 수 있다[12]. 즉, 이 장에서 다루는 랑데부 문제는 초기 및 최종위치에서 타겟과 랑데부를 할 수 있는 최적의 비행시간과 최소 속도변화를 찾는 것 이이며, 첫 번째 문제는 다음과 같이 정의 된다. $\bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{v}}_0, \mathbf{r}_0$ 그리고 \mathbf{v}_0 가 주어졌을 때, 성능지수 J 를 최소화하는 비행시간 t 과 속도변화 $\Delta \mathbf{v}_0, \Delta \mathbf{v}_1$ 을 구하는 것이다. 여기서 성능지수는 에너지를 최소화하는 것으로써 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}_1^T \Delta \mathbf{v}_1 \quad (11)$$

랑데부를 위해서는 식(3)을 만족하면서, 최종 위치에서 두 우주비행체의 위치와 속도가 일치해야만 한다. 이러한 조건들은 랑데부를 위한 구속 조건이 되며, 성능지수는 이 구속조건들에 종속 된다. 이러한 구속조건들을 정리하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\eta}(\bar{\mathbf{x}}, x, t, \Delta \mathbf{v}_0) = 0 \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r} = 0 \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{v}} - (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_1) = 0 \quad (14)$$

여기서 $\Delta \mathbf{v}_0$ 와 $\Delta \mathbf{v}_1$ 은 각각 초기 및 최종 위치에서 체이서의 속도변화 벡터를 의미한다. 그리고 $\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2]^T$ 이며, 다음과 같은 식을 원소로 하는 벡터 함수이다.

$$\eta_1(\bar{\mathbf{x}}, t) = \bar{a} \left(\bar{x} - \sqrt{\bar{a}} \sin \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{a}}} \right) + \bar{a} \frac{\bar{\mathbf{r}}_0^T \bar{\mathbf{v}}_0}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \cos \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{a}}} \right) + \bar{r}_0 \sqrt{a} \sin \frac{\bar{x}}{\sqrt{a}} - \sqrt{\mu}t = 0 \quad (15)$$

$$\eta_2(x, t, \Delta \mathbf{v}_0) = a \left(x - \sqrt{a} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + a \frac{\mathbf{r}_0^T (\mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v}_0)}{\sqrt{\mu}} \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{x}} = \bar{r} \quad (26)$$

$$\times \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + r_0 \sqrt{a} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{\mu} t = 0 \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial \bar{x}} = r \quad (27)$$

여기서 η_1 과 η_2 는 식(3)의 좌변을 이항하는 것으로 간단히 얻을 수 있으며, 각각 타겟과 체이서의 궤도운동을 의미한다.

구속조건이 등식인 정적 최적화 문제는 라그랑지 곱을 사용하는 것으로써 구속되지 않은 문제로 변환시킬 수 있다[13].

$$\mathbf{H} = J + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Phi}^T (\bar{\mathbf{r}} - \mathbf{r}) + \boldsymbol{\psi}^T (\bar{\mathbf{v}} - (\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}_1)) \quad (17)$$

여기서 $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\Phi}$ 그리고 $\boldsymbol{\psi}$ 는 라그랑지 곱을 원소로 하는 벡터로써 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2]^T$, $\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]^T$, 그리고 $\boldsymbol{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]^T$ 이다. 이렇게 늘어난 미지수들에 대해서 성능지수를 최소화하기 위한 필요조건은 다음과 같이 얻을 수 있다[14].

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \bar{x}} = \lambda_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{x}} + \boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{x}} + \boldsymbol{\psi}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} - \boldsymbol{\psi}^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\sqrt{\mu} (\lambda_1 + \lambda_2) + \boldsymbol{\Phi}^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} = \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} + \lambda_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \boldsymbol{\psi}^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \Delta \mathbf{v}_1} = \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_1} - \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{I}_{3 \times 3} = 0 \quad (22)$$

이 필요조건들을 정리하기 위해 우선 식(22)로부터 라그랑지 곱 벡터인 $\boldsymbol{\psi}$ 를 구한다.

$$\boldsymbol{\psi}^T = \Delta \mathbf{v}_1^T \quad (23)$$

이렇게 구해진 $\boldsymbol{\psi}^T$ 를 식(18)와 (20)에 대입하고 정리하면 라그랑지 곱 벡터 $\boldsymbol{\lambda}$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\lambda_1 = -\frac{1}{r} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{x}} + \Delta \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (24)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{r} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \Delta \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \quad (25)$$

여기서 범용변수에 대한 $\boldsymbol{\eta}$ 의 편미분은 다음과 같이 정리된다.

식(21)에 라그랑지 곱 벡터 $\boldsymbol{\lambda}$ 를 대입하면

$$-\sqrt{\mu} \left[-\frac{1}{r} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{x}} + \Delta \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{1}{r} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \Delta \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \right] + \boldsymbol{\Phi}^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) = 0 \quad (28)$$

타겟과 체이서의 최종 위치가 일치해야 한다는 랑데부의 구속조건으로부터 $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ 임을 알 수 있다. 이 구속조건을 식(29)에 적용하여 정리하면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\boldsymbol{\Phi}^T \left[\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right) + \frac{r}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \right] + \Delta \mathbf{v}_1^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) = 0 \quad (29)$$

다음으로 λ_2 와 $\boldsymbol{\psi}$ 를 식(21)에 대입하면

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} + \frac{1}{r} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \Delta \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \boldsymbol{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \Delta \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} = 0 \quad (30)$$

Ep.(31)를 $\boldsymbol{\Phi}^T$ 에 대해 정리하면 다음과 같이 라그랑지 곱 $\boldsymbol{\Phi}^T$ 를 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\Phi}^T = \left[\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \Delta \mathbf{v}_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} \right) \right] \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} \right)^{-1} \quad (31)$$

최종적으로, $\boldsymbol{\Phi}^T$ 를 Ep.(29)에 대입하면, 구속조건이 적용된 최적 해를 구하기 위한 방정식을 얻을 수 있다.

$$h = (\Delta \mathbf{v}_0^T - \Delta \mathbf{v}_1^T L_1) L_0^{-1} \left[\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right) + \frac{r}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \right] + \Delta \mathbf{v}_1^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right) = 0 \quad (32)$$

여기서 행렬 L_0 와 L_1 은 식(32)를 간략화하기 위해 사용되었으며 다음과 같이 정의된다.

$$L_0 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta \mathbf{v}_0} \quad (33)$$

$$L_1 = \frac{\partial v}{\partial \Delta v_0} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \eta_2}{\partial \Delta v_0} \quad (34)$$

만약 식(32)을 만족하면서 두 우주비행체가 랑데부를 한다면, 체이서는 주어진 초기조건에서 최소 에너지로 랑데부를 하게 됨을 의미한다.

2.2.2 최소 에너지와 대기시간을 고려한 문제

이 절에서는 대기시간이라는 새로운 파라미터가 추가되며 미지수로써 사용된다. 전체적인 문제의 정의는 Fig. 2에 묘사된다. 대기시간은 최소 에너지의 궤도 전이를 할 수 있는 위치와 시점을 알려준다. 따라서 체이서의 첫 번째 속도 변화는 초기 위치에서 대기시간 t_1 만큼 지난 이후에 발생할 것이다. 본 논문에서는 이러한 첫 번째 속도 변화에 대하여 Δv_1 으로 표현한다. 첫 번째 순간 추력이 발생한 후, 체이서는 전이 궤도로 돌입하게 되며 전체 비행시간 t 와 대기시간 t_1 의 차이만큼의 전이시간 t_{tr} 을 갖는다.

이 절에서 다루는 최소 에너지와 대기시간을 고려하는 랑데부 문제는 앞 절에서 다룬 문제와 매우 유사하다. 문제는 $\bar{r}_0, \bar{v}_0, r_0$ 그리고 v_0 가 주어졌을 때, 대기시간 t_1 과 전체 비행시간 t , 그리고 랑데부를 위한 속도 변화 $\Delta v_1, \Delta v_2$ 을 구하는 것이다. 최소화하고자 하는 성능지수와 구속조건은 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} \Delta v_1^T \Delta v_1 + \frac{1}{2} \Delta v_2^T \Delta v_2 \quad (35)$$

$$\eta(\bar{x}, x_1, x, t_1, t, \Delta v_1) = 0 \quad (36)$$

$$\bar{r} - r = 0 \quad (37)$$

$$\bar{v} - (v + \Delta v_2) = 0 \quad (38)$$

여기서 η 는 $[\eta_1, \eta_2, \eta_3]^T$ 와 같으며, 각각의 원소는 다음과 같이 정의된다.

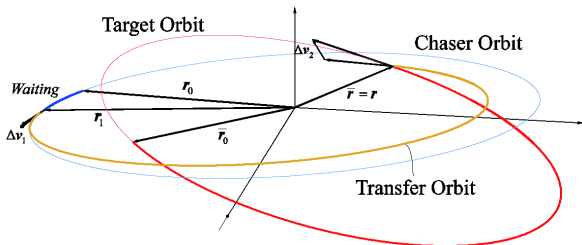


Fig. 2. Minimum energy and wait time problem

$$\eta_1 = \bar{a} \left(\bar{x} - \sqrt{\bar{a}} \sin \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{a}}} \right) + \bar{a} \frac{\bar{r}_0^T \bar{v}_0}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \cos \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{a}}} \right) + \bar{r}_0 \sqrt{\bar{a}} \sin \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{a}}} - \sqrt{\mu} \quad (39)$$

$$\eta_2 = a_1 \left(x_1 - \sqrt{a_1} \sin \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} \right) + a_1 \frac{r_0^T v_0}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \cos \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} \right) + r_0 \sqrt{a_1} \sin \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} - \sqrt{\mu} t_1 \quad (40)$$

$$\eta_3 = a \left(x - \sqrt{a} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + a \frac{r_1^T (v_1 + \Delta v_1)}{\sqrt{\mu}} \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{a}} \right) + r_1 \sqrt{a} \sin \frac{x}{\sqrt{a}} - \sqrt{\mu} (t - t_1) \quad (41)$$

여기서 a_1 과 x_1 은 체이서의 최초 궤도에서의 장축과 범용변수를 의미하며, a 와 x 는 대기시간 이후, 전이궤도의 장축과 범용변수를 나타낸다. 즉, η_1 은 타겟의 궤도운동을, η_2 와 η_3 는 각각 대기시간 이전의 체이서의 궤도운동과 이후의 궤도운동을 묘사한다.

이 문제에서 계산되어야 하는 변수는 \bar{x}, x_1, x, t_1, t 그리고 $\Delta v_1, \Delta v_2$ 이며, 전이시간은 앞에서 설명한 바와 같이 $t - t_1$ 으로 계산될 수 있다. 대기시간 t_1 에서 체이서의 위치와 속도는 2.2.1절에서와 유사하게 라그랑지 계수를 사용하는 것으로 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$r_1 = f_0 r_0 + g_0 v_0 \quad (42)$$

$$v_1 = f_0 v_0 + g_0 r_0 \quad (43)$$

대기시간 이후의 체이서의 최종위치와 속도 또한 Δv_1 를 고려하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$r = f_1 r_1 + g_1 v_1 \quad (44)$$

$$v = f_1 v_1 + g_1 (v_1 + \Delta v_1) \quad (45)$$

마찬가지로 구속되지 않은 문제로 변환시키면,

$$H = J + \lambda^T \eta + \Phi^T (\bar{r} - r) + \psi^T (\bar{v} - (v + \Delta v_1)) \quad (46)$$

여기서 λ, Φ 그리고 ψ 는 라그랑지 곱을 원소로 하는 벡터이다. 이렇게 변수가 증가된 식에 대하여 성능지수를 최소화하기 위한 필요조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \Phi^T \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \psi^T \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} - \Phi^T \frac{\partial r}{\partial x_1} - \Psi^T \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \quad (48)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial \eta_3}{\partial x} - \Phi^T \frac{\partial r}{\partial x} - \Psi^T \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (49)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t_1} = -\sqrt{\mu} \lambda_2 + \lambda_3 \frac{\partial \eta_3}{\partial t_1} - \Phi^T \frac{\partial r}{\partial t_1} - \Psi^T \frac{\partial v}{\partial t_1} = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\sqrt{\mu}(\lambda_1 + \lambda_2) + \Phi^T \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t} \right) = 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta v_1} = \frac{\partial J}{\partial \Delta v_1} + \lambda_3 \frac{\partial \eta_3}{\partial \Delta v_1} - \Phi^T \frac{\partial r}{\partial \Delta v_1} - \Psi^T \frac{\partial v}{\partial \Delta v_1} \quad (52)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Delta v_2} = \frac{\partial J}{\partial \Delta v_2} - \Psi^T I_{3 \times 3} = 0 \quad (53)$$

이 필요조건들을 사용하여 2.2.1절과 유사한 방법으로 라그랑지 곱을 모두 얻을 수 있으며, 최종적으로 대기시간과 최소에너지를 고려한 랑데부 조건식 두 개를 유도할 수 있다. 이렇게 구해진 두 개의 식은 다음과 같다.

$$h_1 = (\Delta v_1^T - \Delta v_2^T L_1) L_0^{-1} \left[\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \right) + \frac{r}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t} \right) \right] + \Delta v_2^T \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (54)$$

$$h_2 = (\Delta v_1^T - \Delta v_2^T L_1) L_0^{-1} \left[l_2 \frac{\partial r}{\partial x} - \left(\frac{\sqrt{\mu}}{r_1} \frac{\partial r}{\partial x_1} - \frac{\partial r}{\partial t_1} \right) \right] + \Delta v_2^T \left(l_2 \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\sqrt{\mu}}{r_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial t_1} \right) \right) = 0 \quad (55)$$

여기서 두 행렬 L_0 와 L_1 그리고 스칼라 l_2 는 식(54), (55)를 간략화하기 위해 사용되었으며, 다음과 같이 정의된다.

$$L_0 = \frac{\partial r}{\partial \Delta v_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \eta_3}{\partial v_1} \quad (56)$$

$$L_1 = \frac{\partial v}{\partial \Delta v_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \eta_3}{\partial \Delta v_1} \quad (57)$$

$$l_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{\sqrt{\mu}}{r_1} \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_3}{\partial t_1} \right) \quad (58)$$

이 장에서는 두 개의 랑데부 문제가 제시된다. 첫 번째 문제는 최소 에너지를 고려한 랑데부 문제이다. 이 문제는 총 아홉 개의 미지수로 구성되어 있는데, \bar{x} , x , t , Δv_0 와 Δv_1 이 그것이다. 이 미지수들의 최적 해를 찾기 위해서는 마찬가지로 아홉 개의 방정식이 필요하며, 랑데부의 특성과 최적화 기법을 사용하여 식(12), (13), (14)

그리고 (32)이라는 식들을 얻을 수 있었다. 두 번째 문제는 대기시간 t_1 과 범용변수 x_1 이 추가되어 총 열 한 개의 미지수로 구성되며, 첫 번째 문제와 마찬가지로 식(35), (36), (37), (54) 그리고 (55)이라는 열 한 개의 방정식을 모두 얻을 수 있었다.

이 문제들의 닫힌 해를 구하는 것은 비선형성이 강하다는 궤도의 특성 때문에 많은 어려움이 있다. 하지만 수치 해석적 방법은 어렵지 않게 적용할 수 있기 때문에 이를 이용하여 시뮬레이션이 진행된다.

2.3 시뮬레이션

2.3.1 최소 에너지 고려한 문제

이 절에서는 제안되는 방식의 유용성을 보여주기 위해 몇 가지의 시뮬레이션이 다루어진다. 우선, 호만전이의 결과와 수치적 방식으로 얻어지는 결과를 비교함으로써 식의 타당성을 보인 후, 비공면의 타원 궤도라는 일반적인 궤도 상황에 적용하여 그 유용성을 입증한다.

호만전이는 공면의 두 원 궤도 사이에서의 궤도 전이를 다루는데, 호만전이의 결과로 얻어지는 두 번의 속도 변화는 에너지를 최소로 하는 값을 갖는다. 이와 같은 호만전이와 수치적인 방식으로 얻어진 결과를 비교하기 위해 LEO($r=7,000$ km)에서 GEO($r=42,164$ km)로 가는 궤도를 사용한다.

Table 1은 주어진 궤도에서의 호만전이와 수치적인 방식으로 얻어진 속도변화의 크기를 나타낸다. 해당 문제에서의 최적 해로 알려져 있는 호만전이의 결과 값이 수치적인 방식으로 얻어진 값과 같음을 보임으로써 2.2에서 유도된 식을 사용하여 최소 에너지를 고려한 랑데부 문제의 해를 도출할 수 있음을 확인할 수 있었다. 이 외에도 속도변화와 같이 미지수로 사용된 타겟과 체이서의 범용변수인 \bar{x} , x 는 각각 287과 492라는 값을 얻었으며, 19,155초라는 비행시간 t 을 갖는다.

다음은 보다 일반적인 상황의 궤도인 비공면의 타원궤도를 갖는 두 우주비행체의 랑데부 문

Table 1. Hohmann transfer solution generated by the numerical technique

Maneuver	Hohmann (km/s)	Numerical (km/s)
First Burn	2.336	2.336
Second Burn	1.434	1.434

Table 2. Initial condition of minimum energy rendezvous

Orbit	Position (km)	Velocity (km/s)
Target	$[8000, 1000, 100]^T$	$[0.3, 5.1, 1.2]^T$
Chaser	$[6500, -2000, -50]^T$	$[2.0, 6.0, -0.5]^T$

Table 3. Minimum energy rendezvous solution

Parameter	Value	Unit
\bar{x}	150.02	-
x	166.85	-
t	1749.23	sec
Δv_0	$[1.01, -0.23, 2.01]^T$	km/s
Δv_1	$[0.40, -1.64, 0.27]^T$	km/s

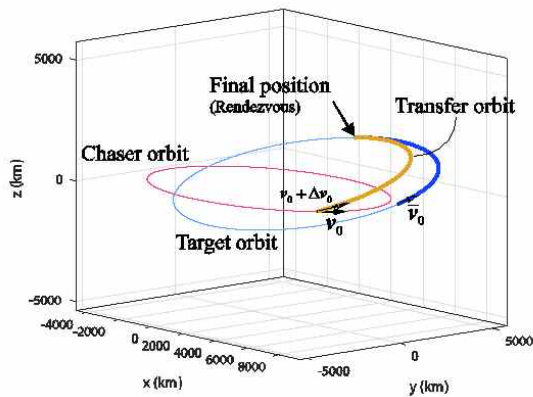


Fig. 3. Trajectory of minimum energy problem

제이다. 두 우주비행체의 초기 조건은 Table 2에 나타나 있으며 타겟과 체이서 이심률은 각각 0.47, 0.31 이다.

위와 같은 초기조건에서, 구속조건을 모두 만족하면서 성능지수를 최소로 하는 값을 구하기 위해, 수치적인 방식을 사용한다. 그리고 Table 3은 수치적인 방식으로 얻어진 결과를 보여주며, 해당 결과에 대한 궤도가 Fig. 3에 나타나 있다. 체이서는 초기위치에서 $\Delta v_0 = [1.01, -0.23, 2.01]^T$ 만큼의 속도 변화를 일으켜 전이궤도로 진입할 수 있다. 그리고 1,749초의 비행시간이 지난 후, 최종위치에서 $\Delta v_1 = [0.40, -1.64, 0.27]^T$ 만큼의 속도 변화를 다시 한 번 함으로써 타겟과의 랑데부를 하게 된다. 마지막으로 이 결과가 최적 해인지를 확인하기 위해서 수치해석을 통하여 Fig. 4와 같은 그래프를 얻었다. 이 그래프는 비행시간 t 을

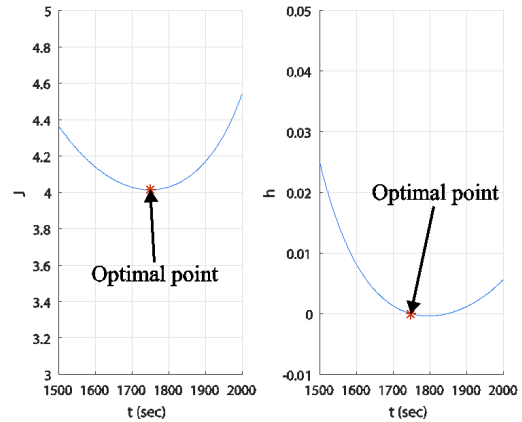


Fig. 4. J and h with respect to the t

1,500초에서 2,000초까지 변경해가면서 램버트 문제를 푸는 것으로 얻을 수 있다. Fig. 4의 그래프는 결과 값으로 얻어진 비행시간에서 구속조건이 만족하고 있으며, 성능지수가 최소가 되고 있음을 보여준다.

2.3.2 최소 에너지와 대기시간을 고려한 문제

이 절에서는 대기시간까지 고려된 식을 사용하여 시뮬레이션을 수행한다. 앞 절에서와 마찬가지로 호만전이를 통한 검증이 이루어지고, 일반적인 궤도문제에 적용함으로써 그 유용성을 보인다. 먼저, LEO와 GEO의 궤도를 갖는 두 우주비행체 랑데부 문제이다. 주어진 문제에 대하여 수치적인 방식을 통해 얻어진 해는 다음과 같다. $t = 23708s$, $t_1 = 4517s$, $\Delta v_1 = [2.3, 0.3, 0]^T$, $\Delta v_2 = [-1.4, -0.2, 0]^T$ 그리고 $\bar{x} = 355$, $x_1 = 407$, $x = 493$ 이다. 여기서, 두 속도변화의 크기가 호만전이의 결과와 일치하는 것을 알 수 있다. 이것은 대기시간을 포함하고 있는 식으로부터 에너지를 최소로 하는 해를 얻을 수 있다는 것을 의미한다. 즉, 제안하는 방법이 타당하다는 것을 간접적으로 보여주며, 이는 체이서가 주어진 초기위치에서 궤도전이를 수행하는 것이 아니라 대기시간 $t_1 = 4517s$ 이 흐른 후에 궤도전이를 해야만 최소 에너지 궤도전이가 된다는 것이다. Fig. 5는 이러한 결과에 대한 타겟과 체이서의 궤도를 보여준다.

마지막으로 일반적인 궤도에서의 문제를 다룬다. 두 우주비행체의 초기조건은 Table 4에 나타나 있으며, 타겟과 체이서의 이심률은 각각 0.34, 0.13 이다. 주어진 초기조건에서, 최적 해는 $t = 6105s$, $t_1 = 4463s$, $\Delta v_1 = [-1.4, 1.1, 3.1]^T$, $\Delta v_2 = [-2.4, 0.5, -1.1]^T$ 그리고 각각의 범용변수

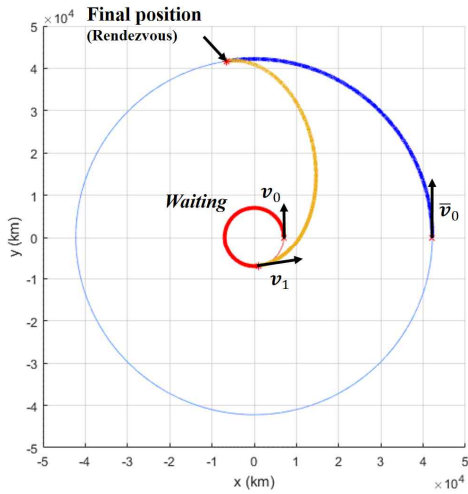


Fig. 5. Hohmann transfer is generated by the minimum energy and wait time problem

Table 4. Initial condition of the minimum energy and wait time problem

Orbit	Position (km)	Velocity (km/s)
Target	$[5000, -3000, 500]^T$	$[6.3, 5.1, 0]^T$
Chaser	$[-2000, -5500, -500]^T$	$[7.5, -3.8, 0.1]^T$

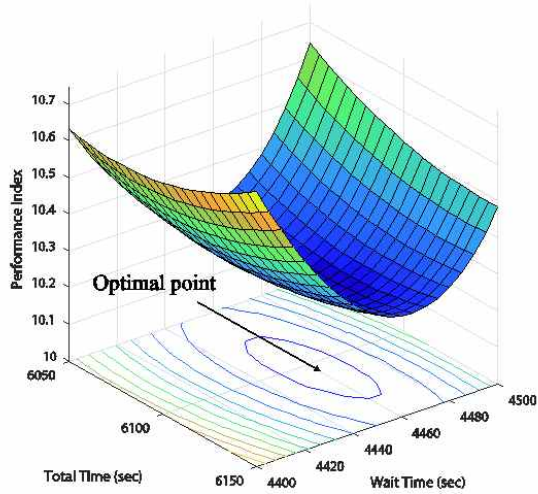


Fig. 6. J with respect to the t and t_1

는 $\bar{x}=585$, $x_1=372$, $x=260$ 으로 수치적인 방법을 통해 얻어진다. 랑데부를 위한 체이서의 궤도 전이는 초기위치에서 4,463초가 지난 후에 일어나며, 다시 1,642초 동안의 비행시간을 갖은 후, 비로소 랑데부를 하게 된다.

다음으로, 앞서 얻어진 결과 값들이 최적 해인

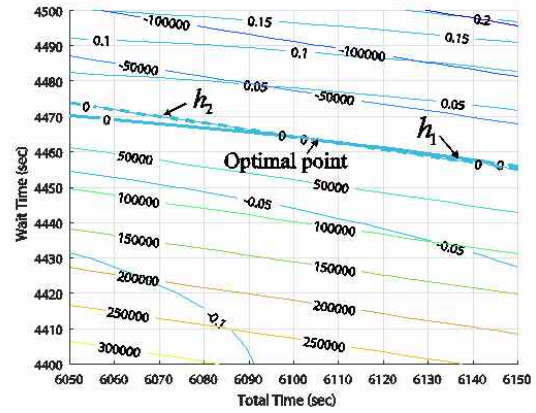


Fig. 7. h_1 and h_2 with respect to the t and t_1

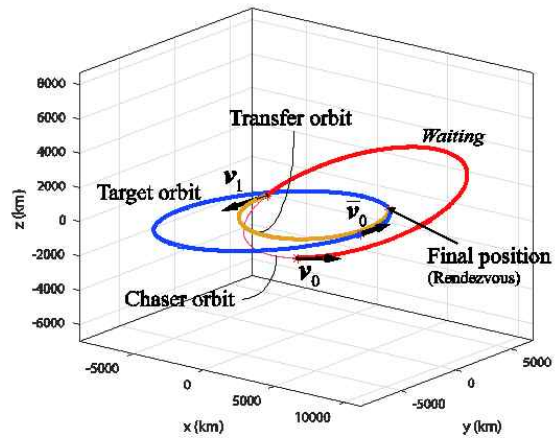


Fig. 8. Trajectory of minimum energy and wait time problem

지를 살펴본다. Fig. 6은 총 비행시간과 대기시간에 대한 성능지수의 값을 나타낸다. 이 그림은 3차원의 성능지수 그래프가 해당 구간에서 유일한 최소 점을 가지고 있음을 보여주고 있다. Fig. 7도 이와 비슷하게 총 비행시간과 대기시간에 대한 h_1 과 h_2 의 그래프 등고선을 나타낸다. 이 그림도 마찬가지로 h_1 과 h_2 가 교차하면서 0의 값을 갖는 곳의 위치가 앞서 얻어진 결과 값과 일치함을 보여준다. 이것은 결과 값들이 해당 구간에서 구속조건을 만족하는 유일한 해임을 의미한다. 마지막으로 Fig. 8은 이러한 결과 값에 대한 궤도를 보여주고 있다.

III. 결 론

본 논문에서는 최소 에너지를 고려한 랑데부 문제를 풀기위해 최적화 기법을 사용하였으며, 수치적인 방법을 통해 해를 도출하는 내용을 다

루고 있다. 이러한 방식은 공면 궤도나 원 궤도 처럼 궤도 상황을 제한하지 않아도 충분히 해를 도출할 수 있다는 이점을 가지고 있다. 구속조건이 있는 최적화 기법을 적용하는 것으로 두 우주비행체의 최소 에너지 랑데부를 위한 최적의 속도 변화를 얻었으며, 보다 효율적인 랑데부를 위해 대기시간이라는 개념을 추가하여 랑데부를 위한 조건식들을 유도하였다. 그리고 이러한 방법의 타당성을 보이기 위해 호만전이의 결과와 비교하여 검증을 진행하였으며, 램버트 문제를 이용하여 얻어진 해가 최적해임을 보였다. 마지막으로 임의의 두 궤도상에 있는 우주비행체 랑데부 문제를 해결하였다. 본 논문에서는 제안하고 있는 접근방식은 닫힌 형태의 해가 아니고 수치해석을 기반으로 하고 있기 때문에 초기 값에 민감하다는 특성을 갖는다. 하지만 궤도형상과 비행시간을 제한하지 않는 일반적인 상황을 고려하고 있을 뿐 아니라, 램버트 문제와는 다른 초기 조건에서 접근하여 최소 에너지 랑데부 문제를 해결함으로써 다양한 우주미션 연구에 응용될 수 있을 것이라 기대된다.

후 기

본 연구는 미래창조과학부의 우주핵심기술개발사업(2017M1A3A3A02016)의 지원을 받아 수행되었습니다. 지원에 감사드립니다.

References

1) Bate, R. R., Donald D. M., and Jerry E. W., *Fundamentals of astrodynamics*. Courier Corporation, 1971.

2) Ames, W. F., Collatz, L. and Mikhlin, S. G. "Optimal four-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit." *Journal*, Vol. 2, No. 3, 1965, pp.566~567.

3) Prussing, J. E., and Jeng-Hua C., "Optimal multiple-impulse time-fixed rendezvous between circular orbits." *Journal of Guidance Control, and Dynamics*, Vol. 9, No. 1, 1986, pp.17~22.

4) Shen, H., and Panagiotis T., "Optimal two-impulse rendezvous using multiple

-revolution Lambert solutions." *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 1, 2003, pp.50~61.

5) Luo, Y.-Z., et al. "Optimization of multiple-impulse, multiple-revolution, rendezvous-phasing maneuvers." *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 30, No. 4, 2007, pp.946~952.

6) Bevilacqua, R., and Marcello R., "Fuel-optimal spacecraft rendezvous with hybrid on-off continuous and impulsive thrust." *Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 30, No. 4, 2007, pp.1175~1178.

7) Kim, Y.-H., and Spencer, D. B., "Optimal spacecraft rendezvous using genetic algorithms." *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 6, 2002, pp.859~865.

8) Bevilacqua, R., and Romano, M., "Rendezvous maneuvers of multiple spacecraft using differential drag under J2 perturbation." *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp.1595-1607.

9) Yoon H., "Adaptive tracking control for spacecraft rendezvous and docking." *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 36, No. 11, 2008, pp.1072~1078. (in Korean)

10) W. Choi, "A 5-DOF ground testbed for developing rendezvous/docking algorithm of a nano-satellite." *Journal of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 43, No. 12, 2015, pp.1124~1131. (in Korean)

11) Curtis, H. D., *Orbital mechanics for engineering students*, Butterworth-Heinemann, 2013.

12) Leeghim, H., and Jaroux, B. A., "Energy-optimal solution to the Lambert problem." *Journal of guidance, control, and dynamics* Vol. 33, No. 3, 2010, pp.1008~1010.

13) Leeghim, H. "Spacecraft intercept using minimum control energy and wait time.", *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 115, No. 1, 2013, pp.1-19.

14) Bryson, A. E. *Applied optimal control: optimization, estimation and control.*, CRC Press, 1975.