한국초등수학교육학회지 *21*(3) 531-546. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea* *21*(3) 531-546.
2017. 08. 31 *August 31. 2017.*

우리나라 초등학교 수학에서의 혼합계산 순서에 대한 연구

고준석[1] · 최종현[2] · 이승은[3] · 박교식[4]

본 연구에서는 계산 순서를 지도하는데 유용한 교수법적 내용 지식을 제공하기 위해 사칙계산 사이의 우선권은 어떠한 근거로 결정되었는지 살펴보고, 계산 순서를 바라보는 입장에 관해 논의하였다. 이러한 논의 결과를 바탕으로 다음 다섯 가지 제언을 결론으로 제시한다. 첫째, 교사들에게 덧셈과 뺄셈의 혼합계산 및 곱셈과 나눗셈의 혼합계산의 경우, 각각 뺄셈과 나눗셈부터 계산해도 동일한 계산 결과를 구할 수 있다는 것을 확인하는 기회를 제공할 필요가 있다. 둘째, 교사들에게 식의 왼쪽부터 차례대로 계산하는 규칙이 관습으로 자리 잡은 이유에 관해 논의할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 셋째, 교사들에게 덧셈과 곱셈의 혼합계산에서 곱셈이 덧셈보다 우선한다는 규칙 설정의 동인을 설명해 보는 기회를 제공할 필요가 있다. 넷째, 교사들에게 괄호가 있는 식에서 하나의 수량이라는 괄호의 의미를 강조할 필요가 있다. 다섯째, 교사용 지도서에서 계산 순서의 입장을 기술할 때는 계산 순서의 관습적, 개념적 입장을 모두 기술하여 교사들의 계산 순서에 대한 이해를 심화시킬 필요가 있다.

주제어: 혼합계산, 계산 순서, 계산 우선권, 식 지도

Ⅰ. 서 론

혼합계산에서는 세 수 이상의 계산을 취급하게 된다. 세 수 이상의 계산에서는 계산 순서가 중요하다. 초등학교 수학에서 취급하는 수의 계산 순서는 중학교 수학에서 취급하는 식의 계산 순서로 연결된다는 점에서도 중요하다. 초등학교 수학에서 일반적으로 계산 순서를 어떻게 지도하고 있는지 확인하기 위해, 대중적이고 공신력이 있다고 볼 수 있는 EBS(한국교육방송공사)의 프로그램 <혼합계산의 원리>에서의 강의 내용을 확인해 보았다. 다음은 이 프로그램에서의 강의 내용 일부를 녹취한 것이다. 여기서는 계산 순서의 중요성은 인정하고 있지만, 수학적 개념을 바탕으로 계산 순서를 설명하는 것이 아니라, 미리 약속하여 칠판에 기재한 ‘앞에서부터 계산하기’를 바탕으로 계산 순서를 제시하고 있다.

1) [교신저자] 경인교육대학교 대학원
2) 경인교육대학교 대학원
3) 경인교육대학교 대학원
4) 경인교육대학교

> 계산 순서, 이것이 혼합계산에서 제일 중요한 것이에요. 사실 계산 순서만 정확히 알아도, 여러분 모두 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기 모두 잘할 수 있으니까, 혼합계산은 아무 문제가 없습니다. …… (중략) …… 여기 뭐라고 써 있지요? 앞에서부터 계산하기라고 되어져 있죠. …… (중략) …… 중요한 것은요. 혼합계산에서는 그 계산의 순서가 매우 중요하다는 거예요. 순서만 잘 짚어줘도 혼합계산은 아무 문제가 없어요.

Booth(1982)에 따르면, 이와 같은 모습은 계산 순서를 충분한 이해 없이 관습적으로 지도하는 대표적인 모습으로 간주할 수 있다. 그에 따르면, ‘앞에서부터 계산하기’와 같은 순서는 수학적 근거가 박약함에도 오래된 통념으로서 받아들여지고 있다. 학생들에게 계산 순서를 이해시키는 문제는 우리나라뿐만 아니라 미국, 일본 등에서도 쉽지 않은 문제이다(고정화, 2012; 정기근, 2007; 梶孝行, 2003; Jennifer, 2015). 그렇기 때문에 미국, 캐나다 등의 영어권 국가에서는 혼합계산에서의 계산 순서를 수월하게 기억할 수 있도록 Parentheses, Exponents, Multiplication, Division, Addition, Subtraction의 머리글자로 만든 PEMDAS를 사용하기도 한다. 이와 같은 계산 순서의 지도는 관습적 지도의 전형적인 모습을 보여주고 있다. PEMDAS를 사용할 수 있다고 하더라도, 그 형태를 기억하는 것이 계산 순서의 개념적 이해나 그 계산 기능의 숙달과 동치는 아니다(Zorin, Carver, 2015). 사실상 이러한 방법으로는 계산 순서의 바탕에 있는 원리를 결코 이해시킬 수 없다. 수학적 이해에는 타당한 근거가 있어야하기 때문이다(Sierpinska, 1994). 학생들이 혼합계산 순서를 이해할 수 있도록 지도하기 위해서는 타당한 근거를 제시할 수 있는 계산 순서에 대한 교수법적 내용 지식[5]이 필요하다. 충분한 교수법적 내용 지식을 가진 교사들은 높은 인지적 수준이 요구되는 과제를 활용하여 학생들의 이해 수준을 높여줄 수 있기 때문이다(Baumert et al., 2010).

혼합계산에 대한 여러 선행연구가 있지만 계산 순서를 지도하는데 유용한 교수법적 내용 지식을 제공하는 국내 연구는 드물다. 혼합계산을 해결하면서 보이는 오류에 대한 연구(백선수, 김원경, 문승호, 2008)와 혼합계산에서의 오류를 바로잡기 위한 프로그램 개발 연구(이혜경, 김선유, 노은환, 정상태, 2010; 정기근, 김민정, 노은환, 2007), 혼합계산 지도 내용과 방법에 대한 연구(고정화, 2012), 그리고 혼합계산에서의 학생들의 문제 해결 방법에 대한 연구(김화수, 2013)가 있을 뿐이다. 한편, 고정화(2012)는 계산 순서와 계산 순서를 바라보는 입장에 대해 설명하고 있으나 주로 우리나라 교육과정의 변화에 따른 혼합계산 내용 분석, 국외 문헌 조사를 통한 계산 순서 지도의 대안 소개에 초점을 맞추고 있다. 또 김화수(2013)는 곱셈이 덧셈보다 우선하는 이유를 덧셈의 1차적 개념과 곱셈의 2차적 개념으로 제시하면서 계산 순서를 언급하고 있다. 그러나 이 연구에서는 주로 처음 생성된 스키마로부터의 변형된 스키마 형성을 통하여 학생들이 어떻게 문제를 해결하는지에 초점을 맞추고 있다.

이러한 선행연구와는 달리, 본 연구는 계산 순서를 결정하는 수학적 근거와 그러한 계

---

5) Shulman이 교수법적 내용 지식(PCK)을 제안한 이후 Ball, Hill & Bass(2005)와 Ball, Thames, & Phelps(2008) 등이 PCK를 교과 내용 지식과 교수법적 내용 지식의 두 범주로 하여 보다 세분화하고 개념화하였다(김진환, 박교식, 2013에서 재인용). 교과 내용 지식은 학생들에게 가르쳐야 하는 내용에 한정되지 않고 교사가 이해하고 있어야 하는 학문수학까지도 포함하는 개념이다(조완영, 2011). 본 연구에서 제공하고자 하는 PCK는 초등학교에서 취급하는 자연수 혼합계산 순서를 지도하는데 필요한 교사의 교과내용 지식을 의미한다.

산 순서를 바라보는 입장에 대한 체계적인 논의를 시도하고 있다는 점에서 차이가 있다. 계산 순서를 이해할 수 있도록 지도하기 위해서는 기억술과 순서 규약에만 의존할 것이 아니라 계산 순서가 결정된 수학적 근거와 계산 순서를 바라보는 입장에도 주목할 필요가 있기 때문이다.

Ⅱ. 연구 방법

본 연구에서는 사칙계산 사이의 우선권은 어떠한 근거로 결정되었는지, 그리고 그 계산 순서를 바라보는 입장은 무엇인지에 관해 논의하는 바, 이를 위해 2009 개정 교육과정에 따른《수학 4-1 교과서(교육부, 2015c)》와 《수학 4-1 지도서(교육부, 2015a)》를 비롯하여, 계산 순서를 취급하고 있는 관련 문헌을 분석하는 문헌 분석 연구 방법을 사용하고 있다. 먼저 2009 개정 교육과정에 따른 교과서에서 사칙계산 사이의 우선권은 <표 1>과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 덧셈과 뺄셈, 뺄셈과 덧셈과 같이 중복되는 경우는 생각할 필요가 없다. 또, 실제로는 단일 계산으로만 이루어진 경우도 생각할 필요가 없다.

<표 1> 2009개정 교육과정에 따른 교과서에서 사칙계산 사이의 우선권

계산	+	-	×	÷
+	순서무관 (교환, 결합)			
-	우선권 없음	왼쪽부터		
×	곱셈 우선	곱셈 우선	순서무관 (교환, 결합)	
÷	나눗셈 우선	나눗셈 우선	우선권 없음	왼쪽부터

본 연구에서 관심을 갖고자 하는 것은 먼저 <표 1>에서 ‘우선권 없음’으로 나타나고 있는 것이다. 다음으로 덧셈과 곱셈, 곱셈과 뺄셈, 나눗셈과 덧셈, 나눗셈과 뺄셈 사이의 우선권 문제이다. 그런데 덧셈과 뺄셈 및 곱셈과 나눗셈 사이의 역연산 관계를 고려하면, 덧셈과 곱셈 사이의 우선권에 관해 논의하는 것만으로 충분하다. 즉, 본 연구에서는 다음의 네 관점에서 관련 문헌을 분석하고, 분석 결과에 대하여 논의한다. 여기서 ①, ②, ③은 사칙계산 사이의 우선권이고, ④는 괄호가 있을 때의 그 우선권이다.

① 덧셈과 뺄셈 사이의 우선권 결정의 동인은 무엇인가?
② 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권 결정의 동인은 무엇인가?
③ 덧셈과 곱셈 사이의 우선권 결정의 동인은 무엇인가?
④ 괄호의 우선권 결정의 동인은 무엇인가?

Ⅲ.1절에서는 관점 ①, ②에 따른 논의가 이루어진다. Ⅲ.2절에서는 관점 ③에 따른 논의가 이루어진다. Ⅲ.3절에서는 관점 ④에 따른 논의가 이루어진다.

또한, 본 연구에서는 계산 순서를 바라보는 대조적인 입장이 있다는 것에 주목하고, 계

산 순서를 지도하는데 유용한 교수법적 내용 지식을 제공하기 위해 다음 세 관점에서 관련 문헌을 분석하고, 분석 결과에 대하여 논의한다.

⑤ 계산 순서를 바라보는 관습적 입장은 무엇인가?
⑥ 계산 순서를 바라보는 개념적 입장은 무엇인가?
⑦ 계산 순서를 바라보는 관습적 입장과 개념적 입장은 어떻게 다른가?

Ⅳ.1절에서는 관점 ⑤, ⑥에 따른 논의가 이루어진다. Ⅳ.2절에서는 관점 ⑦에 따른 논의가 이루어진다.

Ⅲ. 사칙계산 사이의 우선권

1. 덧셈과 뺄셈 및 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권

가. 덧셈과 뺄셈 사이의 우선권

덧셈과 뺄셈 사이의 우선권에 대한 선행연구는 찾아보기 어렵다. 이것은 덧셈과 뺄셈이 있는 경우 앞에서부터 즉, 왼쪽부터 차례대로 계산한다는 관습이 의심의 여지없이 받아들여져 왔다는 것을 보여준다고 할 수 있다. 본 연구에서는 덧셈과 뺄셈의 혼합계산에서 이러한 관습이 올바른지 확인하기 위해, 예를 들어 <표 2>와 같이 복계산식(고준석, 김지원, 박교식, 2014)에서 왼쪽부터 차례대로 계산한 결과, 덧셈을 먼저 한 결과, 뺄셈을 먼저 한 결과를 구해보았다.

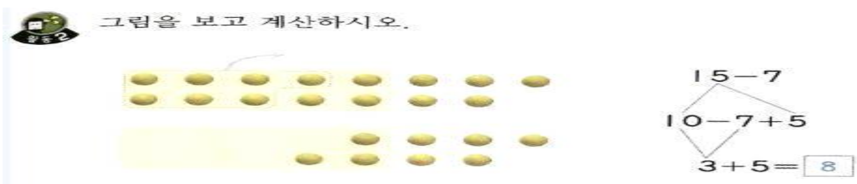
<표 2> 덧셈과 뺄셈의 혼합계산에서 우선권에 따른 계산 결과

식	왼쪽부터 계산	덧셈 우선	뺄셈 우선	일치 여부
4＋3＋2－1	8	8	8	일치
4＋3－2＋1	6	4	6	덧셈 우선 불일치
4＋3－2－1	4	4	4	일치
4－3＋2＋1	4	-2	4	덧셈 우선 불일치
4－3＋2－1	2	-2	2	덧셈 우선 불일치
4－3－2＋1	0	-2	0	덧셈 우선 불일치

왼쪽부터 차례대로 계산한 결과와 뺄셈을 먼저 한 결과는 모두 일치한다. 반면 덧셈을 먼저 한 경우에는 6개 중 4개의 결과가 일치하지 않는다. 이들의 공통점은 뺄셈에 이어 덧셈이 나오는 것이다. 예를 들어 4-3+2+1에서 덧셈을 먼저 하면 4-(3+2+1)이 되어 전혀 다른 계산이 된다. 이때 실제로는 +2와 같은 덧셈이 -2와 같은 뺄셈으로 작용하기 때문이다. 그러나 뺄셈을 먼저 하면 뺄셈이 그대로 작용한다. 예를 들어 4-3+2-1에서 뺄셈을 먼저 해도 전체적으로는 -3과 -1이 작용한다는 것은 변하지 않는다. 따라서 뺄셈을 하고 난 후의 덧셈에서는 교환법칙과 결합법칙이 성립하므로 순서와 상관없이 같은 결과를 얻을 수 있다. 김창수와 강정기(2016)에 따르면, 덧셈은 이항계산인 반면 뺄셈은 덧셈에 대한 역

원에 대응하는 단항계산으로 볼 수 있다. 따라서 뺄셈을 먼저 하고 덧셈을 나중에 하는 것은 단항계산인 뺄셈을 먼저 하고 이항계산인 덧셈을 나중에 하는 것에 해당한다.

위의 논의는 덧셈과 뺄셈의 혼합계산에서는 왼쪽부터 차례대로 계산하지 않고 뺄셈부터 해도 같은 결과를 얻을 수 있다는 것을 말해준다. 김창수와 강정기(2016)에 따르면, 왼쪽부터 차례대로 계산하는 것보다 단항계산인 뺄셈부터 하는 것이 수학적으로 더 타당할 수도 있다. 그럼에도 불구하고 초등학교 수학에서는 왼쪽부터 차례대로 계산한다는 관습을 따르고 있다. 이러한 관습은 1학년 2학기에서 이미 암묵적으로도 취급하고 있음을 볼 수 있다. 예를 들어 [그림 1]과 같이 2009 개정 교육과정에 따른 ≪수학 1-2 교과서(교육부, 2014)≫ 5단원 <덧셈과 뺄셈>(p.167)에서 사전 약속 없이 자연스럽게 왼쪽부터 계산하게 하고 있다.



[그림 1] ≪수학 1-2 교과서≫에 등장하는 복계산식의 계산(교육부, 2014)

나. 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권

곱셈과 나눗셈 사이의 우선권은 1900년대 초반에도 확실하게 정립되지 않은 것으로 보인다(Cajori, 1928; 고정화, 2012). Cajori(1928)에서 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권에 대한 당시의 혼란을 볼 수 있다. 그는 덧셈과 곱셈을 포함한 혼합계산에서의 계산 순서를 다음과 같이 기술했다(p.274).

> 242. ÷, ×를 포함한 항(term)들에서의 계산 순서.
>
> 산술 또는 대수항이 ÷, ×를 포함하고 있다면, 어떠한 기호가 먼저 사용될지 현재로서는 어떤 합의가 없다. “그러한 표현은 피하는 것이 가장 좋다.” 예를 들어, 24÷4×2에서 사용된 기호를 왼쪽에서 오른쪽 순으로 있는 것과 같이 사용한다면, 답은 12; 처음에 ×부터 사용한다면, 답은 3이다.
>
> 어떠한 연구자들은 곱셈과 나눗셈을 있는 순서대로 수행한다는 규칙을 따른다. 다른 교과서 집필자들은 순서와 상관없이 우선 곱셈부터 하고, 이후에 왼쪽에서 오른쪽 순으로 존재하는 대로 나눗셈을 한다고 지시한다. Fisher와 Schwatt는 a÷b×b항을 (a÷b)×b로 해석한다. 영국 위원회에서는 이러한 경우 애매함을 피하기 위해 괄호의 사용을 추천했다.

이러한 진술에 따르면, 곱셈과 나눗셈이 있는 혼합계산 방법은 왼쪽부터 차례대로 계산하기, 곱셈을 먼저 하기, 나눗셈을 먼저 하기, 괄호 사용하기의 네 가지로 구분할 수 있다. 이중에서 괄호를 사용하기는 식 해석의 혼란을 방지하는 장점은 있지만 곱셈과 나눗셈이 아닌 제3의 기호를 이용하여 문제를 해결하기 때문에 식을 간결·명확하게 표현하기 위한 계산 순서의 필요성에 비추어볼 때 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권 문제에서 고려 대상은 아니라고 할 수 있다. Cajori(1928)에 의하면, Slaught(1907)은 곱셈부터 먼저 하고 나눗셈을

계산한다. 그러나 실제로는 Slaught(1907)에서 곱셈 우선 규칙이 적용되는 경우는 $15a^3b^4 \div 5ab$와 같이 문자식으로 주어진 단항식의 나눗셈이라는 특정한 상황이다.

곱셈과 나눗셈이 있는 혼합계산에서 서로 다른 규칙을 적용함에 따라서 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권에 관련한 논쟁이 촉발된 예로 고정화(2012)와 김창수와 강정기(2016)에서 볼 수 있는 48÷2(9+3)을 들 수 있다. Slaught(1907)에 따라 곱셈부터 하면 결과는 2가 된다. 그러나 48÷2(9+3)에서 2(9+3)가 2×(9+3)임을 생각하면 48÷2(9+3)을 48÷2×(9+3)으로 바꿀 수 있다. 한편, 우리나라 교과서의 계산 순서 즉, 왼쪽부터 차례대로 계산하기를 적용하면 288이 된다. 이것은 근본적으로 곱셈을 나타내는 기호를 명시적으로 드러내어 표기하느냐 생략하여 암묵적으로 나타내느냐 하는 것으로부터 촉발되는 문제이다.[6] 이와 같은 명시적 곱셈과 암묵적 곱셈의 우선권 문제가 아직도 혼동된 상태로 남아있다는 것은 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권이 완전하게 안정화된 것은 아니라는 사실을 보여준다고 할 수 있다(Peterson, 2000).

산술적 표현에서는 곱셈을 암묵적으로 나타내지 않는다. 예를 들어 대수적 표현에서 rt는 $r \times t$를 의미하지만 25는 2×5가 아니라 20+5를 의미한다(Slaught, 1907). 따라서 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권에서 곱셈의 우선권은 산술적 상황과 대수적 상황에 적용되는 표기법에 대한 관습이 강하게 작용된 결과라고 할 수 있다. 곱셈을 먼저 하는 규칙은 암묵적 곱셈과 같은 대수적 표현으로부터 기인한 규칙이기 때문에 산술에서 취급하기는 어렵다.

다음으로 나눗셈을 우선하는 경우를 살펴보자. Jennifer(2015)에 의하면, 케냐에서는 학생들에게 나눗셈을 먼저 하라고 가르친다고 한다. 예를 들어 100×20÷5를 계산할 때 미국에서는 왼쪽부터 차례대로 100×20=2000을 먼저 하고, 그 다음에 2000÷5=400으로 계산한다. 하지만 케냐에서는 20÷5=4를 먼저 하고, 그리고 100×4=400을 한다는 것이다. 후자와 같은 계산이 일반적으로 올바른지 확인하기 위해, 예를 들어 <표 3>과 같이 복계산식에서 왼쪽부터 차례대로 계산한 결과, 곱셈을 먼저 한 결과, 나눗셈을 먼저 한 결과를 구해보았다.

<표 3> 곱셈과 나눗셈의 혼합계산에서 우선권에 따른 계산 결과

식	왼쪽부터 계산	곱셈 우선	나눗셈 우선	일치 여부
$16 \times 8 \times 4 \div 2$	256	256	256	일치
$16 \times 8 \div 4 \times 2$	64	16	64	곱셈 우선 불일치
$16 \times 8 \div 4 \div 2$	16	16	16	일치
$16 \div 8 \times 4 \times 2$	16	0.25	16	곱셈 우선 불일치
$16 \div 8 \times 4 \div 2$	4	0.25	4	곱셈 우선 불일치
$16 \div 8 \div 4 \times 2$	1	16	1	곱셈 우선 불일치

왼쪽부터 차례대로 계산한 결과와 나눗셈을 먼저 한 결과는 모두 일치한다. 반면 곱셈을 먼저 한 경우에는 6개 중 4개의 결과가 일치하지 않는다. 이들의 공통점은 나눗셈에 이어 곱셈이 나오는 것이다. 예를 들어 16÷8×4×2에서 곱셈을 먼저 하면 16÷(8×4×24)

6) 김창수와 강정기(2016)에 따르면, 곱셈 기호가 생략되었다는 것은 함수 기호 ×가 생략되었다는 것이므로, $a \div bc$의 bc를 단순히 $b \times c$로 보는 것은 잘못이며, 곱셈 계산의 이미지$(b \times c)$ 로서 취급하는 것이 적절하다. 따라서 곱셈 기호 생략에 따른 혼합계산에서는 곱셈을 먼저 해야 한다.

가 되어 전혀 다른 계산이 된다. 이때 실제로는 ×4와 같은 곱셈이 ÷4와 같은 나눗셈으로 작용하기 때문이다. 그러나 나눗셈을 먼저 하면 나눗셈이 그대로 작용한다. 예를 들어 16÷8×4÷2에서 나눗셈을 먼저 해도 전체적으로는 ÷8과 ÷2가 작용한다는 것은 변하지 않는다. 따라서 나눗셈을 하고 난 후의 곱셈에서는 교환법칙과 결합법칙이 성립하므로 순서와 상관없이 같은 결과를 얻을 수 있다. 김창수와 강정기(2016)에 따르면, 곱셈은 이항계산인 반면 나눗셈은 곱셈에 대한 역원에 대응하는 단항계산으로 볼 수 있다. 따라서 나눗셈을 먼저 하고 곱셈을 나중에 하는 것은 단항계산인 나눗셈을 먼저 하고 이항계산인 곱셈을 나중에 하는 것에 해당한다.

위의 논의는 곱셈과 나눗셈의 혼합계산에서는 왼쪽부터 차례대로 계산하지 않고 나눗셈부터 해도 같은 결과를 얻을 수 있다는 것을 말해준다. 김창수와 강정기(2016)에 따르면, 왼쪽부터 차례대로 계산하는 것보다 단항계산인 나눗셈부터 하는 것이 수학적으로 더 타당할 수도 있다. 그럼에도 불구하고 초등학교 수학에서는 왼쪽부터 차례대로 계산한다는 관습을 따르고 있다.

다. 덧셈과 뺄셈 및 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권 결정 동인

덧셈과 뺄셈의 혼합계산에서 뺄셈을 먼저 하는 것이 가능함에도 불구하고 왼쪽부터 차례대로 계산하게 하는 것, 그리고 곱셈과 나눗셈의 혼합계산에서 나눗셈을 먼저 하는 것이 가능한데도 불구하고 왼쪽부터 차례대로 계산하게 하는 것은 계산 순서와 언어적 관습과의 일치 때문이라 할 수 있다[7]. 즉, 혼합계산에서 식을 쓰는 과정과 읽는 과정이 서로 일치한다. 문장제를 식으로 나타낼 때에도 언어적 관습에 맞게 식을 쓰는 과정도 왼쪽에서 오른쪽으로 작성하게 된다. 그리고 그렇게 작성된 식을 다시 해석하는 과정은 무시간적인 대상적 측면이었던 식을 시간 속에 펼쳐 놓는 시간화 작업으로 간주할 수 있다(임재훈, 2013). 기호의 이해와 해석은 시간 속에서 일어나고, 인식 일반은 선험적인 시간 직관을 바탕으로 하기 때문(Kant, 1781: 임재훈, 2013에서 재인용)에, 식을 해석할 때의 시간화 작업과 문장제로부터 식을 작성할 때의 시간적 순서가 일치하기 위해서는 식을 작성했던 과정과 작성된 식의 해석 과정, 그리고 해석된 식의 계산 순서가 서로 시간적 순서에 맞도록 대응하는 것이 좋다. 이에 비해 뺄셈 또는 나눗셈을 먼저 하는 경우에는 문장제의 시간적 구조와 계산 순서의 구조가 서로 달라질 수 있다.

수학 기호는 과정으로 해석되기도 하고, 결과로 해석되기도 하는데, 개념 형성의 측면에서 보면, 조작적인 과정적 측면 다음에 대상적 측면이 온다고 보는 것이 타당하다(임재훈, 2013). 이때 과정은 시간적이고, 결과는 무시간적이다. 왼쪽부터 차례대로 계산하는 규칙은 잇달아 일어나는 시간적인 규칙이고, 덧셈과 뺄셈의 혼합계산에서 뺄셈을 먼저 하는 것과 곱셈과 나눗셈의 혼합계산에서 나눗셈을 먼저 하는 것은 문제 상황과 관계없이 수월하게 계산하기 위해 각각 뺄셈 또는 나눗셈을 선택한 무시간적인 규칙으로 볼 수 있다.

---

7) 덧셈과 뺄셈 사이의 우선권 결정 동인으로 '음수 발생 요인 제거'를 추가적으로 제시할 수 있다. 뺄셈부터 계산하게 되면 경우에 따라 음수가 발생할 수도 있기 때문이다. 예를 들어 4-3+1-2를 뺄셈부터 계산하면 1+(-1)이 되어 계산 과정에서 음수가 발생한다. 이와 같이 음수를 취급하지 않는 초등학교 수학에서는 뺄셈 우선 계산을 모든 경우에 적용하는 데는 제한이 있기 때문에 음수가 발생하지 않는 '왼쪽부터 차례대로 계산'하는 것을 선정할 수 있다. 그러나 이 우선권 동인은 중학교 수학부터는 적용되지 않는다는 단점이 있다. 이에 비해 계산 순서와 언어적 관습과의 일치성은 중학교 수학 이후에도 적용 가능하다.

2. 덧셈과 곱셈 사이의 우선권

덧셈과 곱셈 사이의 우선권과 관련해서는 곱셈이 덧셈에 우선한다는 것이 대체로 받아들여져 왔다. Cajori(1928)에 따르면, 곱셈이 덧셈과 뺄셈에 우선한다는 관습은 16세기 문헌에서 찾을 수 있다. Peterson(2000)은 계산 순서의 규칙을 자연적 규칙과 인공적 규칙으로 구분했는데, 그에 의하면, 곱셈이 덧셈에 우선한다는 규칙은 자연적 규칙에 해당하며 수학적 표기법이 처음 등장했을 때부터 존재했다.

고정화(2012)는 Wu(2007)와 Peterson(2000)의 연구를 분석하여 두 가지 방법으로 곱셈이 덧셈에 우선하는 이유를 설명했다. 첫째는 Wu(2007)가 제시한 것으로, 간결함을 추구하는 수학적 표현이라는 측면에서, 곱셈이 덧셈에 우선한다는 것이다. 예를 들어 ax^2+bx+c를 덧셈을 우선으로 표기하게 되면 $(a(x^2))+(bx)+c$와 같이 표기해야 하기 때문이다. 둘째는 Peterson(2000)이 제시한 것으로, 분배법칙의 '분배'라는 의미가 명확히 드러날 수 있도록 하기 위하여 곱셈이 덧셈에 우선하게 되었다는 것이다.

2009 개정 교육과정에 따른 ≪수학 4-1 지도서(교육부, 2015a)≫에서는 곱셈이 덧셈에 우선한다는 것을 환의 성질을 근거로 하여 설명하고 있다. 환에서 제1계산의 조건은 항등원과 역원이 존재하는 것이다. 그런데 곱셈에서는 0에 대한 역원을 정의할 수 없으므로 덧셈이 제1계산이 되어야 하고, 제2계산이 제1계산에 분배되도록 약속해야 환이 성립되기 때문에 곱셈이 덧셈에 우선한다고 설명하고 있다. 이 방법도 본질적으로는 Peterson(2000)이 제시한 방법과 같다. Slaught(1907)도 이와 유사한 방법을 제시한 바, 그에 의하면 예를 들어 3×6을 하나의 수 18을 인수분해한 형태로 해석하면, 덧셈과 곱셈의 혼합계산에서 곱셈 부분은 하나의 수를 인수분해한 형태로 나타낸 것이기 때문에 최종적으로 덧셈과 곱셈의 혼합계산은 덧셈으로 해석 가능하다.

Jennifer(2015)는 동치성을 근거로 곱셈이 덧셈보다 우선하는 이유를 4+3×5를 예로 들어 설명하고 있다. Jennifer(2015)는 4+3×5를 4+5+5+5로 변형해야 동치성이 보존된다고 설명하고 있다. 그러나 4+3×5를 4+5+5+5로 변형하여 정당화하는 것은 곱셈이 덧셈에 우선한다는 규칙의 이유를 설명하는 것으로 보기 어렵다. 그것은 실제로는 이미 그 규칙을 수용하여 4+(3×5)로 해석하여 변형한 것이다. 만약 덧셈이 곱셈보다 우선한다는 규칙을 수용한다면 (4+3)×5로 해석해야 한다. 따라서 4+5+5+5로 볼 것이 아니라 (4+3)을 다섯 번 더한 (4+3)+(4+3)+(4+3)+(4+3)+(4+3)로 해석해야 한다. 이 경우에도 여전히 해당 규칙을 반영한 표기법 내에서 동치성이 보존된다.

그러나 Jennifer(2015)의 설명을 수정하면 곱셈이 덧셈에 우선해야 하는 유의미한 설명을 얻을 수 있다. 첫째는 동치성을 다른 상황에 적용하는 것이다. Math forum(2015)은 곱셈이 덧셈보다 우선한다는 규칙을 수용한 표기 체계를 사용하게 된 가장 큰 이유로 수학적 표현 내에서의 유연함을 들고 있다. 곱셈이 덧셈보다 우선하는 규칙을 채택하면 덧셈과 곱셈에서 교환법칙이 명확하게 반영되어, 예를 들어 2×3+5=3×2+5=5+2×3=5+3×2=11에서도 모두 동치성을 보존할 수 있다. 덧셈부터 먼저 하게 된다면, 16=21=21=16이 되어 동치성을 보존할 수 없다. 그래서 Math forum(2015)은 곱셈이 덧셈보다 우선하는 규칙을 사용하는 것이 좋다고 기술하고 있다.

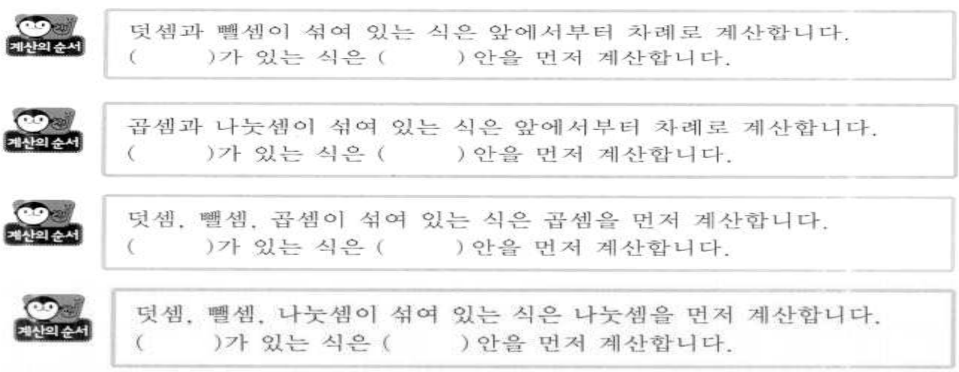
둘째는 Jennifer(2015)가 곱셈을 덧셈으로 변형하여 설명하려고 했던 아이디어를 활용하는 것이다. 덧셈과 곱셈의 혼합계산을 곱셈 또는 덧셈으로만 이루어진 계산으로 변형하는 것이다. 예를 들어 2×3=2+2+2와 같이 곱셈을 덧셈으로 항상 변형할 수 있지만, 2+3과 같은 형태는 곱셈으로 변형할 수 없다. 따라서 곱셈으로만 이루어진 식을 덧셈으로만 이루

어진 식으로 변형하여 계산 결과를 구하는 절차를 생각할 수 있다. Jennifer(2015)와는 달리 이 방법은, 곱셈 우선과 덧셈 우선의 경우를 모두 가정한 상태에서 설명한 것이므로, 계산 순서를 정당화하는데 더 타당하다고 볼 수 있다. 그러나 이 방법에는 곱셈을 동수누가 맥락으로 설명하기 어려운 분수와 소수의 혼합계산까지 일반화하는데 제한이 있다. 또, 곱셈을 동수누가 형태로만 인식하게 할 우려가 있다. 곱셈을 덧셈으로 환원시키기는 방식은 학생들이 곱셈의 본질적인 개념인 배 개념을 이해하는데 방해 동인으로 작용할 수 있기 때문이다(McLellan, Dewey, 1895).

片桐重男(2004, 2012)은 동수누가의 제한점을 극복하고 분수와 소수의 혼합계산까지 적용 가능한 설명을 제시하였다. 그는 계산 순서는 괄호나 곱하기·나누기의 의미에서 출발하여 연역적으로 생각하여 알아낼 내용이지 약속으로서 지도할 내용이 아니라는 것을 강조하고 있다. 그는 곱셈이 덧셈에 우선해야 하는 이유로 곱셈과 나눗셈으로 나타낸 식은 하나의 수량을 나타내기 때문에 먼저 계산해야 한다고 보았다. 예를 들어 2×3에서 3은 하나의 이산량이 아닌 두 이산량의 관계를 의미한다고 할 수 있다(강흥규, 2009). 즉, 2×3은 2에 3이라는 배 관계가 작용하여 6이라는 기수가 되는 것으로서 결국 하나의 수량을 의미하게 된다.

3. 괄호의 우선권

2009 개정 교육과정에 따라 출판된 ≪수학 4-1 교과서(교육부, 2015c)≫ 혼합계산 단원에서 괄호가 있는 식을 [그림 2]와 같이 기술하고 있다. 공통적으로 “(　)가 있는 식은 (　)안을 먼저 계산합니다.” 라고 하고 있다. 즉, 여기서는 괄호의 기능을 계산의 우선 수행으로 제시하고 있다고 할 수 있다.


계산의 순서
덧셈과 뺄셈이 섞여 있는 식은 앞에서부터 차례로 계산합니다.
(　　)가 있는 식은 (　　)안을 먼저 계산합니다.

계산의 순서
곱셈과 나눗셈이 섞여 있는 식은 앞에서부터 차례로 계산합니다.
(　　)가 있는 식은 (　　)안을 먼저 계산합니다.

계산의 순서
덧셈, 뺄셈, 곱셈이 섞여 있는 식은 곱셈을 먼저 계산합니다.
(　　)가 있는 식은 (　　)안을 먼저 계산합니다.

계산의 순서
덧셈, 뺄셈, 나눗셈이 섞여 있는 식은 나눗셈을 먼저 계산합니다.
(　　)가 있는 식은 (　　)안을 먼저 계산합니다.

[그림 2] ≪수학 4-1 교과서≫에서 괄호가 있는 식의 혼합계산 순서(교육부, 2015c)

괄호는 결합적인, 특히 분배적인 성질을 표현하는데 중요한 역할을 한다(Jennifer, 2015). 그런데 역사적으로 괄호는 계산 순서를 위한 기호가 아니라 집합(aggregation)의 기호로서 고안되었다(Cajori, 1928). 즉, 괄호는 하나의 집합을 만들기 위해 고안되었고, 괄호 안의 식은 하나의 집합으로 해석된다. 하나의 집합이라는 의미가 계산의 우선 수행이라는 의미를 지니게 된 동인은 무엇일까? Math forum(2015)은 이것을 $6f(4)$를 예로 들어서 설명했다. 이 값을 구하기 위해서는 우선 하나의 집합을 의미하는 $f(4)$의 값을 구할 필요가 있

다. 그 다음에 $6f(4)$를 구하는 것이다. 이와 같이 괄호 안의 식을 $f(4)$와 같은 함숫값으로 보았기 때문에 괄호 안의 식을 먼저 계산하게 된 것이다. 예를 들어 일본 교과서≪新しい算數 4下(杉山吉茂 外, 2014)≫(p.8)에서는 “( )가 있는 식에서는, ( ) 속을 한 덩어리로 보아 먼저 계산합니다.” 와 같이 괄호안의 식을 하나의 수량으로 간주하게 하는 것을 볼 수 있다.

Ⅳ. 계산 순서를 바라보는 입장

1. 계산 순서를 바라보는 입장

계산 순서는 논리적으로 이끌어 내어진 산물이기보다는 규약의 문제이며, 이것을 수학적 개념, 수학적 진리의 문제와 혼동해서는 안 된다는 입장(이하, 관습적 입장)(고정화, 2012; 교육부, 2015a; Peterson, 2000)이 있다. 이러한 입장과는 대조적으로 계산 순서는 오래된 관습이라는 사회적 통념은 신화일 뿐이고 개념적으로 가르칠 수 있다는 입장(이하, 개념적 입장)(Jennifer, 2015; Math Forum, 2015; 片桐重男, 2004)도 존재한다.

먼저 관습적 입장의 대표자는 Cajori(1928)라 할 수 있다. 그는 계산 순서를 관습이라고 하였다. Peterson(2000)도 지금의 계산 순서가 언제 발명되었는지는 모르지만 그것은 자연스럽게 발생한 관습이라고 보았다. 그러나 관습이었기 때문에 같은 식에서 서로 다른 계산 순서를 적용한 사례를 역사적으로 찾아볼 수 있다. 18세기 당시에도 일반적으로는 곱셈을 덧셈보다 먼저 계산했지만, 이항계수에서 인수들을 적을 때, 그리고 계승을 적을 때는 덧셈과 뺄셈을 곱셈보다 먼저 계산하는 표기법이 지배적이었으며, 어떤 연구자들은 비일관성과 애매함을 제거하기 위해 괄호와 괄선, 콜론 등을 사용하기도 했지만, 이러한 표기법의 다양성은 17세기부터 19세기에 이르기까지 계속되었다(Cajori, 1928). 이렇게 보면, 계산 순서는 공리와 같은 것이 아니라 문화적 규약이라는 것이 명백하다(고정화, 2012).

관습적 입장은 계산 결과를 하나의 수로 결정하기 위해서 필요하다. 예를 들어, 암묵적 곱셈 $2x$와 명시적 곱셈 $2\times x$의 우선권 여부에 따라 $a/2b$를 $(a/2)\times b$, $a/(2b)$의 어느 쪽으로 볼 것인지와 같은 문제가 발생한다(Peterson, 2000). 이때 암묵적 곱셈을 우선할지 명시적 곱셈을 우선할지를 정하는 계산 순서는 수학적 개념이기보다는 표기에 따른 순서 선택의 문제이기 때문에 계산 결과의 안정성을 확보하기 위해서는 규칙을 설정하고 계산할 때는 그 규칙에 의존할 수밖에 없다. ≪수학 4-1 지도서(교육부, 2015a)≫ 320쪽에서는 다음과 같이 이와 같은 관습적 입장을 명확하게 드러내고 있다.

> 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있고, 괄호가 있는 식의 계산 순서는 일종의 규칙이다. 이 규칙을 지키지 아니하면 혼란이 생긴다. 모두가 합의한 수학적 생각을 존중하며 이해하려는 마음가짐이 필요한 것처럼 일상생활에서도 서로 간의 규칙을 지키는 일은 중요하다. 현대는 혼자서는 살 수 없는 개방과 협력의 시대이다. 이 시대에 규칙을 지키는 것은 타인을 배려하는 삶이고 더불어 살아가려는 올바른 자세이다.

다음으로 개념적 입장으로는 片桐重男(2004)이 있다. 片桐重男(2004)은 수학에서 약속에 해당하는 정의와 증명할 수 있는 것에 해당하는 정리라는 것이 명확하게 구분되어 있는

것과 같이, 초등학교 수학에서도 약속하여야 할 것과 학생들에게 알아보게 하고 찾아보게 해야 하는 것을 명확하게 구분하여 지도할 필요가 있다고 하였다. 그는 계산 순서는 약속으로 지도할 내용이 아니라, 괄호나 곱셈, 나눗셈의 의미에서 연역적으로 생각하여 알아낼 내용이라는 것을 분명히 하고 있다. 계산 순서를 정해진 관습으로 보고 그대로 적용하는 것이 아니라, 기존의 약속된 수학적 개념으로부터 이끌어 낼 수 있다는 것이다.

또한, Jennifer(2015)도 개념적 입장을 취하고 있는 바, 그녀에 의하면 계산 순서의 논쟁은 1900년대 초에 교과서 사용이 시작되면서 이루어진 것이지 오래된 관습이 아니다. 또 그녀는 계산 순서를 관습으로 보는 것은, 우리가 지금과는 다른 계산 순서를 결정할 수도 있었다는 의미를 내포하기 때문에, 그렇게 관습으로 보면 안 된다고 주장했다. 예를 들어 양의 실수를 수직선의 오른쪽에 놓지만, 그것을 아무런 논리적인 딜레마 없이도 수직선의 왼쪽에 놓는 것이 가능한 것처럼 관습은 쉽게 다른 선택도 가능하게 한다는 것이다.

2. 계산 순서를 바라보는 관습적 입장과 개념적 입장의 비교

계산 순서를 수학적 개념이 아닌 관습이라고 보는 입장에서도 계산의 우선권이 단순히 모호함을 없애기 위해서 임의의 방식으로 정해지기 보다는 대수적 성질과 대수 전개의 필요성을 도모하는 의도가 반영된 것임은 인정하고 있다(고정화, 2012). 계산 순서는 관습이 아니라고 주장한 Jennifer(2015)도 미국과 케냐에서의 곱셈과 나눗셈을 하는 두 가지 서로 다른 계산 순서를 확인하고 있다. 이것은 계산 순서가 각 문화권의 관습에 따라 달라질 수 있다는 것으로 해석될 수 있다. 이와 같이 관습적 입장에서 계산 순서가 결정되는 과정 속에 수학적 개념과 관련된 합리적인 이유를 부정하지는 않는다. 또, 개념적 입장에서도 관습에 따른 서로 다른 표기법의 존재를 인정하고 있다. 관습적 입장과 개념적 입장을 <표 4>와 같이 비교할 수 있다.

<표 4> 계산 순서에 대한 관습적 입장과 개념적 입장의 비교

구분	관습적 입장	개념적 입장
내용	· 문화권마다 서로 다른 계산의 우선권 존재 · 곱셈, 나눗셈의 경우 동일한 계산에 대해 명시적 표기와 암묵적 표기에 따른 서로 다른 우선권 존재 · 괄호 같은 집합 기호, 지수와 같은 계산 기호 표기법 제작	· 계산의 성질(결합, 교환, 분배법칙)을 근거로 계산 순서 설명 · 동치성 보존, 식의 구조 파악의 편리성을 근거로 계산 순서 설명 · 괄호와 계산(곱셈, 덧셈)의 의미를 근거로 계산 순서 설명
가치	· 하나의 관습 내에서는 계산 과정에 대한 혼란이 없음(하나의 계산 결과만 설정하는 것이 용이) · 편리한 표기법 선택 및 축약 표현 가능 · 문화권마다 다른 이유 이해 근거 제공	· 수학적 추론, 의미 형성의 근거 제공 · 여러 가지 방법으로 계산 가능하고, 그 중에서 효율적인 접근 방법과 절차적 유창성 탐구 기회 제공
유의점	· 규칙을 기억술(예, PEMDAS 등)에 의존하여 단순 암기하기 쉬움 · 정해진 관습으로만 계산할 우려가 있음	· 표기법에 대한 문제를 수학적 개념의 문제로 착각할 수 있음 · 편견효과와 과도한 일반화가 발생할 수 있음[8]

관습적 입장은 주로 기호 사이의 계산 우선권 선정 또는 기호 표기법 제작을 통해 안정성과 편리함을 추구하는 장면에서 자주 보이고, 개념적 입장은 계산의 성질을 기반으로 한 절차적 유창성 또는 계산 순서에 대한 근거를 제공하는 장면에서 주로 등장한다. 관습적 입장은 동일 관습 내 안정성을, 개념적 입장은 절차적 유창성을 추구하기 때문에 서로 대립적인 관계처럼 보이지만 혼합계산에 대한 이 두 가지의 입장은 상호 보완적인 관계라고 볼 수 있다. 관습이 절대적인 것이 아니라 문화권마다 다르다는 것을 인정하게 되면 왜 문화권마다 다르게 취급하는지를 개념적 입장에서 탐구하는 근거로 연결될 수 있기 때문이다. 또한 혼합계산의 개념적 입장이 근거가 되어 새로운 관습을 형성하기도 한다.

혼합계산에 두 개의 입장이 공존하고 있음에도 불구하고 선행연구에서 계산 순서에 관하여 기술할 때 "계산 순서는 관습이다.", "계산 순서는 수학적 개념이다."와 같이 한 쪽 측면만 부각시켜서 관습 여부를 기술하는 경우가 많았다. 이와 같은 서술 방식은 계산 순서를 부분적으로만 구조화한 것이다. 개념의 부분적 구조화는 필연적으로 그 개념의 다른 측면을 은폐하게 되고, 그렇게 형성된 개념은 우리의 사고와 행동 방식에 영향을 끼친다(Lakoff, 1995). 따라서 계산 순서에 대한 편향적 입장 제시는 계산 순서에 대한 잘못된 개념작용을 야기할 수 있으므로 혼합계산에 대한 교수법적 내용 지식을 제시할 때에는 두 가지 입장을 동시에 고려하여 어느 부분이 관습적 입장이고, 어느 부분이 개념적 입장인지 면밀하게 기술할 필요가 있다.

V. 결 론

본 연구에서는 계산 순서를 지도하는데 유용한 교수법적 내용 지식을 제공하기 위해 덧셈과 뺄셈 사이의 우선권, 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권, 덧셈과 곱셈 사이의 우선권, 그리고 괄호의 우선권의 결정 동인이 무엇인지에 대하여 논의하였다. 또, 계산 순서를 바라보는 관습적 입장과 개념적 입장이 무엇인지에 대하여 논의하고, 그 두 관점에 비교하여 논의하였다. 이러한 논의에 따르면, 덧셈과 뺄셈 사이의 우선권 및 곱셈과 나눗셈 사이의 우선권 설정의 동인은 계산 순서와 언어적 관습과의 일치라고 할 수 있다. 덧셈과 곱셈 사이의 우선권 설정 동인은 간결함을 추구하는 수학적 표현, 분배의 의미를 명확히 하기 위한 것, 수학적 표현 내에서의 유연함, 곱셈과 나눗셈으로 나타낸 식은 하나의 수량을 나타낸다는 것 등이다. 괄호의 우선권 설정 동인은 괄호안의 식을 하나의 수량으로 간주하는 것이다. 계산 순서를 바라보는 입장에는 두 가지 입장이 있는 바, 그것을 논리적으로 이끌어 내어진 산물이기보다는 규약의 문제로 보는 관습적 입장과 그것을 개념적으로 가르칠 수 있다는 개념적 입장이 있다.

본 연구에서는 이러한 논의 결과를 바탕으로 얻은 다음과 같은 제언을 결론으로 제시하

8) Linchevski & Livneh(1999, 2002)는 수가 계산 순서에 미치는 동인을 편견효과(biasing effect)로 설명하고 있다. 이것은 언어가 언어적 문맥을 만들어 내는 것과 같이 수도 수적 문맥을 만들어 내어, 특수한 수의 조합이 학생들에게 대표적인 구조로 작용하는 것을 의미한다. 예를 들어 $47-7\times5$에 있어서, $47-7$이라는 수의 조합이 편견효과를 일으켜서 먼저 계산하게 되는 것이다. 과도한 일반화는, 예를 들어 $31+4+6$을 계산할 때 수학적으로 더 우아하고 효율적인 풀이 방법으로 $4+6$부터 계산하기를 장려한 것을 과도하게 일반화하여 $23-2+8$을 계산할 때도 $2+8$부터 계산하는 것이다. 따라서 계산 순서의 개념적 입장을 강조할 때는 수학적으로 우아한 풀이 방법을 장려하는 활동이 '어느 곳부터 계산해도 좋다'라는 과도한 일반화를 촉진하지 않도록 유의할 필요가 있다.

고자 한다. 첫째, 교사들에게 덧셈과 뺄셈의 혼합계산 및 곱셈과 나눗셈의 혼합계산의 경우, 각각 뺄셈과 나눗셈부터 계산해도 동일한 계산 결과를 구할 수 있다는 것을 확인하는 기회를 제공할 필요가 있다. '뺄셈과 나눗셈 우선'과 '위치 우선'의 경우를 서로 비교해 보는 활동을 통해 혼합계산에서의 계산 순서를 이해하는 기회를 제공할 수 있기 때문이다.

둘째, 교사들에게 식의 왼쪽부터 차례대로 계산하는 규칙이 관습으로 자리 잡은 이유에 관해 논의할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 식의 왼쪽부터 차례대로 계산하는 규칙이 결정된 이유인 계산 순서와 언어적 관습과의 일치성에 대해 주목함으로써 계산 순서가 암기가 아닌 이해의 대상이 될 수 있음을 인지할 수 있으며, 식을 읽고 쓰는 과정 속에서 사상(事象)을 나타내는 수학적 표현으로서의 식의 가치에도 주목할 기회가 될 수 있기 때문이다.

셋째, 교사들에게 덧셈과 곱셈의 혼합계산에서 곱셈이 덧셈보다 우선한다는 규칙 설정의 동인을 개념적 입장에서 설명해 보는 기회를 제공할 필요가 있다. 특히 '동치성 보존', '단일 연산 식으로의 변형 가능성', '하나의 수량으로서의 곱셈 연산의 의미'에 의한 설명은 산술적 표현에 의한 설명이므로 학생들이 계산 순서를 이해할 수 있도록 교수학적 변환하는데 도움을 줄 수 있기 때문이다.

넷째, 교과서에서는 괄호 안의 식을 먼저 계산한다는 것만 부각하고 있지만, 교사들에게 괄호가 있는 식에서 하나의 수량이라는 괄호의 의미를 강조할 필요가 있다. 괄호는 결합적, 분배적인 성질을 표현하는 기능을 담당하는 중요한 기호이므로, 단지 계산 순서라는 의미에 의해서가 아니라 괄호의 본래 의미인 '하나의 집합' 이라는 의미를 바탕으로 대등한 연산 대상 사이의 연산 순서를 이해하는 것이 바람직하기 때문이다.

다섯째, 교사용 지도서와 같은 참고 자료에서 혼합계산에서의 계산 순서의 입장을 기술할 때는 계산 순서의 관습적, 개념적 입장 중 한 측면만 기술할 것이 아니라 두 입장을 함께 기술하여 교사들의 계산 순서에 대한 이해를 심화시킬 필요가 있다. 계산 순서에 대한 두 입장은 대립적인 관계가 아닌 상호 보완적 관계이므로 교사들이 두 입장을 모두 이해했을 때 혼합계산에서의 계산 순서에 대한 편향적인 입장에서 벗어날 수 있기 때문이다.

참 고 문 헌

강홍규 (2009). 배 개념에 기초한 자연수 곱셈 개념의 지도 방안. **학교수학, 11**(1), 17-37.

교육부 (2014). **수학 1-2**. 서울: 천재교육.

교육부 (2015a). **수학 4-1** 교사용 지도서. 서울: 천재교육.

교육부 (2015b). **수학 4-1 익힘책**. 서울: 천재교육.

교육부 (2015c). **수학 4-1**. 서울: 천재교육.

교육과학기술부 (2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]. 서울: 교육과학기술부.

고정화 (2012). 초등학교 4학년 혼합계산 지도에 대한 고찰. **수학교육학연구, 22**(4), 477-494.

고준석, 김지원, 박교식 (2014). 초등학교 수학에서 취급하는 식의 정의와 분류에 관한 연구. **학교수학, 16**(2), 303-315.

김진환, 박교식 (2013). 나눗셈 알고리즘과 유클리드 알고리즘의 확장에 관한 연구. **수학교육학연구, 23**(1), 17-35.

김창수, 강정기 (2016). 괄호 생략 관점에서 식의 표기에 관한 고찰. **한국학교수학회논문집, 19**(1), 1-19.

김판수, 박성택 (1999). 인지적 구성주의에 따른 수학과 교육 현장 적용 연구. **한국초등수학교육학회지, 3**, 21-39.

김화수 (2013). 사칙연산의 1차적 개념을 학습한 학습자의 Schema가 거듭제곱과 혼합계산의 관계적 이해에 미치는 영향에 대한 사례연구. 한국수학교육학회지 시리즈C **<초등수학교육>, 16**(3),251-266.

백선수, 김원경, 문승호(2008) 초등학교 5학년 학생의 자연수 혼합계산에서 나타난 오류에 대한 연구. **East Asian Math. J. 24**(5), 547-564.

변희현 (2011). 한국과 일본의 초등교과서에서 다루는 분배법칙 개념에 관한 비교 분석. **한국초등수학교육학회지, 15**(1), 39-56.

임재훈 (2013). 등호 해석의 두 시간적 차원인 읽기 · 쓰기의 불일치와 그 해소. **한국초등수학교육학회지, 17**(2), 207-223.

이혜경, 김선유, 노은환, 정상태 (2010). 혼합계산을 포함한 분수와 소수의 계산에서 피드백 프로그램의 개발 · 적용에 대한 효과 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 377-399.

정기근, 김민정, 노은환 (2007). 자연수 혼합계산에서 처방 프로그램의 개발 · 적용에 대한 효과 분석. **한국학교수학회논문집, 10**(4), 471-485.

조완영 (2011). 중등 수학교사의 수학내용 지식. **학교수학, 13**(2), 347-364.

최지영, 방정숙 (2011). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색. **학교수학, 13**(4), 581-598.

EBS Learning (2017). (EBS 초중고 교육) 초등수학 개념 잡기-<05강 혼합계산의 원리>_#001. https://youtu.be/_vq-ZGfItWI /에서 2017년 1월 인출.

梶孝行 (2003). *数式の計算の順序に関する研究*. 兵庫教育大学大学院 学位論文.

片桐重男 (1995). *數學的な考え方を育てる式の指導*. 東京: 明治圖書.

片桐重男 (2004). *指導内容の体系化と評価—数学的な考え方を育てるために (数学的な考え方とその指導)*. 明治図書出版.

片桐重男 (2012). *算數教育學概論*. 東京: 東洋館出版社.

杉山吉茂 外(2014). *新しい算數 4下*. 東京: 東京書籍.

日本數學教育學會(編) (2011). *算數教育指導用語辭典(第四版)*. 東京: 教育出版株式會社.

Ameis, J. A (2011). The Truth about PEDMAS. *Mathematics Teaching in the Middle School, 16*(7), 414-420.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., & Tsai, Y. M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Bender, M. L (1962). Order of operations in elementary arithmetic. *The Arithmetic Teacher, 9*(5), 263-267.

Booth, L. R. (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School, 11*(3), 5-6.

Cajori, F (1928). *A history of mathematical notations (Vol. 1)*. Courier Corporation.

English, L. D (1995). *Children's Problem Posing in Computational Contexts*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association(ERIC Document Reproduction Service ED391639).

Jennifer M. Bay-Williams and Sherri. L. Martinie (2015). Order of operations: The Myth and the Math. *TCM 22*(1), August 2015.

Lakoff, G., Johnson, M. (1980). *Metaphors We Live By*. The University of Chicago Press. 노양진, 나익주(역) (1995). **삶으로서의 은유**. 서울: 서광사.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics, 40*(2), 173-196.

Linchevski, L., & Livneh, D. (2002). The competition between numbers and structure: Why expressions with identical algebraic structures trigger different interpretations. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 24*(2), 20.

Math forum(2015). Ask Dr. Math: FAQ. "Order of Operations." http://mathforum.org/dr.math/faq /faq.order.operations.html

McLellan, J., & Dewey, J (1895). *The psychology of number (pp. xvi+-309)*. D. Appleton.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics* (Vol. 2). Psychology Press. 권석일 외 7명(역) (2010). **수학에서의 이해**. 서울: 경문사.

Slaught, H. E., Lennes, N. J (1907). *High School Algebra : Elementary Course*. Allyn & Bacon.

Peterson(2000). History of the order of operations. http://mathforum.org/library/drmath/view/52582.htm.

Wu-Yi, H.(2007). "Order of operations" and other oddities in school mathematics. http://math.berkeley.edu/~wu/order5.pdf.

Zorin, B., & Carver Jr, D (2015). Operation: Save Aunt Sally. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(7), 438-443.

<Abstract>

A Study on the Order of Mixed Calculations in Korean Elementary School Mathematics

Ko, Jun Seok[9]; & Choi, Jong Hyeon[10]; & Lee, Seung Eun[11]; & Park, Kyo Sik[12]

This study explores the basis for determining priority among the four arithmetical operations in order to provide useful pedagogical content knowledge for teaching the order of operations. The study also discusses the perspective for viewing the order of operations. It presents the following five suggestions based on the results of the discussion. First, teachers should be made to realize that the same result can be obtained on calculation even when subtraction and division are performed first in mixed operations of addition and subtraction and mixed operations of multiplication and division . Second, teachers should understand why the rule of calculating sequentially from the left side of an equation has become customary. Third, teachers should be offered an explanation for the driver of the rule setting that multiplication takes precedence over addition in mixed operations of multiplication and addition. Fourth, the significance of the quantity within parenthesis must be emphasized to teachers. Fifth, teachers must gain an in-depth understanding about the order of operations by getting a description of all the customary and conceptual perspectives on the order of operations when describing the same in the teacher's guide.

Key words: mixed calculations, order of operations, priority of operations, perspective on the order of operations, teaching number sentence

논문접수: 2017. 07. 15
논문심사: 2017. 08. 07
게재확정: 2017. 08. 23

9) wideepmath@naver.com
10) duck0808@hanmail.net
11) lseblues@nate.com
12) pkspark@ginue.ac.kr