*Journal for History of Mathematics*
Vol. 30 No. 5 (Oct. 2017), 261–287

http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.5.261

# A historical study of de Zolt's axiom

## 졸트 공리의 역사적 고찰

Jo Kyeonghee 조경희

De Zolt's axiom which is a precise formulation of Euclid's Common Notion 5, " the whole is greater than the part", for the notion of 'content' holds in any Hilbert plane. In this article, we study the history of de Zolt's axiom which has its origin in Euclid's Common Notions, and introduce an example of a plane geometry in which de Zolt's axiom does not hold. We show that there is no area function in this geometry and every square is equidecomposable with a square which is properly contained in the first one. From this we also show that there are two equidecomposable rectangles which have the same base and do not have the same altitude, and there is a rectangle which is equicomplementable with an emptyset.

*Keywords:* de Zolt's axiom, common notion, equicomplementable, equidecomposable, area; 졸트 공리, 일반 공준, 동일용량, 분해합동, 면적.

*MSC:* 52A01, 52A55

## 1 서론

기원전 300여 년경에 씌여진 '원론'에서 유클리드는 그 자체로 자명한 명제들을 두 가지 유형으로 나누어 서술하였다. 기하와 관련된 내용은 공준(Postulates)이라고 명명하여 5개를 제시하였고, 그 외의 일반적인 진리에 해당한다고 생각되는 명제 5개를 일반 공준(Common Notions)으로 채택하였다.

소위 '평행공리'[1]라고 불리는 5번째 공준에 대해서는 수학자들의 많은 논란이 있었던 것과는 대조적으로, 5번째 일반 공준,

"전체는 부분보다 크다."

Jo Kyeonghee: Division of Liberal Arts and Sciences, Mokpo National Maritime Univ.
E-mail: khjo@mmu.ac.kr

Received on Apr. 9, 2017, revised on Sep. 20, 2017, accepted on Sep. 30, 2017.

1) '평행선 공리'라고 불리기도 한다.

는 19세기 초반까지도 크게 문제가 되지 않았던 것으로 보인다. 1866년 Duhamel이 [2]에서 처음으로 이 일반 공준에 대한 비판적인 논의를 시작하였는데, 그는 이 명제의 참, 거짓이 '전체', '부분', 그리고 '크다', '작다' 등의 용어의 정의에 따른 결과이지 그 자체로 자명한 것이 아니라고 주장하였다.2) 이러한 생각은 현대 수학의 입장에서는 당연한 것인데, 예를 들어 자연수 집합이 유리수 집합의 진부분집합이지만 그 기수(cardinal number)는 동일하다.

그렇지만 '원론'에서 유클리드가 무의식적으로 사용하고 있는 비교의 개념은 무엇일까를 고려해보면, 왜 오랫동안 수학자들이 5번째 일반 공준을 자명한 것으로 받아들였는지 이해할 수 있다. 그의 증명으로 미루어 볼 때 유클리드는 많은 경우 선분 또는 각의 크기를 비교하는데 이 일반 공준을 사용하였으며, 명제 I.39, 명제 I.40, 명제 I.48 등의 증명에서는 도형의 '용량(또는 면적)'의 크고 작음을 비교하는 의미로 사용하였음을 짐작할 수 있다.3)

선분 또는 각의 크기를 비교함에 있어서 일반 공준의 사용은 문제가 없지만 용량(면적)에 대해서 사용할 때는 조심해야 할 부분이 있다. 유클리드의 5번째 일반 공준을 용량(면적)에 적용하여 보면 다음과 같이 표현된다.

> "한 도형 안에 완전히 포함된 더 작은 도형의 '용량(면적)'은 더 작다."

현대 수학자들에게도 자명한 명제처럼 느껴지는 이 명제의 참, 거짓 또한 사실은 '용량(면적)'의 정의 및 그 정의 가능성 여부에 따라 결과가 달라진다.4)

이 명제는 모든 기하에서 증명가능한 것인가, 아니면 공리로 채택되어야 하는 것인가? 에 대한 19세기 수학자들의 연구가 진행되었고, 그 결과 졸트(de Zolt, 1881)와 스톨쯔(O. Stolz, 1894)는 다음을 공리로 채택하였으며 [14, 18, 19], 쉬르(F. Schur, 1892)와 킬링(W. Killing, 1898)은 아르키메스 공리를 사용하여 이를 증명하였다 [10, 13].

> (졸트 공리) 다각형 $P$가 다각형 $Q$를 포함하고 $P-Q$의 내부가 공집합이 아닐 때 $P$와 $Q$는 동일 용량을 가지지 않는다.

19세기 후반에 이러한 기하학의 논리적인 기초를 다지는 수학 논의가 최고점에 이르며 힐베르트가 마침내 1899년 그의 책 "기하학의 기초(Grundlagen der Geometrie)"에서 이 문제를 근본적으로 해결하였다. 힐베르트는 기하의 구성을 위한 최소한의 공리군을 제시하였으며, 이 공리군을 만족시키는 기하(힐베르트 기하 또는 중립기하라 불림)는 아르키메데스 공리의 성립 여부와 관계없이 항상 졸트 공리가 성립함을 증명하였다. 또한 나중에 개정판의

2) 이 내용은 저자가 [2]에서 직접 확인하지 못하였으며, [17](p.295-296)을 참조하였다.

3) '용량'과 '면적'은 조금 다른 개념임을 뒤에서 볼 것이다.

4) 유클리드 기하를 포함한 모든 힐베르트 기하에서는 '용량'과 '면적'은 같다. 그렇지만 일반적으로 '용량'은 모든 기하에서 정의되지만, '면적'은 정의되지 않는 기하가 존재한다. 그리고 실제로는 용량의 크고 작음 또한 일반적으로 잘 정의할 수 없으므로 졸트 공리의 정확한 표현에는 용량이 동일하다, 동일하지 않다 등의 표현만 사용된다.

부록에서 졸트 공리가 성립하지 않는 비-힐베르트 기하를 추가로 소개함으로써 유클리드의 5번째 일반 공준은 그 의미가 분명해졌다.[5)]

이 논문에서는 이러한 졸트 공리의 역사적인 전개과정에서 나타난 여러 수학적 개념을 자세히 살펴보고, 졸트 공리를 만족시키지 않는 비-힐베르트 기하를 분석한다.

## 2 유클리드의 일반 공준

유클리드는 다음 다섯 가지를 일반 공준(Common Notions)이라 하여 '원론' 의 서두에 제시하였다.[6)]

1. 어떤 것과 같은 것들은 서로 같다.(Things which are equal to the same thing are also equal to one another.)
2. 서로 같은 것에 서로 같은 것을 더하면 같다.(If equals be added to equals, the wholes are equal.)
3. 서로 같은 것으로부터 서로 같은 것을 빼면 같다.(If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.)
4. 서로 일치하는 것은 서로 같다.(Things which coincides with one another are equal to one another.)[7)]
5. 전체는 부분보다 크다.(The whole is greater than the part.)

유클리드의 일반 공준에서 나타나는 '같다(equal)' 라는 개념은 특별히 정의가 되어 있지 않다. 유클리드는 어떠한 범주에서든 '같다' 라고 사용될 수 있는 용어는 일반 공준을 만족시킨다고 생각하였던 것으로 추측된다. 예를 들어, '두 선분(각, 도형)이 같다' 는 것을 '두 선분(각, 도형)이 합동이다' 라는 의미로 사용하는 경우 위의 일반 공준을 만족시킨다.[8)] 실제로 유클리드는 '원론' 의 여러 명제에서 선분 또는 각의 합동의 의미로 '같다' 라는 단어를 사용하고 있다.[9)] 5번째 일반 공준에서 나타나는 '크다' 라는 개념도 한 선분(각)이 다른 선분(각)을

5) 힐베르트의 생전 마지막 개정판인 7판은 그의 제자 슈미트(H. Arnold Schmidt)와 함께 작성되었으며, 특히 졸트 공리가 성립하지 않는 기하의 소개를 내용으로 하는 부록 II는 슈미트에 의해 완전히 다시 씌여졌다고 7판 서문에서 말하고 있다.(버네이스(P. Bernays)의 10판 서문의 내용을 발췌함.)

6) 유클리드가 '원론' 을 처음 썼을 때 공준과 일반 공준으로 채택한 명제가 정확하게 무엇이었고 또한 몇 개였는지 정확하지 않다. 위의 5번째 일반 공준도 Volkert는 [16]과 [17]에서 8번째 공리라고 한 것을 확인할 수 있다. 이 논문에서는 헤스(T. Heath)의 번역본 [3]을 따른다. [3]에서도 5번 공준 왼쪽에 [8]이라고 표기되어 있음을 볼 수 있다.

7) 유클리드는 '일치한다' 를 '이동하여 겹칠수 있다' 등의 의미로 사용하였으나, 어떻게 이동할 수 있는지에 대해서는 정확한 논의를 하지 않고 직관적으로 사용하였다.

8) 모든 동등관계(equivalence relation)는 유클리드의 일반 공준을 만족시킨다고 생각하기 쉽지만, 사실상 그렇지 않다. 동등관계들 중의 하나인 '분해합동' 과 '동일용량' 에 대해서는 유클리드의 일반 공준 5를 만족시키지 않는 기하가 있음을 뒤에서 보게 될 것이다. 더 쉬운 예로 서론에서도 언급하였듯이 집합의 기수가 같거나 다름은 동등관계이지만 유클리드의 일반 공준을 만족시키지 않는다.

9) 힐베르트의 합동공리군(부록 참조)은 유클리드의 일반 공준에 대한 엄밀한 수학적 표현이다. 예를 들어,

포함한다, 또는 선분(각)의 크기가 더 크다 등으로 사용되었다.

그러나 유클리드의 원론 I권에 나타난 명제 48개 중 34번째 명제까지는 이러한 선분(각, 도형)의 합동의 개념으로 '같다' 라는 단어를 해석할 수 있으나, 나머지 14개(I.35-I.48) 중 13개의 명제에서 나타나는 '같다' 의 의미는 합동과는 명확히 다르다. 예를 들어 유클리드 명제 I.35와 I.36을 살펴보자.

> (유클리드 명제 I.35) 밑변이 동일하고 윗변이 동일한 직선 위에 있는 두 평행사변형은 **같다**.(Parallelograms on the same base and in the same parallels are **equal**.)
>
> (유클리드 명제 I.36) 밑변이 **같고** 윗변과 밑변이 각각 동일한 직선 위에 있는 두 평행사변형은 **같다**. (Parallelograms which are on **equal** base and in the same parallels are **equal** to one another.)

유클리드는 이 명제에서 어떠한 의미로 '같다' 라는 단어를 사용하였을까? 명제 I.36에서 '같다(equal)' 라는 표현이 두 번 등장하는데, 첫 번째의 '밑변이 같다' 는 '밑변이 합동이다' 의 의미로 해석된다. 그렇다면 유클리드는 위 두 명제에서 나타나는 '두 평행사변형은 같다' 라는 표현을 어떠한 의미로 사용하였을까? 도형의 크기를 대응시키는 어떠한 양(예를 들어 '용량' 또는 '면적')을 염두에 두고 직관적으로 사용한 것이 아닌가 생각된다. 실제로 그의 증명으로부터 유추해 볼 때, 유클리드의 원론 I권의 후반부의 명제들에서 많이 나타나는 '같다' 라는 용어는 다음 성질을 만족하여야 한다.[10)]

1. 합동인 도형은 '같다'. (Congruent figures are 'equal'.)
2. 어떤 도형과 '같은' 두 도형은 '같다'. (Two figures 'equal' to a third are 'equal'.)
3. '같은' 도형의 합은 '같다'. (Sums of 'equal' figures are 'equal'.)
4. '같은' 도형의 차는 '같다'. (Differences of 'equal' figures are 'equal'.)
5. '같은' 도형의 반은 '같다'. (Halves of 'equal' figures are 'equal'.)
6. 전체는 부분보다 크다. (The whole is greater than the part.)

합동공리 III.1은 "임의의 선분에 대하여 임의의 방향에 임의의 점을 끝점으로 한 주어진 선분과 합동인 선분이 유일하게 존재한다" 는 것으로, 이 공리로부터 우리는 한 선분과 그 선분을 포함하는 더 큰 선분이 서로 합동일 수 없음을 알 수 있다. 이는 선분의 합동에 관한 유클리드의 일반 공준 5가 참임을 말한다. 마찬가지로 합동공리 III.4는 각의 합동에 관한 유클리드의 일반 공준 5가 참임을 말한다.

10) 실제로 유클리드는 그의 명제들의 증명에서 위 성질들을 다음과 같이 사용하였다: 명제 I.35 에서는 1,2,3을 사용하였으며, 명제 I.37에서는 4, 명제 I.39에서는 5, 명제 I.48에서는 6을 사용하였다.

유클리드의 이러한 '같다' 라는 단어의 남용은 혼동을 불러일으킨다. 특히 그 중에서도 '면적' 에 해당하는 의미로의 사용은 철저한 수학적인 논의가 필요한 지점이다. 더군다나 모든 평면기하에서 면적이 잘 정의되는 것도 아니므로 더욱 그러하다.

'두 평행사변형은 같다' 라는 표현은 '두 평행사변형의 용량(면적)이 같다' 라는 의미로 해석되므로 유클리드 명제 I.36을 다음과 같이 다시 표현할 수 있다. ('면적' 보다는 '용량' 이 적절한 용어임을 §3.3에서 확인할 것이다.)

> (유클리드 명제 I.36) 밑변이 합동이고 윗변과 밑변이 각각 동일한 직선 위에 있는 두 평행사변형은 동일용량을 갖는다.

위 명제에 대한 유클리드의 증명은 별 문제가 없지만, 이 명제의 역에 해당하는 다음 명제의 증명에서 유클리드는 5번째 일반 공준 '전체는 부분보다 크다' 를 사용하였다.[11)]

> (유클리드 명제 I.39)[12)] 밑변이 동일하고 그 밑변에 대하여 동일한 쪽에 위치한 두 평행사변형이 동일용량이면 두 평행사변형의 윗변은 동일한 직선 위에 있다.

기하학의 공리적 접근방법 및 일반 공준의 사용에 대한 19세기 수학자들의 여러 논의가 진행되었고, 이 과정 속에서 이러한 명제들의 증명에 필요한 여러 개념들이 생성되어 유클리드의 5번째 일반 공준이 졸트 공리로 표현되었다. 힐베르트는 그의 책 '기하학의 기초' 에서 면적 이론(Theorey of Plane Area)을 새롭게 정립함으로써 모든 힐베르트 기하에서 졸트 공리가 성립함을 증명하였으며, 졸트 공리가 성립하지 않는 비-힐베르트 기하를 소개하였다.

## 3 면적 이론과 졸트 공리

이 절에서는 유클리드의 일반 공준에 대한 수학적인 논의 과정에서 필연적으로 나타난 몇 가지 수학 개념들을 살펴볼 것이다.

평면기하가 구성되기 위해서는 점과 직선의 결합관계 및 순서관계 그리고 선분과 각의 합동관계가 필요하다. 유클리드에서 시작된 공리적 방법은 힐베르트에 이르러 다섯 개의 공리군으로 완성되었는데, 평행공리와 연속공리를 제외한 나머지 세 가지 공리군, 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군을 모두 만족시키는 평면기하를 **힐베르트 기하** 또는 **중립기하**라 부른다(부록 참조). 합동공리군 중 일부 공리가 성립하지 않는 기하를 비-힐베르트 기하라 부르기로 하자. 참고로, 평행공리와 원-원 공리(circle-circle axiom)를 만족시키는 힐베르트

11) 유클리드는 이 명제를 포함한 몇개의 명제( I.35, I.37, I.39, I.48. 등)에서 면적에 관하여 5번째 일반 공준을 사용하였다.

12) 유클리드 명제 I.39의 정확한 내용은 다음과 같지만, 유클리드 명제 I.36의 역과 동치임을 보일 수 있다: 밑변이 동일한 두 삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle ABD$ 의 두 꼭지점 $C$와 $D$가 직선 $AB$에 대하여 동일한 쪽에 위치하고 동일용량이면 직선 $CD$는 직선 $AB$에 평행하다.

기하는 유클리드 기하라 불리고, 평행공리를 만족시키지 않는 힐베르트 기하는 비-유클리드 기하라 불린다.[13] 유클리드 기하 중에서 연속공리군을 만족시키는 기하는 실좌표평면기하 (Cartesian plane over the field $\mathbb{R}$ of real numbers)와 동형 (isomorphic)이다.[14]

### 3.1 합동

임의의 평면기하에서는 선분과 각의 합동 관계가 규정되어 있다. 그리고 삼각형의 합동은 다음과 같이 정의된다:

> (삼각형의 합동) 대응하는 세 내각과 세 변이 모두 합동일 때 두 삼각형은 합동이다.

그렇다면 다각형들 간의 합동은 어떻게 정의하는 것이 적절할까? 여기서 다각형의 정의는 다음과 같다:

> (다각형 (FIGURE) 의 정의) 평면 위의 $n$ 개의 점 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 은 $n$ **각형**을 이룬다. $n$ 각형 $A_1A_2\cdots A_n$ 은 $n$ 개의 선분 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ 과 내부점들을 포함하며, 이 $n$ 개의 점 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 과 선분을 각각 $n$ 각형 $A_1A_2\cdots A_n$ 의 꼭지점 (vertex)와 변 (side)이라 한다.[15]

삼각형의 경우와 마찬가지로 대응하는 모든 변과 모든 내각이 합동일 때 두 다각형이 합동이라고 정의할 수 있을까? Figure 1의 두 사각형은 택시기하에서 한변의 길이가 2인 정사각형들이다.[16] 즉, 둘 다 모든 변의 길이가 2이고 모든 내각이 직각인 사각형이다. 그러나 대응하는 대각선은 왼쪽 정사각형의 경우 2, 오른쪽 정사각형의 경우 4로 합동이 아님을 알 수 있다. 이 두 정사각형이 합동이라고 정의하는 것이 적절하지 않으므로, 삼각형의 합동의 정의에서 나타나는 변과 내각을 각각 대응하는 모든 선분과 모든 각으로 이해하여 힐베르트는 다각형의 합동을 다음과 같이 정의하였다.

> (다각형의 합동) 두 다각형의 꼭지점들의 집합에 1-1 대응관계가 존재하고 대응되는 모든 선분과 각이 합동일 때 두 다각형이 **합동**(congruent)이라 한다. 즉, 두 $n$ 각형 $A_1A_2\cdots A_n$ 과 $B_1B_2\cdots B_n$ 에 대하여
>
> $$A_iA_j \equiv B_iB_j, \quad \angle A_iA_jA_k \equiv \angle B_iB_jB_k, \quad 1 \le i,j,k \le n$$

---

13) 평행공리가 성립하는 힐베르트 기하를 '유클리드 기하'라고 정의하기도 한다. 이 정의에 의하면 원-원 공리는 성립하지 않지만 평행공리가 성립하는 기하는 유클리드 기하라고 할 수 있다.

14) 일반적으로 평행공리와 연속공리군을 만족하는 힐베르트 기하는 실좌표평면기하와 동형이다. 즉, 원-원 공리가 저절로 성립한다.

15) 꼭지점의 번호를 매기는 순서에 따라 내부점이 잘 정의되지 않는 경우가 있다. 선분들이 교차하는 경우가 그러하다. 이 정의에서는 이런 경우를 제외한다. 정확한 정의를 위해서는 핫숀의 책 [5]의 196페이지를 참조하라.

16) 택시기하에서 두 점 $A = (a_1, a_2)$와 $B = (b_1, b_2)$ 사이의 거리는 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$이다.

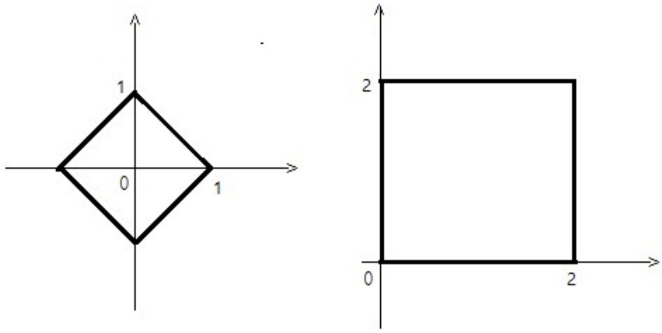


Figure 1. Two squares in taxicab geometry whose sides have length 2 ; 택시기하에서 변의 길이가 2 인 두 정사각형의 예

일 때 두 $n$ 각형은 합동이다.(여기에서 '$\equiv$' 은 합동관계를 의미한다. 우리는 이 논문에서 모든 합동관계를 이렇게 표기하기로 한다.)

사실 힐베르트 기하에서는 대응하는 내각과 변이 모두 합동이면 두 다각형이 합동이다. 이는 힐베르트 기하에서는 임의의 합동인 두 다각형은 어떤 강체사상(rigid motion)[17] 에 의하여 항상 대응되기 때문이다.

### 3.2 분해합동

한 다각형을 작은 다각형 조각들로 쪼개서 흩어놓은 후 다시 모으면 다른 다각형이 생성된다. 이때 처음 다각형과 다시 모아서 만들어진 다각형은 일반적으로 합동이 아니다. 우리는 이런 경우 두 다각형이 분해합동이라고 정의한다:

(분해합동) 두 다각형이 각각 유한 개의 삼각형으로 분해되며, 그 삼각형들이 일대일로 대응되고, 대응되는 삼각형들이 서로 합동일 때, 우리는 이 두 다각형이 **분해합동**(equidecomposable)이라고 말한다.

그러므로 두 다각형 $F_1$ 과 $F_2$ 가 서로 분해합동이라 함은, 다각형 $F_1$ 을 삼각형들로 분해한 후 흩었다가 다시 재배치해서 다각형 $F_2$ 가 되도록 할 수 있다는 의미이다.

유클리드 평면에서 한 변의 길이가 $a$ 인 정사각형과 두 변의 길이가 각각 $na$ 와 $a/n$ 인($n$ 은 1 보다 큰 자연수) 직사각형은 분해합동이지만 합동이 아닌 쉬운 예이다. 또한 변의 길이가 $a$ 와 $\sqrt{2}a$ 로 이루는 각이 $\pi/4$ 인 평행사변형도 한 변의 길이가 $a$ 인 정사각형과 분해합동이다. (Figure 2 참조)

17) 평면기하의 강체사상은 그 기하에서 정의된 전단사 함수로서 직선을 직선으로 보내고 순서관계 및 길이와 각을 보존한다.

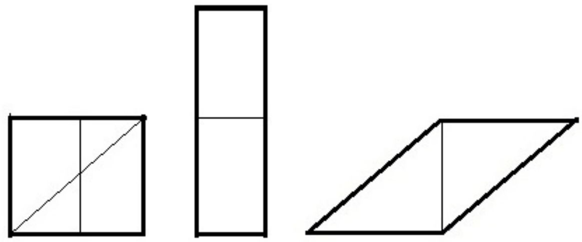

Figure 2. Non-congruent quadrilaterals which are equidecomposable ; 분해합동이지만 합동이 아닌 사각형들의 예

### 3.3 동일용량

'용량' 이라는 용어는 그 자체로 어떤 값을 의미하지는 않지만, 두 다각형의 용량이 동일한지 다른지를 알려주는 비교의 개념으로 다음과 같이 정의된다[18]:

> (동일용량) 두 다각형 각각에 분해합동인 유한개의 다각형을 붙임으로써 분해합동인 다각형을 얻을 수 있을 때, 우리는 이 두 다각형이 **동일용량**(equicomplementable) 을 가진다고 말한다. 즉, 두 다각형 $P$ 와 $Q$ 가 동일용량을 갖는다는 것은, 상호 분해합동인 다각형 수열 $P_1, Q_1 ; P_2, Q_2 ; \cdots , P_k, Q_k$ 이 있어 $P+P_1+\cdots+P_k$ 와 $Q+Q_1+\cdots+Q_k$ 가 분해합동임을 의미한다. 여기에서 $+$ 은 두 다각형이 내부가 겹쳐지지 않게 합쳐지는 연산을 의미한다.

이 정의만으로는 어떤 다각형에 대해서도 ' 그 다각형의 용량이 얼마다.' 라고 말할 수 없음을 알 수 있다.

유클리드 기하에 익숙한 우리는 두 다각형이 동일용량을 가진다는 것이 두 다각형이 분해합동이라는 것과 다르다고 느껴지지 않는다. 직관적으로 분해합동과 동일용량이 동치 개념이라고 생각하는 것이 자연스럽다. 이는 유클리드 평면에서 그러하기 때문이다. 그러나 두 개념이 다르게 나타나는 평면기하가 존재한다. 비-아르키메데스체 $F$ 위에서 정의된 좌표기하 $\Pi_F$ 가 그러한 예 중의 하나인데, 다음은 힐베르트가 처음으로 정의한 비-아르키메데스체이다 : $\Omega(t)$ 는 $t$ 에서 시작하여 사칙연산과 다섯 번째 연산 $\sqrt{1+\omega^2}$ 을 통하여 만들어지는 $t$ 에 관한 모든 대수적 함수들의 집합이다. $\Omega(t)$ 는 가산 집합이며, 허수는 이 다섯 연산으로부터 나타나지 않는다. 또한 유일한 방법으로 행해지므로, $\Omega(t)$ 의 모든 원소는 한 변수 $t$ 에 관한 실함수임을 알 수 있다. 이제 $\Omega(t)$ 의 두 원소 $f(t)$ 와 $g(t)$ 에 대하여 충분히 큰 $t$ 에 대하여 항상 $f(t)-g(t) > 0$

18) 힐베르트의 '기하학의 기초' 7판의 용어를 따랐다. 힐베르트는 초판에서 두 다각형이 동일용량임을 'equal content' 라고 하였으며, 개정하면서 'equicomplementable' 로 대체하였다.

일 때 $f(t) > g(t)$ 라고 정의하면 $\Omega(t)$ 는 순서체(ordered field)이다. 이 순서체 $\Omega(t)$ 위에서 정의된 좌표기하

$$\Pi_{\Omega(t)} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \Omega(t)\}$$

를 살펴보자. 정의로부터 $\Pi_{\Omega(t)}$ 가 비-아르키메데스 기하임을 바로 알 수 있다. 즉, 어떤 자연수 $n$ 에 대해서도 $n = n \times 1 < t$ 이므로 $t$ 는 유한개의 1로 덮을 수 없으며, 이는 $\Omega(t)$ 가 비-아르키메데스체이고 $\Pi_{\Omega(t)}$ 는 아르키메데스 공리[19] 를 만족시키지 않음을 말해준다. 이제 Figure 3에서 평행사변형 $ABCD$ 안에 있는 어떠한 삼각형도 변의 길이가 $\sqrt{2}$를 넘을 수 없으므로 평행사변형 $ABCD$ 안의 유한개의 삼각형들로는 한 변의 길이가 $\sqrt{t^2+1} > t$ 인 평행사변형 $EFCD$ 를 채울 수 없다. 그러므로 두 평행사변형 $ABCD$ 와 $EFCD$ 는 분해합동이 아님을 알 수 있다. 그렇지만 두 평행사변형에 삼각형 $BGE$ 를 각각 더해주면,

$$\square ABCD \cup \triangle BGE = \triangle CGD \cup \triangle ACE$$

이고

$$\square CDEF \cup \triangle BGE = \triangle CGD \cup \triangle BDF$$

이며

$$\triangle ACE \equiv \triangle BDF$$

이므로,[20] 두 평행사변형은 동일용량이다.

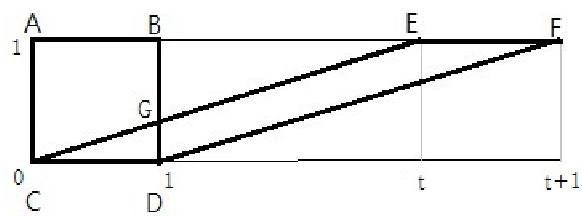


Figure 3. Two parallelograms which are not equidecomposable but equicomplementable.; 동일용량이지만 분해합동이 아닌 두 평행사변형

위의 논의 과정을 그대로 따라가면 일반적으로 평행공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 유클리드 명제 I.35가 증명된다. 즉, 밑변이 동일하고 윗변이 동일한 직선 위에 있는 두 평행사변형은 동일용량을 갖는다.

아르키메데스 공리가 성립하는 경우에는 밑변이 동일하고 동일한 직선에 윗변이 있는 두 평행사변형은 동일용량일 뿐만 아니라 분해합동이다. 이는 아르키메데스 공리가 성립하는 기하에서는 임의의 직선 위의 세 점 $A, B, F$ 에 대하여 선분 $AF$ 가 선분 $AB$ 의 유한개의 합으로

19) 아르키메데스 공리는 부록에 있는 힐베르트의 연속공리군 V.1 이다.
20) 합동공리 III,5(변-각-변 공리)에 의하여 합동이다(부록 참조).

덮어지기 때문이다. 즉,

$$n\overline{AB} < \overline{AF} < (n+1)\overline{AB}$$

이 되는 자연수 $n$ 이 항상 존재한다. (Figure 4 참조)

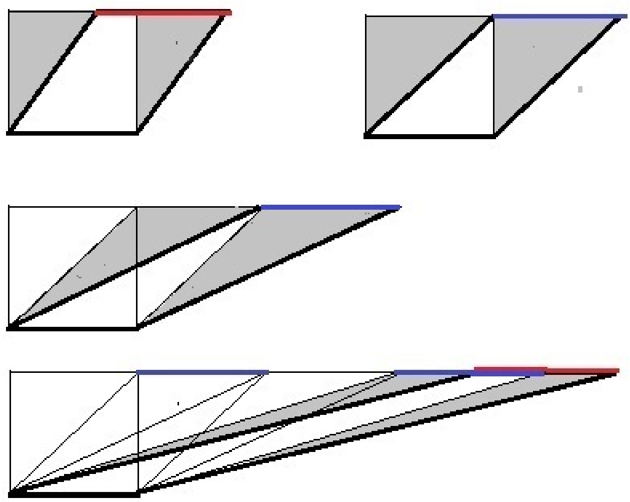

Figure 4. Two parallelograms on the same base and lying in the same parallels are equidecomposable in a Hilbert plane satisfying Archimedes's axiom.; 아르키메데스 공리가 성립하는 힐베르트 기하에서는 밑변이 동일하고 윗변이 동일한 직선 위에 있는 평행사변형은 서로 분해합동이다.

### 3.4 면적

우리는 면적 또는 넓이라는 개념에 익숙하다. 앞 절에서 논의한 용량이라는 개념은 면적이라는 개념과 유사해 보인다. 두 개념을 비교하기 위하여 우선 면적 함수의 정의를 살펴보자.

(면적 함수 (MEASURE OF AREA FUNCTION)) 평면기하 $\Pi$ 의 임의의 다각형 $T$ 에 대하여 순서가환군 (ordered abelian group) $G$ 의 원소 $\alpha(T)$ 를 대응하는 함수 $\alpha$ 가 다음을 만족시킬 때 $\alpha$ 를 $\Pi$ 의 **면적 함수**라 한다:

1. 임의의 다각형 $T$ 에 대하여 $\alpha(T) > 0$ 이다.
2. 합동인 두 다각형 $T$ 와 $T'$ 에 대하여 $\alpha(T) = \alpha(T')$ 이다.
3. 교집합이 없는 두 다각형 $T_1$ 과 $T_2$ 에 대하여
$$\alpha(T_1 \cup T_2) = \alpha(T_1) + \alpha(T_2)$$
이다.

앞에서도 언급한 바 있듯이 '용량' 이라는 개념은 '면적' 과는 달리 임의의 다각형에 대하여 어떤 값을 대응시키지 않는다. 즉, 면적은 다각형마다 값이 대응되지만, 용량은 같은지 다른지, 어느 쪽이 크고 작은지[21] 등만 결정한다. 그리고 또 다른 차이점은 '동일 용량' 은 임의의 기하에서 잘 정의되는 순전히 기하학적인 개념이지만, '면적' 은 모든 평면기하에서 잘 정의되지는 않는다. 실제로 면적함수가 존재하지 않는 기하가 존재한다. 우리는 §4에서 면적함수가 존재하지 않는 기하의 예를 보게 될 것이다.

일반적으로 임의의 힐베르트 기하는 면적함수를 가지고 있지만 비-힐베르트 기하의 경우에는 그 존재성이 보장되지 않는다. 그런데 택시기하는 비-힐베르트 기하이지만 면적함수가 존재한다. 임의의 도형에 대하여 택시기하의 길이를 무시하고 유클리드 길이에 의한 면적으로 정의하면 된다.[22]

이제 합동, 분해합동, 용량, 그리고 면적과 관련하여 다음 문제를 생각해 볼 수 있다. 동일용량을 가지는 두 직사각형이 동일한 변을 가질 때, 나머지 변이 서로 합동이라고 할 수 있는가? 유클리드의 명제 I.39에 해당하는 이 문제는 평행공리가 성립하는 힐베르트 평면기하에서는 졸트 공리와 근본적으로 같은 문제로 쉬르와 킬링은 아르키메데스 공리를 이용하여 증명하였으며, 힐베르트가 면적 함수를 정의함으로써 아르키메데스 공리와 관계없이 증명하였다.

## 3.5 졸트 공리

한 다각형 $P$ 안에 동일용량을 가지는 다른 다각형 $Q$가 있을 때, $P-Q$가 내부점을 가질 수 있을까? 다음 공리를 생각해 보자.

> (졸트 공리 (De Zolt's axiom)) 다각형 $P$가 다각형 $Q$를 포함하고 $P-Q$의 내부가 공집합이 아닐 때 $P$와 $Q$는 동일 용량을 가지지 않는다.

$P = Q \cup (P-Q)$이고 $P-Q$는 유한개의 다각형의 합으로 표현되므로, 면적 함수를 갖는 기하에서는 졸트 공리가 당연히 성립함을 바로 알 수 있다.[23] 그리고 우리의 직관은 유클리드처럼 이 공리가 모든 평면기하에서 성립한다고 말한다. 왜냐하면 졸트 공리가 성립하지 않는 기하에서는 공집합과 동일용량을 갖는 다각형이 존재할 수밖에 없으나,[24] 이는 일어날 수 없는 일처럼 생각되기 때문이다. 실제로 힐베르트는 평행공리를 만족하는 힐베르트 평면기하에서

---

21) 서론에서 언급했듯이 용량의 크고 작음도 일반적으로 잘 정의되지 않는다.

22) 택시기하에서의 면적함수는 임의의 도형에 대하여 그 도형의 유클리드 기하에서의 면적을 대응시키는 함수이다 ([9, 11, 15] 등 참조). 이 면적함수가 이 논문에서 정의한 면적함수가 된다는 데는 증명이 필요하다. 즉, 합동인 두 다각형은 면적이 같음을 보여야 한다. 택시기하의 등장사상(isometry)은 임의의 평행이동과 대칭변환 4개 (직선 $y=x, y=-x, x=0, y=0$에 대한 대칭변환) , 회전변환 4개($\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$)로 이루어져 있음을 이용하여 택시기하에서 합동인 두 삼각형이 유클리드 기하에서도 합동임을 보임으로써 증명할 수 있다.

23) [5]의 Proposition 23.1 참조

24) 뒤에서 졸트 공리가 성립하지 않는 기하에서는 공집합과 동일용량인 다각형의 구체적인 예를 볼 것이다.

이 공리가 성립함을 보였다. 그는 그러한 기하의 경우 면적함수가 잘 정의됨을 이용하여 졸트 공리가 성립함을 보였으며, 나아가 기하가 아르키메데스인 경우에는 동일용량과 분해합동이 동치 개념임을 보였다. 나중에 페자(Pejas, 1961)에 의해 증명된 힐베르트 평면기하의 분류 정리에 의하여 평행공리와 관계없이 모든 힐베르트 평면기하에서 졸트 공리가 성립함이 알려져 있다([12]와 [5]의 43절 참조).

그렇다면 우리의 직관과 일치하게 모든 평면기하에서 졸트 공리가 성립할까? 택시기하는 힐베르트 기하는 아니지만 면적함수가 존재하므로 졸트 공리가 성립한다. 우리는 다음 절에서 졸트 공리가 성립하지 않는 평면기하의 예를 하나 보게 될 것이다(정리 4.6과 Figure 6 참조).

## 4 졸트 공리를 만족시키지 않는 기하

힐베르트 기하에서의 졸트 공리의 증명은 졸트 공리가 성립하지 않는 기하의 존재에 의해서 그 의미가 더 확연해진다. 보편적인 정리를 단지 적당한 조건 아래서 증명한 것이 아니라, 졸트 공리는 기하를 규정하는 하나의 요소임을 드러내기 때문이다.

우리는 이 절에서 변-각-변 공리(합동공리 III,5)와 연속공리군을 제외한 힐베르트 평면공리를 모두 만족시키는 새로운 기하를 소개하고 그 기하에서 졸트 공리가 성립하지 않음을 살펴볼 것이다. 이 기하는 힐베르트가 그의 책 “기하학의 기초 10판”의 부록 II에 소개한 기하로 변-각-변 공리 대신 ’제한된 변-각-변 공리’가 성립하고 아르키메데스 공리와 피타고라스 정리는 성립하지 않는 기하이다. 이 기하의 점과 직선 등은 비-아르키메데스체 위에서 정의된 좌표기하의 점과 직선 등과 동일하지만 선분과 각의 합동을 정의하는 변환이 조금 다르다.

### 4.1 비-아르키메데스 피타고라스체 $F$의 정의

$F$ 의 임의의 원소 $\alpha$는 변수 $t$, $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 다음과 같이 표현된다:

$$\alpha = a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \cdots, \quad a_0 \neq 0.$$

$F$ 의 원소들 사이에는 사칙연산이 잘 정의되며, 특히 $\alpha^2$ 은 다음과 같다:

$$\alpha^2 = a_0^2t^{2n} + 2a_0a_1t^{2n+1} + \cdots$$

**정의 4.1:** *(순서(order))* $F$ 의 원소 $\alpha = a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \cdots$ 에 대하여, $a_0 > 0$ 이면 $\alpha > 0$이다. 이로부터 임의의 두 원소 $\alpha, \beta \in F$의 대소관계가 다음과 같이 정의된다*:* $\alpha - \beta > 0$이면 $\alpha > \beta$이고, $\alpha - \beta = 0$이면 $\alpha = \beta$이다.

이 정의에 의하면 $1 - t > 0$이므로 $t < 1$임을 바로 알 수 있다. 또한 임의의 실수 $A$에 대하여 $At < 1$이므로 $F$는 비-아르키메데스체(non-Archemedean field)이다.

이제 $F$가 피타고라스체(Pythagorean field)임을 보이자: $F$의 두 원소 $\alpha = a_0t^n + a_1t^{n+1} + \cdots$ 와 $\beta = b_0t^m + b_1t^{m+1} + \cdots$ 에 대하여 $n \geq m$이라 가정하면, 다음이 성립하는

두 실수열 $\{c_i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c_0 > 0\}$와 $\{d_i \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, d_0 > 0\}$가 존재한다.

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha^2+\beta^2} &= \sqrt{(a_0t^n + a_1t^{n+1} + \dots)^2 + (b_0t^m + b_1t^{m+1} + \cdots)^2} \\
&= \sqrt{(a_0^2t^{2n} + 2a_0a_1t^{2n+1} + \dots) + (b_0^2t^{2m} + 2b_0b_1t^{2m+1} + \cdots)} \\
&= \sqrt{c_0t^{2m} + c_1t^{2m+1} + c_2t^{2m+2} + \cdots} \\
&= t^m\sqrt{c_0 + c_1t^1 + c_2t^2 + \cdots} \\
&= d_0t^m + d_1t^{m+1} + \cdots
\end{aligned}$$

위 식에서 마지막 등식은 $\sqrt{1+x}$이 $x=0$에서 해석적(analytic)이므로 그 테일러 급수전개에 의하여 구할 수 있다.

우리는 $F$가 비-유클리드체(non-Euclidean field) 임을 알 수 있다.[25)] 왜냐하면 $\alpha > 0$ 이라도 다음 식

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha} &= \sqrt{a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \cdots} \\
&= t^{\frac{n}{2}}\sqrt{a_0 + a_1t^1 + a_2t^2 + \cdots} \\
&= A_0t^{\frac{n}{2}} + A_1t^{\frac{n}{2}+1} + \cdots
\end{aligned}$$

에서 보듯이 $n/2$이 일반적으로 정수가 아니기 때문이다.[26)]

**정의 4.2:** (극소 원소*(infinitesimally small number)*) $\alpha \in F$가 다음과 같이 표현될 때 **극소 원소**라고 부른다 *:*

$$\alpha = a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \cdots, \quad a_0 \neq 0, \quad n > 0$$

## 4.2 평면 기하 $\Pi$의 정의

$F$ 위에서 정의된 좌표기하 $\Pi_F$는 아르키메데스 공리를 제외한 힐베르트의 모든 공리를 만족시킨다. 그러므로 $\Pi_F$는 졸트 공리 또한 당연히 만족시킨다. 그런데 여기서 정의하는 기하 $\Pi$는 좌표기하 $\Pi_F$와는 조금 다르다. 점, 직선 등은 같지만 합동의 정의가 보통의 좌표기하와는 다르다는 것을 볼 것이다.

**정의 4.3:** $F$의 임의의 두 원소 $\alpha$와 $\beta$에 대하여 $(\alpha, \beta)$는 $\Pi$의 점이다. 우리는 때로 점 $(\alpha, \beta)$를 $\alpha + i\beta$로 나타낼 것이다. 여기서 $i^2 = -1$이고 $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$은 $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$를 의미한다.

---

25) 어떤 $F$가 유클리드체라 함은 임의의 양의 원소 $\alpha \in F$에 대하여 $\sqrt{\alpha} \in F$임을 의미한다. 유클리드체 위에서 정의된 좌표기하는 유클리드 기하임이 알려져 있다.

26) $F$의 원소 $\alpha = a_0t^n + a_1t^{n+1} + a_2t^{n+2} + \cdots, \quad a_0 \neq 0$를 정의할 때, $n$을 모든 실수로 하면 $F$는 유클리드체(Euclidean field)가 된다. 즉, 모든 $\alpha > 0$에 대하여 $\sqrt{\alpha}$가 정의되기 위해서는 $n \in \mathbb{R}$이어야 한다.

극소원소 $\tau$에 대하여 $\sin\tau, \cos\tau, e^{\tau}, e^{i\tau}$ 등이 각 함수의 멱급수 표현에 의해 $F$의 원소로 잘 정의된다. 그리고 임의의 실수 $\theta$와 극소원소 $\tau$에 대하여 다음과 같이 $F$의 원소가 정의된다.

$$\begin{aligned}\sin(\theta+\tau) &= \sin\theta\cos\tau+\cos\theta\sin\tau,\\ \cos(\theta+\tau) &= \cos\theta\cos\tau-\sin\theta\sin\tau,\\ e^{i(\theta+\tau)} &= e^{i\theta}e^{i\tau},\\ e^{i\theta+(1+i)\tau} &= e^{\tau}e^{i(\theta+\tau)}\end{aligned}$$

이러한 정의로부터 우리는 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta+\tau)+\sin^2(\theta+\tau) &= 1\\ \cos(\theta+\tau)+i\sin(\theta+\tau) &= e^{i(\theta+\tau)}\end{aligned}$$

**정의 4.4:** $F$의 임의의 세 원소의 비 $(u:v:w)$는 $\Pi$의 직선을 정의한다. 즉, 점 $(x,y)$가 직선 $(u:v:w)$ 위에 있다는 것은

$$ux+vy+w=0$$

을 만족시킴을 의미한다.

임의의 직선은 한 점 $(x_0,y_0)=x_0+iy_0$와 기울기 벡터를 나타내는 $(\alpha,\beta)$가 있어 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$x+iy=x_0+iy_0+(\alpha+i\beta)s; \qquad (\alpha+i\beta\neq 0), s\in F$$

그리고 원점이 아닌 임의의 점은

$$e^{i(\theta_0+\tau_0)}\alpha_0$$

로 표현되는 $\theta_0\in\mathbb{R}$와 $\alpha_0>0$, 그리고 극소 원소 $\tau_0$가 존재한다. 예를 들어,

$$t+i=e^{i(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}t)}\sqrt{1+t^2}$$

이다. 여기에서

$$\tan^{-1}t=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\cdots$$

이므로 $-\tan^{-1}t$는 극소원소이다.

그러므로 원점을 지나는 직선은

$$x+iy=e^{i(\theta_0+\tau_0)}\alpha$$

로 표현된다. 이 직선은 원점과 $e^{i(\theta_0+\tau_0)}$을 지나는 직선이다. $\alpha\geq 0$인 원소만 적용하면 원점을 시점으로 하며 $e^{i(\theta_0+\tau_0)}$를 지나는 반직선이다. 그리고 $\alpha\leq 0$인 원소만 적용하면 원점을 시점으로 하며 $-e^{i(\theta_0+\tau_0)}$를 지나는 반직선이다.

이제 평면기하 $\Pi$에서의 선분 및 각의 합동을 정의하기 위하여 다음과 같이 변환을 정의한다.[27)]

27) 일반적으로 좌표기하에서 정의되는 변환의 정의와 다름에 주목하라.

**정의 4.5:** *(합동 변환)* 임의의 실수 $\theta$, 극소 원소 $\tau$, 그리고 $\lambda, \mu \in F$ 에 대하여 $[\theta, \tau; \lambda + i\mu]$ 는 $\Pi$ 위에서 정의된 함수로 다음과 같다:

$$[\theta, \tau; \lambda + i\mu](x + iy) = e^{i\theta+(1+i)\tau}(x + iy) + \lambda + i\mu$$

이와 같은 함수를 우리는 **합동변환(congruent mapping)**이라 부르는데, 특히 $\lambda$와 $\mu$가 0인 경우를 **회전변환(rotation)**, $\theta$와 $\tau$가 0인 경우를 **평행이동(parallel displacement)**이라고 한다.

이러한 합동변환에 의하여 평면기하 $\Pi$에서의 선분과 각의 합동을 정의한다. 즉, 두 선분 $AB$와 $A'B'$이 합동이라 함은 합동변환 $T$가 있어 $T(AB) = A'B'$ 임을 의미하고,

$$AB \equiv A'B'$$

으로 나타낸다. 마찬가지로 합동변환 $T$가 있어 반직선 $\overrightarrow{AB}$가 반직선 $\overrightarrow{A'B'}$로, 반직선 $\overrightarrow{AC}$가 반직선 $\overrightarrow{A'C'}$로 보내지고, 각의 내부가 내부로 갈 때, 우리는 두 각 $\angle BAC$와 $\angle B'A'C'$가 합동이라고 정의하며,

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

으로 나타낸다.

## 4.3 기하 $\Pi$와 힐베르트 공리계

평면기하 $\Pi$는 힐베르트 기하가 아니다. 그러나 $\Pi$에서는 합동공리 III.5(변-각-변 공리)를 제외한 모든 결합공리, 순서공리, 합동공리가 성립하고, 변-각-변 공리 대신 조금 약한 공리가 성립한다(정리 4.4). 변-각-변 공리에 대한 내용은 다음 절에서 자세히 다룰 것이다.

**정리 4.1:** *(Hilbert, [7])* $\Pi$는 힐베르트의 결합공리, 순서공리, 그리고 변-각-변 공리를 제외한 모든 합동공리를 만족시킨다.

**증명.** 여기에서는 합동공리 III.1만 증명하기로 하자.[28)] 즉, 직선 $l$의 두 점 $A$, $B$와 직선 $l'$의 점 $A'$이 주어졌을 때, 직선 $l'$의 $A'$으로부터 임의의 방향에 선분 $AB$와 선분 $A'B'$이 합동이 되는 점 $B'$을 항상 찾을 수 있음을 증명하자. 평행이동에 의하여 임의의 점을 원점으로 옮길 수 있으므로 우리는 원점을 한쪽 끝점으로 하는 임의의 선분을 원점을 오른쪽 끝점과 왼쪽 끝점으로 하는 $x$축 위의 선분으로 옮겨주는 합동변환이 각각 존재함을 보이면 된다. 그런데 임의의 점

$$x + iy = e^{i(\theta+\tau)}\alpha \quad (\theta \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \quad \text{극소원소 } \tau)$$

에 대하여, 합동변환 $T = [-\theta, -\tau; 0]$와 $T' = [\pi - \theta, -\tau; 0]$에 의해 각각 $x$축의 양의 방향과 $x$축의 음의 방향으로 옮겨진다. 즉,

$$T(x + iy) = [-\theta, -\tau; 0]e^{i(\theta+\tau)}\alpha = e^{-\tau}\alpha$$

28) 나머지 증명은 [7]의 Appendix II를 참조하라.

$$T'(x+iy) = [\pi-\theta, -\tau; 0]e^{i(\theta+\tau)}\alpha = -e^{-\tau}\alpha$$

이므로, 임의의 원점을 지나는 반직선은 $x$축 양의 방향과 $x$축의 음의 방향으로 보내는 합동변환이 존재한다.[29) □

기하 $\Pi$에서 $x$축 위의 임의의 점은 체 $F$의 원소에 대응되고 양의 $x$축 위의 점은 $F$의 양의 원소에 해당하므로, 합동공리 III.1을 사용하여 우리는 임의의 선분의 길이(length)를 다음과 같이 정할 수 있다.[30)]

> (선분의 길이) 선분 $AB$가 양의 $x$축 위의 선분 $OC$와 합동일 때 ($O$는 원점, 즉 $O = (0,0) = 0+0i$), 선분 $AB$의 길이는 $C \in F$로 정의한다. 즉, $\overline{AB} = C$이다.

이러한 정의에 의하여 기하 $\Pi$에서 두 선분이 합동이라 함은 두 선분의 길이가 같음을 의미한다. 즉,

$$AB \equiv A'B' \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

또한 정리 4.1의 증명으로부터 우리는 원점과 점 $x+iy = e^{i(\theta+\tau)}\alpha$를 양 끝점으로 하는 선분의 길이는 $e^{-\tau}\alpha$임을 알 수 있다.

## 4.4 기하 $\Pi$와 변-각-변 공리

임의의 힐베르트 기하는 다음 '변-각-변 정리'를 만족시킨다.

> (변-각-변 정리) 두 삼각형 $ABC$와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계
>
> $$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$
>
> 이 성립하면, 삼각형 $ABC$와 삼각형 $A'B'C'$는 합동이다.

평면기하 $\Pi$에서는 변-각-변 정리가 성립하지 않음을 먼저 보자.

**정리 4.2:** *(Hilbert, [7])* $\Pi$에서는 변-각-변 정리가 성립하지 않는다.

**증명.** Figure 5의 두 삼각형 $OQP$와 $OQR$을 생각해 보자. 우선

$$[\pi/2, 0; -e^{i\pi/2}\cos t]\cos t = 0, \quad [\pi/2, 0; -e^{i\pi/2}\cos t]e^{-it} = \sin t$$

이므로, 합동변환 $[\pi/2, 0; -e^{i\pi/2}\cos t]$에 의하여 선분 $QP$는 $x$-축 위의 선분으로 옮겨지며

$$\overline{QP} = \sin t$$

이다. 마찬가지로

$$[-\pi/2, 0; -e^{-i\pi/2}\cos t]\cos t = 0, \quad [-\pi/2, 0; -e^{-i\pi/2}\cos t]e^{it} = \sin t$$

29) 사실 이러한 합동변환이 유일하다는 것도 쉽게 증명할 수 있다([7]의 118페이지 5번 성질 참조).

30) 이 정의는 좌표기하 $\Pi_F$에서의 선분의 길이와 다름에 주의하라. 좌표기하에서는 임의의 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$을 양 끝점으로 하는 선분의 길이는 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$으로 정의된다.

이므로

$$\overline{QR} = \sin t$$

이다. 그리고

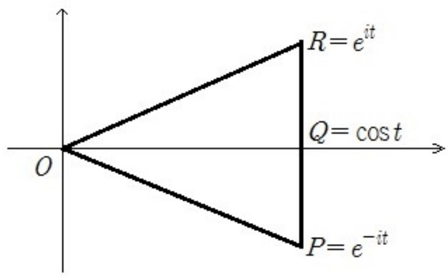


Figure 5. Side-angle-side theorem does not hold in $\Pi$.; $\Pi$에서는 변-각-변 정리가 성립하지 않는다.

$$[0, t; 0]e^{-it} = e^{(1+i)t}e^{-it} = e^t, \quad [0, -t; 0]e^{it} = e^{-(1+i)t}e^{it} = e^{-t}$$

이므로, 합동변환 $[0, t; 0]$와 $[0, -t; 0]$에 의해 각각 점 $P$와 점 $R$는 $x$-축 위의 점 $e^t$와 $e^{-t}$로 옮겨진다. 그러므로

$$\overline{OR} = e^{-t} \neq e^t = \overline{OP}$$

이 되어, 변-각-변 정리가 성립하지 않음을 알 수 있다.(합동변환 $[0, t; 0]$에 의하여 $\angle POQ$이 $\angle QOR$로 가므로 $\angle POQ \equiv \angle QOR$이다.)

□

정리 4.2의 증명에서 나타난 두 삼각형 $OQP$와 $OQR$의 대응하는 세 각은 각각 합동이다. 그러므로 이 두 삼각형에 대하여 다음 변-각-변 공리가 성립함을 알 수 있다.

(변-각-변 공리) 두 삼각형 $ABC$와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계

$$AB \equiv A'B', \ AC \equiv A'C', \ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하면, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ 이 성립한다.

그러나 이 기하에서는 일반적으로 변-각-변 공리가 성립하지 않는다.

**정리 4.3:** *(Hilbert, [7])* $\Pi$에서는 변-각-변 공리가 성립하지 않는다.

**증명.** Figure 5의 두 삼각형 $OQP$와 $OQR$에서 $\overline{OR} = e^{-t} < e^t = \overline{OP}$이므로 선분 $OP$ 위의 점 중에서 $\overline{OR} = \overline{OP'}$ 을 만족시키는 점 $P'$이 존재한다. 실제로

$$P' = e^{-(2+i)t} = e^{-2t}P = e^{-2t}(\cos t, -\sin t)$$

이다. 삼각형 $OQP'$ 와 $OQR$ 에서

$$\angle QOR \equiv \angle QOP', \quad \overline{OQ} = \overline{OQ}, \quad \overline{OR} = \overline{OP'}$$

이지만

$$\angle ORQ \neq \angle OP'Q$$

이므로 이 기하에서는 변-각-변 공리가 성립하지 않는다. □

평면기하 $\Pi$ 에서는 변-각-변 공리가 성립하지 않음을 보았다. 그러나 다음 정리가 성립한다.

**정리 4.4:** *(Hilbert, [7])* 두 삼각형 $ABC$ 와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하고, 선분 $AB$ 와 선분 $A'B'$ 이 각 $\angle BAC$ 와 각 $\angle B'A'C'$ 의 같은 방향에 각각 위치하면[31], $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ 이다.

**증명.** 임의의 두 점 $A, A'$ 에 대해서 $A$ 를 $A'$ 으로 보내는 합동변환이 존재하고, 임의의 반직선 $\overrightarrow{AB}$ 을 임의의 다른 반직선 $\overrightarrow{A'B'}$ 으로 보내는 합동변환 $T$ 가 존재하여

$$T(A) = A', T(B) = B', T(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$$

이다. 그런데 이 기하에서는 모든 합동변환이 향을 보존하므로 ([7] 의 120 페이지 참조), $C'' = T(C)$ 가 직선 $A'B'$ 에 대하여 $C'$ 과 같은 쪽에 있다.[32)]

그런데

$$A'C'' \equiv T(AC) \equiv AC \equiv A'C'$$

이고,

$$\angle B'A'C'' = T(\angle BAC) = \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이므로, $C'' = C'$ 이다. 이는 $\angle ABC = T(\angle ABC) \equiv \angle A'B'C'$ 을 의미하므로 정리가 증명되었다. 사실 합동변환 $T$ 에 의해서 삼각형 $ABC$ 가 삼각형 $A'B'C'$ 으로 가므로 두 삼각형은 합동이다. □

이 정리의 내용은 모든 삼각형에 대해서는 아니지만 향 (orientation) 이 같은 삼각형에 대해서는 변-각-변 공리가 성립한다는 것이다. 힐베르트는 이 정리를 '제한된 변-각-변 공리' 라 명명하며 이 공리를 만족시키는 기하를 연구하였다 ([7] 의 부록 II 참조).

31) 힐베르트는 직선에 대한 점의 위치, 각, 삼각형 등에 방향 (orientation) 을 주고 같은 방향에 있는 경우 equipositional이라 정의하였다. 예를들어 Figure 5에서 선분 $OQ$ 는 각 $QOR$ 과 각 $QOP$ 에 대하여 같은 방향에 위치하고 있지 않다. 힐베르트는 선분 $OQ$ 가 각 $QOR$ 의 오른쪽 방향에, 각 $QOP$ 의 왼쪽 방향에 위치하고 있다고 정의하였다.

32) 이 기하에서는 직선에 대한 대칭변환이 합동변환이 아니므로 향을 보존하는 합동변환에 대해서만 그 존재성이 보장된다. Figure 5에서 점 $P$ 와 점 $R$ 은 $x$-축에 대한 대칭변환에 의해 옮겨지지만 선분 $OP$ 와 $OR$ 은 합동이 아니다.

## 4.5 기하 $\Pi$와 졸트 공리

우리는 앞 절에서 평면기하 $\Pi$에는 밑변과 높이가 합동이면서 빗변의 길이가 다른 두 직각삼각형이 존재함을 보았다.(Figure 5에서 두 직각 삼각형 $OQP$와 $OQR$은 밑변의 길이가 $\cos t$, 높이가 $\sin t$로 같으나, 빗변의 길이가 각각 $e^t$와 $e^{-t}$로 둘 다 1과 다르다.) 이로부터 평면기하 $\Pi$는 피타고라스 정리가 성립하지 않는 기하임을 바로 알 수 있다.[33)]

**정리 4.5:** *(Hilbert, [7])* $\Pi$는 비-피타고라스 기하이다.

그런데 사실 용량에 관한 한은 피타고라스 정리가 성립한다. 즉, 밑변과 높이를 변으로 하는 두 정사각형의 합집합은 빗변을 변으로 하는 정사각형과 동일용량이다. 실제로는 분해합동임을 보일 수 있는데 이는 향이 같은 삼각형들에 대해서는 $\Pi$에서도 변-각-변 공리가 성립하기 때문이다(정리 4.4). 용량에 관한 피타고라스 정리로부터 우리는 한 변의 길이가 $e^t$인 정사각형과 $e^{-t}$인 정사각형이 동일용량임을 알 수 있는데, 이는 졸트 공리가 $\Pi$에서는 성립하지 않음을 의미한다. 다음 정리는 $\Pi$에서 졸트 공리가 성립하지 않음을 직접 증명한 것이다.

**정리 4.6:** *(Hilbert, [7])* $\Pi$에서는 졸트 공리가 성립하지 않는다.

**증명.** 1. 우선 버네이스(P. Bernays)의 증명을 먼저 살펴보자.[34)] 다음 Figure 6에서

$$[0, -t; 0]\square OQRS = \square OUQ'V$$

이므로, 사각형 $OQRS$와 사각형 $OUQ'V$가 합동이고,

$$[0, 0; \cos t e^{-(1+i)t}] \triangle OS'V = \triangle US''Q'$$
$$[0, 0; e^{-t} - \cos t e^{-(1+i)t}] \triangle OUS'' = \triangle VQ'R'$$

이므로, 사각형 $OUQ'V$와 사각형 $OQ'R'S'$이 분해합동이다. 그러므로 사각형 $OQRS$와 사각형 $OQ'R'S'$이 분해합동이다. 그런데 사각형 $OQ'R'S'$은 사각형 $OQRS$의 진부분집합이므로, 이 기하는 졸트 공리를 만족시키지 않음을 알 수 있다.

2. 다음은 1과는 다른 증명으로 뒤에서 논의할 정리 4.8을 위하여 이 증명을 여기에 추가한다.[35)] Figure 7에서 선분 $DG$의 길이가 선분 $QR$의 길이와 같도록 점 $G$를 잡으면 그림에서 보듯이 두 정사각형 $OABR$과 $OA'B'P$는 모두 $\sin t$를 한 변으로 하는 정사각형과 $\cos t$를 한 변으로 하는 정사각형의 합과 분해합동임을 다음과 같이 보일수 있다: 우선 직각삼각형 $AEB$

33) 일반적으로 피타고라스체 위에서 정의된 좌표기하에서는 피타고라스 정리가 성립한다. 그러므로 피타고라스체 $F$ 위에서 정의된 좌표기하 $\Pi_F$는 피타고라스 기하이다. 그렇지만 $\Pi$는 일반적으로 좌표기하에서 정의되는 합동변환과는 다르게 합동변환을 정의함으로써 피타고라스 정리가 성립하지 않는 기하가 되었다.

34) 이 증명은 힐베르트의 '기하학의 기초' 10판의 영역판 [7]의 책 뒷부분에 있는 버네이스(P. Bernays)의 해설(supplement V.1)에 나와 있는 증명을 자세히 적은 것이다.

35) 두 번째 증명은 피타고라스 정리에 대한 Thabit b. Qurra의 아이디어(826-901 A.D.)를 이용하여 저자가 증명하였다.([5]의 Proposition 24.10 참조)

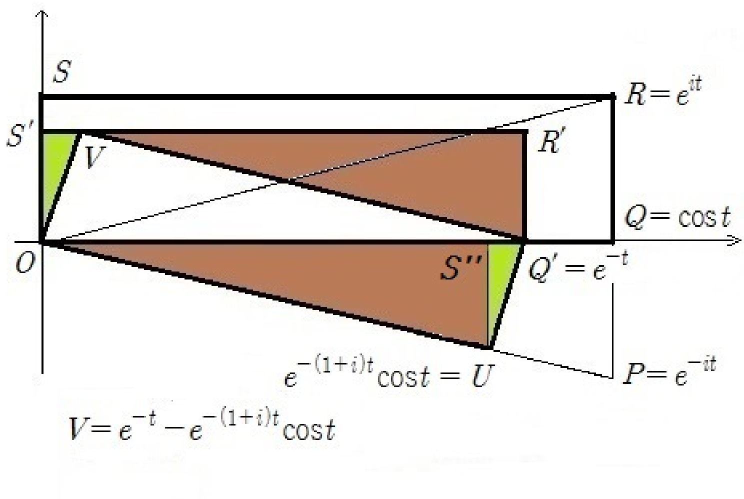


Figure 6. Example which shows that de Zolt's axiom does not hold in the geometry $\Pi$. A rectangle $OQ'R'S'$ and a rectangle $OQRS$ are equidecomposable.; $\Pi$에서는 졸트 공리가 성립하지 않음을 보여주는 예. 직사각형 $OQ'R'S'$와 직사각형 $OQRS$는 분해합동이다.

는 평행이동 $[0,0;-\sin t+i\cos t]$에 의해 직각삼각형 $OQR$으로 옮겨지고 직각삼각형 $ODA$는 평행이동 $[0,0;\cos t+i\sin t]$에 의해 직각삼각형 $RCB$으로 옮겨진다. 그리고 직각삼각형 $ODA$는 회전변환 $[-\frac{\pi}{2},0;0]$에 의해 직각삼각형 $OQR$로 옮겨지므로 직각삼각형 $OQR$의 빗변 $OR$을 한 변으로 하는 정사각형은

$$\square OABR = \square ODFR \cup \triangle ABE \cup \triangle OGI \cup \square AIGD \cup \triangle BEF$$

으로 분해되고, 밑변과 높이를 각각 한 변으로 하는 정사각형의 합은

$$\square OQHD \cup \square EHCB = \square ODFR \cup \triangle ORQ \cup \triangle RHF \cup \square BFHC \cup \triangle BEF$$

으로 분해된다. 그런데

$$[0,0;-\sin t+i\cos t]\ \triangle\ ABE = \triangle ORQ,$$
$$[0,0;\cos t+i\sin t]\ \triangle\ OGI = \triangle RHF,$$
$$[0,0;\cos t+i\sin t]\square AIGD = \square BFHC$$

이므로, $\square OABR$와 $\square OQHD \cup \square EHCB$는 분해합동이다. 마찬가지로 $\square OA'B'P$와 $\square OQH'D' \cup \square E'H'C'B'$이 분해합동임을 보일 수 있다. 그런데 $\square OQHD$와 $\square EHCB$가 평행이동에 의해 $\square OQH'D'$과 $\square E'H'C'B'$으로 각각 옮겨지므로 $\square OABR$와 $\square OA'B'P$가 분해합동임이 증명되었다.

이제 $\square OABR$을 회전변환 $[-\frac{\pi}{2},-2t;0]$을 하면 $\square OA'B'P$의 진부분집합 $\square OA''B''R''$이 된다(Figure 7의 오른쪽 그림 참조). 그러므로 이 기하는 졸트 공리를 만족시키지 않음이 증명되었다. $\square$

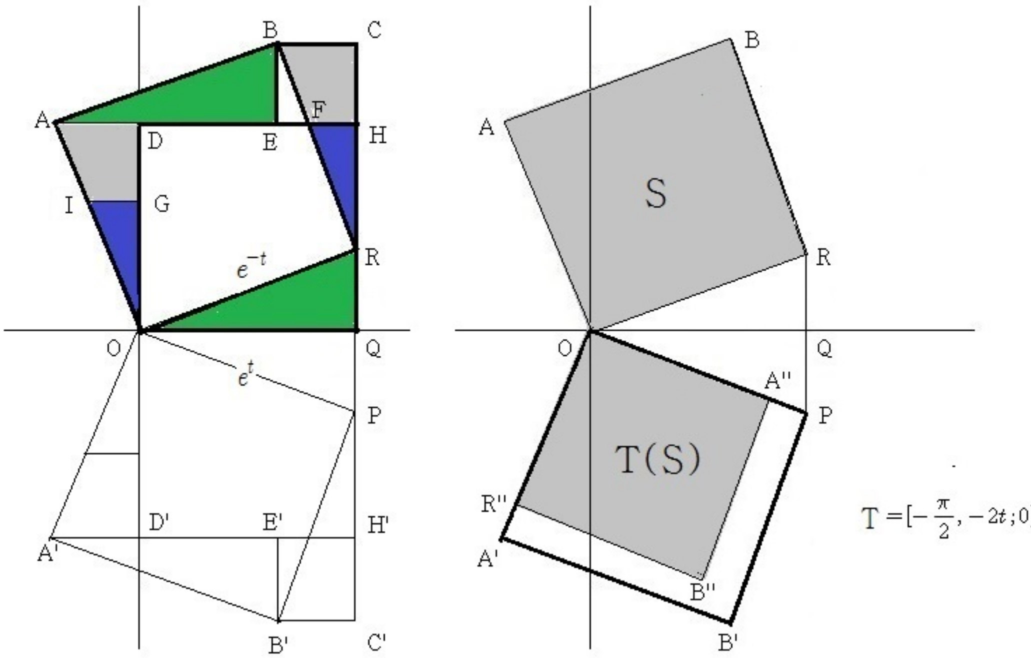


Figure 7. Example which shows that de Zolt's axiom does not hold in the geometry Π. A rectangle $OABR$ and a rectangle $OA''B''R''$ are equidecomposable.; Π에서는 졸트 공리가 성립하지 않음을 보여주는 예. 직사각형 $OABR$과 직사각형 $OA''B''R''$은 분해합동이다.

Figure 6에서 사각형 $OQ'R'S'$ 은 사각형 $OQRS$ 와 분해합동이므로 공집합과 육각형 $S'SRQQ'R'$ 이 동일용량이다. 마찬가지로 Figure 7에서 사각형 $OA''B''R''$ 은 사각형 $OA'B'P$ 이 분해합동이므로 공집합과 육각형 $A''PB'A'R''B''$ 이 동일용량이다. 그러므로 졸트 공리가 성립하지 않는 평면 기하 Π 에서는 앞에서도 언급하였듯이 공집합과 동일용량을 갖는 다각형이 존재한다.

**따름정리 4.7:** 평면기하 Π 에는 공집합과 동일용량을 갖는 다각형이 존재한다.

우리는 앞에서 "동일용량을 가지는 두 직사각형이 동일한 변을 가질 때, 나머지 변이 서로 합동이라고 할 수 있는가?" 라는 힐베르트의 질문을 생각하였다. 졸트 공리가 성립하지 않는 이 기하는 일반적으로 한 변만 합동이면서 동일용량을 갖는 두 직사각형이 존재할 수 있음을 알려준다. 평면기하 Π 에서는 분해합동이면서 그러한 성질을 만족시키는 두 직사각형이 존재한다.

**정리 4.8:** Π 에는 분해합동이면서 한 변은 합동이나, 나머지 변은 합동이 아닌 두 직사각형이 존재한다.

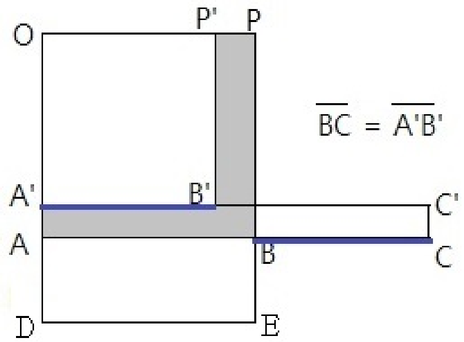


Figure 8. A rectangle $OABP$ and a rectangle $ODEP$ are equidecomposable.; 직사각형 $OABP$ 와 직사각형 $ODEP$ 는 분해합동이다.

**증명.** 우선 우리는 정리 4.6의 증명 과정에서 정사각형 안에 더 작은 정사각형이 분해합동으로 들어 있는 경우를 보았다. 그러므로 Figure 8에서 정사각형 $T = OABP$ 와 정사각형 $T' = OA'B'P'$ 이 분해합동이라 가정하자. $S = T - T'$ 은 빗금친 영역으로 직사각형 $A'ACC'$ 과 분해합동이다. 그런데 $\overline{AC} < 2\overline{AB}$ 이므로 직사각형 $S_1 = A'ACC'$ 과 직사각형 $S_2 = ADEB$ 가 분해합동이 되게 하는 점 $D$ 가 반직선 $A'A$ 위에 존재함을 다음과 같이 보일 수 있다: Figure 9에서

$$\overline{AB} < \overline{AC} < 2\overline{AB}$$

이므로, $\overline{BC} = \overline{AK}$ 인 점 $K$ 를 선분 $AB$ 위에서 잡을 수 있다. 직선 $C'K$ 와 직선 $AA'$ 가 만나는 점을 $A''$ 라 하고, $\overline{BC} = \overline{B'''C'}$ 인 점 $B'''$ 을 선분 $A'C'$ 위에서 잡으면, 삼각형 $AA''K$ 와 삼각형 $B'''LC'$ 이 합동이고 직각삼각형 $A''B''L$ 과 직각삼각형 $KCC'$ 이 합동이다. 그러므로 직사각형 $A'A''B''B'''$ 은 주어진 직사각형 $A'ACC'$ 과 분해합동이다. 이제 직사각형 $A'A''B''B'''$ 을 아래로 평행이동하여 선분 $A'B'''$ 을 선분 $AB$ 에 맞추면 반직선 $A'A$ 위에 점 $D$ 가 존재하여 직사각형 $ADEB$ 가 직사각형 $A'ACC'$ 과 분해합동이 되게 할 수 있음이 증명된다.

그런데

$$T = T' \cup S,$$
$$\square ODEP = T \cup S_2$$

이고, $T$ 와 $T'$, $S$ 와 $S_2$ 이 각각 분해합동이므로, 직사각형 $OABP$ 와 사각형 $ODEP$ 이 분해합동임이 증명되었다. □

우리는 정리 4.8으로부터 다음을 바로 알 수 있다:

**따름정리 4.9:** 평면기하 $\Pi$ 는 다음을 만족시킨다:

*(i)* 임의의 직사각형은 자신과 분해합동인 더 작은 직사각형을 내부에 포함한다.

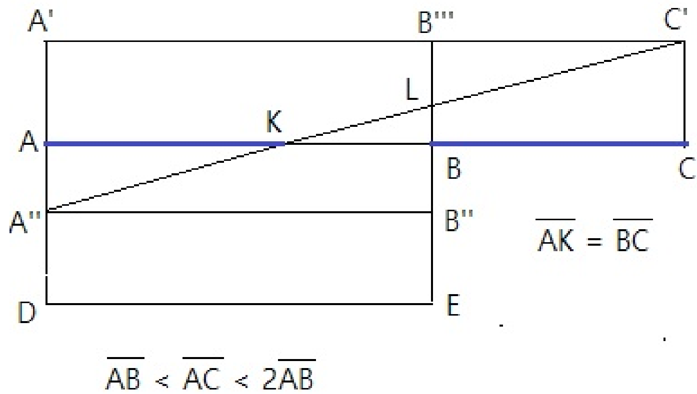


Figure 9. A rectangle $A'ACC'$ and a rectangle $A'A''B''B'''$ are equidecomposable.; 직사각형 $A'ACC'$ 과 직사각형 $A'A''B''B'''$ 은 분해합동이다.

*(ii)* 공집합과 동일용량을 갖는 직사각형이 존재한다.

*(iii)* 면적함수가 존재하지 않는다.

## 5 요약 및 결론

우리는 본론에서 "전체는 부분보다 크다" 라는 유클리드의 5번째 일반 공준을 '용량' 에 대하여 적용한 졸트 공리가 성립하지 않는 평면기하를 보았다. 이 기하는 합동공리 III,5(변-각-변 공리)를 만족시키지 않는 비-힐베르트 기하이다. 일반적으로 힐베르트의 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군을 모두 만족시키는 평면기하, 즉 힐베르트 기하에서는 졸트 공리가 성립함이 알려져 있는데, 이는 그러한 기하에는 항상 면적함수가 존재하기 때문이다.[36)]

그렇다면 졸트 공리가 힐베르트 기하에서만 성립하는 것일까? 다시 말해서, 졸트 공리가 성립하는 기하는 힐베르트의 결합공리군, 순서공리군, 합동공리군이 기본적으로 성립해야 하는 것일까? 그렇지는 않다. §3.5에서도 언급한 바 있듯이, 비-힐베르트 기하 중에서도 졸트 공리가 성립하는 기하가 존재한다. 택시기하와 물톤기하는 변-각-변 공리가 성립하지 않는 비-힐베르트 기하이지만 면적함수가 존재하여 졸트 공리가 성립한다. 그러므로 면적함수를 갖는다는 것은 기하가 갖는 하나의 중요한 특성이라고 볼 수 있는데, 이러한 성질이 졸트 공리의 성립 여부와 동등한 것인지는 불분명하다. 즉, 어떤 기하가 졸트 공리를 만족시킨다는 것과 그 기하에 면적함수가 존재한다는 것이 동치인지 생각해 볼 필요가 있다.

졸트 공리와 관련하여 다음 질문을 더 생각해 볼 수 있다. 본론에서 소개한 졸트 공리가 성립

36) 힐베르트는 평행공리가 성립하는 모든 힐베르트 기하에서 면적함수를 정의하여 졸트 공리가 성립함을 증명하였다. 그런데 평행공리가 성립하지 않는 힐베르트 기하에서도 면적함수가 존재하므로 임의의 힐베르트 기하에서 졸트 공리는 참이다. 그러나 면적함수를 사용하지 않는 순수한 기하학적인 증명은 아직 없는 상태이다.

하지 않는 기하의 예는 비-아르키메데스이고 비-피타고라스 기하이다. 그렇다면 피타고라스 기하 또는 아르키메데스 기하 중에서 졸트 공리가 성립하지 않는 기하가 있을까? 힐베르트는 그의 책 '기하학의 기초' 10판의 부록 II에서 아르키메데스 기하이면서 졸트 공리가 성립하지 않는 또 다른 평면기하를 소개한다. 이 기하는 본론에서 소개한 기하와 유사한 기하로, 아르키메데스 공리가 성립하지만 대신 다음 공리가 성립하지 않는 기하이다.

> (NEIGHBORHOOD AXIOM) 임의의 선분 $AB$에 대해서 내부에 선분 $AB$와 합동인 선분을 포함할 수 없는 삼각형이 존재한다.

그렇다면 아르키메데스 공리와 피타고라스 공리를 모두 만족시키는 기하에서는 항상 졸트 공리가 성립할까? 즉, 아르키메데스 공리와 피타고라스 공리를 동시에 만족하는 기하 중에서 졸트 공리가 성립하지 않는 기하의 존재성에 대하여 의문을 가져 볼 수 있다.

## 감사의 말

본 논문은 저자가 고등과학원에서 보낸 2016-2017 연구년 기간 동안 완성된 것입니다. 이 주제에 대하여 많은 논의를 함께 해주신 양성덕 교수님께 깊은 감사를 드리며, 또한 적절한 지적과 조언을 해주신 심사자 분들께도 감사드립니다.

## References

1. M. Dehn, M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Verlag von Julius Springer, 1926.
2. Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, Première partie: Des méthodes communes à toutes les sciences de raisonnement. Deuxième partie: Applications des méthodes générales à la science des nombres et à la science de l'étendue [les duex parties se trouvent dans un seul tome avec des paginations séparées], Paris : Gauthier Villars, 1866.
3. Euclid, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Vols. 1,2,3, Dover Publications, Inc., New York, 1956.
4. M. Hallett, M. Ulrich, *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry* 1891–1902, ed. by Michael Hallett and Ulrich Majer, David Hilbert's Foundational Lectures, vol. 1, Berlin: Springer, 2004.
5. R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
6. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 1st ed, Authorized translation by E. J. Townsend, The open court publishing company, 1902.
7. D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, 2nd English Edition, Authorized translation by Leo Unger from the 10th German Edition, Revised and Enlarged by Dr. Paul Bernays, The open court publishing company, 1971.

8. S.-D. Yang, K. Jo, On Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie', *The Korean Journal for History of Mathematics* 24(4) (2011), 61–86.
9. R. Kaya, Area formula for Taxicab triangle, *ΠME Journal* 4(12) (2006), 219–220.
10. W. Killing, *Grundlagen der Geometrie*, Vol. 2, Part 5, Section 5, 1898.
11. İ. Kocayusufoğlu, E. Özdamar, Isometries of Taxicab geometry, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1* 47 (1988), 73–83.
12. W. Pejas, Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie, *Math. Annalen* 143 (1961), 212–235.
13. F. Schur, *Ueber den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren*, Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschenden Gesellschaft, 1892.
14. O. Stolz, Die ebebenVielecke und die Winkel mit Einschluss der Berührung-Winkel als Systeme von absoluten Grössen, *Monatschefte für Mathematik und Physik, Jahrgang* 5 (1984), 233–240.
15. K. P. Thompson, *The nature of length, area, and volume in Taxicab geometry*, 2011.
16. K. Volkert, *Ist das Ganze größer als sein Teil ? - Einigie Anmerkungen zur Geschichte eines scheinbar evidenten Prinzips*, Histoires de géométries : textes du séminaire de l'année 2003, Paris, Foundation Maison des Sciences de l'Homme, 2004.
17. K. Volkert, Le tout est-il tourjours plus grand que la partie ?, *Revue d'histoire des mathématiques* 16 (2010), 287–306.
18. de Zolt, *Principii della equaglianza di poligoni preceduti da alcuni cenni critici sulla teoria della equivalenza geometrica*, Milano : Briola, 1881.
19. de Zolt, *Principii della equaglianza di poliedri e di poligoni sferici*, Milano, Briola, 1883.

## 부록 : '기하학의 기초' 10판 영역 [7]에 제시되어 있는 힐베르트의 공리계 중 평면 공리 ([8, 부록 2]에서 발췌)

### I 결합공리군

**I, 1.** 어떠한 두 점 $A$, $B$에 대해서도 점 $A$와 $B$를 모두 지나는 직선이 있다.

**I, 2.** 어떠한 두 점 $A$, $B$에 대해서도 점 $A$와 $B$를 모두 지나는 직선은 많아야 하나 있다.

**I, 3.** 한 직선에는 점이 적어도 두 개 있다. 한 직선에 있지 않은 점이 적어도 세 개 있다.

### II 순서공리군

**II, 1.** $B$가 $A$와 $C$ 사이에 있으면, $A$, $B$, $C$가 한 직선의 서로 다른 세 점이고 $B$는 또한 $C$와 $A$ 사이에 있다.

**II, 2.** 임의의 두 점 $A$와 $C$에 대하여, 직선 $AC$에 적어도 한 점 $B$가 있어서 $C$가 $A$와 $B$ 사이에 있다.

**II, 3.** 한 직선에 있는 세 점 중 많아야 한 점만이 나머지 두 점 사이에 있다.

**II, 4.** 한 직선에 있지 않은 세 점 $A$, $B$, $C$와 평면 $ABC$에 있으면서 $A$, $B$, $C$ 중 어느 점도 지나지 않는 직선 $a$가 있을 때, 직선 $a$가 선분 $AB$의 한 점을 지나면 $a$는 선분 $BC$ 또는 선분 $AC$의 한 점을 지난다.

### III 합동공리군

**III, 1.** 직선 $a$의 두 점 $A$, $B$와 직선 $a'$(직선 $a$와 같을 수도 있음)의 점 $A'$이 주어졌을 때, 직선 $a'$의 $A'$으로부터 임의의 방향에 선분 $AB$와 선분 $A'B'$이 합동이 되는 점 $B'$을 항상 찾을 수 있다. 이 관계는

$$AB \equiv A'B'$$

으로 표시한다.

**III, 2.** 선분 $A'B'$과 선분 $A''B''$이 동일한 선분 $AB$와 합동이면 선분 $A'B'$은 선분 $A''B''$과 합동이다; 간단히 말하여, 두 선분이 제 삼의 선분과 합동이면 그 두 선분은 서로 합동이다.

**III, 3.** 직선 $a$의 두 선분 $AB$와 $BC$가 점 $B$만을 공유하고, 직선 $a'$의 두 선분 $A'B'$과 $B'C'$이 점 $B'$만을 공유한다고 하자. 여기서 $a$와 $a'$은 같은 직선일 수도 있다. 이 경우, 만약 $AB \equiv A'B'$이고 $BC \equiv B'C'$이면 $AC \equiv A'C'$이다.

**III, 4.** $\angle(h,k)$가 평면 $\alpha$의 각이고 $a'$이 평면 $\alpha'$의 직선이며, $a'$에 대한 $\alpha$의 한쪽 면이 주어졌다고 하자. $h'$이 점 $O'$을 시점으로 하는 직선 $a'$의 반직선이라 하자. 이러면 평면 $\alpha'$에 각 $\angle(h,k)$가 각 $\angle(h',k')$과 합동이거나 같고 동시에 각 $\angle(h',k')$의 모든 내부점들이 주어진 $a'$의 한쪽 면에 있게 되는 반직선 $k'$이 단 하나 있다. 우리는 이러한 관계를

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

로 표시한다. 모든 각은 자신과 합동이다; 즉,

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k).$$

**III, 5. (변-각-변 공리)** 두 삼각형 $ABC$와 $A'B'C'$ 사이에 합동관계

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

이 성립하면,

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

## IV 평행공리

**IV.** 직선 $a$와 그 직선에 있지 않은 한 점 $A$가 주어졌을 때, $a$와 $A$로 결정되는 평면에는 점 $A$를 지나고 직선 $a$를 만나지 않는 직선이 많아야 하나 있다.

## V 연속공리군

**V, 1 (아르키메데스 공리).** 어떠한 두 선분 $AB$와 $CD$에 대해서도 $A$에서 시작하여 반직선 $AB$를 따라 선분 $CD$를 $n$번 인접하여 붙여 만든 선분이 점 $B$를 넘게 되는 자연수 $n$이 있다.

**V, 2 (직선의 완비성 공리).** 공리군 I-III과 V, 1로부터 나오는 직선에서의 순서와 합동에 관한 기본 성질들 뿐만 아니라 기존 원소들 사이에 있는 관계까지 보존하는 새로운 순서와 합동 관계를 가지는 집합으로 직선을 확장하는 것은 불가능하다.