

수학적 연결성 관점에서 CMP 교과서 분석 -방정식·부등식과 함수 단원을 중심으로-

박정미¹⁾ · 박장희²⁾ · 이중권³⁾

2009 개정 교육과정과 2015 개정 교육과정 수학과 교육목표에서 실생활에서의 수학의 활용도에 대해 강조하고 있음에도 실제 학교 현장에서는 그에 대한 인식이 매우 낮다. 이에 본 연구에서는 수학적 연결성 관점에 중점을 둔 교육과정에 주목할 필요가 있음을 인식하고, NCTM(1989, 2000) 기준 중에서 연결성 관점에 중점을 두고 문제해결 능력 강화와 수학적 의사소통능력을 향상시키기 위해서 1990년부터 꾸준히 개발된 CMP⁴⁾ 교육과정을 살펴보고자 한다. 이를 위해 수정, 보완을 거쳐 2014년 세 번째로 출간된 CMP 교과서를 방정식·부등식과 함수 단원 중심으로 분석하였다. 첫째, Janvier(1987)의 함수 표현 양식(상황·언어적 서술, 표, 그래프, 공식)을 활용한 새로운 분석틀을 사용하여 연결성과 관련한 분석을 하였고, 둘째, 수학의 다른 단원, 다른 영역, 타 교과목 및 실생활 내용간의 연결성과 관련하여 분석하였다. 그 결과 CMP 교과서에는 새로운 개념, 원리를 제시할 때나 문제 풀이 활동을 할 때 상황에 맞는 다양한 실생활 소재가 사용되고 있었다. Janvier(1987)의 함수 표현 양식에 따른 12가지의 연결 과정이 다양하게 제시되어 있었고, 방정식과 함수, 부등식과 함수와의 관계, 타 교과목 및 실생활 내용간의 연결성도 구체적인 상황으로 표현되어 있음을 확인할 수 있었다.

주요용어 : CMP 교육과정, Janvier의 함수 표현 양식, 함수 표현 양식 분석틀

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교 현장에서 수학교사들은 종종 학생들로부터 이런 질문을 받는다. “선생님! 수학은 배워서 언제, 어디에 사용하나요?” 굉장히 우회적으로 적은 것으로 실제로는 이보다 훨씬 더 강한 표현으로 지금 배우는 수학의 실용성에 대해서 묻는다.

2009 개정 교육과정에서의 수학과 교육목표는 주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰,

* MSC2010분류 : 97D99

1) 동국대학교 일반대학원 (nanna31707@naver.com)

2) 동국대학교 일반대학원 (jang-hee@hanmail.net)

3) 동국대학교 (joonglee@dgu.edu), 교신저자

4) 미국과학재단(NSF)은 NCTM(1989) 기준에 맞는 수학교육과정을 개발하기를 원하는 수학교육자들에게 연구비를 지원하여 NCTM-지향 교육과정을 개발하였는데, 그 중 높게 평가된 교육과정 중 하나가 ‘The Connected Mathematics Project’이다(김해규, 2011).

분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 기본적인 기능과 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하며, 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 통하여 생활 주변이나 사회 및 자연의 수학적 현상에서 파악된 문제를 합리적이고 창의적으로 해결하는 능력을 갖추게 한다는 것이다(교육과학기술부, 2011). 또한 2017년 올해 초등학교를 시작으로 2020년에 초, 중, 고 모든 학년에 적용될 2015 개정 교육과정의 목표 역시 수학을 통해 생활 주변과 사회 및 자연 현상을 수학적으로 이해하여 의사소통을 할 수 있는 능력을 기르는 것으로, 학생들이 수학을 실생활에서 자유롭게 사용할 수 있기를 바라는 기대감이 날로 증가하고 있음을 알 수 있다.

하지만 이런 기대와는 달리 TIMSS 2015의 결과는 초등과정 수학(primary maths) 3위, 중등과정 수학(secondary maths) 2위로 매우 높은 수준이지만, 중학교 2학년 학생의 정의적 태도의 결과 39개국 중 수학에 대한 자신감은 35위, 수학 학습에 대한 흥미는 37위, 수학에 대한 가치 인식은 37위로 나타났다. 특히 TIMSS 2003에서부터 공통으로 사용된 가치 인식의 4개의 하위 문항 중 ‘다른 과목을 배우는 데 수학이 필요하다.’, ‘원하는 대학에 들어가기 위해 수학을 잘할 필요가 있다.’, ‘원하는 직업을 갖기 위해 수학을 잘할 필요가 있다.’에 대한 응답 비율은 상승하는 추세인 반면, ‘수학을 배우는 것이 일상생활에 도움이 된다고 생각한다.’에 대한 응답 비율은 지속적으로 하락하고 있다. 즉, 수학을 도구 교과로서 생각하는 학생에 비해 실생활에서 수학의 활용도에 대한 인식은 낮아지고 있는 것을 확인할 수 있다.

이런 점에서 수학과 교육목표의 구현을 위해서 우리는 수학적 내용 사이의 연결, 수학 이외의 학문과의 연결, 그보다 더 확장시켜 실생활과의 연결과 같은 수학적 연결성 관점에 중점을 둔 교육과정에 주목할 필요가 있다. CMP 교육과정은 NCTM(1989, 2000) 기준 중에서 연결성 관점에 중점을 두고 문제해결 능력 강화와 수학적 의사소통능력을 향상시키기 위해서 개발된 수학교육과정으로 1990년부터 꾸준히 개발되어 왔으며, 지난 15년간 여러 가지 방법으로 얻은 정보를 가지고 수정, 보완이 된 세 번째 CMP 교과서가 2014년에 출판되었다. CMP 교과서는 6학년은 7개, 7학년은 8개, 8학년은 8개의 단원으로 구성되어 있으며, 단원마다 약 100쪽 이상의 한권의 책으로 만들어졌다. 그 중 방정식·부등식과 함수 단원을 중심으로 만들어진 단원은 8개로, 본 연구에서는 이를 중심으로 수학적 연결성의 관점에서 CMP 교과서의 학습 내용을 분석해 보고자 한다.

2. 연구문제

CMP 교과서에는 수학적 연결성의 관점에서 방정식·부등식과 함수와의 관계가 어떻게 나타나는가?

- 1) 표현 양식(상황·언어적 서술, 표, 그래프, 공식)간의 연결성과 관련하여 CMP 교과서의 학습 내용은 어떠한가?
- 2) 수학의 다른 단원, 다른 영역, 타 교과목 및 실생활 내용간의 연결성과 관련하여 CMP 교과서의 학습 내용은 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. NCTM에서의 수학적 연결성

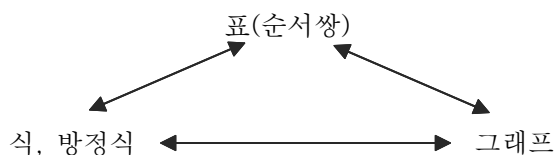
NCTM(1989)에 제시된 14가지 기준 중에서 4번째로 제시된 수학적 연결성은 9~12학년의 수학교육과정에서 같은 개념의 동치표상을 인식할 수 있는지, 한 표상에서의 절차를 동치표상에서의 절차와 연결시킬 수 있는지, 수학적 내용 사이의 연결성을 이용하고 음미할 수 있는지, 수학과 다른 학문 사이의 연결성을 이용하고 음미할 수 있는지를 말한다. 이 기준은 수학적 내용 사이의 연결과 수학과 다른 학과 사이의 연결의 중요성을 강조하고 있다. 첫째는 두 동치표상 사이와 각각에서의 과정들 사이의 수학적 연결(mathematical connection)이고, 둘째는 실세계 또는 수학 이외의 학문에서 제기되는 문제 상황과 그것의 수학적 표상 사이의 모델링 연결(modeling connection)이다.

NCTM(2000)에 제시된 연결성 기준은 첫째, 학생들이 수학적 아이디어 사이에서 연결성을 인식하고 활용할 수 있는지, 둘째, 수학적 사고가 어떻게 내적으로 연결되어 있는지 이해하고 각각의 수학적 사고를 기반으로 통합된 전체를 산출할 수 있는지, 셋째, 수학 이외의 상황에서 수학을 인식하고 활용할 수 있는지를 말한다. 여기에서 두 번째로 말한 수학적 사고를 내적으로 연결하는 것이 내적 연결성이며, 세 번째로 말한 수학 이외의 상황에서 수학을 인식하는 것이 외적 연결성이다.

연결성이 없으면 학생들은 너무 많은 고립된 개념과 기능을 배우고 암기해야 한다. 수학 내적 연결성이 갖추어지면 선행 지식 위에 새로운 이해를 구축할 수 있기 때문에 암기해야 하는 개념이 점점 줄어들고 전체를 통합된 것으로 생각할 수 있어서 부분을 잘 잊지 않는다. 수학 외적 연결성이 필요한 이유는 학생들이 동일한 수학 개념을 다루더라도 풍부한 맥락과 더불어 실생활과의 관련성 속에서 수학을 형식적으로만 이해하지 않으며, 수학적 실생활과 관련이 없는 추상적인 교과가 아니라 생활의 일부이며 유용한 도구가 된다는 점을 인식할 수 있기 때문이다(추재임, 2012). 따라서 수학적 연결성은 수학의 가치와 타학문에의 기여에 대한 학생들의 신념에 영향을 미칠 정도로 충분히 자주 지도되어야 하며, 학생들이 어떤 수학을 배우든지 자신들이 학습한 수학을 실생활 상황에 적용하는 기회를 가져서 수학을 사회와 자신의 삶에 스며든 것으로 보아야만 한다(NCTM, 1998).

2. 방정식·부등식과 함수와의 관계

함수의 표현은 수치적, 그래프적, 대수적 또는 그림으로 나타낼 수 있다. 번역은 본질적으로 다른 함수에 대한 이러한 표현으로부터 함수를 전환하는 과정을 말한다.



[그림 II-1] 함수의 표현 활동 (Meissner & Mueller-Philipp, 1933)

함수의 주된 대수적 표현은 ‘식’이다. ‘식’은 주어진 변수 x 에 대한 함수값 $f(x)$ 를 결정하는 ‘방법’ 또는 ‘규칙’을 제공한다. 기호 대수는 학생들이 함수를 구성하는 수학적 연산과 변수들에 대한 통찰력을 갖도록 유도한다. 변수들을 구별하고 관련시키는 관계의 대수적 공식은 함수의 개념을 형성하도록 돕는다. 그러나 많은 학생들은 대수를 접했을 때 가지는 인지적 어려움과 더불어 함수의 그래프와 대수와의 관계를 파악하지 못하는 경향이 있다. 방정

식의 경우 방정식을 만족하는 해를 구하는데 문자를 사용하고 있고, 함수의 경우 함수식을 만족하는 함수값을 찾는데 문자를 사용하고 있기 때문에 방정식과 함수를 구별하는데 어려움을 겪고 있다(이현수 외, 2015). 이러한 현상을 완화하기 위해 함수를 그래프적 표현으로 변환해야 한다.

함수의 개념은 수학에서 아주 중요한 통합적 아이디어의 하나이다. 두 집합의 원소 사이의 특수한 대응 관계인 함수는 산술, 대수에서 기하, 확률에 이르기까지 교육과정 전체의 공통된 주제일 뿐만 아니라 실생활이나 자연 현상에서 찾아볼 수 있는 많은 투입과 산출 상황의 수학적 표상이기도 하다. 함수적 사고는 미래 사회의 일원으로서 살아가는 데 그 소양으로 필요한 경우가 많으므로, 함수에 관한 학습은 큰 의의를 가질 뿐만 아니라 수학의 여러 가지 분야에서 중요한 역할을 하게 된다.

3. 표현 양식 간의 수학적 연결성

Janvier(1987)는 함수를 표현하는 양식을 상황·언어적 서술, 표, 그래프, 공식 등으로 구분하고 있다. 상황·언어적 서술은 교실에서 사용되는 흔한 표현으로 학생들의 의사소통으로 말한다. 둘째, 표는 함수의 수치적 표현 중 하나로 수치 패턴을 설명하고 함수의 특정한 값을 비교하는데 유용하다. 셋째, 그래프는 함수의 시각적 관점을 제공하는데 아주 유용한 도구로써 그래프를 통해 변화 상태, 주기성, 패턴의 성질에 대한 전체적인 경향을 한 눈에 알아볼 수 있다. 넷째, 공식은 수학에서 대부분을 차지하는 표현으로 표나 그래프보다 간결하고 정확하며 변수들의 관계를 쉽게 해석할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 이 4가지의 표현 양식을 연결하는 번역 과정은 <표 II-1>과 같이 12가지가 있다(김남희 외, 2017).

<표II-1> 함수 표현 양식 간의 번역 과정(Janvier, 1987)

to from	상황·언어적 서술 (Situations, Ver- bal Description)	표 (Tables)	그래프 (Graghs)	공식 (Formulae)
상황·언어적 서술 (Situations, Ver- bal Description)		측정하기 (Measuring)	그래프 개형그리기 (Sketching)	모델링 (Modelling)
표 (Tables)	읽기 (Reading)		점찍기 (Plotting)	공식 알아내기 (Fitting)
그래프 (Graghs)	해석하기 (Interpretation)	점의 좌표 읽기 (Reading off)		곡선 알아내기 (Curve fitting)
공식 (Formulae)	매개변수인식하기 (Parameter Recognition)	계산하기 (Computing)	그래프 개형그리기 (Sketching)	

4. 선행 연구 분석

김유경(2013)은 초등학교 6학년 학생을 대상으로 수학적 연결성을 강조한 수업의 구성은 어떠한지, 어떻게 구현되는지 알아보기 위해 개념, 절차, 문제 해결을 학습하는 수업에서 많이 활용되고 있는 3가지 유형의 수학적 연결성을 강조한 수업 모형을 개발하고 교과서를 재

구성하여 실제 수업을 구현하였다. 현행 수학 교과서는 다양한 수학적 연결 보다는 본시 학습 목표 달성을 위해 충실한 구성을 취하거나 질 높은 연결의 방법보다는 단계적 질문을 통해 표준화된 절차로 형식화하고 있다. 교육과정의 틀 내에서 수학적 연결성을 강조한 수업을 실시한 결과 학생들은 수업의 전 단계에서 선행 개념과의 연결을 형성하려고 노력하였고, 다양한 절차를 학생 중심으로 찾아낼 수 있었으며, 반성적으로 사고함으로써 문제 해결의 정교화가 이루어졌다.

손혜진(2011)은 중학교 3학년 학생들과 고등학교 1학년 학생들 사이에서 방정식과 함수의 관계에 대한 이해유형은 어떠한 차이가 있는지 어떤 특징이 있는지를 연구하였다. 중학교 3학년 학생들은 이미 일차방정식과 일차함수의 관계에 대하여 학습하였지만 일차방정식의 해를 구하거나 일차함수의 그래프를 그리는 데에는 방정식과 함수의 관계를 연결하는데 제한이 있었으며, 고등학교 1학년 학생들은 일차방정식과 일차함수의 관계도 더욱 쉽게 이해하였다. 하지만 방정식과 함수의 관계에 대한 이해유형이 높았던 고등학교 1학년 학생도 방정식과 함수의 관계를 공식처럼 이해하고 있는 것으로 나타났으며, 방정식과 함수의 관계를 지도할 때 방정식의 구조와 함수의 구조 사이의 연결과 그에 대한 의미를 함께 지도하여야 한다고 하였다.

권효정(2016)은 수학 성취 수준이 낮고 수학에 대한 부정적인 신념을 가지고 있는 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 표현 양식간의 연결성을 강조한 수업을 위해 학습 자료를 개발하여 수업에 적용하였다. 수학 학습 부진 학생들은 개발된 자료를 가지고 표현 번역 활동으로 문제를 해결하였고 그 결과 학생들의 부정적인 수학적 신념이 긍정적으로 변화되었고, 수학 문제해결에 대한 신념에서 ‘도전성’ 부분이 크게 향상되고 자아개념에 대한 신념에서는 ‘자신감’이 크게 향상됨을 알 수 있었다.

김해규(2011)는 1990년대 이후 20여 년간 미국에서 추진되고 있는 수학교육 개혁 프로그램 중의 하나인 ‘The Connected Mathematics Project’에 대하여 고찰하였다. CMP가 추진된 배경, CMP1⁵⁾ 교과서에 대한 논란, CMP1을 수정하고 보완한 CMP2 교과서에 대한 내용 등을 연구하였으며, 현재 적용되고 있는 2009 개정 교육과정이 그 당시에 개발되는 시기여서 한쪽으로 편중되지 않은 더 좋은 교육과정의 개발 방향에 시사점으로 제공하기를 기대한다고 밝혔다.

추재임, 이종학, 김원경(2013)은 중학교 방정식과 함수 단원을 중심으로 한국 수학 교과서와 미국 CMP 교과서를 비교·분석 하였다. 한국 교과서는 수학의 계통성에 중심을 두어 수학적 지식을 효율적으로 학습할 수 있는 계열로 구성되어 있고, CMP 교과서는 한국의 교과서와는 달리 방정식과 함수 단원을 이원화하여 구성하지 않고, 방정식에서 표와 그래프를 이용하여 함수를 도입하는 방법으로 방정식과 함수 단원을 연결해서 다루고 있음을 확인하였다. 단원 구성 체계 면에서 한국 교과서는 개념을 중심으로 문제들이 구성되어 있지만 CMP 교과서는 커다란 상황 속에서 맥락을 중심으로 문제들이 구성되어서 하나의 단원이 이루어지고 있었고, 새로운 내용을 학습하면서 이전에 배운 내용이나 개념을 다시 한 번 더 중복해서 다루고 있었다. 따라서 CMP 교과서 체계는 수학적 개념을 전체적으로 이해하는 단계에서 학생들에게 수학적 연결성을 효과적으로 인식시킬 수 있지만 반면에 초기 학습에서 개념 지도의 어려움이 있을 수 있음을 밝혔다.

염수경(2016)은 한국 교과서와 미국 CMP 교과서 비교·분석을 중심으로 그래프 해석 및 번역 능력 향상을 위한 수업 자료 개발 및 적용을 하였다. 중학교 1학년 학생들 6명을 대상으로 그래프 해석에 대해 분석한 결과 학생들은 양적 해석보다 질적 해석에서 어려움을 겪

5) 1991년부터 1996년까지 개발된 교육과정을 ‘CMP1’, 2000년부터 2006년까지 개발된 교육과정을 ‘CMP2’로 하고, 2010년부터 개발된 교육과정을 ‘CMP3’라 구분한다.

는 것으로 나타났으며 그에 대한 해결 방안으로 변수의 변화가 그래프에서 어떻게 표현이 되는가를 지도해야 하며 조건을 달리하여 다양한 경우에 대한 탐구 기회를 제공할 필요가 있으며 학생들 간의 상호작용을 유도함으로써 자연스럽게 함수 해석 능력을 기를 수 있도록 하여야 한다고 했다. 또한 한국교과서는 일부 번역 활동에 치중되어 있는 경향이 있어 하나의 변화에 대해서 서로 다른 표현 양식으로 다양하게 번역 활동이 필요함을 강조했다.

그동안의 CMP 교과서에 대한 선행연구를 살펴보면 수학적 연결성, 방정식과 함수와의 관계, 표현 양식간의 연결성을 매개로 해서 한국 교과서와 비교·분석을 하였지만 CMP 교과서의 내용 중에 비교 가능한 부분만을 선택하여 서술한 것으로 CMP 교과서에 대한 전체적인 분석이 없었다. 이에 이번 연구에서는 CMP 교과서의 전체적인 분석을 하여 우리나라 수학교과서 개발에 활용될 수 있도록 유의미한 시사점을 찾고자 한다.

III. 연구방법

CMP 교육과정에서 방정식·부등식과 함수 단원은 <표 III-1>와 같다.

이 중에서 ‘Growing, Growing, Growing’ 단원은 우리나라에서 고등학교 과정에 있는 수 단원이기 때문에 이번 연구에서는 제외시키기로 한다. 또한 이전의 CMP 교육과정에서는 ‘Variables and Patterns’ 단원이 7학년 과정에 있었지만, 이번 CMP3 교육과정에서는 6학년 과정으로 이동했으며, 이전에 CMP 교육과정에 있었던 ‘Shapes of Algebra’ 단원은 없어지고, ‘It’s In the System’과 ‘Function Junction’이라는 단원으로 확장되어 대수 영역을 좀 더 심도 있게 다루고 있다. 이와 같이 방정식·부등식과 함수 단원으로 이루어진 7개의 단원의 학습 내용을 분석한다.

<표 III-1> CMP 교육과정 중 방정식·부등식과 함수 단원

학년	단원명	소단원
6	Variables and Patterns : Focus on algebra	1. 변수, 표, 그래프 2. 변수사이의 관계를 분석하기 3. 방정식과 관련된 변수 4. 식, 방정식, 부등식
7	Moving Straight Ahead : Linear Relationships	1. 걷는 속도 2. 그래프, 표를 이용한 일차식 알아보기 3. 방정식 풀기 4. 비율과 관련하여 기울기 알아보기
8	Thinking With Mathematical Models : Linear and Inverse Variation	1. 자료 패턴 찾기 2. 일차의 예와 방정식 3. 반비례 4. 수치적 데이터에서 가변성과 관련성 5. 범주적 데이터에서 가변성과 관련성
	Growing, Growing, Growing : Exponential Relationships	1. 지수적 증가 2. 지수적 성장 패턴 3. 지수적 감소 4. 지수와 패턴
	Frog, Fleas, and Painted Cubes : Quadratic Functions	1. 이차함수 소개 2. 이차식 3. 이차식 패턴의 변화 4. 이차함수의 심화 적용: 개구리, 벼룩, 정육면체
	Say It With Symbols : Making Sense of Symbols	1. 등식 2. 결합식 3. 방정식 풀기 4. 함수 돌아보기 5. 기호에 의한 추리
	It’s In the System : System of Linear Equations and Inequalities	1. 미지수가 두 개인 일차방정식 2. 식으로 일차방정식 풀기 3. 함수와 부등식 4. 일차부등식
	Function Junction : The Families of Functions	1. 함수족(정의역, 치역, 합성함수, 역함수) 2. 등차수열, 등비수열 3. 이차함수, 함수의 이동 4. 이차방정식의 대수적 풀이 5. 여러 가지 다항식, 함수, 방정식

이번 연구에서는 <표 III-2>과 같이 Janvier의 번역 과정을 활용한 새로운 분석틀을 제작하였으며, 이 분석틀은 4가지 표현 양식을 연결하는 12가지 과정에서 CMP 교과서에 나타난 문항 제시 유형과 학생 활동을 자세하게 기술하고 있다. 이 분석틀을 사용하여 CMP 교과서를 분석한다.

<표 III-2> 함수 표현 양식 간의 분석틀

to from	상황·언어적 서술 (Situations, Verbal Description)	표 (Tables)	그래프 (Graphs)	공식 (Formulae)
상황· 언어적 서술 (Situations, Verbal Description)		1) (1) ① 실생활 소재 사용 ② 중간과정으로 제시	2) (1) ① 다양한 소재 사용	3) (1) ① 구체적인 상황 표현 ② 식 만들기 ③ 식을 만드는 과정 구하기 ④ 식을 다양하게 표현
표 (Tables)	1) (2) ① 하위문항으로 물어보기 ② 세 개 이상의 변수 관계 물어보기 ③ 표에 없는 y 값 구하기		4) (1) ① 두 가지 상황 비교하기 ② 두 변수를 다양하게 계산하기 ③ 상황·언어적 서술로 확장 ④ 이산적인 경우 제시	5) (1) ① 실생활 소재 사용 ② 식 구하기 ③ 패턴 물어보기
그래프 (Graphs)	2) (2) ① 그래프 읽기 ② 구체적인 현상 제시 ③ 상황·언어적 서술 만들기 ④ 그래프 판단하기	4) (2) ① 그래프 개형 읽기 ② 다양한 그래프 제시 ③ 상황·언어적 서술로 확장		6) (1) ① 식 구하기 ② 비례하지 않는 예를 제시 ③ 그래프 분석하기
공식 (Formulae)	3) (2) ① 식에 대해 설명하기 ② 존재하는 식을 제시	5) (2) ① 표 만들기 ② 중간과정으로 제시 ③ 다양한 함수 제시 ④ 식을 다양하게 표현	6) (2) ① 그래프 그리기 ② 알맞은 그래프 찾기 ③ 다양한 함수 제시	

IV. 결과 분석

1. 표현 양식(상황·언어적 서술, 표, 그래프, 공식)간의 연결성

CMP 교과서에서 표현 양식 간의 연결성을 살펴본 결과는 다음과 같다.

<표 IV-1> Janvier의 함수 표현 양식을 기준으로 CMP 단원에 나온 빈도수

표현 양식 \ 단위	V6)	M	T	Fr	S	I	Fu	합계
1) (1) 서술→표	5	4	4	7	5		2	27
2) (1) 서술→그래프	6	2	6	3		1	4	22
3) (1) 서술→공식	31	44	16	21	42	33	16	203
1) (2) 표→서술	7	9	19	6			6	47
4) (1) 표→그래프	20	4	16	2	2		2	46
5) (1) 표→공식	15	1	24	15	4	4	4	67
2) (2) 그래프→서술	18	15	10	6	2		4	55
4) (2) 그래프→표	8	1		4	3		3	19
6) (1) 그래프→공식	3	5	8	3	7	6	4	36
3) (2) 공식→서술	11	42	8	15	36	1	5	118
5) (2) 공식→표	14	1	1	8	7		7	38
6) (2) 공식→그래프	4	4	6	18	4	31	13	80
합계	142	132	118	108	112	76	70	

‘Variables and Patterns’의 교과서에서는 12가지의 번역과정이 다양하게 나타났다. 이는 6학년 과정에 있는 ‘Variables and Patterns’에서 학생들에게 방정식, 부등식, 함수를 개괄적으로 알려주기 위해 서술적인 설명, 표, 그래프, 식을 다양하게 사용하고 있음을 알 수 있다. ‘Say It With Symbols’과 ‘Moving Straight Ahead’에서는 주로 공식을 상황·언어적 서술로 연결하는 과정과 상황·언어적 서술을 공식으로 연결하는 과정이 많이 나타났으며, 특히 공식을 상황·언어적 서술로 연결하는 과정에서 ‘식에 대해 설명하기’의 문항 제시 유형의 빈도수가 ‘Moving Straight Ahead’에 41회, ‘Say It With Symbols’의 교과서에 32회로 매우 높았다. ‘It’s In the System’의 교과서에는 상황·언어적 서술을 공식으로 연결하는 과정과 공식을 그래프로 연결하는 과정이 대부분이었다. 이는 ‘It’s In the System’에서 일차방정식과 일차부등식의 내용을 집중적으로 다루고 있기 때문에 공식과 연결되는 문항들이 많음을 보여준다.

또한 CMP 교과서에서 함수 표현 양식간의 분석틀을 기준으로 연결성을 살펴본 결과는 다음과 같다. <표 IV-2>안에 숫자는 CMP 교과서에 나타난 문항 제시 유형과 학생 활동에 대한 빈도수이다.

6) CMP 단원명의 맨 앞 글자를 나타냄. 예를 들어 ‘Variables and Patterns’는 ‘V’로 표시함.

<표 IV-2> 함수 표현 양식 간의 분석틀을 기준으로 CMP 단원에 나온 빈도수

to from	상황·언어적 서술 (Situations, Verbal Description)	표 (Tables)	그래프 (Graghs)	공식 (Formulae)
상황· 언어적 서술 (Situa- tions, Verbal Descrip- tion)		1) (1) 27번 ① 실생활 소재 사용 [19] ② 중간과정으로 제 시[8]	2) (1) 22번 ① 다양한 소재 사용 [22]	3) (1) 203번 ① 구체적인 상황 표 현[99] ② 식 만들기[44] ③ 식을 만드는 과정 구하기[29] ④ 식을 다양하게 표 현[31]
표 (Tables)	1) (2) 47번 ① 하위문항으로 물 어보기[28] ② 세 개 이상의 변 수 관계 물어보기[13] ③ 표에 없는 y 값 구 하기[6]		4) (1) 46번 ① 두 가지 상황 비 교하기[6] ② 두 변수를 다양하 게 계산하기[5] ③ 상황·언어적 서술 로 확장[26] ④ 이산적인 경우 제 시[9]	5) (1) 67번 ① 실생활 소재 사용 [5] ② 식 구하기[48] ③ 패턴 물어보기[14]
그래프 (Graghs)	2) (2) 55번 ① 그래프 읽기[24] ② 구체적인 현상 제 시[5] ③ 상황·언어적 서 술 만들기[7] ④ 그래프 판단하기 [19]	4) (2) 19번 ① 그래프 개형 읽기 [8] ② 다양한 그래프 제 시[4] ③ 상황·언어적 서술 로 확장[7]		6) (1) 36번 ① 식 구하기[22] ② 비례하지 않는 예 를 제시[2] ③ 그래프 분석하기 [12]
공식 (Formula e)	3) (2) 118번 ① 식에 대해 설명하 기[112] ② 존재하는 식을 제 시[6]	5) (2) 38번 ① 표 만들기[24] ② 중간과정으로 제 시[3] ③ 다양한 함수 제시 [2] ④ 식을 다양하게 표 현[9]	6) (2) 80번 ① 그래프 그리기[60] ② 알맞은 그래프 찾 기[14] ③ 다양한 함수 제시 [6]	

1) 상황·언어적 서술과 표의 연결

(1) 상황·언어적 서술을 표로 연결

① 실생활 소재 사용

구체적인 실생활 소재를 바탕으로 문제를 많이 다루고 있다.

29. The writing club wants to publish a book of students' short stories, poems, and essays. A member of the club contacts two local printers to get bids on the cost of printing the books.

Bid 1:	\$100 plus \$4 per book
Bid 2:	\$25 plus \$7 per book

a. Make a table of values (number of books printed, cost) for each bid. Use your table to find the number of books for which the two bids are equal. Explain how you found your answer.

b. Make a graph of the two equations. Use your graph to find the number of books for which the two bids are equal. Explain.

c. For what numbers of books is Bid 1 less than Bid 2? Explain.

[그림 IV-1] Say It With Symbols 41쪽 29번

② 중간과정으로 제시

상황·언어적 서술을 표로 나타내는 과정에서 표만을 구하는 문제로 그치는 것이 아니라 그 후에 그래프를 구하거나, 공식을 구하는 문제로 확장될 때가 있다.

32. Mr. DeAngelo is designing a school building. The music room floor will be a rectangle with an area of 1,200 square feet.

a. Make a table showing a range of possible lengths and widths for the music room floor for ten different room arrangements.

b. Add a column to your table for the perimeter of each rectangle.

c. What patterns do you see in the perimeter column? What kinds of rectangles have large perimeters? What kinds have small perimeters?

d. Write an equation you can use to calculate the length of the floor for any given width.

[그림 IV-2] Frogs, Fleas, and Painted Cubes 21쪽 32번

(2) 표를 상황·언어적 서술로 연결

① 하위문항으로 물어보기

하나의 표를 제시한 후 표를 어떻게 이해하고 있는지 물어보고, 변수 사이의 관계에 대해 설명하기를 요구하고, 표에 제시되지 않는 값을 구하라고 하는 등 하위문항으로 자세하게 질문하고 있다.

12. Jamal's parents give him money to spend at camp. Jamal spends the same amount of money on snacks each day. The table below shows the amount of money, in dollars, he has left at the end of each day.

Days	0	1	2	3	4	5	6
Money Left	\$20	\$18	\$16	\$14	\$12	\$10	\$8

a. How much money does Jamal have at the start of camp? Explain.

b. How much money does he spend each day? Explain.

c. Is the relationship between the number of days and the amount of money left in Jamal's wallet a linear relationship? Explain.

d. Assume that Jamal's spending pattern continues. Check your answer to part (c) by sketching a graph of this relationship.

e. Write an equation that represents the relationship. Explain what information the numbers and variables represent.

[그림 IV-3] Moving Straight Ahead 20쪽 12번

② 세 개 이상의 변수관계 물어보기
변수 x, y 와 변수 x, z 의 관계, 변수 y, z 사이의 관계를 물어보기도 한다.

36. One of the most popular items at a farmers' market is sweet corn. This table shows relationships among the price of the corn, the supply of corn (how much corn the market has), and the demand for the corn (how much corn people want to buy).

Price per Dozen (\$)	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50
Demand (dozens)	200	175	140	120	80	60
Supply (dozens)	40	75	125	175	210	260

a. Why do you think the demand for corn decreases as the price goes up?

b. Why do you think the supply of corn increases as the price goes up?

c. Write a linear equation that models the relationship between demand d and price p .

d. Write a linear equation that models the relationship between supply s and price p .

e. Use graphs to estimate the price for which the supply equals the demand. Then find the price by solving symbolically.

[그림 IV-4] Thinking With Mathematical Models 52쪽 36번

③ 표에 없는 y 값 구하기

표에 나오지 않은 x 값에 대응하는 y 값을 구하는 문항도 있다.

22. Students plan to hold a car wash to raise money. The students ask some adults how much they would pay for a car wash. The table below shows the results of the research.

Car Wash Price	\$4	\$6	\$8	\$10	\$12	\$14
Number of Customers	120	105	90	75	60	45

a. Make a coordinate graph of the (price, customers) data. Connect the points if it makes sense to do so.

b. Describe the pattern relating the price to the number of customers. Explain how the table and the graph show the pattern.

c. Based on the pattern, what number of customers would you predict if the price were \$16? If the price were \$20? If the price were \$2?

d. Copy and complete the following table relating car wash price to projected income.

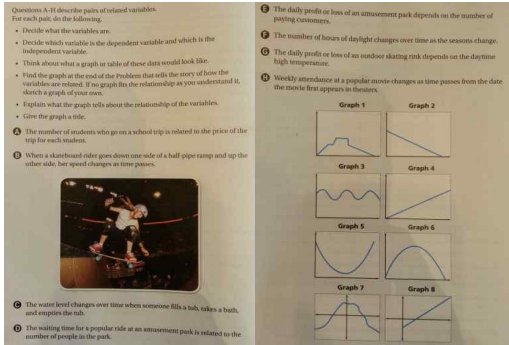
[그림 IV-5] Variables and Patterns 61쪽 22번

2) 상황·언어적 서술과 그래프의 연결

(1) 상황·언어적 서술을 그래프로 연결

수학적 연결성 관점에서 CMP 교과서 분석 -방정식·부등식과 함수 단원을 중심으로-

① 다양한 소재 사용

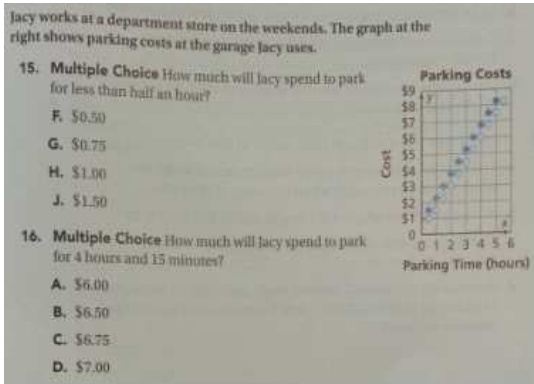


[그림 IV-6] Variables and Patterns 48~49쪽

(2) 그래프를 상황·언어적 서술로 연결

① 그래프 읽기

주어진 그래프를 바르게 읽을 수 있는 지를 물어본다.

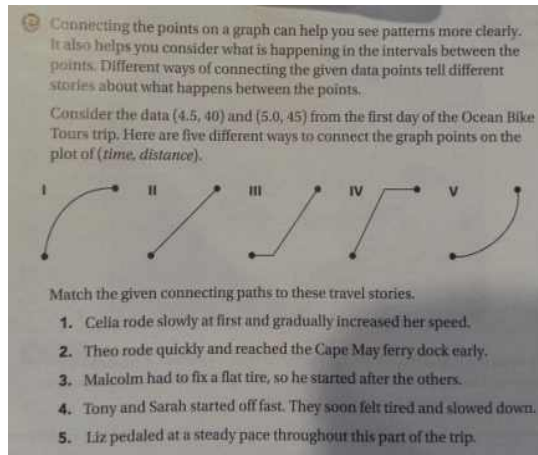


[그림 IV-7] Variables and Patterns 57쪽

15~16번

② 구체적인 현상 제시

실생활에서의 구체적인 현상을 그래프의 개형을 통해 경험할 수 있도록 하고 있다.

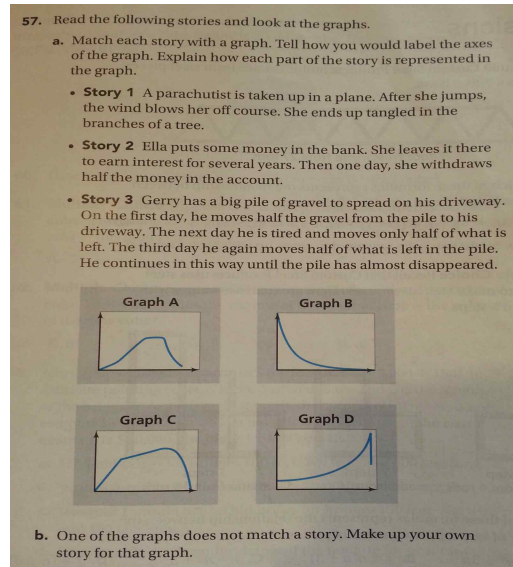


[그림 IV-8] Variables and Patterns 13쪽

1,2번(C번)

③ 상황·언어적 서술 만들기

그래프의 개형을 상황·언어적 서술과 연결한 경우에 그래프에 맞는 상황·언어적 서술이 없는 경우 학생 스스로 상황·언어적 서술을 만드는 경우도 있다.

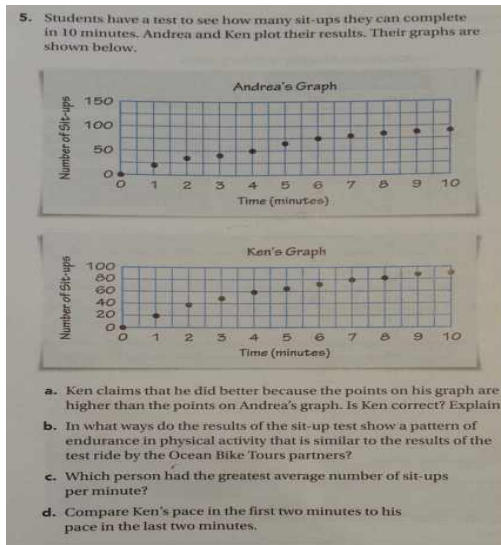


[그림 IV-9] Thinking With Mathematical

Models 55쪽 57번

④ 그래프 판단하기

그래프를 얼마나 이해하고 있는지, 올바르게 판단하고 있는지에 대해 물어보는 경우이다.

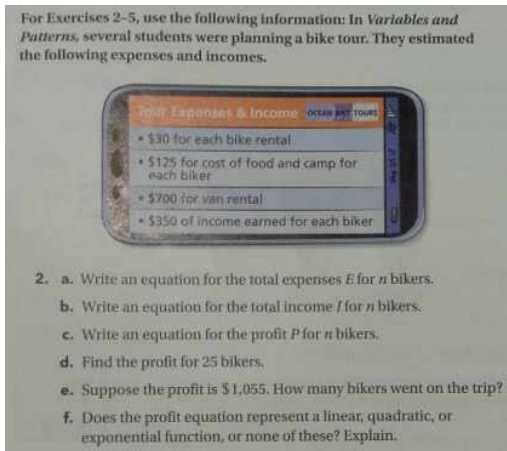


[그림 IV-10] Variables and Patterns 23쪽 5번

3) 상황·언어적 서술과 공식의 연결

(1) 상황·언어적 서술을 공식으로 연결

① 구체적인 상황 표현



[그림 IV-11] Say It With Symbols 34쪽 2번

② 식 만들기

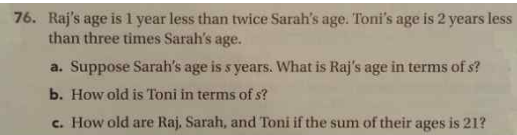
제시된 상황·언어적 서술을 보고, 식을 구하라고 요구하기도 한다.



[그림 IV-12] Thinking With Mathematical Models 48~49쪽 9~12번

③ 식을 만드는 과정 구하기

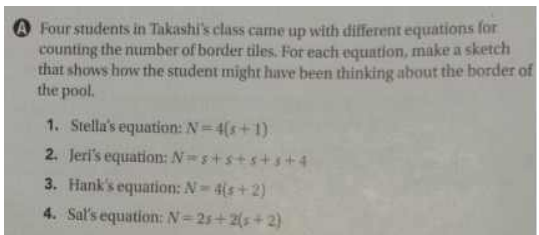
식을 만드는 과정을 문항으로 구성한 문제도 있다.



[그림 IV-13] It's In the System 41쪽 76번

④ 식을 다양하게 표현

동일한 식을 다양하게 표현하는 문항도 있다.



[그림 IV-14] Say It With Symbols 10쪽 1.2번

(2) 공식을 상황·언어적 서술로 연결

① 식에 대해 설명하기

63. A bridge-painting company uses the formula $C = 5,000 + 150L$ to estimate painting costs. C is the cost in dollars, and L is the length of the bridge in feet. To make a profit, the company increases a cost estimate by 20% to arrive at a bid price. For example, if the cost estimate is \$10,000, the bid price will be \$12,000.

- Find bid prices for bridges 100 feet, 200 feet, and 400 feet long.
- Write a formula relating the final bid price to bridge length.
- Use your formula to find bid prices for bridges 150 feet, 300 feet, and 450 feet long.
- How would your formula change if the markup for profit was 15% instead of 20%?

[그림 IV-15] Thinking With Mathematical Models 57쪽 63번

② 존재하는 식을 제시
실제 존재하는 식을 통해 구체적인 상황을 표현하기도 한다.

50. Forensic scientists can estimate a person's height by measuring the length of certain bones, including the femur, the tibia, the humerus, and the radius.

The table below gives equations for the relationships between the length of each bone and the estimated height of males and females. These relationships were found by scientists after much study and data collection. In the table, F represents the length of the femur, T the length of the tibia, H the length of the humerus, and R the length of the radius, and h the person's height. All measurements are in centimeters.

Bone	Male	Female
Femur	$h = 69.089 + 2.238F$	$h = 61.412 + 2.317F$
Tibia	$h = 81.688 + 2.392T$	$h = 72.572 + 2.533T$
Humerus	$h = 73.570 + 2.970H$	$h = 64.977 + 3.144H$
Radius	$h = 80.405 + 3.650R$	$h = 73.502 + 3.876R$

- About how tall is a female if her femur is 46.2 centimeters long?
- About how tall is a male if his tibia is 50.1 centimeters long?
- Suppose a woman is 152 centimeters tall. About how long is her femur? Her tibia? Her humerus? Her radius?
- Suppose a man is 183 centimeters tall. About how long is his femur? His tibia? His humerus? His radius?
- Describe generally what the graph would look like for each equation without drawing the specific graph. What do the x - and y -intercepts represent in this problem? Does this make sense? Why?

[그림 IV-16] Moving Straight Ahead 80쪽 50번

4) 표와 그래프의 연결

(1) 표를 그래프로 연결

표에 제시된 (x, y) 를 그래프에 점찍기로 끝내는 것이 아니라 그래프를 읽고 비교하는 과정에서 그래프에 대한 올바른 이해를 돕고 있다.

2. When Ming and Jamil studied growth in the population of their city, they found these data:

Population of Okemos							
Year	1970	1980	1990	1995	2000	2005	2010
Population (1000's)	20	25	30	35	40	45	50

a. Ming made the graph below.

She said, "The graph shows population growing faster in the period from 1995 to 2010 than earlier." Is Ming's claim accurate? Why or why not?

b. Jamil made a different graph. It is shown below.

Jamil said, "The graph shows population growing at a steady rate." Is his claim accurate? Why or why not?

[그림 IV-17] Variables and Patterns 21쪽

① 두 가지 상황 비교하기
변수와의 관계를 두 가지 제시하여 두 상황을 비교 할 수 있게 한다.

The tour operators decide to rent bicycles for their customers. They get information from two bike shops. Rocky's Cycle Center sends a table of rental fees for bikes.

Bike Rental at Rocky's										
Number of Bikes	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Rental Cost (\$)	400	535	655	770	875	975	1,070	1,140	1,180	1,200

Adrian's Bike Shop sends a graph of their rental prices. The number of bikes rented is called the **independent variable**. The rental cost is called the **dependent variable**, because the rental cost depends on the number of bikes rented.

Graphs usually have the independent variable on the x -axis and the dependent variable on the y -axis.

The Ocean Bike Tour partners need to choose a bike rental shop. Suppose that they ask for your advice.

- Which shop would you recommend?
- How would you justify your choice?

[그림 IV-18] Variables and Patterns 40쪽

② 두 변수를 다양하게 비교하기
두 변수와의 관계를 구한 후에 두 변수의 값을 더하거나, 빼거나, 곱하거나 하는 과정까지 확장한 후 그것을 그래프로 그리기도 한다.

4. Some class officers want to sell T-shirts to raise funds for a class trip. They ask the students in their class how much they would pay for a shirt and recorded the data in a table.

Projected Shirt Sales					
Price per Shirt	\$5	\$10	\$15	\$20	\$25
Number of Shirt Sales	50	40	30	20	10

a. Describe the relationship between the price per shirt and the expected number of shirt sales. Is this the sort of pattern you would expect?

b. Copy and complete this table to show the relationship between price per shirt and the expected total value of the shirt sales.

Projected Shirt Sales					
Price per Shirt	\$5	\$10	\$15	\$20	\$25
Number of Shirt Sales	50	40	30	20	10
Value of Shirt Sales	\$250	\$400			

c. How would you describe the relationship between price per shirt and expected total value of shirt sales? Is this the sort of pattern you would expect?

d. Make coordinate graphs of the data like the ones started below.

e. Explain how your answers to parts (a) and (c) are shown in the graphs.

[그림 IV-19] Variables and Patterns 52쪽 4번

③ 상황·언어적 서술로 확장
표를 그래프로 나타낸 후에 표와 그래프의 관계에 대해 확장된 질문을 한다.

6. Katrina's parents kept a record of her growth in height from birth until her 18th birthday. Their data is shown in the table below.

Katrina's Height	
Age (yr)	Height (in.)
birth	20
1	29
2	33.5
3	37
4	39.5
5	42
6	45.5
7	47
8	49
9	52
10	54
11	56.5
12	59
13	61
14	64
15	64
16	64
17	64.5
18	64.5

a. Make a coordinate graph of Katrina's height data.

b. During which time interval(s) did Katrina have her greatest "growth spurt"?

c. During which time interval(s) did Katrina's height change the least?

d. Would it make sense to connect the points on the graph? Why or why not?

e. Is it easier to use the table or the graph to answer parts (b) and (c)? Explain.

[그림 IV-20] Variables and Patterns 24쪽 6번

④ 이산적인 경우 제시
표에 나타난 값들을 그래프에 찍을 때 일차함수가 아닌 이산적인 점들을 찍는 문항들이 있다.

4. During the medal ceremonies at a track meet, the top athletes stand on platforms made from stacked wooden boxes. The number of boxes depends on the number of medal winners.

a. Copy and complete the table below.

Medal Platforms								
Number of Medalists	1	2	3	4	5	6	7	8
Number of Boxes	1	3	6					

b. Make a graph of the (number of medalists, number of boxes) data.

c. Describe the pattern of change shown in the table and graph.

d. Each box is 1 foot high and 2 feet wide. A red carpet starts 10 feet from the base of the platform and covers all the risers and steps.

Copy and complete the table below.

Carpet for Platforms								
Number of Steps	1	2	3	4	5	6	7	8
Carpet Length (ft)								

e. Make a graph of the (number of steps, carpet length) data.

f. Describe the pattern of change in the carpet length as the number of steps increases. Compare this pattern to the pattern in the (number of medalists, number of boxes) data.

[그림 IV-21] Thinking With Mathematical Models 17쪽 4번

(2) 그래프를 표로 연결

① 그래프 개형 읽기

그래프에서 점의 좌표를 읽는 활동뿐만 아니라 그래프 개형으로부터 패턴을 읽고 그것을 표로 작성하도록 한다.

Suppose a motion detector tracks the time and the distance traveled as you walk 40 feet in 8 seconds. The results are shown in the graphs below. Use them to answer Exercises 10-11.

10. Match one of the (time, distance) graphs above with the story that describes each walk.

- You walk at a steady pace of 5 feet per second.
- You walk slowly at first, and then steadily increase your walking speed.
- You walk rapidly at first, pause for several seconds, and then walk at an increasing rate for the rest of the trip.
- You walk at a steady rate for 3 seconds, pause for 2 seconds, and then walk at a steady rate for the rest of the trip.
- You walk rapidly at first, but gradually slow down as you reach the end of the walk.

11. For each walk in the graphs above, complete a (time, distance) table like the one begun below. Use numbers that will match the pattern shown in the graph.

Time (seconds)	1	2	3	4	5	6	7	8
Distance (feet)								40

[그림 IV-22] Variables and Patterns 55쪽 10~11번

② 다양한 그래프 제시

일차함수와 이차함수뿐만 아니라 다양한

함수를 제시하기도 한다.

For Exercises 11 and 12, use the graphs below.

11. Identify the domain and range of each function.

12. Use the graphs to complete these sentences that use function notation.

a. $f(-4) = \square$ b. $g(4) = \square$ c. $h(1) = \square$
 d. $f(\square) = 1$ e. $g(\square) = 1$ f. $h(\square) = 2$

[그림 IV-23] Function Junction 22쪽 10~12번

③ 상황·언어적 서술로 확장

그래프를 표로 작성한 후에 그래프와 표의 관계에 대해 확장된 질문을 한다.

9. Here is a graph of temperature data collected on the Ocean Bike Tours test trip from Atlantic City to Lewes.

a. Make a table of $(\text{time}, \text{temperature})$ data from this graph.
 b. What is the difference between the day's lowest and highest temperatures?
 c. During which time interval(s) did the temperature rise the fastest? During which time interval did it fall the fastest?
 d. Do you prefer using the table or the graph to answer questions like those in parts (b) and (c)? Explain your reasoning.
 e. What information is shown by the lines connecting the points?

[그림 IV-24] Variables and Patterns 27쪽 9번

5) 표와 공식의 연결

(1) 표를 공식으로 연결

① 실생활 소재 사용

일차함수 단원에서는 규칙적인 패턴을 제시하여 반복적인 학습을 유도하는 부분도 있지만, 대부분 구체적이고 상세한 실생활 문항으로 제시되어 있다.

4. This table gives the average weights of Chihuahuas from birth to 16 weeks.

Age (wk)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Weight (oz)	4	9	13	17.5	21.5	25	30	34	39

Source: The Complete Chihuahua Encyclopedia

a. Graph the (age, weight) data. Draw a line that models the data pattern.
 b. Write an equation of the form $y = mx + b$ for your line. Explain what the values of m and b tell you about this situation.
 c. Use your equation to predict the average weight of Chihuahuas for odd-numbered ages from 1 to 15 weeks.
 d. What average weight does your linear model predict for a Chihuahua that is 72 weeks old? Explain why this prediction is likely to be inaccurate.

[그림 IV-25] Thinking With Mathematical Models 46쪽 4번

② 식 구하기

표를 공식으로 나타내는 과정에서는 문제에 대한 서술적인 설명 없이 표를 제시하고 식을 구하라는 문제도 있다.

13. Write a linear equation relating x and y for each table.

a.

x	0	3	6	10
y	2	8	14	22

b.

x	0	3	6	10
y	20	8	-4	-20

c.

x	2	4	6	8
y	5	8	11	14

d.

x	0	3	6	9
y	20	11	2	-7

[그림 IV-26] Thinking With Mathematical Models 49쪽 13번

③ 패턴 물어보기

표를 식으로 표현한 후에 표에서 나타나고 있는 패턴이 식으로 어떻게 표현이 된 것인지 물어보는 문항도 있다.

27. Percy wants to write an equation for the number of tiles needed to surround a square pool with sides of length s feet. He makes a table for pools with sides of length 1, 2, 3, 4, and 5 feet. Then he uses the patterns in his table to write the equation $N = 8 + 4(s - 1)$.

Side Length	1	2	3	4	5
Number of Tiles	8	12	16	20	24

a. What patterns does Percy see in his table?
 b. Is Percy's expression for the number of tiles equivalent to $4(s + 1)$, Stella's expression in Problem 1.2? Explain.

[그림 IV-27] Say It With Symbols 20쪽 27번

(2) 공식을 표로 연결

① 표 만들기

공식을 표로 나타내는 과정에서는 문제에 대한 서술적인 설명 없이 식을 제시하고 표를 구하라는 문제가 존재했다.

For Exercises 6-8, use the equation to complete the table.

6. $y = 4x + 3$

x	1	2	5	10	20	■
y	■	■	■	■	■	203

7. $m = 100 - k$

k	1	2	5	10	20	■
m	■	■	■	■	■	50

8. $d = 3.5t$

t	1	2	5	10	20	■
d	■	■	■	■	■	140

[그림 IV-28] Variables and Patterns 79쪽 6~8번

② 중간과정으로 제시

공식을 표로 나타내는 과정에서 표만을 구하는 문제로 그치는 것이 아니라 그 후에 그래프를 구하거나, 공식을 구하라는 문제로 확장된다.

C Liz wonders whether they should rent a cart to carry their backpacks. The equation $c = 20 + 5h$ shows the cost in dollars c of renting a cart for h hours.

1. What information does each number and variable in the expression $20 + 5h$ represent?
2. Use the equation to make a table showing the cost of renting a cart for 0, 1, 2, 3, 4, 5, and 6 hours. Then make a graph of the data.
3. Explain how the cost per hour shows up in the table, graph, and equation.
4. Explain how the 20 in the equation is represented in the table and in the graph.
5. Which of the following points satisfy the relationship represented by the equation? (0, 4), (0, 20), (7, 55) Explain your reasoning.

[그림 IV-29] Variables and Patterns 73쪽 3.3 C

③ 다양한 함수 제시

중학교 과정인 일차함수와 이차함수만 제시되는 것이 아니라 지수함수, 삼차함수 등 다양한 함수를 묻는 문항도 있다.

28. a. Describe the patterns of change in each table. (Look closely. You may find more than one.) Explain how you can use the patterns to find the missing entry.

Table 1	Table 2	Table 3	Table 4
x	x	x	x
y	y	y	y
0	-3	2	-2
1	3	6	21
2	-2	12	24
3	9	20	25
4	15	30	21
5	■	42	■
■	■	■	■

b. Tell which equation matches each table.

$y_1 = x^2 - 12$ $y_2 = x(x+1)$ $y_3 = 25 - x^2$
 $y_4 = (x)(x)(x)$ $y_5 = 3(x+4)$ $y_6 = 25(2)^x$

c. Which tables represent quadratic functions? Explain.
 d. Do any of the tables include the maximum y -value for the relationship?
 e. Do any of the tables include the minimum y -value for the relationship?

[그림 IV-30] Frogs, Fleas, Painted Cubes 85쪽 28번

④ 식을 다양하게 표현

5. Mitch, Lewis, and Cody were discussing equations that they wrote for Exercise 4. They called the height T and the number of cubes c .

Mitch's thinking: The top of the swing frame has 5 cubes, and then there are $T - 1$ cubes underneath it. The total number of cubes needed is $c = 5 + (T - 1) + (T - 1)$.

Lewis's thinking: When I see the drawing, I think of two upside-down L shapes with a middle piece. My equation for the number of cubes is $c = 2(T + 1) + 1$.

Cody's thinking: On the left side I see a single tower, and the right side is a tower with three extra cubes. My equation is $c = T + (T + 3)$.

a. Create a table for the three equations.
 b. Which of the expressions are equivalent? Explain.
 c. Write a new expression that is equivalent to the ones that are equivalent in part (b).

[그림 IV-31] Variables and Patterns 103쪽 5번

6) 그래프와 공식의 연결

(1) 그래프를 공식으로 연결

① 식 구하기

그래프를 공식으로 나타내는 과정에서는 문제에 대한 서술적인 설명 없이 그래프를 제시하고 식을 구하라는 문항도 있다.

B. Find the slope, y -intercept, and equation of each line.

a.

b.

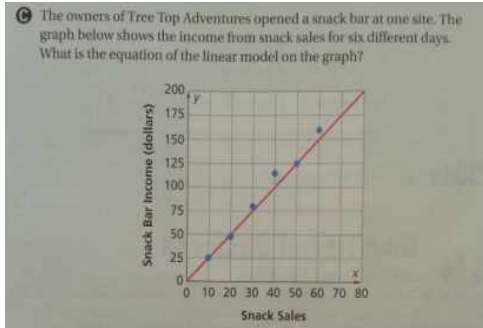
c.

d.

[그림 IV-32] Thinking With Mathematical Models 48쪽 8번

② 비례하지 않는 예를 제시

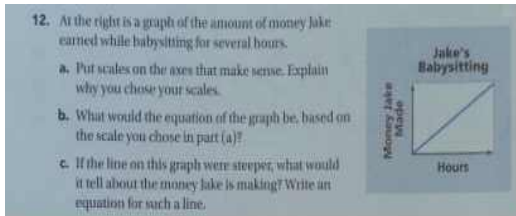
일차함수에서 비례하지 않는 예를 그래프로 나타내도록 하는 문항이 있다.



[그림 IV-33] Thinking With Mathematical Models 39쪽 C번

③ 그래프 분석하기

그래프를 올바르게 분석하여 관계식을 찾는 과정까지 생각해 보도록 한다.

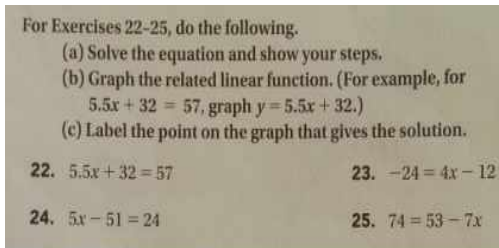


[그림 IV-34] Thinking With Mathematical Models 21쪽 12번

(2) 공식을 그래프로 연결

① 그래프 그리기

공식을 그래프로 나타내는 과정에서는 문제에 대한 서술적인 설명 없이 식을 제시하고 그래프를 그리라는 문제이다.

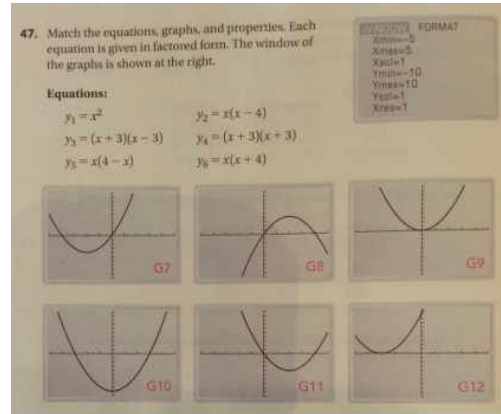


[그림 IV-35] Thinking With Mathematical

Models 50쪽 22~25번

② 알맞은 그래프 찾기

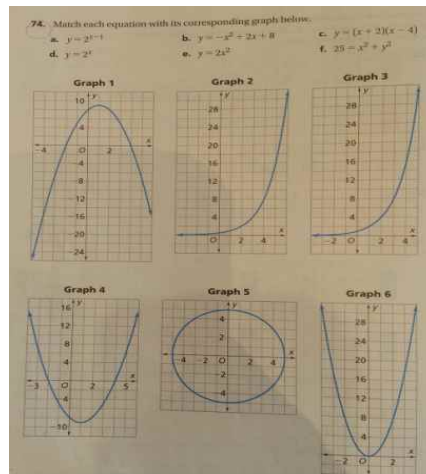
그래프를 그리는 활동 뿐 아니라 식과 같은 그래프를 찾는 문항이 있다.



[그림 IV-36] Frogs, Fleas, and Painted Cubes 92쪽 47번

③ 다양한 함수 제시

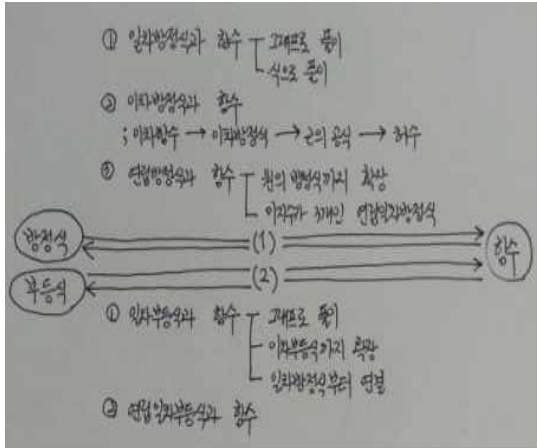
일차함수와 이차함수 이외에도 다양한 함수를 보여주고 그에 맞는 식을 찾는 문제도 제시되어 있다.



[그림 IV-37] It's In the System 40쪽 74번

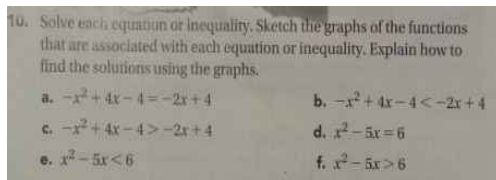
2. 수학의 다른 단원, 다른 영역, 타 교과목 및 실생활 내용간의 연결성

1) 다른 단원, 다른 영역과의 연결성

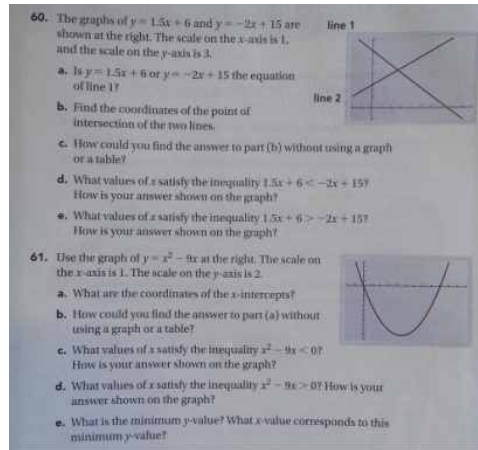


[그림 IV-38] CMP 교과서에 나타난 방정식·부등식과 함수의 연결성

CMP 교과서에는 학생들이 방정식과 부등식 문제를 해결할 때 대부분의 문제에서 그래프를 그리도록 제시하고 있다. 반복적인 연습을 위해 [그림 IV-38]처럼 계산만 하는 문제가 있기도 하지만 방정식·부등식과 함수의 연결성은 항상 강조되고 있음을 확인할 수 있다.

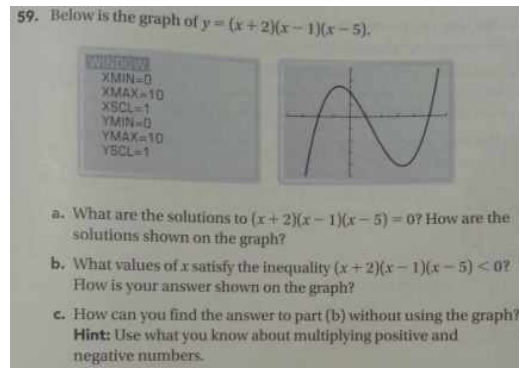


[그림 IV-39] It's In the System 56쪽 10번 다음은 일차함수와 이차함수 문항이다.



[그림 IV-40] Say It With Symbols 63쪽 60~61번

일차함수와 이차함수뿐만 아니라 교육과정을 벗어난 삼차함수 문항도 있다. 이처럼 수학적 연결성을 중점으로 문제를 해결한다면 차수의 증가가 학생들이 배워야 할 새로운 내용이 아니라는 것을 자연스럽게 인식시킬 수 있다.



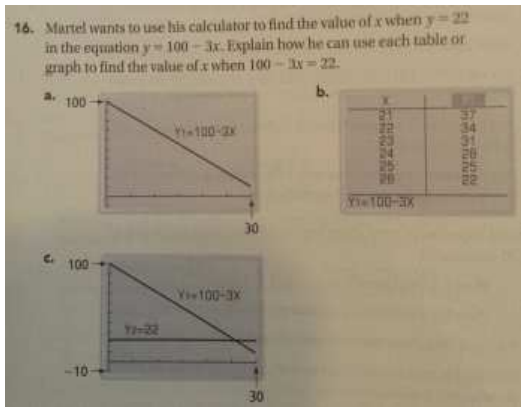
[그림 IV-41] Say It With Symbols 87쪽 59번

(1) 방정식과 함수와의 관계

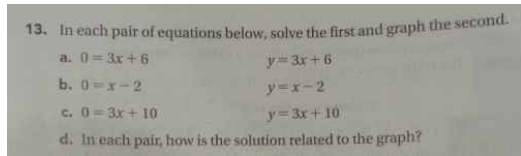
① 일차방정식과 함수

[그림 IV-41]같이 일차방정식 $100 - 3x = 22$ 를 일차함수 $y = 100 - 3x$ 와 $y = 22$ 의 그래프로 나타내어 설명하는 문항처럼 그래프를 이용하여 일차방정식의 해를 구하는 문항이 있다.

수학적 연결성 관점에서 CMP 교과서 분석 -방정식·부등식과 함수 단원을 중심으로-



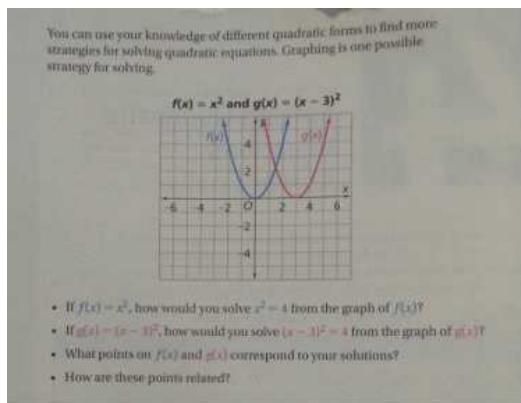
[그림 IV-42] Moving Straight Ahead 44쪽 16번
일차방정식과 일차함수의 식을 함께 제시하여 일차함수의 특수한 값을 구하는 것이 일차방정식의 해를 구하는 것이라는 연결성을 자연스럽게 알려주고 있다.



[그림 IV-43] Thinking With Mathematical Models 22쪽 13번

② 이차방정식과 함수

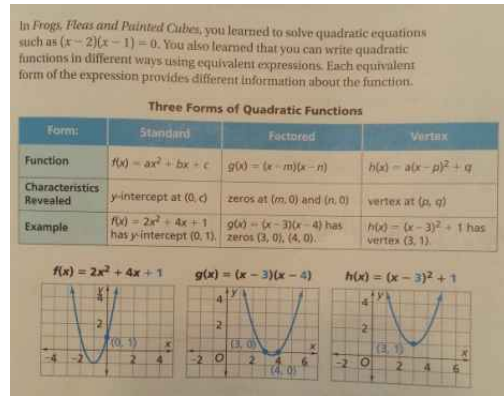
이차방정식과 이차함수의 단원에서도 방정식과 함수와의 관계가 자연스럽게 드러나도록 하고 있다.



[그림 IV-44] Function Junction 64쪽

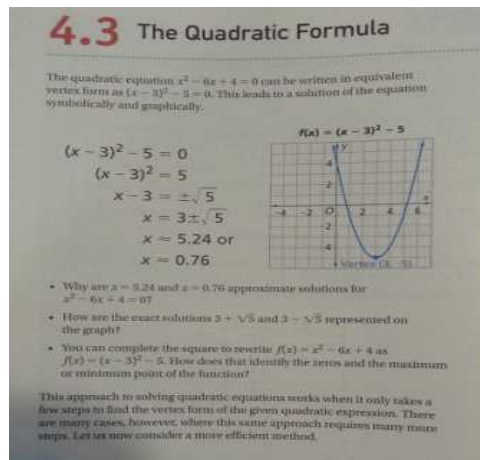
우선, CMP 교과서에는 이차함수가 먼저 나온다. 이차함수 $y = ax^2$ 부터

$y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴까지 다양한 형태를 제시한다.



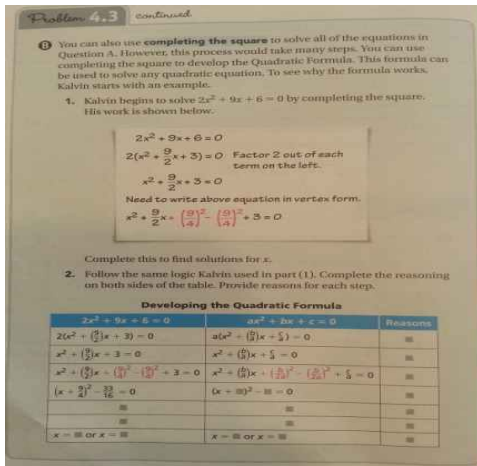
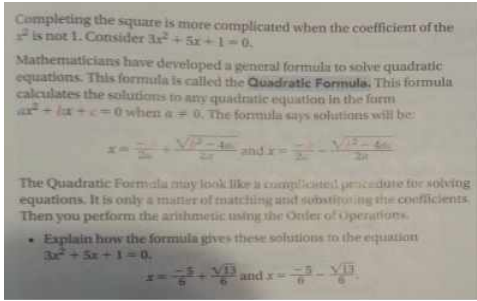
[그림 IV-45] Function Junction 63쪽

그 후에 이차방정식을 완전제곱식 꼴로 고쳐 해를 구하고, 이차함수 그래프에서 어느 부분이 이차방정식의 해인지를 찾는다.



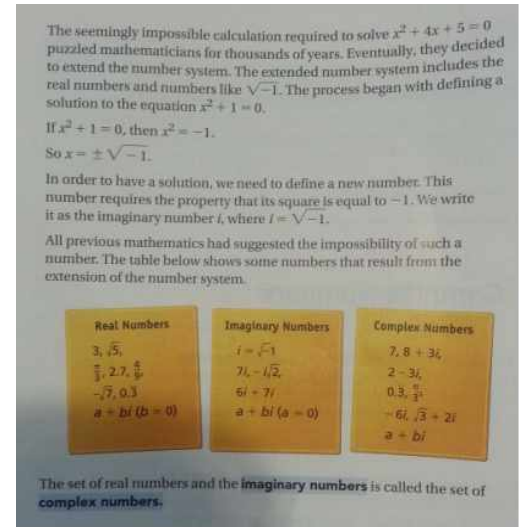
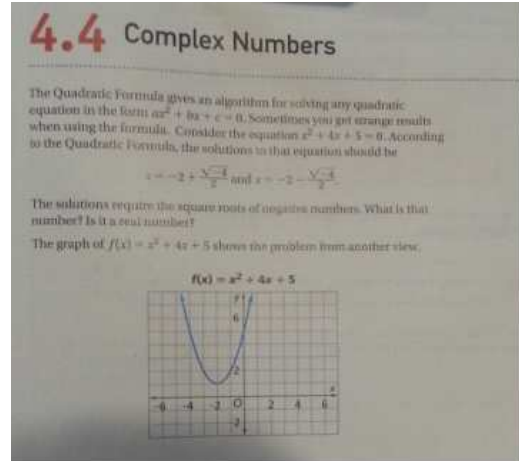
[그림 IV-46] Function Junction 70쪽

그 후에 근의 공식을 알려주고, 이차방정식의 해를 근의 공식을 이용하여 바로 구할 수 있음을 설명한다. 하지만 CMP 교과서에서는 판별식 D 라는 용어가 없으며, 이차방정식의 해를 구하는 과정을 공식으로만 해결하는 상황이 일어나지 않는다.



[그림 IV-47] Function Junction 71~72쪽

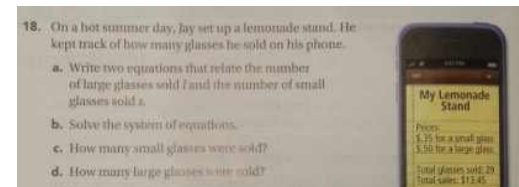
그 다음 단원에서는 내용을 확장시켜 허수를 알려주고 있다. 이차방정식의 해를 근의 공식으로 풀었을 때 판별식이 0보다 작을 때가 나올 수 있으며(우리나라 교과서식의 표현) 그것이 허수 i 로 표현된다고 설명하고, 이 상황을 이차함수의 그래프로 나타내어 x 축과 만나는 점이 없음을 확인시켜 주고 있다.



[그림 IV-48] Function Junction 73~74쪽

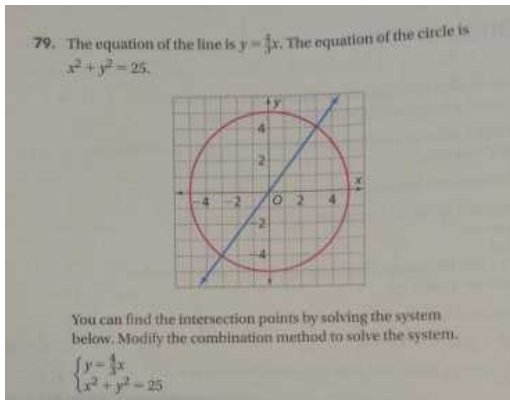
③ 연립방정식과 함수

연립방정식과 함수와의 관계도 다양한 방법으로 설명하고 있다.

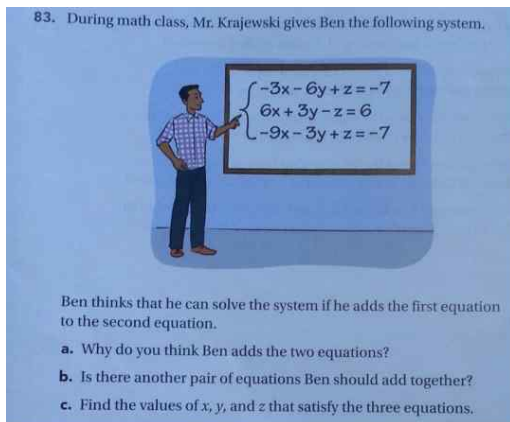


[그림 IV-49] It's In the System 34쪽 18번

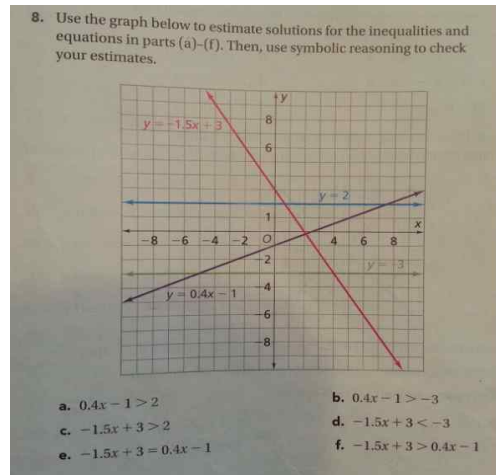
또한 연립일차방정식과 일차함수와의 관계 뿐 아니라 이를 확장시켜 그래프를 그려서 원의 방정식의 해를 구하는 문제도 여러 번 제시하고 있다.



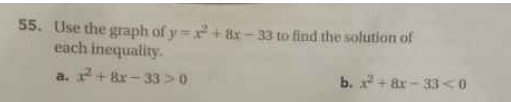
[그림 IV-50] It's In the System 42쪽 79번 미지수가 3개인 연립일차방정식 문제도 있다.



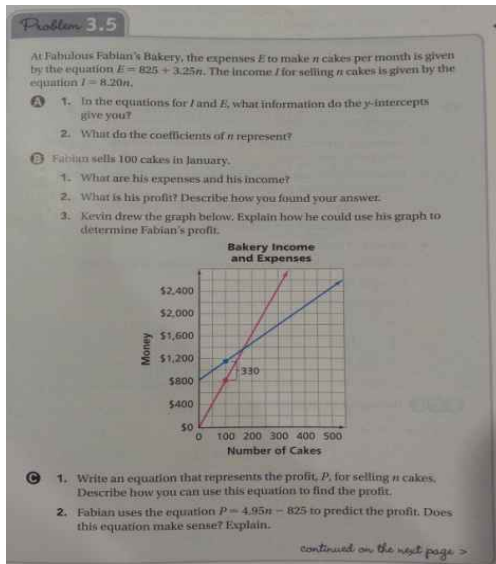
[그림 IV-51] It's In the System 43쪽 83번 (2) 부등식과 함수와의 관계
① 일차부등식과 함수
그래프를 사용하여 일차부등식의 해를 구하도록 하고 있다.

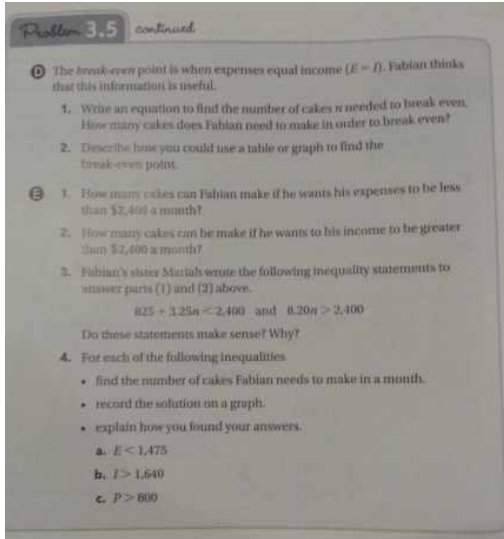


[그림 IV-52] It's In the System 55쪽 8번 또한 방정식과 함수와의 관계에서도 보았듯이 부등식과 함수와의 관계에서도 이차부등식 문제와 같은 확장된 내용의 문항이 나타난다.



[그림 IV-53] It's In the System 19쪽 55번 일차부등식이 바로 제시되어 해를 구하는 문제가 아닐 경우에는 대부분 일차방정식의 해를 구하는 것에서부터 문제가 시작되고 있다.

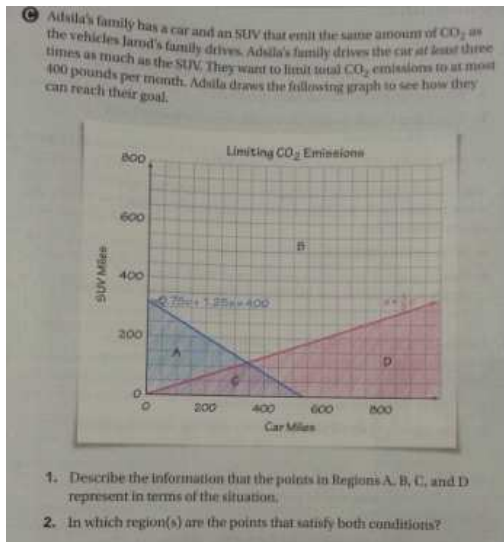




[그림 IV-54] Moving Straight Ahead 67쪽 3.5번

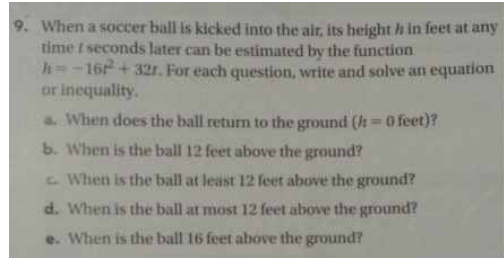
② 연립일차부등식과 함수

연립일차부등식과 함수와의 관계도 실생활과 관련하여 자세히 설명하고 있다.

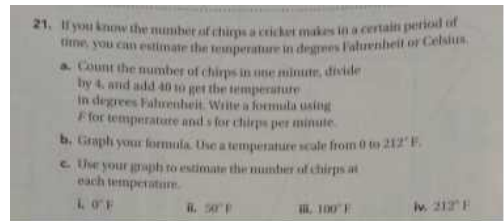


[그림 IV-55] It's In the System 71쪽 4.4번 C

2) 타 교과목 및 실생활 내용간의 연결성
CMP 교과서에서도 우리나라 교과서와 유사한 문제들이 있다.

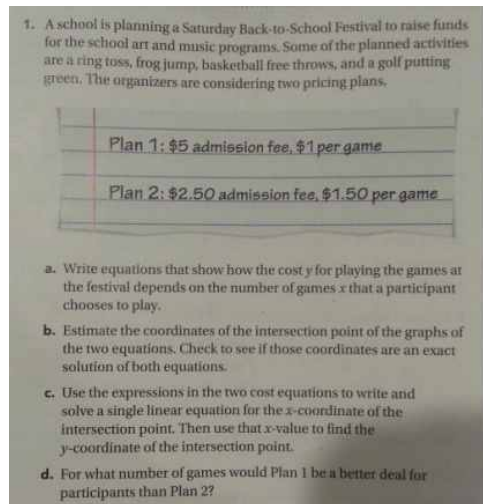


[그림 IV-56] It's In the System 56쪽 9번
하지만, 타 교과목과 연결된 문제들을 어렵지 않게 찾을 수 있다.

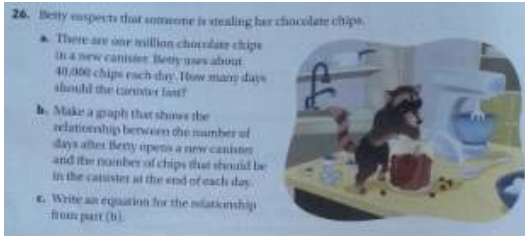


[그림 IV-57] Thinking With Mathematical Models 106쪽 21번

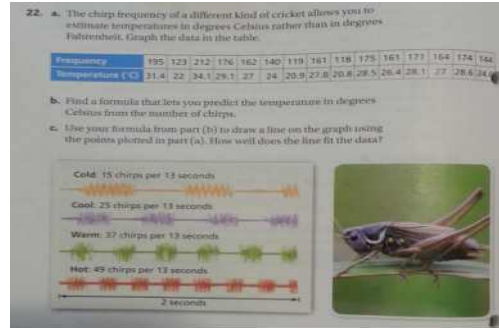
또한 실생활과 연결된 내용의 문항도 많이 다루고 있다.



[그림 IV-58] It's In the System 32쪽 1번
다양한 소재를 활용하여 학생들의 호기심을 자극하고 흥미를 느낄 수 있게 하고 있다.



[그림 IV-59] Say It With Symbols 80쪽 26번
어떤 문항은 자세한 수학적 표현을 요구하지 않는다는 것을 알 수 있다.



[그림 IV-60] Thinking With Mathematical Models 106쪽 22번

V. 결론 및 제언

연구문제의 결과를 요약하여 결론을 제시하면 다음과 같다.

첫째, Janvier의 함수 표현 양식을 활용한 새로운 분석틀을 사용하여 수학적 연결성을 분석해 본 결과, CMP 교과서에는 구체적이고 자세하게 문제 형태가 제시되어 있으며, 그에 따른 학생들의 활동 역시 다양하게 요구함을 알 수 있었다. 특히, 상황·언어적 서술을 공식으로 연결하는 과정에서 ‘구체적인 상황을 표현’하는 문제 제시 유형과 공식을 상황·언어적 서술로 연결하는 과정에서 ‘식에 대해 설명하기’라는 학생 활동은 빈도수가 많았다. 또한, 표를 그래프로 나타낸 후 공식으로 나타내는 과정을 거치거나 그래프를 표로, 다시 표를 공식으로 나타내는 문항처럼 한 가지의 과정만 묻는 경우는 드물고, 동시에 여러 과정을 묻는 문항을 확인할 수 있었다.

둘째, CMP 교과서에서는 방정식과 함수, 부등식과 함수의 관계를 여러 단원에서 반복적으로 다루고 있었다. 미지수가 3개인 일차방정식, 원의 방정식, 삼차함수, 허수 등 6학년부터 8학년까지의 교육과정에 벗어나는 확장된 내용까지도 제시하여 자연스럽게 다른 단원과 다른 영역의 연결성을 나타내고 있었다. 또한, 타 교과목 및 실생활 내용간의 수학 외적 연결성에도 중점을 두어 학생들이 흥미를 느낄 수 있는 다양한 소재 활용과 실생활 관련 문항 제시로 수학의 실용성을 인식할 수 있도록 구성되어 있었다.

본 연구는 학교 현장에서의 수학적 연결성 구현을 위해 수학적 연결성을 강조한 CMP 교과서를 분석하였다는 점에서 의의가 있다. 하지만 CMP 교육과정의 구성이나 교과서 편찬 조건 등 다양한 관점을 고려하지 못하였고, 방정식·부등식과 함수 단원을 중심으로 분석하였기에 다른 영역에 대한 분석도 필요함을 제언한다.

참고 문헌

- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2009-41호).
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8]).
- 교육부(2015). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 2015-74호 [별책3]).
- 권효정 (2016). **표현들 간의 번역 활동을 강조한 수업이 수학적 신념에 미치는 영향**. 석사 학위 논문, 충북대학교.
- 김남희, 나귀수, 박정미, 이경화, 정영옥(2017). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.
- 김유경 (2013). **초등학교 수학 수업에서 수학적 연결성 구현을 위한 지도방안 탐색**. 박사 학위 논문, 한국교원대학교.
- 김해규 (2011). 시앤피(The Connected Mathematics Project)에 대한 고찰. **한국수학교육학회지 시리즈 E 제25집 제1호** : 119-145.
- 상경아, 광영순, 박상욱, 박지현(2016). **수학·과학 성취도 추이변화 국제비교 연구. TIMSS 2015 결과 분석**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRE 2016-15-1.
- 손혜진 (2011). **중학교 3학년과 고등학교 1학년 학생들의 방정식과 함수의 관계에 대한 이해유형 분석**. 석사학위논문, 이화여자대학교.
- 염수경 (2016). **그래프 해석 및 번역 능력 향상을 위한 수업 자료 개발 및 적용 - 한국 교과서와 미국 CMP 교과서 비교·분석을 중심으로**. 석사학위 논문, 한국교원대학교.
- 이승민 (2010). **중학교 1학년 학생들의 함수 표현과 번역에서의 인식론적 장애에 관한 연구**. 석사학위 논문, 한국교원대학교.
- 이헌수, 김영철, 박영용, 김민정 (2015). 일차방정식과 일차함수에 대한 중학생들의 인식과 오류. **한국학교수학회논문집**, 18(3), 259-279.
- 이헌수, 김영철, 박영용 (2016). 일차방정식과 일차함수에 대한 현직교사와 예비교사의 인식. **한국학교수학회논문집**, 19(4), 395-415.
- 추재임 (2012). **한국의 수학과 미국의 CMP 교과서 비교 - 중학교 방정식과 함수 단원 중심으로** -. 석사학위 논문, 한국교원대학교.
- 추재임, 이재임, 김원경 (2013). 한국 수학과 미국의 CMP 교과서의 비교·분석 - 중학교의 방정식과 함수 단원을 중심으로 -. **한국수학교육학회지 시리즈 A 제52권 제1호** : 43-63.
- Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.
- Lappan, Phillips, Fey, Friel (2014). *Variables and Patterns : Focus on algebra*
 _____ (2014). *Say It With Symbols : Making Sense of Symbols*
 _____ (2014). *Moving Straight Ahead : Linear Relationships*
 _____ (2014). *It's In the System : System of Linear Equations and Inequalities*
 _____ (2014). *Thinking With Mathematical Models : Linear and Inverse Variation*
 _____ (2014). *Function Junction : the Families of Functions*
 _____ (2014). *Frogs, Fleas, and Painted Cubes : Quadratic Functions*
- Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, Phillips (2009). *The Shapes of Algebra : Linear System and Inequalities*

수학적 연결성 관점에서 CMP 교과서 분석 -방정식·부등식과 함수 단원을 중심으로-

- NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston, VA: Author. 구광조, 오병승, 류희찬 (공역) (1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향**. 서울 : 경문사.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 (공역) (2007). **학교 수학을 위한 원리와 기준**. 서울 : 경문사.
- <http://connectedmath.msu.edu/>

A Study on Analysis of American CMP Textbooks in terms of mathematical connectivity

-Focused on equations, inequalities, and functions-

Park, Jeong Mi⁷⁾ · Park, Jang Hee⁸⁾ · Lee, Joong Kwoen⁹⁾

Abstract

Educational objectives for mathematics in the curriculum revised in 2009 and the curriculum revised in 2015 put great emphasis on practical use of math, but perception of that lacks at schools. Accordingly, this research is recognizing the need for paying attention to curriculum focusing on mathematical connectivity and is inspecting CMP curriculum which has been developed over the years to reinforce problem solving competence and improve communication skills. This study analyzes CMP textbooks published as third edition in 2014 after several revisions, focusing on equations, inequalities and functions. First, this thesis analyzes mathematical connectivity using a new analysis framework which applied the modes of representation(situations, verbal description/ tables/ graphs/ formulae) made by Janvier(1987). Second, this research analyzes connectivities between different units, various sections, other subjects and practical contents related to the real life.

The results: CMP textbooks use various practical materials for specific situations. They represent twelve processes of connectivity according to the modes of representation of Janvier. The books also show relationship between equations and functions, between inequalities and functions. And CMP textbooks include other subjects and practical contents.

Key Words : CMP(The Connected Mathematics Project), Janvier's the modes of representation, Analysis framework of the modes of representation

Received June 19, 2017
Revised August 18, 2017
Accepted September 21, 2017

* 2010 Mathematics Subject Classification : 97D99

7) Dongguk University, Graduate School (nanna31707@naver.com)

8) Dongguk University, Graduate School (jang-hee@hanmail.net)

9) Dongguk University (joonglee@dgu.edu), Corresponding Author