한국학교수학회논문집 제 20 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 20, Number 3, 211-237, September 2017

고등학교 수학 교과서에서 사용되는 어휘(語彙)와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 소고(小考)

양성현[1)]

고등학교 수학 교과서에서 사용되는 어휘와 기호 표현이 교과서에 따라 편차가 존재하며 수학적 정의와 내용 설명 방식에도 교과서별 상이함이 존재하고 있다. 교과서의 내용 구성뿐만 아니라 교과서의 다양한 표현 방식은 교사와 학생의 교수⋅학습에 상당한 영향을 미치게 되며 표현의 다양성은 동전의 양면처럼 장단이 존재할 수 있다. 교수학적 다양성을 추구할 수 있다는 긍정적 측면과 동시에, 학생의 입장에서 학습 부담으로 작용될 가능성과 평가의 평등성 측면에서 부정적 측면도 존재한다. 본고는 수학 교과서에서 사용되는 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대하여 어떠한 표현이 더 옳고 그른지 판단하고자 하는 것보다 선차적으로 현 교육과정에서 사용되고 있는 교과서의 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 실태를 분석하는데 초점을 두었다. 이를 위하여 2009 개정 수학과 교육과정에 기반하여 개발된 일반 과목 56종의 수학 교과서를 분석하여 '용어와 기호'를 포괄한 교과서 어휘 표현의 상이점을 네 가지(용어를 포함한 어휘 표현, 기호 표현, 수학적 정의, 내용 설명) 측면에서 사례와 함께 제시하였다.

주요용어 : 고등학교 수학 교과서, 2009 개정 수학과 교육과정, 용어와 기호, 표현의 다양성

Ⅰ. 서론

교과서는 교수⋅학습 활동의 제도적 장소인 교육 기관(학교)을 통하여 피교육자들을 대상으로 하여 사용되는 현장적인 속성이 강한 매체이다. 학생과 교사가 만나는 수업의 장에서 교과서는 매우 중요한 역할을 하며 교과서의 내용 구성은 교사의 수업에 상당한 영향을 미치게 된다(이종국, 2008; 이춘식, 2004). 여기서 내용이라 함은 표현 그대로 무엇을 가르치는지에 대한 '내용 영역'에 해당될 것이다. 그러나 수학 교과의 특성상 동일한 내용 영역일지라도 어떠한 어휘[2)]와 기호 표현을 사용하여 학생에게 전달되느냐에 따라 또한 상당히 달라질 수 있는 개연성을 지니고 있다. 이러한 표현에 가장 큰 영향력을 줄 수 있는 것은 교육

* MSC2010분류 : 97U20, 97D99

1) 한국교육과정평가원 (yangsh90@kice.re.kr)

2) 어떤 일정한 범위 안에서 쓰이는 단어의 수효. 또는 단어의 전체 (출처: 국립국어원 표준국어대사전, http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp, 검색일: 2017.05.18.), 본고에서 사용된 '어휘'의 개념은 교육과정상의 용어를 포함하여 교과서에 수록된 문항 및 내용 설명에서 사용되고 있는 모든 단어(word)를 포함하는 포괄적 의미로 사용되었다.

과정에 명시된 '용어와 기호'가 가장 핵심적인 역할을 할 것이라는 것에는 우리 대부분 동의할 것이다. 수학과 교육과정에서 '용어와 기호'가 구체적으로 명시되어 사용된 것은 제3차 교육과정(1973.2.～1981.12.)이다. 문교부령 제325호(중학교 교육과정, 1973.08.31.)와 문교부령 제350호(고등학교 교육과정, 1974.12.31.)를 통하여 수학과 교육과정에서 처음으로 '용어와 기호'가 독립적으로 제시된다.

이후 교육과정의 변화와 더불어 '용어와 기호'에도 많은 변화가 있었으며, 90년대 이후 최근까지 수학 교과의 '용어와 기호'에 대한 연구(권점례, 2016; 김선희ㆍ이준열ㆍ강성권ㆍ김수민, 2016; 김선희 외, 2015a; 2015b; 김연식ㆍ박교식, 1994; 김흥기, 2008; 박교식, 1995; 2001; 2005; 2011; 2013a; 2013b; 방정숙ㆍ권미선, 2016; 백대현, 2010; 백대현ㆍ이진희, 2011; 오평봉ㆍ강승필, 2002; 이민정 외, 2012; 최창우, 1999; 허민, 2014)는 모든 학교급에서 지속적으로 진행되어 왔다.

최창우(1999)는 6차 초등학교 수학 교과서의 표현상의 문제점을 지적하였으며, 오평봉ㆍ강승필(2002)은 제7차 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 수학 <10-가> 교과서를 분석하여 모든 교과서가 '용어'는 통일되어 있으나, 교과서별로 서로 다른 방법으로 표현하고 있어 학생의 입장에서 이해 정도가 차이가 발생할 수 있음을 지적하였다. 김선희 외(2015a, 2015b)는 2009 개정 교육과정(제2009-41호, 2009.12.23.)에 따른 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011a)(이하 2009 개정 수학과 교육과정)의 '기초수학', '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'를 중심으로 교육과정 '용어와 기호'에 대한 수학 교과서 개선 방안을 도출하였다. 그러나 교육과정의 변화와 더불어 교과서 표현에 대한 연구가 지속적으로 진행되어 왔음에도 불구하고 현재까지 수학 교과서 표현에 대한 문제점은 많은 개선을 보이고 있지 못하고 있다.

이러한 문제점들은 교육과정에 수록된 '용어와 기호'에 국한하여 발생되는 것 또한 아니며 '용어와 기호' 이외의 다양한 표현들에서도 도출되고 있다. 김흥기(2008)는 수학 교과서에서 일부 용어의 서술이 교과서 마다 차이가 있어 서로 다른 교과서를 배운 학생들의 경우 의사소통이 원활하지 않을 수 있으므로 보완책이 이루어져야 한다고 강조하였다.

물론 초등과 중등은 접근 방식에서 차이가 존재할 수 있다. 국정으로 집필되는 초등학교 수학 교과서의 경우 내용 적정성과 수월성 측면이 중요할 수 있지만, 검ㆍ인정으로 집필되는 중ㆍ고등학교 수학 교과서의 경우 학습자의 이해적 측면과 더불어 평가와 관련된 평등성[3] 측면도 상당히 고려되어야 할 부분이다. 우리나라 수학교육은 대학 입시로부터 자유로울 수 없는 것이 작금의 현실이다. 지금처럼 대부분의 수업이 입시 성적 향상에 초점이 맞춰져 있는 상황에서 우리는 입시제도를 개선하거나 평가의 평등성 측면을 보장하거나 두 길 중 어느 하나를 선택해야만 할 것이다.

교수ㆍ학습의 다양성이 인정되는 측면을 우선시 한다면 용어와 기호를 맥락 속에서 파악하는 것 또한 사고력을 증진시킬 수 있는 하나의 방법이 될 수 있다. 그러나 평가 측면에서 학생의 수학 성취수준을 파악하고자 할 때, 주어진 문제 상황에서 학생이 용어와 기호를 파악하는데 있어서 어떠한 교과서로 학습하였는가에 따라 유의미한 시간차가 발생한다면 맥락 속에서 용어와 기호를 파악하는 것은 타당하지 않을 수 있다. 물론 용어와 기호의 해석이

3) 좋은 문항이 갖추어야 할 조건 중 하나가 특정 집단에 유불 리가 발생되지 않아야 한다는 것이다(성태제 2010). 특히 전국단위 평가에서는 이러한 점이 더욱 중요한 요소로 작용된다. 차별기능 문항(편파성 문항)은 올바른 평가가 이루어지는데 걸림돌이 될 수 있으며 평가를 통한 올바른 피드백이 이루어질 수 없다. 이러한 측면에서 본고에서 사용된 '평가의 평등성'은 학생의 입장에서 교과서에 따른 유불 리가 발생되지 않는 기회균등적 측면을 의미한다.

맥락에 따라 다르게 해석될 수 있으나, 전국단위 평가에서는 이러한 맥락적 해석이 다의적으로 해석될 여지가 존재할 수 있기 때문에 평가의 평등성 측면에서는 용어와 기호의 맥락적 해석은 최대한 배제되어야 한다. 그러나 평가만을 위한 극단적인 표현의 통일성은 교수 · 학습 다양성을 저해할 수 있으므로 획일적인 통일성 또한 정답이 될 수는 없을 것이다.

본고는 수학 교과서에서 사용되는 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대하여 어떠한 표현이 더 옳고 그른지 판단하는 것에 앞서 현 교육과정에서 사용되고 있는 교과서의 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 실태를 분석하는데 초점을 두었다. 이를 위하여 2009 개정 수학과 교육과정에 기반하여 고등학교 수학과 일반 과목에서 개발된 도서 중 인정도서로 승인된 총 56종[4)]의 수학 교과서를 분석하여 ‘용어와 기호’를 포괄하여 교과서 표현의 상이점을 찾아 네 가지 측면으로 분류하였다. Ⅱ장에서는 용어를 포함한 어휘 표현, 기호 표현과 같은 형식적 측면에 초점을 두어 사례를 제시하였으며, Ⅲ장에서는 수학적 정의, 내용 설명 방식과 같은 내용적 측면과 관련된 사례를 제시하였다. 수학 교과서에서 사용되는 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 분석 결과를 토대로 수학 교과서 집필 관련 개선점과 교과서 집필 시 동반되어야할 시사점을 도출하고자 하였다.

Ⅱ. 어휘와 기호 표현의 상이(相異)한 사례

‘용어와 기호’와 관련한 선행연구를 살펴보면 교과서에 사용된 어휘, 용어, 기호 등의 실태와 적정성에 관한 연구(권점례, 2016; 박교식, 2011; 2013a; 2013b; 방정숙 · 권미선, 2016; 백대현, 2010)와 교육과정상의 제시된 ‘용어와 기호’의 문제점을 지적하고 이를 개선하기 위한 연구(김선희 외, 2016; 김선희 외 2015a; 2016b; 김연식 · 박교식, 1994; 김흥기, 2008; 박교식, 1995; 2001; 백대현 · 이진희, 2011; 오평봉 · 강승필, 2002; 최창우, 1999)가 주류를 이루고 있다. 본 연구는 2009 개정 수학과 교육과정에 기반하여 개발된 고등학교 수학과 일반 과목 교과서 56종을 분석하여 ‘용어와 기호’를 포괄한 어휘 표현들이 얼마나 다양하게 다루어지고 있는지를 분석하였다. 본 장에서는 ‘용어’를 포함한 어휘와 수학 기호 표현에 대한 다양성에 초점을 맞추었다.

1. 어휘 및 서술 방식이 상이한 사례

어휘 표현이 상이한 사례는 3가지로 분류할 수 있다. 동일한 개념에 대하여 서로 다른 용어를 사용하는 경우, 동일한 상황에서 용어의 조건과 서술 방식이 다른 경우, 동일한 개념이 위계에 따라 다르게 사용된 경우이다.

1) 동일한 개념에 대하여 서로 다른 용어를 사용한 경우

(1) 미지수 명명에 대한 표현

‘미적분Ⅰ’의 ‘다항함수의 미분법’에서 극댓값과 극솟값 관련 내용 영역에서 9종의 모든 교

4) 수학Ⅰ: 10종, 수학Ⅱ: 10종, 미적분Ⅰ: 9종, 미적분Ⅱ: 9종, 기하와 벡터: 9종, 확률과 통계: 9종

과서들은 <표 Ⅱ-1>과 같이 삼차함수의 일부 항의 계수를 미지수로 설정하고 극값을 주고 계수를 구하는 형태의 문제를 다루고 있다. 여기서 미지수를 명명하는 방법은 교과서별로 차이가 존재한다. 5종(A, B, E, H, I)은 '상수'로, 3종(C, D, F)은 '실수'로 명명하고 있었으며, G 교과서의 경우는 어떠한 언급도 하지 않고 있었다.

<표 Ⅱ-1> 미지수의 명명에 대한 표현 방법(함수의 극대와 극소)

구분		교과서
1	예제 3 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=0$에서 극댓값 3을 갖고 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 상수 a, b, c의 값과 극솟값을 각각 구하여라.	A, B, E, H, I
2	문제 6 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$는 $x=-3$에서 극댓값, $x=1$에서 극솟값을 가진다. 극댓값과 극솟값의 합이 2일 때, 실수 a, b, c의 값과 극값을 구하여라.	C, D, F
3	문제 2 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$은 $x=1$에서 극댓값 3을 가진다. 이때 a, b의 값과 극솟값을 각각 구하여라.	G

이러한 현상은 여기서 뿐만이 아니라 <표 Ⅱ-2>, <표 Ⅱ-3>과 같이 여러 내용 영역에서 나타나고 있으며, 동일한 교과서일지라도 내용 영역에 따라 표현 방법이 다르게 사용되고 있는 경우도 있었다. 예를 들어, B 교과서의 경우 '함수의 극대와 극소'에서는 미지수를 '상수'로 표현하고 있었지만, '방정식과 부등식에의 활용'에서는 '실수'로 표현하고 있었다. 또한 D 교과서의 경우는 이와 상반되는 표현을 사용하고 있었다.

<표 Ⅱ-2> 미지수의 명명에 대한 표현 방법(방정식과 부등식에의 활용)

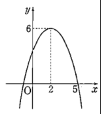
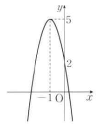
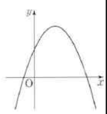
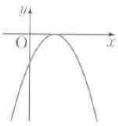
구분		교과서
1	예제 03 방정식 $2x^3-3x^2-a=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위를 구하여라.	A, D, E, H, I
2	**예제 2 방정식 $x^3+6x^2+9x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때 실수 a의 값의 범위를 구하여라.**	B, C, F, G

<표 Ⅱ-3> 미지수의 명명에 대한 표현 방법(함수의 극한)

B 교과서	C 교과서
문제 5 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 구하여라. (1) $\lim_{x \to 2} \frac{ax^2-3x+b}{x-2}=5$ (2) $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x+a}-b}{x+2}=\frac{1}{2}$	문제 7 다음 등식이 성립하도록 실수 a, b의 값을 정하여라. (1) $\lim_{x \to -2} \frac{ax^2+x+b}{x+2}=-7$ (2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+a}+b}{x}=\frac{1}{2}$

마찬가지로 9종의 모든 교과서들은 '함수의 극한'에서 <표 Ⅱ-3>과 같은 유형의 문항을 수록하고 있으며 미지수를 표현할 때 '실수 a, b'를 사용한 교과서는 단 1종(C) 뿐이었다. 더불어 문미 표현도 상이함을 알 수 있다. 6종의 교과서는 '구하여라'를 사용하고 있었고 3종(A, C, F)의 교과서는 '정하여라'라는 표현을 사용하고 있었다. 이러한 미지수 표현에 대한 다양성은 고등학교 수학 교과서에만 한정하여 나타나는 것은 아니다. <표 Ⅱ-4>와 같이 중학교 수학 교과서에서도 어렵지 않게 찾아볼 수 있다.

<표 Ⅱ-4> 미지수의 명명에 대한 표현 방법(중3, 이차함수의 그래프)

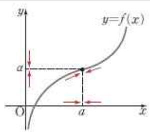
'상수'로 표현	교과서	조건 없음	교과서
3 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c의 값을 구하여라. 	A p.147	**7** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, abc의 값을 구하여라. 	D p.111
05 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 부호를 각각 구하여라. 	H p.152	**7** 오른쪽 그림은 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프이다. a, p의 부호는? 	G p.131

(2) 극한값의 표현: '어떤 실수 α'와 '일정한 값 α'

일반적으로 극한에 대하여 정의할 때, 고등학교 교육과정에서 ϵ을 사용한 엄밀한 정의보다는 <표 Ⅱ-5>와 같이 '한없이 커질 때', '한없이 가까워진다'를 사용하여 비형식적으로 정의한다. 그런데 가까워지는 대상, 다시 말해 극한값을 표현하는 용어(어떤 실수, 일정한 값, 일정한 수)가 교과서마다 다소 차이가 있었다.

'수열의 극한'과 '함수의 극한'에서 극한값에 해당하는 수를 표현할 때, 9종의 '미적분Ⅰ' 교과서 중, 두 내용 영역 모두에서 극한값에 해당하는 수(α 또는 L)를 '어떤 실수'로 정의하고 있는 교과서는 1종(A), '일정한 값'으로 정의하고 있는 교과서는 4종(C, D, F, I), '일정한 수'를 사용하여 정의한 교과서는 1종(H)이었다. 3종(B, E, G)은 '수열의 극한'에서는 '어떤 실수'를 사용하고 '함수의 극한'에서는 '일정한 값'을 사용하여 정의를 하고 있었다.

<표 Ⅱ-5> 극한값의 정의에서 '어떤 실수 α'와 '일정한 값 α'

구분	A 교과서(p.14, 54)	I 교과서(p.13, 61)
수열의 극한	일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to\alpha$ 와 같이 나타낸다.	이와 같이 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 하고, 이것을 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to\alpha$ 로 나타낸다. 이때, α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라고 한다.
함수의 극한	일반적으로 함수 $f(x)$에서 x가 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to\alpha$ 와 같이 나타낸다. 	이와 같이 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 '$x\to a$일 때, 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다.' 고 하고, 기호 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to L$ 로 나타낸다. 이때, L을 $x\to a$일 때의 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 한다.

미국의 고등학교 학생들이 배우는 'Precalculus'에서도 <표 Ⅱ-6>과 같이 극한값을 정의할 때, ϵ을 사용하여 엄밀하게 정의하지 않고 우리나라의 교과서와 동일한 방식으로 비형식적 정의(Informal Definition)를 이용하여 '함수의 극한'을 설명하고 있었다. 또한 극한값으로 설정한 문자(L 또는 N) 앞에 <표 Ⅱ-6>의 구분3과 같이 'the number'를 사용하는 경우도 있지만, 구분1과 구분2와 같이 문자를 바로 사용하는 경우도 존재하고 있었다.

<표 Ⅱ-6> 미국 수학 교과서(Precalculus)의 함수의 극한(Limit of a function) 정의

구분	내용	출처
1	We write $$\lim_{x\to a} f(x) = L$$ and say "the limit of $f(x)$, as x approaches a, equals L" if we can make the values of $f(x)$ arbitrarily close to L (as close to L as we like) by taking x to be sufficiently close to a, but not equal to a.	Stewart et al.(2016) p.898
2	DEFINITION (INFORMAL) Limit at a When we write "$\lim_{x\to a} f(x) = L$," we mean that $f(x)$ gets arbitrarily close to L as x gets arbitrarily close (but not equal) to a.	Demana et al.(2011) p.738
3	$$\lim_{x\to c} f(x) = N$$ This is read as "the limit of $f(x)$ as x approaches c equals the number N." Here f is a function defined on some open interval containing the number c; f need not be defined at c, however. We may describe the meaning of $\lim_{x\to c} f(x) = N$ as follows:	Sullivan(2012) p.866

(3) '경우의 수'와 '방법의 수'

<표 Ⅱ-7>의 두 문제의 내용 영역은 '순열과 조합'이며, 동일한 상황을 소재로 구성된 문제이다. 그럼에도 불구하고 문제에 사용되는 어휘는 다소 차이(경우의 수, 방법의 수)가 있다. 교육과정에서도 내용 체계 분류에서 '순열과 조합'을 '경우의 수', '순열과 조합', '분할', '이항정리'로 분류하고 있고, <교수・학습상의 유의점>에서도 '경우의 수, 순열, 조합, 분할을 이용하여 실생활 문제를 해결해 봄으로써 그 유용성을 인식하게 한다.'로 명시하고 있는 점을 고려할 때, '방법의 수'보다는 '경우의 수'가 더 타당할 것으로 판단된다. 또한 동일하게 '경우의 수'를 사용하여 발문하는 문제에서도 어떤 교과서는 '경우의 수를 구하여라'라고 표현하는 반면, 어떤 교과서는 '모든 경우의 수를 구하여라'라고 표현하고 있었다.

<표 Ⅱ-7> '경우의 수'와 '방법의 수'

H 교과서	I 교과서
문제 2 오른쪽 그림과 같은 구절판 그릇의 한가운데에 밀전병을 넣고 서로 다른 8가지 속재료를 둘레의 여덟 칸에 담으려고 한다. 그릇에 속재료를 담는 경우의 수를 구하여라. 	05 오른쪽 그림과 같이 둘레의 여덟 칸에 각각 8가지 음식을 담고, 가운데 둥근 칸에는 밀전병을 담아 둘레의 음식을 골고루 밀전병에 싸서 먹는 음식을 구절판이라고 한다. 이때, 밀전병 주변에 서로 다른 8가지 요리를 담는 방법의 수를 구하여라. 

이 밖에도 '경우의 수'에서 곱의 법칙을 정의하는데 있어서 <표 Ⅱ-8>과 같이 교과서별로 다양한 용어(함께:together, 잇달아:one after another, 동시에:simultaneously)를 사용하여 정의하고 있었다. '잇달아'를 사용하여 정의하고 있는 교과서가 5종, '동시에'를 사용한 교과서가 3종(A, E, G)이었다. B 교과서의 경우 '함께'와 '동시에'를 혼용하여 사용하고 있었다.

<표 Ⅱ-8> 곱의 법칙(함께, 잇달아, 동시에)

B 교과서	H 교과서	G 교과서
곱의 법칙 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n일 때, 사건 A와 사건 B가 함께 일어나는 경우의 수는 $m\times n$	곱의 법칙 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각의 경우에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m\times n$	곱의 법칙 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$

2) 동일한 상황에서 용어의 조건과 서술 방식이 다른 경우

(1) 용어의 조건이 명확치 않은 경우

원론적으로 약수(divisor)라 함은 정수의 범위에서 양수와 음수를 모두 포괄하는 개념이다(Burton, 2007; Rosen, 2005). 그러나 2009 개정 수학과 교육과정의 '용어와 기호'에서는 '약수'가 초등학교 5~6학년군에서 처음 나오며, <교수・학습상의 유의점>에서도 약수와 배수는 실생활에서 활용되는 경우를 찾아 자연수 범위에서 다룬다고 명시되어 있다. 뿐만 아니라 중학교 1~3학년군에서도 동일하게 자연수의 범위에서만 다루도록 되어 있다. 그러나 <표 Ⅱ-9>의 오른쪽과 같은 평가 문항에서 모든 학생이 양의 약수만을 구하였다면 아무런 문제가 없겠지만 그렇지 않은 경우가 존재한다면 용어의 관습적 조건에 대하여 좀더 명확히 하는 것에 대한 고려가 필요해 보인다.

<표 Ⅱ-9> '양의 약수의 개수'와 '약수의 개수'

A 교과서	G 교과서
문제 7 다음 수의 양의 약수의 개수를 구하여라. (1) 48 (2) 120	문제 5 다음 수의 약수의 개수를 구하여라. (1) 216 (2) 600

(2) 동일한 상황에서 문미 표현 방식이 다른 경우

<표 Ⅱ-10>과 같은 문제는 대부분의 '수학Ⅱ'에서 다루어지고 있는 대표적인 교과서형의 문제이다. 명제가 '참인지, 거짓인지를 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식'이라고 모든 교과서가 정의하고 있음에도 불구하고 '항상'이라는 부사를 꼭 넣어야 하는가에 대해서는 의문점을 가지게 된다.

<표 Ⅱ-10> 명제에서 '참인 것은?'과 '항상 참인 것은?'

C 교과서(p.70)	E 교과서(p.233)
16 명제 $\sim p \longrightarrow q$와 명제 $q \longrightarrow \sim r$가 참일 때, 다음 중 참인 것은? ① $p \longrightarrow r$ ② $r \longrightarrow q$ ③ $\sim r \longrightarrow q$ ④ $r \longrightarrow p$ ⑤ $\sim q \longrightarrow \sim p$	08 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참일 때, 다음 중 항상 참인 것은? ① $q \longrightarrow p$ ② $p \longrightarrow q$ ③ $q \longrightarrow \sim p$ ④ $\sim q \longrightarrow p$ ⑤ $\sim p \longrightarrow \sim q$

<표 Ⅱ-11>, <표 Ⅱ-12>도 이와 유사한 형태이다. '간단히'란 표현은 상당히 주관적 표현이 될 수 있다. 사람마다 또는 상황마다 '간단하다'라는 정도에 대해서 기준이 달라질 수 있을 것이다. 마찬가지로 '연속'과 '불연속'은 교육과정에서 다루는 '용어'이기 때문에 어떤 값에서 '연속'과 '불연속'을 판단하라는 것은 명확할 수 있지만, '연속성을 조사하라'는 의미는 다의적으로 해석될 가능성이 존재한다.

<표 Ⅱ-11> '값을 구하여라'와 '간단히 하여라'

A 교과서(p.171)	A 교과서(p.172)
2 다음 값을 구하여라. (1) $4^{0.25}\times 8^{\frac{1}{2}}$ (2) $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$	**02** 다음을 간단히 하여라. (1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ (2) $2^3\div 4\times(-2)^{-2}$

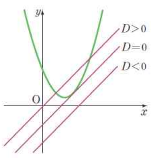
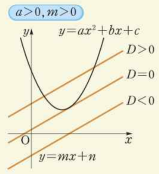
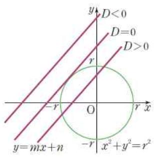
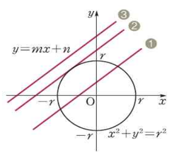
<표 Ⅱ-12> '연속성을 조사하여라'와 '연속인지 불연속인지 조사하여라'

A 교과서(p.70)	H 교과서(p.75)
문제 1 다음 함수의 $x=0$에서의 연속성을 조사하여라.	**문제 1** 다음 함수가 $x=-1$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

3) 동일한 개념이 위계에 따라 다르게 사용된 경우

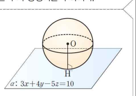
'접한다'는 용어는 <표 Ⅱ-13>과 같이 고등학교 교육과정에서 '수학Ⅰ'의 '이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계'에서 처음 도입되고 '수학Ⅰ'의 '원과 직선의 위치 관계'에서 다시 한 번 도입된다. '접선'과 '접한다'는 용어가 중학교 1~3학년군 기하 영역에서 이미 교육과정의 '용어와 기호'에 명시되어 있고 다루어졌음에도 불구하고 고등학교 '수학Ⅰ' 10종의 모든 교과서는 '한 점에서 만난다'를 주된 표현으로 사용하고 '접한다'는 용어의 표현을 괄호를 이용하여 부가적으로 표현하고 있다.

<표 Ⅱ-13> '수학Ⅰ'에서 '접한다'의 표현

구분	A 교과서	F 교과서
이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계	이차방정식 ①의 판별식을 D라고 하면 $D=(b-m)^2-4a(c-n)$ 이다. 이때 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 다음과 같다. [1] $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다. [2] $D=0$이면 한 점에서 만난다(접한다). [3] $D<0$이면 만나지 않는다. 	**이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계** 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$ 의 판별식 D의 부호에 따라 다음과 같다. ❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다. ❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.) ❸ $D<0$이면 만나지 않는다. 
원과 직선의 위치 관계	따라서 원과 직선의 위치 관계는 이차방정식 ③의 판별식 D의 부호에 따라 다음 세 가지로 구분할 수 있다. 판별식의 부호 / 원과 직선의 위치 관계 $D>0$ / 서로 다른 두 점에서 만난다. $D=0$ / 한 점에서 만난다(접한다). $D<0$ / 만나지 않는다. 	따라서 이차방정식 ③의 판별식을 D라고 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다. ❶ $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다. ❷ $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.) ❸ $D<0$이면 만나지 않는다. 

그러나 다시 ‘기하와 벡터’ 교과서에서는 ‘구와 평면(구와 직선)이 접한다’라는 표현을 <표 Ⅱ-14>와 같이 9종의 모든 교과서에서 문항을 통하여 사용하고 있다. ‘수학Ⅰ’에서는 부가적으로 표현하고 있다가 ‘기하와 벡터’에서는 아무런 언급없이 재사용하고 있는 상태이다. 교과서의 위계에 따른 통일성이 필요해 보이는 부분이기도 하다.

<표 Ⅱ-14> ‘기하와 벡터’에서 ‘접한다’의 표현

A 교과서	C 교과서	D 교과서
예제 6 중심이 원점이고 평면 α: $3x+4y-5z=10$에 접하는 구의 방정식을 구하여라. 풀이 구와 평면 α의 접점을 H라고 하면 $\overline{OH}\perp\alpha$이고 선분 OH의 길이는 구의 반지름의 길이와 같다. $\overline{OH}=\frac{\lvert -10\rvert}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}}=\sqrt{2}$ 따라서 구하는 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2=2$이다.  답 $x^2+y^2+z^2=2$	중심이 C(a, b, c)이고, 반지름의 길이가 r인 구가 다음과 같은 조건을 만족할 때, a, b, c와 r 사이의 관계에 대하여 이야기해 보자. (1) xy평면과 z축에 동시에 접하는 구 (2) xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 구 	15 좌표공간에 반구 $(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=9$, $z\geq 0$ 이 있다. x축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이때 $20\cos\theta$의 값을 구하여라.

2. 기호 표현이 상이한 사례

기호 표현이 상이한 사례는 3가지로 분류할 수 있다. 기호의 읽는 방법이 상이한 경우, 같은 개념의 기호 표현이 상이한 경우, 교과서에 따라 한정적으로 사용된 경우로 나눌 수 있다.

1) 기호의 읽는 방법이 상이한 경우

우리는 수학 교수 · 학습 상황에서 한글과 외래어를 자주 혼용하여 사용하는 경향이 있다. 그 중 대표적인 사례가 더하기(플러스)와 빼기(마이너스)일 것이다. 플러스와 마이너스가 교육과정상의 ‘용어’는 아니지만 ‘국립국어원 표준국어대사전’에도 이미 등재되어 있을 정도로 고등학교 학생들에게 상당히 익숙한 표현이라 할 수 있다. 이와 유사한 경우로 계승(팩토리얼)을 생각해 보자. ‘계승’이란 용어가 분명히 교육과정상의 ‘용어’임에도 불구하고 학교 현장에서는 대부분의 교사가 ‘계승’ 대신에 ‘팩토리얼’을 사용하고 있다. 심지어 <표 Ⅱ-15>와 같이 ‘확률과 통계’ 6종의 교과서에는 명시적으로 ‘!’을 ‘팩토리얼’이라고 읽도록 하고 있다.

<표 Ⅱ-15> ‘계승(!)’을 읽는 방법

구분			교과서
1	1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 계승이라 하며, 이것을 기호로 $n!$로 나타낸다.	$n!$에서 !은 팩토리얼(factorial)이라고 읽는다.	A, C, D, E, G, H
2		계승은 영어로 factorial이다.	B
3		$n!$은 n 팩토리얼(factorial)이라고 읽기도 한다.	F
4		읽는 방법 언급 없음	I

김선희 외(2015a, p.31)의 연구에서도 이 점을 지적하고 있으나 본 연구와는 다소 관점의 차이가 있다. 김선희 외(2015a, p.31)의 연구에서는 <표 Ⅱ-15>와 같이 9종의 교과서에 공

통으로 수록된 내용(1부터 n까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n의 계승이라 하며)을 읽는 방식으로 보고 '5!'의 경우 교과서에는 '5 계승'이라고 읽도록 하고 있으나 현실에서 대부분의 교사와 학생들이 모두 '5 팩토리얼'을 사용하고 있다고 언급하고 있다.

'확률과 통계'에서 이러한 기호의 읽는 방식의 문제점은 '!'에 국한되어 있지 않다. 9종의 모든 교과서가 순열(${}_nP_r$), 중복순열(${}_n\Pi_r$), 조합(${}_nC_r$), 중복조합(${}_nH_r$)의 기호 표현에 대하여 설명하고 있을 뿐 기호를 읽는 방법에 대해서 언급하고 있는 교과서는 단 한 종도 존재하지 않았다. 이러한 결과로 인하여 학교 현장에서는 '${}_nC_r$'이 다양한 방법(엔씨알, 엔콤비네이션알, 엔추즈알 등)으로 읽혀지고 있다. 교육과정이나 교과서의 이러한 기호의 읽는 방법에 대한 비명확성은 여러 연구에서 이미 지적된 바 있다. 백대현 · 이진희(2011)는 중학교 교과서에서 $2.\dot{4}1\dot{5}$와 같은 순환소수를 어떻게 읽는지 제시하지 않고 있다고 지적하였으며, 김선희 외(2016)는 함수의 합성 $g \circ f$의 경우 교사마다 읽는 방법이 'g합성f', 'g도트f', 'g서클f' 등 다양하다고 지적하였다.

2) 같은 개념의 기호 표현이 상이한 경우

${}_nC_r$와 ${}_nP_r$의 관계를 표현하는데 있어서도 <표 Ⅱ-16>과 같이 •(bullet or dot)를 사용하는 교과서와 ×(곱하기)를 사용하는 교과서가 모두 존재하였다.

<표 Ⅱ-16> ${}_nC_r$와 ${}_nP_r$의 관계

F 교과서	G 교과서
${}_nC_r \cdot r! = {}_nP_r$	${}_nC_r \times r! = {}_nP_r$

'n!'과 관련하여 가장 다양하게 표현되는 기호는 <표 Ⅱ-17>과 같이 'n!'과 '곱'이 분모에 동시에 표현되는 경우이다. 'a!'과 'b!'를 붙여 쓰는 교과서가 5종, 'a!'과 'b!' 사이에 ×(곱하기)를 넣은 교과서가 7종, 'a!'과 'b!' 사이에 •(bullet)을 넣은 교과서가 1종이었다. 심지어 4종(D, G, H, I)의 교과서는 동일한 교과서 내에서도 다른 표현을 사용하고 있을 정도로 기호가 다양하게 표현되고 있었다. 미국 교과서의 경우도 <표 Ⅱ-18>과 같이 우리와 마찬가지로 다양하게 표현하고 있었으며 역시 동일 교과서 내에서 다른 표현이 사용되는 사례를 쉽게 발견할 수 있었다.

<표 Ⅱ-17> 'n!'과 '곱'의 표현 방법

구분	교과서	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	페이지	38	37	43	27	23	24	26, 27	33	37, 38
유형1			$\frac{5!}{3!2!}$		$\frac{6!}{2!3!}$			$\frac{7!}{3!4!}$	$\frac{6!}{2!4!}$	$\frac{9!}{5!4!}$
유형2		$\frac{5!}{2!\times 3!}$		$\frac{5!}{2!\times 3!}$	$\frac{5!}{3!\times 2!}$	$\frac{5!}{2!\times 3!}$		$\frac{5!}{3!\times 2!}$	$\frac{5!}{3!\times 2!}$	$\frac{5!}{2!\times 3!}$
유형3							$\frac{5!}{2!\cdot 3!}$			

<표 Ⅱ-18> 미국 수학 교과서의 ‘!’과 ‘곱’의 표현 방법

	구분	출처
1	**Example** ${}_5C_3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{120}{6\cdot 2}=10$ **19.** $\frac{15!}{10!5!}$	Charles et al.(2015) p.676, 678
2	${}_{30}C_5=\frac{30!}{(30-5)!5!}=\frac{30!}{25!5!}$ ${}_{12}C_2\times{}_{18}C_3=\frac{12!}{(12-2)!2!}\times\frac{18!}{(18-3)!3!}=\frac{(\overset{6}{\cancel{12}})(11)(\overset{1}{\cancel{10!}})}{(\underset{1}{\cancel{10!}})(\underset{1}{\cancel{2}})(1)}\times\frac{(\overset{3}{\cancel{18}})(17)(16)(\overset{1}{\cancel{15!}})}{(\underset{1}{\cancel{15!}})(\underset{1}{\cancel{3}})(\underset{1}{\cancel{2}})(1)}$	McAskill et al.(2012) p.531
3	(a) $C(3,1)=\frac{3!}{(3-1)!1!}=\frac{3!}{2!1!}$ (b) $C(6,3)=\frac{6!}{(6-3)!3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{3!\cdot\cancel{3!}}$	Sullivan(2012) p.844

3) 교과서에 따라 한정적으로 사용된 경우

‘±’ 기호는 교육과정에서 특별한 언급은 없지만 중학교 3학년 ‘이차방정식’에서 <표 Ⅱ-19>와 같은 설명과 더불어 대부분의 교과서에서 도입된다. 그러나 중학교 교과서에서는 이러한 ‘복부호’가 등호와 함께 연속적으로 사용되는 경우는 찾아볼 수 없었다.

<표 Ⅱ-19> 중학교에서 ‘±’ 기호의 표현

A 교과서(p.87)	H 교과서(p.91)	I 교과서(p.87)
$x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$를 $x=\pm\sqrt{5}$로 나타내기도 한다.	$x=1+\sqrt{5}$ 또는 $x=1-\sqrt{5}$ 를 간단히 $x=1\pm\sqrt{5}$로 나 타내기도 한다.	$x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$을 간 단히 $x=\pm\sqrt{3}$과 같이 나타내 기도 한다.

그러나 고등학교 교과서에서는 ‘복부호’와 ‘등호’가 함께 사용되는 경우가 2종(B, F)에서 발견되었다. <표 Ⅱ-20>, <표 Ⅱ-21>과 같이 $\sum$, $\int$, $\frac{d}{dx}$의 선형성을 설명하는 과정에서 E 교과서는 분리적으로 제시하고 있지만 B 교과서는 ‘복부호’를 사용하여 설명하고 있다. 또한 기호와 더불어 ‘복부호 동순(또는 부호 동순)’이라는 표현을 사용하고 있다. 이러한 한자 표현에 대해서는 이미 선행연구(김연식 · 박교식, 1994; 박교식, 1995)에서도 현학성을 지적하며 지양될 부분이라 지적되었다.

<표 Ⅱ-20> $\sum$의 선형성에 대한 설명

B 교과서	E 교과서
$\sum$의 성질 ❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ (복부호 동순) ❷ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c는 상수) ❸ $\sum_{k=1}^{n}c=nc$ (c는 상수)	합의 기호 $\sum$의 성질 ❶ $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ ❷ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$ ❸ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수) ❹ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

<표 Ⅱ-21> 교과서에서 사용된 부호 동순

F 교과서(수학Ⅰ p.88)	B 교과서(미적분Ⅰ p.82,106,200)
$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 을 간단히 $\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=\mp 1 \end{cases}$ (복호동순) 으로 나타내기도 한다.	(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)=L\pm M$ (부호 동순) ❷ $\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$ (부호 동순) (2) $\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx$ $=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ (부호 동순)

<표 Ⅱ-22>는 현재 교과서에서 사용되고 있는 '부분수열(subsequence)' 기호이다. '부분수열'은 교육과정 편수자료(교육부, 2015b)에는 실려 있으나 교육과정 '용어'에는 실려 있지 않다. 그러나 10종의 '수학Ⅱ' 교과서 중 8종의 교과서에서 부분수열 기호가 포함된 문제를 싣고 있다. 다시 말해, 2종(D, G)의 교과서는 <표 Ⅱ-22>와 같은 부분수열 기호에 대한 설명이나 부분수열 기호를 포함하는 문항이 전혀 존재하지 않는다. 2009 개정 수학과 교육과정의 배경에서 가장 큰 이슈 중의 하나가 학습량 경감을 통하여 학생들의 학습량과 수준을 적정화하는 것이었다(신이섭 외, 2011). 그러나 이러한 기호가 수록된 교과서로 학습을 하는 학생의 입장에서는 학습 부담으로 작용될 여지가 존재하여 개정 교육과정의 목적과 취지에도 부합하지 않을 수 있으며, 그 반대의 경우는 평가의 평등성 측면에서 이미 다룬 학생들과 비교하여 접근성이 떨어질 가능성도 존재할 수 있다.

<표 Ⅱ-22> 교과서에서 사용되고 있는 부분수열 기호

F 교과서(p.138)	H 교과서(p.169)
06 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-n$일 때, $\sum_{k=1}^{n}a_{3k-1}$의 값을 구하여라.	**12** 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+3n+1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$의 값은? ① 58 ② 64 ③ 70 ④ 76 ⑤ 82

Ⅲ. 수학적 정의와 내용 설명 방식이 상이(相異)한 사례

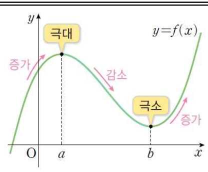
Ⅱ장에서는 용어를 포함한 어휘와 기호 표현의 상이한 사례들을 살펴보았다. Ⅲ장에서는 이러한 어휘와 기호로부터 파생되는 수학적 정의와 내용 설명 방식에 초점을 맞추어 다양한 사례를 제시하고자 한다. 사전적 의미로 ‘정의’는 ‘어떤 말이나 사물의 뜻을 명백히 밝혀 규정함.’이다. 따라서 ‘수학적 정의’가 아닌 ‘정의’로 서술될 경우 교과서에 수록된 수학적 내용 이외에 교과서에서 사용되는 모든 언어에 대한 정의까지 확장될 우려가 있으므로 본고에서는 ‘수학적 정의’로 한정하였다.

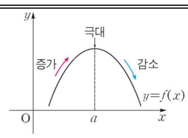
1. 수학적 정의가 상이한 사례

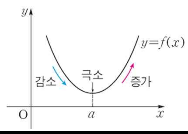
1) 함수의 극대와 극소

2007 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)에 기반하여 개발된 ‘미적분과 통계 기본’, ‘수학Ⅱ’ 교과서에서는 함수의 극대와 극소를 정의할 때, <표 Ⅲ-1>과 같이 함수를 연속인 함수로 제한하고 증가상태와 감소상태의 변화를 이용하여 함수의 극대와 극소를 정의하였다.

<표 Ⅲ-1> 함수의 극대와 극소(2007 개정 교육과정)

<table>
<tr><th>D 교과서(미적분과 통계 기본, p.67)</th><th>F 교과서(수학Ⅱ, p.166)</th></tr>
<tr><td>함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.


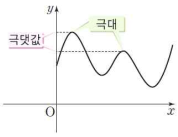
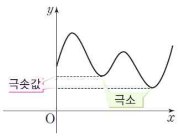
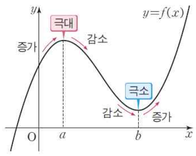
또, 함수 $y=f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 $f(x)$는 $x=b$에서 **극소**라 하고, 그때의 함숫값 $f(b)$를 **극솟값**이라고 한다.
극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.</td><td>함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 x의 값이 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**라고 하며, 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.


또 x의 값이 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**라고 하며, 함숫값 $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.


극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.</td></tr>
</table>

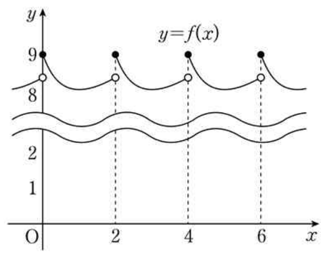
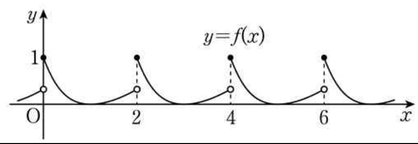
극대와 극소의 이러한 정의 방식에 대하여 이미 문제점을 제기하는 많은 연구들(박세희, 1983; 심상길 · 최재길, 2009; 계승혁 · 하길찬, 2010; 강소미, 2014)이 있어 왔다. 2009 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 대부분의 ‘미적분Ⅰ’ 교과서에서는 이러한 점들이 반영되어 함수의 극대와 극소의 정의에서 <표 Ⅲ-2>의 왼쪽과 같이 함수를 연속으로 한정하지 않았으며 함숫값을 이용하여 함수의 극대와 극소를 정의하였다. 그러나 9종의 ‘미적분Ⅰ’ 교과서 중 8종은 정의 방식을 수정하여 제시하고 있었으나, 1종(H)은 기존과 동일한 방식을 유지하고 있었다. 또한 정의 방식을 수정한 8종의 교과서 중 상수함수의 극값에 대해서는 3종(A, B, G)의 교과서만이 명시적으로 언급하고 있었으며, 불연속함수의 극값에 대해서 논하고 있는 교과서는 단 한 종도 존재하지 않았다.

<표 Ⅲ-2> 함수의 극대와 극소(2009 개정 교육과정)

E 교과서	H 교과서
함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$ 이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**가 된다고 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다. 또 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$ 이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**가 된다고 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.   	함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 증가하다가 감소하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라 한다. 또 함수 $f(x)$가 $x=b$에서 연속이고, x가 증가하면서 $x=b$의 좌우에서 $f(x)$가 감소하다가 증가하면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하며, 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라 한다. 이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.  **함수의 극대와 극소의 판정** 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 ❶ 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다. ❷ 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

수학 교과서의 수학적 정의가 상이한 경우, 앞서 언급한 바와 같이 평가와 관련하여 평등성 측면에서 문제점이 발생될 여지도 있다. <표 Ⅲ-3>은 2017학년도 3월 고3 전국연합학력평가에서 출제된 문제이다. 문제의 해설에 제시된 바와 같이 주어진 함수 $f(x)$는 $x=2n$ (n은 정수)에서 극댓값을 가지는 동시에 불연속인 함수이다. 교과서에서 연속인 경우로 제한하여 극대와 극소를 학습한 학생과 그렇게 않은 학생 사이에 문항을 접근하는 과정에서 다소 차이가 발생할 가능성이 존재할 수 있다.

<표 Ⅲ-3> 2017학년도 3월 고3 전국연합학력평가 수학 영역 가형 14번

문제	해설의 일부
14. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고, $0 \le x < 2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$ 인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0, 2)$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은? [4점] ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2	(ⅰ) $a=-3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.  (ⅱ) $a=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보면 다음과 같이 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 

2) 수학적 확률과 조건부확률

<표 Ⅲ-4>, <표 Ⅲ-5>와 같이 수학적 확률과 조건부확률를 정의하는 방식에도 교과서마다 다소 차이가 존재한다. 2종(A, C)의 교과서는 수학적 확률 정의 시 표본공간, 근원사건에 대한 개념을 전혀 사용치 않고 수학적 확률을 정의하고 있다. 또한 표본공간만을 사용한 교과서가 2종(B, F), 표본공간과 근원사건을 모두 사용한 교과서가 5종(D, E, G, H, I)이었다. 표본공간과 근원사건을 모두 사용한 교과서 5종 중 표본공간을 유한집합으로 한정하여 제시한 교과서는 2종(E, I)이었다.

<표 Ⅲ-4> 수학적 확률

	구분	교과서
1	일반적으로 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 경우의 수가 n이고, 각 경우는 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다고 할 때, 사건 A가 일어나는 경우의 수가 r이면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$는 $$\mathrm{P}(A)=\frac{r}{n}$$ 이다. 이와 같이 정의된 확률을 수학적 확률이라고 한다.	A, C
2	**표본공간**이 S인 어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를 $$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$ 로 정의하고, 이것을 **표본공간** S에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이라고 한다.	B, F
3	일반적으로 어떤 시행에서 **표본공간** S에 대하여 각각의 **근원사건**이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 확률$\mathrm{P}(A)$는 $$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$ 로 정의하고, 이것을 사건 A가 일어날 수학적 확률이라 한다.	D, G, H
4	일반적으로 어떤 시행의 **표본공간** S가 **유한집합**이고 각 **근원사건**이 일어날 가능성이 모두 같을 때, 사건 A가 일어날 확률$\mathrm{P}(A)$는 $$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$ 이다. 이 확률을 사건 A가 일어날 수학적 확률이라 한다.	E, I

조건부확률에 대한 정의에서도 분모가 되는 $\mathrm{P}(A)$의 확률에 대하여 7종의 교과서는 ‘0보다 크다’는 단서 조건을 제시하고 있었으나 1종(D)은 ‘0이 아니다’라는 조건을 제시하고 있었으며 1종(B)은 단서 조건을 전혀 제시하지 않고 정의하고 있었다.

<표 Ⅲ-5> 조건부 확률

구분			교과서
1	$\mathrm{P}(B\|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$	$\mathrm{P}(A)>0$	A, C, E, F, G, H, I
2		$\mathrm{P}(A)\neq 0$	D
3		단서 조건 없음	B

확률과 관련하여 ‘큰 수의 법칙’과 ‘이항분포와 정규분포의 관계’에서도 <표 Ⅲ-6>, <표 Ⅲ-7>과 같이 교과서별로 정의 방식이 다소 차이가 존재한다. <표 Ⅲ-6>과 같이 ‘큰 수의 법칙’의 경우 7종의 교과서는 임의의 양수 h에 대하여 $\mathrm{P}\left(\left|\dfrac{X}{n}-p\right|<h\right)$이 1에 가까워짐을 이용하여 정의하였으며, 2종(D, G)은 단순히 $\dfrac{X}{n}$의 수학적 확률이 p에 가까워짐으로 정의하고 있었다.

<표 Ⅲ-6> 큰 수의 법칙

	구분	교과서
1	어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p이고, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 할 때, 임의의 양수 h에 대하여 n의 값이 한없이 커질수록 확률 $\mathrm{P}\left(\left\|\dfrac{X}{n}-p\right\|<h\right)$는 1에 가까워진다.	A, B, C, D, F, H, I
2	어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라 하면 상대도수 $\dfrac{X}{n}$는 n이 값이 커질수록 수학적 확률 p에 가까워진다.	E, G

<표 Ⅲ-7>의 이항분포와 정규분포의 관계에서도 n이 충분히 크면 이항분포가 정규분포에 ‘근사한다(approximate)’는 것을 7종의 교과서는 ‘근사적으로’라는 단어를 사용하고 있지만 ‘가까워진다’와 ‘따른다’는 표현을 사용하여 정의한 교과서도 있었다.

<표 Ⅲ-7> 이항분포와 정규분포의 관계

	구분	교과서
1	확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 **근사적으로** 정규분포 $\mathrm{N}(np,npq)$를 따른다. (단, $q=1-p$)	A, B, C, D, F, H, I
2	확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np,npq)$에 **가까워진다**. (단, $q=1-p$)	E
3	확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따를 때, **n의 값이** 충분히 크면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(np,npq)$를 **따른다**. ($q=1-p$)	G

3) 합성함수와 역함수의 미분법

‘미적분Ⅱ’는 교육과정의 내용 체계에서 ‘지수함수와 로그함수’, ‘삼각함수’, ‘미분법’, ‘적분법’ 4개의 영역으로 나뉘어져 있으며, 이 중 ‘미분법’은 다시 ‘여러 가지 미분법’과 ‘도함수의 활용’으로 나뉜다. 9종의 ‘미적분Ⅱ’ 교과서는 교과서마다 중단원과 소단원의 구성의 차이는 있으나 ‘여러 가지 미분법’에서 3가지(함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법)의 미분법을 공통으로 다루고 있다. ‘함수의 몫의 미분법’에서는 9종의 교과서가 동일하게 <표 Ⅲ-8>과 같이 정의하고 있었으나, ‘합성함수의 미분법’과 ‘역함수의 미분법’에서는 정의 방식이 교과서에 따라 차이가 존재하였다.

<표 Ⅲ-8> 함수의 몫의 미분법

F 교과서	H 교과서
$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$	$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

‘합성함수의 미분법’에서는 <표 Ⅲ-9>와 같이 8종의 교과서는 $\{f(g(x))\}'$과 $\dfrac{dy}{dx}$의 방식으로 모두 정의하고 있었으나, B 교과서의 경우 $\dfrac{dy}{dx}$만을 사용하여 정의하고 있었다.

<표 Ⅲ-9> 합성함수의 미분법

A 교과서	B 교과서
합성함수의 미분법 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 또는 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$	**합성함수의 미분법** 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 각각 u, x에 대하여 미분가능하면 합성함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$도 x에 대하여 미분가능하고, 그 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

<표 Ⅲ-10> 역함수의 미분법

A 교과서	B 교과서	D 교과서
역함수의 미분법 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$ (단, $f'(y)\neq 0$) 또는 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$	**역함수의 미분법** 미분가능한 함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재하고 미분가능하면 $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{f'(y)}$	**역함수의 미분법** 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재하고 미분가능할 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$

‘역함수의 미분법’에서는 더욱 다양하게 나타나고 있었다. <표 Ⅲ-10>과 같이 ‘미적분Ⅱ’ 9종의 교과서 중 3종(A, C, F)은 $(f^{-1})'(x)$와 $\dfrac{dy}{dx}$를 모두 사용하여 ‘역함수의 미분법’을 정의하고 있으나, 3종(B, H, I)은 $(f^{-1})'(x)$만을 사용하여, 3종(D, E, G)은 $\dfrac{dy}{dx}$만을 사용하여 정의하고 있었다.

4) 정적분의 치환적분법과 정적분의 활용

‘정적분의 치환적분법’에서 <표 Ⅲ-11>과 같이 $\int_a^b f(t)dt$ 와 $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx$ 의 순서가 교과서별로 차이가 존재하고 있었다. ‘미적분Ⅱ’ 9종의 교과서 중 7종이 $\int_a^b f(t)dt$ 의 형태를 먼저 정의하고 있었고, 2종(B, I)의 교과서가 $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx$ 의 형태를 먼저 정의하고 있었다. 학생의 입장에서 치환적분법을 사용하여 적분값을 계산하는 과정에 초점을 맞춘다면 $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx$ 의 형태가 먼저 기술되는 것이 타당할 수 있다.

<표 Ⅲ-11> 정적분의 치환적분법

A 교과서	B 교과서
정적분의 치환적분법 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면 $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$	정적분의 치환적분법 미분가능한 함수 $t=g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고, 함수 $f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$이면 $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

‘정적분의 활용(입체도형의 부피)’에서도 단면의 넓이 $S(x)$의 연속성에 대하여 7종의 교과서는 단면의 넓이 $S(x)$가 연속임을 단서 조건을 통하여 명시하고 있으나, 2종(D, F)의 교과서는 그렇지 않았다. ‘미적분Ⅰ’의 ‘정적분의 활용(도형의 넓이)’에서 9종의 교과서가 함수 $f(x)$를 모두 연속함수로 제한하여 정의한 것과는 다소 차이가 있었다.

<표 Ⅲ-12> 정적분의 활용(입체도형의 부피)

D 교과서	H 교과서
입체도형의 부피 구간 $[a, b]$의 임의의 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 입체도형의 부피 V는 $V=\int_a^b S(x)dx$	입체도형의 부피 닫힌 구간 $[a, b]$의 임의의 점 x를 지나 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 V는 $V=\int_a^b S(x)dx$ (단, $S(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속)

5) 이차곡선의 정의

<표 Ⅲ-13>은 ‘기하와 벡터’ 9종의 교과서에서 ‘이차곡선’을 정의하고 있는 내용이다. 5종(A, B, C, D, F)의 교과서가 x, y에 대한 이차방정식 중 ‘인수분해되지 않는’이란 표현을 사용하여 정의하고 있었다. 엄밀한 의미에서 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$의 형태 중 ‘인수분해되지 않는’ 것을 이차곡선이라 정의하는 것은 적절하지 못하다. 예를 들어,

$x^2+y^2+5=0$과 같이 $A=B=1$, $C=D=E=0$, $F\geq 0$인 경우 인수분해가 되지 않지만 이차곡선이 아니다. 또한 2종(E, G)은 방정식에 대한 언급만 있을 뿐 추가적인 설명은 없었으며, 2종(H, I)은 ‘특수한 경우를 제외하면’이란 표현을 사용하여 정의하고 있었다.

<표 Ⅲ-13> 이차곡선의 정의

구분		교과서
1	원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 x와 y에 관한 이차방정식으로 나타내어진다. 일반적으로 두 일차식의 곱으로 **인수분해되지 않는** x, y에 대한 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ 으로 나타내어지는 곡선을 이차곡선이라고 한다.	A, B, C, D, F
2	원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 x, y에 대한 이차방정식으로 나타내어진다. 이와 같이 x, y에 대한 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ 으로 나타내어지는 곡선을 이차곡선이라고 한다.	E, G
3	원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 x와 y에 대한 이차방정식으로 나타내어진다. 일반적으로 x, y에 대한 이차방정식 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ 의 그래프는 **특수한 경우를 제외하면** 원, 포물선, 타원, 쌍곡선 중 하나로 나타나는데 이를 통틀어 이차곡선이라고 한다.	H, I

6) 내적의 정의에서 영벡터의 포함 여부

내적의 정의에서 9종의 교과서 중 3종(A, B, I)은 영벡터를 제외하여 정의하였으나, 6종은 내용 설명 부분에서는 영벡터를 제외하여 설명하고 있으나 정의 부분에서는 <표 Ⅱ-14>와 같이 단서조건 없이 정의하고 있었다.

<표 Ⅲ-14> 내적의 정의에서 영벡터 포함 여부

구분	A 교과서 (영벡터를 제외한 경우)	H 교과서 (영벡터를 제외하지 않은 경우)
평면벡터	**평면벡터의 내적** 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta(0\leq\theta\leq\pi)$일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$	**벡터의 내적** 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$
공간벡터	**공간벡터의 내적** 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\theta(0\leq\theta\leq\pi)$일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$	**공간벡터의 내적과 성분** 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$이 이루는 각의 크기가 $\theta(0\leq\theta\leq\pi)$일 때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

그러나 내적을 이용하여 수직 조건과 평행 조건을 설명하는 부분에서는 <표 Ⅱ-15>와 같이 9종의 ‘기하와 벡터’ 교과서가 모두 단서 조건을 통하여 영벡터를 제외하여 정의하고 있었다.

<표 Ⅲ-15> 벡터의 수직 조건과 평행 조건

B 교과서	D 교과서
벡터의 내적과 수직, 평행 조건 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$일 때 ❶ 수직 조건 $\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ❷ 평행 조건 $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$	**벡터의 평행 조건과 수직 조건** 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 ① 평행 조건 $\vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert$ ② 수직 조건 $\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

2. 내용 설명 방식이 상이한 사례

1) 지수함수와 로그함수의 미분

‘지수함수와 로그함수의 미분’에서 9종의 ‘미적분Ⅱ’ 교과서 중 3종(D, E, H)이 $y=e^x$에 한정하여 ‘지수함수의 미분’을 다루고 있을 뿐, $y=a^x$의 도함수를 다루고 있지 않았다. 또한 $y=a^x$의 도함수를 다루는 6종의 교과서 중 4종(A, F, G, I)은 $y=e^x$의 도함수를 먼저 다루고 확장적으로 $y=a^x$의 도함수를 다루고 있었으나, 2종(B, C)은 $y=a^x$의 도함수를 먼저 다루고 a에 e를 대입하여 $y=e^x$의 도함수를 유도하고 있었다.

<표 Ⅲ-16> 지수함수와 로그함수의 미분

F 교과서	C 교과서	H 교과서
지수함수 $y=e^x$에서 도함수의 정의에 의하여 $y'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$ $=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$ 이다. 즉 $y=e^x$이면 $y'=e^x$이다. 또 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에서 $y'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$ $=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$ 이다. 즉 $y=a^x$이면 $y'=a^x\ln a$이다.	$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$임을 이용하여 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 도함수를 구해 보자. 지수함수 $y=a^x$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면 $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$이므로 $y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ $=a^x\ln a$ 이다. 따라서 지수함수 $y=a^x$의 도함수는 $y'=a^x\ln a$ 이다. 특히, $a=e$이면 $\ln e=1$이므로 지수함수 $y=e^x$의 도함수는 $y'=e^x\ln e=e^x$ 이다.	지수함수의 극한을 이용하여 지수함수 $y=e^x$의 도함수를 구하여 보자. 함수 $y=e^x$에서 도함수의 정의에 의하여 $y'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$ $=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$ 이다. 따라서 $(e^x)'=e^x$이다. 이상을 정리하면 다음과 같다. **지수함수 $y=e^x$의 도함수** $(e^x)'=e^x$

그러나 9종의 교과서 모두 ‘로그함수의 미분’에서는 $y=\log_a x$을 $y=\frac{\ln x}{\ln a}$의 꼴로 변형하여 $y=\log_a x$의 도함수를 다루고 있었다. 교육과정의 <교수・학습상의 유의점>에서도 ‘지수함수와 로그함수의 극한은 지수함수 e^x와 로그함수 $\ln x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.’고 명시되어 있다. 다시 말해, 이는 앞서 언급한 바와 같이 ‘$y=a^x$의 도함수’를 학습하는 학생의 입장에서는 학습 부담으로 작용될 여지가 존재하여 개정 교육과정의 목적과 취지에도 부합하지 않을 수 있으며, 그 반대의 경우 ‘$y=a^x$의 도함수’를 학습하지 않는 학생의 입장에서는 평가의 평등성 측면에서 이미 다룬 학생들과 비교하여 접근성이 떨어질 가능성도 존재할 수 있다.

2) 삼각함수의 극한과 합성

2007 개정 수학과 교육과정에서 삼각함수는 '수학5)', '수학Ⅱ'에 걸쳐서 학습하도록 구성되어 있었으나 2009 개정 수학과 교육과정에서는 삼각함수가 통합 및 약화되어 '미적분Ⅱ'로 이동되었다. 따라서 삼각함수는 교과서 집필과정에도 교육과정의 해석 정도에 따라 많은 영향을 받게 되었고 이로 인하여 삼각함수 내용 영역에서도 교과서별 상이점이 다수 발견된다. 가장 먼저 <표 Ⅲ-17>과 같이 삼각함수의 극한에서 9종의 '미적분Ⅱ' 교과서 중 3종(B, F, I)은 x의 단위를 단서조건으로 정의하지 않았다.

<표 Ⅲ-17> 삼각함수의 극한

H 교과서	I 교과서
삼각함수의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (단, x의 단위는 라디안)	삼각함수의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

삼각함수의 부정적분에서는 더 큰 차이가 나타난다. 2종(A, I)의 교과서가 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$와 같이 삼각함수의 기본형 3가지만 다루고 있는 반면, 3종(C, D, E)은 <표 Ⅲ-18>의 오른쪽과 같이 6가지 삼각함수의 부정적분을 다루고 있었다. 특이한 점은 삼각함수의 미분에 대해서는 9종의 '미적분Ⅱ'의 교과서가 모두 $\sin x$와 $\cos x$만을 다루고 있다는 점이다. 이는 '몫의 미분법'과 '합성함수의 미분법'이 내용 영역상 삼각함수의 미분보다 뒤쪽에 위치하고 있는 구성적 측면으로 나타난 현상으로 판단된다.

<표 Ⅲ-18> 삼각함수의 부정적분

A 교과서	D 교과서
삼각함수의 부정적분 ❶ $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (단, C는 적분상수) ❷ $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ (단, C는 적분상수) ❸ $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (단, C는 적분상수)	삼각함수의 부정적분 ① $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ ② $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ ③ $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ ④ $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$ ⑤ $\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+C$ ⑥ $\int \csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$

삼각함수에서 이러한 설명 방식의 차이는 후반부로 갈수록 교과서별 편차가 더욱 커진다. 특히 삼각함수의 합성, 삼각함수의 배각공식과 반각공식에서는 더욱 두드러진다. 삼각함수의 합성과 관련하여 9종의 '미적분Ⅱ' 교과서 중 4종(A, C, D, G)은 <표 Ⅱ-19>와 같이 공식화하여 언급하고 있었으며, 2종(B, E)의 교과서는 예제와 문제를 통하여 다루고 있으며 3종의 교과서는 다루어지지 않고 있다.

5) '수학'은 2007 개정 수학과 교육과정에서 국민 공통 기본 교육과정으로 편성되어 고등학교 1학년 학생들이 공통으로 학습을 하는 과목을 의미함.

<표 Ⅲ-19> 삼각함수의 합성

D 교과서	B, E 교과서
삼각함수의 합성 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(단, \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$	예제 2 함수 $f(x)=\sin x+\cos x$의 최댓값과 최솟값을 구하여라. 삼각함수의 덧셈정리 응용하기 (2) 예제 04 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$를 $r\sin(\theta+\alpha)$의 형태로 나타내어라. $\left(단, r>0, -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

삼각함수의 <교수 · 학습상의 유의점>에서는 ‘삼각함수의 성질은 삼각함수의 그래프의 성질을 이해하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.’, ‘삼각함수의 덧셈정리와 관련하여 복잡한 문제는 다루지 않는다.’라고 명시되어 있다. 그러나 교육과정에서 자주 언급되는 ‘간단히 다룬다.’와 ‘복잡한 문제는 다루지 않는다.’와 같은 표현은 사람에 따라 해석 범위가 상당히 달라질 수 있다. 과연 이 범위의 설정을 어디까지 둘 것인가? 교과서 집필 관계자뿐만 아니라 현장의 교사들은 매우 혼돈스러울 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

수학 학습에서 용어의 정의를 올바르게 잘 이해하는 것은 바로 그에 연관된 학습 내용의 이해와 활용에 매우 중요하며(김홍기, 2008; 김선희 외, 2016; 백대현, 2010) 수학 용어의 의미를 잘 이해하기 위해서는 용어를 학생의 이해 수준과 언어 능력에 맞도록 적절하게 제시하여 일관성 있게 사용하고 표현하는 것이 필요하다(백대현, 2010). 그러나 오히려 엄밀성을 가지고 획일적으로 어휘와 기호를 통일하는 것이 자칫 교수 · 학습의 다양성을 저해할 수도 있다. 교수자나 교과서 집필자의 입장에서 가장 중요한 것은 무엇보다도 학습자의 이해적 관점일 것이다. 다시 말해, 학습자가 그 뜻을 보다 잘 이해할 수 있기를 기대하는 것이다. 피교육자의 입장에서 용어 정의의 엄밀성을 추구하는 과정에서 수학에 대한 친밀감이 저해될 수 있다는 연구(김선희 외, 2015a)도 있다. 이러한 입장에서라면 교과서의 용어와 기호 표현의 다양성은 일부 인정될 필요성도 존재한다.

앞서 언급한 바와 같이 본고의 목적은 수학 교과서에서 사용되는 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대하여 어떠한 표현이 더 옳고 그른지 판단하고자 하는 것보다 1차적으로 현 교육과정에서 사용되고 있는 교과서의 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 실태를 분석하고자 함이다. 이를 위하여 2009 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 일반 과목 56종의 수학 교과서를 분석하여 ‘용어와 기호’를 포괄하여 교과서 표현의 상이점을 네 가지(용어를 포함한 어휘 표현, 기호 표현, 수학적 정의, 내용 설명) 측면에서 사례와 함께 제시하였다. 분석 결과를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 미지수의 명명에 대한 표현을 비롯하여 ‘용어’를 포함한 어휘 표현이 상이한 사례가 다수 존재하였으며, 교과서별로 다를 뿐만 아니라 동일 교과서 내에서도 표현이 다른 경우가 있었다. ‘접선’과 ‘접한다’는 용어는 ‘수학Ⅰ’에서는 괄호를 통하여 부가적으로 표현하고 ‘기하와 벡터’에서는 그대로 사용되어 교과서의 위계에 따른 통일성이 요구되는 부분도 존재하였다. 이 밖에도 ‘경우의 수/방법의 수’, ‘참인 것은?/항상 참인 것은? ‘양의 약수의 개수/

약수의 개수', '함께/잇달아/동시에' 등 다양한 사례가 존재하였으며, 극한값의 정의에서 사용되는 '어떤 실수/일정한 값/일정한 수'와 같은 사례는 우리나라 교과서뿐만 아니라 외국의 사례에서도 쉽게 찾아볼 수 있었다.

둘째, 수학 기호의 표현에서도 '순열($_n\mathrm{P}_r$), 중복순열($_n\Pi_r$), 조합($_n\mathrm{C}_r$), 중복조합($_n\mathrm{H}_\mathrm{r}$)'과 같이 기호를 읽는 방법이 교육과정과 교과서에 수록되어 있지 않아 학교 현장에서 다양한 형식으로 읽혀지는 경우도 존재하였으며, '계승(!)'의 경우는 교육과정에 '용어'로 수록되어 있음에도 많은 교과서가 '$n!$'을 '엔팩토리얼'이라 읽도록 명시하고 있었다. 특히, '$n!$'과 '곱'의 경우는 교과서마다 표현 방법($a!b!$, $a!\cdot b!$, $a!\times b!$)이 매우 다양하게 제시되어 있었다. 또한 $\sum$, $\int$, $\frac{d}{dx}$의 선형성을 설명하는 과정에서는 '±'와 함께 '복호 동순'이란 '용어'를 사용하는 일부 교과서도 존재하였다.

셋째, '함수의 극대와 극소'를 비롯하여 수학적 정의 또한 교과서별로 상이한 경우가 상당수 존재하였다. '이차곡선의 정의'는 교과서별로 차이가 있을 뿐만 아니라 일부 교과서는 수학적으로 타당하지 않은 표현을 사용하여 정의하고 있었다. 이 밖에도 '조건부확률'과 '벡터의 내적'에서는 단서 조건이 교과서별로 차이가 있었으며, '합성함수와 역함수의 미분법'과 '정적분의 치환적분법'에서는 정의에 사용된 기호나 기호의 순서가 상이하기도 하였다. 학생들이 수학적 정의를 다양한 정의 방식으로 접근 또는 학습하는 것은 장단이 존재할 수 있다. 과도한 다양성은 학생의 입장에서 학습 부담으로 작용될 여지가 존재하여 개정 교육과정의 목적과 취지에도 부합하지 않으며 평가의 평등성 측면에서 이미 다룬 학생들과 비교하여 그렇지 않은 학생들의 접근성이 떨어질 가능성도 존재할 수 있다.

넷째, 동일한 내용에 대하여 설명 방식이 상이한 경우는 물론, 동일한 내용 영역에서 다루는 내용 요소의 양의 편차 또는 내용 설명 순서에 있어서도 교과서별 편차가 존재하고 있었다. '미적분Ⅱ'의 '지수함수와 로그함수의 미분'에서는 $y=e^x$과 $y=a^x$의 미분 설명 방식 순서가 교과서별로 상이할 뿐만 아니라 $y=a^x$의 미분이 다루어지고 있는 않는 교과서도 존재하였다. 특히, 다루어지는 내용 요소의 양적인 측면은 삼각함수와 같이 개정 교육과정에서 내용이 통합·약화된 부분에서 교과서별 차이가 두드러지게 나타나고 있었다.

2009 개정 수학과 교육과정에 기반하여 집필된 고등학교 수학과 일반 과목 56종의 교과서 분석을 통하여 얻은 시사점을 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 피교육자인 학생의 입장에서 교과서 표현의 다양성을 어떻게 받아들이고 있는지에 대한 연구가 필요하다. 2009 개정 수학과 교육과정은 교수학적 다양성을 추구한다는 차원에서 교육과정 해설서를 폐기하고 교과 교육과정 기준을 명확히 제시하여 다양하고 선진화된 교과서 개발을 유도하기 위하여 인정체제로 전환하였으나, 교과서 내용의 정확성을 비롯한 많은 문제점이 도출되어 인정도서 확대 정책이 재검토가 제기되었고 현재 다시 검정체제로 전환되었다. 이러한 교과서 표현에 대한 다양성과 통일성을 수요 당사자인 학생들이 어떻게 느끼고 있으며 어떻게 받아들이고 있는지에 대한 인식 조사가 필요하다. 교과서의 집필과정에서 학생들의 의견이 반영될 수 있는 경로는 상당히 제한적이다. 피교육자인 학생들이 다양한 표현에 대하여 학습 부담을 느끼는 부분에 대해서는 통일성이 필요할 것이며, 반대로 다양한 접근 방식이 더 효과적인 부분이라면 다양성을 장려하는 것이 필요할 것이다. 이처럼 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 학생들의 인식 정도를 조사하여 교과서 집필에

반영해야 할 것이다.

둘째, 교육과정에 명시된 '교수·학습 방법 및 유의 사항'과 '평가 방법 및 유의 사항' 등에서 다양성은 보장하되, 교사들이 좀 더 명확히 인지할 수 있는 표현이 요구된다. 예를 들어, 2015 개정 수학과 교육과정(교육부, 2015a)에서 '~간단한 것을 다룬다'와 '~복잡한 것을 다루지 않는다'와 같은 표현이 70여회 이상 수록되어 있다. 주관적 해석이 강하게 작용할 수밖에 없는 이러한 표현들은 교과서 집필 관계자뿐만 아니라 현장의 교사에게 매우 혼돈스러울 수 있다. 수학과의 경우 교육부에서 제시하는 교과용도서 집필기준[6]이 존재하지 않을 뿐만 아니라 교육과정이 교수･학습의 다양성을 인정하기 위하여 포괄적으로 제시되어 있기 때문에 현행 교과서 집필 체제에서는 교육과정이 교과서의 세부 학습내용을 인위적으로 통제할 수 없는 것이 현실이다(양성현, 2015). 그러나 교육과정에서 이처럼 주관적 해석이 강하게 작용될 수 있는 용어들의 지속적 사용은 교과서 표현의 다양성과 통일성 어느 방향에도 긍정적으로 작용될 수 없을 것이다.

본 연구는 수학 교과서에서 사용되는 어휘와 수학 기호 표현의 다양성의 실태를 살펴보고자 하였으나, 고등학교 수학 일반 과목에 한정하여 분석하였다는 것이 연구의 제한점이라 할 수 있다. 또한 제언에서 언급한 바와 같이 분석 결과를 토대로 학생들의 교과서 표현의 다양성에 대한 인식 조사는 이루어지지 못하였다. 후속 연구를 통하여 어휘와 수학 기호 표현의 다양성에 대한 학생들의 인식을 조사하고, 피교육자의 인식 정도에 따라 그 결과가 교과서 집필에 반영되어야 할 것이다. 교수학적 측면의 다양성과 평가의 평등성 측면의 통일성이 교과서 내에서 조화를 이룰 때, 학생들의 입장에서는 특정 교과서의 사용에 의한 유불리가 발생되지 않을 것이며 교사의 입장에서는 교수･학습 다양성이 보장될 수 있을 것이다.

우리나라의 대학 입시 체제는 전국단위 평가 체제를 갖추고 있으며, 그 결과가 사회전반적으로 너무나 민감하기 때문에 수학 교과서의 표현의 다양성은 평가의 유불 리로 해석되기도 한다. 본고에서는 이러한 교육적 현실을 알리고자 하는 목적으로 특정 교과서에서만 다루어지고 있거나, 그 반대로 특정 교과서에서만 다루어지지 않는 기호 표현이나 내용에 대하여 정리하고자 하였다. 물론 그러한 표현이 잘못되거나 옳지 못한 표현이 아닐 수 있다. 또한 지면의 한계상 한정적 사례만을 정리하여 수록하였다. 우리의 현 입시제도가 지속적으로 유지되고 개선되지 않는다면 평가의 평등성 측면에서 고등학교 수학 교과서의 어휘와 수학 기호 표현의 다양성은 반드시 제고가 필요하다. 역으로 현재 상대평가 체제로 시행되고 있는 대입선발 방식에 준거지향평가 방식 도입과 같은 입시제도의 변화가 발생될 경우, 교수･학습의 다양성과 함께 이러한 표현의 다양성은 충분히 확대될 수 있을 것이다.

6) 교육과학기술부(2011b)는 2009 개정 교육과정에 따른 교과교육과정 적용을 위한 교과용도서 집필기준을 국어, 도덕, 역사, 경제 과목에 한정하여 제시하고 있다.

참고 문헌

강소미(2014). **2009 개정 수학 교과서 구성 및 정의의 변화 연구**. 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

계승혁, 하길찬(2010). 우리나라 고등학교 수학 교과서에서 함수의 증감과 극대 · 극소를 설명하는 비판적 논의. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 49**(2), 247-257.

교육과학기술부(2009). **2009 개정 교육과정 초 · 중등학교 교육과정 총론**. 교육과학기술부 고시 제 2009-41호.

교육과학기술부(2011a). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8].

교육과학기술부(2011b). **2009년 개정 교육과정에 따른 교과교육과정 적용을 위한 교과용도서 집필기준**(국어, 도덕, 역사, 경제). 교육과학기술부.

교육부(2015a). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8].

교육부(2015b). **2015 개정 교육과정에 따른 교과용도서 개발을 위한 편수자료Ⅲ**: 기초과학, 정보 편.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정**. 교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책8].

권점례(2016). 초등학교 수학 교과서 내용 적정성 분석: 단원 구성 및 어휘 사용을 중심으로. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 55**(3), 281-297.

김선희, 서동엽, 강성권, 김수민(2016). 교육과정과 교과서에 제시된 용어 · 기호에 대한 비판적 고찰. **학교수학, 18**(3), 611-623.

김선희, 이준열, 서승현, 서동엽, 박문환, 강은주, 강성권, 이태석(2015a). **용어 · 기호 이해도 제고 수학 교과서 개선 방안 연구**. 한국과학창의재단 연구보고서.

김선희, 이준열, 서승현, 서동엽, 박문환, 강은주, 강성권, 이태석(2015b). **용어 · 기호 이해도 제고 수학 교과서 개선 방안 연구: 기초수학 · 수학Ⅰ · 수학Ⅱ 용어 기호 해설서**. 한국과학창의재단 연구보고서.

김연식, 박교식(1994). 우리 나라의 학교 수학 용어의 재검토. **대한수학교육학회 논문집, 4**(2), 1-10.

김흥기(2008). 중학교 수학에서 도입된 용어 및 기호에 관한 고찰. **학교수학, 10**(2), 223-257.

문교부(1973). **중학교 교육과정**. 문교부령 제325호.

문교부(1974). **인문계 고등학교 교육과정**. 문교부령 제350호 [별책3].

박교식(1995). 우리 나라의 학교수학 용어에 대한 의미론적 탐색. **대한수학교육학회 논문집, 5**(1), 231-242.

박교식(2001). 제7차 초등학교 수학과 교육과정에 제시된 수학 용어에 대한 연구. **학교수학, 3**(2), 233-248.

박교식(2005). 북한의 학교 수학 용어의 현상적 특징에 관한 연구. **학교수학, 7**(1), 1-15.

박교식(2011). 우리나라 초등학교 수학과 교육과정에서의 용어 등재와 수학 교과서에서의 용어 사용의 적합성에 관한 논의. **수학교육학연구, 21**(4), 361-378.

박교식(2013a). 우리나라 초등학교 1~2학년 수학 교과서/익힘책 용어 사용 실태 분석: <수와 연산> 영역에서의 ‘곱’, ‘자릿값’, ‘구구’, ‘숫자’를 중심으로. **학교수학, 15**(4), 833-846.

박교식(2013b). 초등학교 수학에서 사용하는 사칙계산 관련 휘에 관한 연구. **한국초등수학교육학회지, 17**(2), 185-205.

박세희(1983). 高敎 敎科書 內容의 몇 가지 問題點. **대한수학회 수학교육논총 1**, 109-128.

방정숙, 권미선(2016). 초등학교 3~4학년군 수학 교과서 및 익힘책의 어휘 적정성 분석. **학교수학, 18**(4), 903-922.

백대현(2010). 초등학교 수학 교과서에 제시된 용어 사용과 표현의 적절성 고찰. **학교수학, 12**(1), 61-77.

백대현, 이진희(2011). 중학교 수학 교과서에 제시된 기호의 서술: 어떻게 읽고 이해할 것인가?. **수학교육학연구, 21**(2), 165-180.

성태제(2010). **현대교육평가**. 서울:학지사.

신이섭 외 25명(2011). **2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구**. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.

심상길, 최재길(2009). 함수의 극값에서 이공계열 학생들의 오류에 대한 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 23**(3), 583-597.

양성현(2015). 고등학교 교과서 내용 영역별 세부 학습내용 차이에 대한 교사 의견조사: 정적분의 활용을 중심으로. **학교수학, 17**(4), 555-570.

오평봉, 강승필(2002). 제7차 수학과 교육과정에 따른 용어상의 문제점 연구: 수학 <10-가> 중심으로. **교육과학연구, 4**(2), 287-312.

이민정, 이양, 양성필, 박미숙(2012). 곱셈과 괄호 기호의 사용에 대한 연구. **한국학교수학회논문집, 15**(4), 627-641.

이종국(2008). **한국의 교과서 변천사**. 대한교과서(주).

이춘식(2004). 인정 도서의 제도 개선. **교과서연구, 42**, 47-51.

최창우(1999). 6차 초등수학 교과서의 표현상의 문제점 및 개선점에 관한 소고 Ⅱ. **수학 · 과학교육연구, 22**, 133-155.

허민(2014). 수학 용어의 개선 방향에 대한 소고. **한국수학교육학회 2014 춘계학술대회 프로시딩**, 251-255.

Burton, D. M.(2007). *Elementary Number Theory*. (6th ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Charles, R. I., Hall, B., Kennedy, D., Bellman, A. E., Bragg, S. C., Handlin, W. G., Muphy, S. J. & Wiggins, G.(2015). *Algebra 2: Common Core*. Boston, MA: Pearson Education.

Demana, F. D., Foley, G. D., Waits, B. K., & Kennedy, D. (2011). *Precalculus: Graphical, numerical, algebraic*. (8th ed.). Boston, MA: Addison Wesley.

McAskill, B., Watt, W., Balzarini, E., Johnson, B., Kennedy, R., Melnyk, T. & Zaraski, C.(2012). *Pre-Calculus 12* Student Edition. (1st ed.). Whitby, ON: McGraw-Hill Ryerson.

Rosen, K. H.(2005). *Elementary Number Theory and its Application*. (5th ed.). Boston, MA: Addison Wesley.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S.(2016). *Pre-Calculus: Mathematics for Calculus*. (7th ed.). Boston, MA: Cengage Learning.

Sullivan, M.(2012). *Precalculus*. (9th ed.). Boston, MA: Prentice Hall.

A View on the Diversity of the Word and Mathematical Notation Expression Used in High School Mathematics Textbooks

Yang, Seong Hyun[7)]

Abstract

Depending on the type of textbook, the word and mathematical notation expression used in high school mathematics textbooks varied and there were also some differences on the mathematical definition and the content description methods.

Not only the composition of textbooks but also various expressing ways of textbooks have significant impacts on teaching and learning of teacher and student. The diversity of expression had pros and cons like both sides of a coin. There is a positive aspect that we can pursue pedagogical diversity. Simultaneously there is a negative aspect that the possibility of acting as a learning burden exists in the viewpoint of the student and the equality of evaluation may be undermined.

In this study, Preferentially we focused on analyzing the actual situation rather than judging what is more appropriate about the diversity of words and notation expressions used in mathematics textbooks which is based on the current curriculum. For this purpose, we analyzed 56 kinds of mathematics textbooks based on the 2009 revised mathematics curriculum, and presented four aspects(terms expressing, notations expression, mathematical definition, content description method) with examples about differences of the various expressions used in textbooks including 'terms and notations'.

Key Words : High School Mathematics Textbook, 2009 Revised Mathematics Curriculum, Terms and Notations, Diversity of Expression

Received May 29, 2017
Revised June 30, 2017
Accepted August 21, 2017

＊ 2010 Mathematics Subject Classification : 97U20, 97D99

7) Korea Institute for Curriculum and Evaluation (yangsh90@kice.re.kr)