

탄성지반위에 놓인 비국소 자기-전기-탄성 나노 판의 구조안정해석

한성천¹, 박원태^{2*}

¹대원대학교 철도건설과, ²공주대학교 건설환경공학부

Structural stability analysis of nonlocal Magneto-Electro-Elastic(MEE) nano plates on elastic foundation

Sung-Cheon Han¹, Weon-Tae Park^{2*}

¹Department of Civil & Railroad Engineering, Daewon University College

²Division of Construction and Environmental Engineering, Kongju National University

요약 본 논문은 탄성지반위에 놓인 비국소 자기-전기-탄성 나노 판의 구조안정에 관하여 1차 전단변형이론을 이용하여 분석하였다. 4변이 단순지지된 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴하중을 구하기 위하여 Navier 방법을 적용하였다. 기존의 연구들에서는 2방향 좌굴해석은 거의 연구되지 않았다. Maxwell 방정식과 자기-전기 경계조건에 따라 자기-전기-탄성 나노 판의 두께 방향에 따른 자위 및 전위의 변화가 결정된다. 자기-전기-탄성 나노 판의 탄성이론을 재 공식화하기 위하여 Eringen의 비국소 미분 구성 관계식을 사용하였고 변분이론을 이용하여 비국소 탄성이론의 지배방정식을 연구하였다. 탄성지반의 효과는 Pasternak의 가정을 적용하였다. 비국소 이론과 국소 이론의 관계를 계산 결과를 통하여 분석하였다. 또한, 전위 및 자위의 크기, 비국소 매개변수, 탄성지반 매개변수 그리고 폭-두께 비에 따른 구조적 안정문제를 연구하였다. 분석 결과들은 전위 및 자위의 효과를 나타내었다. 이러한 계산 결과들은 자기-전기-탄성 재료로 구성된 신소재 구조물에 관한 향후 연구의 비교 자료가 될 수 있을 것이다.

Abstract This study examined the structural stability of nonlocal magneto-electro-elastic nano plates on elastic foundations using first-order shear deformation theory. Navier's method has been used to solve the buckling loads for all edges simply supported boundary conditions. On the other hand, biaxial buckling analysis of nano-plates has been rarely studied. According to the Maxwell equation and the magneto-electro boundary condition, the change in the magnetic and electric potential along the thickness direction of the magneto-electro-elastic nano plate was determined. To reformulate the elasticity theory of the magneto- electro-elastic nano plate, the differential constitutive equation of Eringen was used and the governing equation of the nonlocal elasticity theory was studied using variational theory. The effects of the elastic foundation are based on Pasternak's assumption. The relationship between nonlocal theory and local theory was analyzed through calculation results. In addition, structural stability problems were investigated according to the electric and magnetic potentials, nonlocal parameters, elastic foundation parameters, and side-to-thickness ratio. The results of the analysis revealed the effects of the magnetic and electric potential. These calculations can be used to compare future research on new material structures made of magneto-electro-elastic materials.

Keywords : Elastic Foundation; Magneto-Electric-Elastic(MEE) materials; Nano plates, Nonlocal elasticity theory; Shear deformation theory, Structural stability.

이 논문은 2016년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(NRF-2016R1D1A3B03931701).
본 논문은 2016년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음.

*Corresponding Author : Weon-Tae Park(Kongju National Univ.)

Tel: +82-41-521-9305 email: pwtae@kongju.ac.kr

Received August 14, 2017

Revised September 4, 2017

Accepted September 15, 2017

Published September 30, 2017

1. 서론

2000년대에 들어오면서 압전/압자기 재료 구조와 관련된 지능 및 스마트 재료에 대한 연구가 여러 가지 방면에서 수행되고 있는 상황이다. 지능형 혹은 스마트 소재는 자기, 전기 및 탄성 에너지 사이에서 에너지를 변환할 수 있다. 또한, 압전/압자기 재료로 만들어진 복합 재료는 단상 압자기 재료 또는 압전 재료에는 존재하지 않는 자기/전기 효과를 나타낸다. 자기-전기-탄성 재료는 로봇공학, 액추에이터, 센서, 구조물 상태점검, 진동 제어 및 의료 기기를 포함한 많은 공학 응용 분야에서 널리 사용되고 있는 상황이다.

Pan [1]에 의해 다층 자기-전기-탄성 판의 정적 변형을 위한 정확한 해석적 형태의 해가 연구되었다. Pan의 일부 수치 예제는 MEE 재료가 스마트 구조물의 설계 및 분석에 유용한 특수 기능을 보유하고 있음을 명확하게 나타내고 있다. 또한 Pan과 Heyliger [2]는 다층 자기-전기-탄성 판의 자유 진동에 대하여 연구하였다. Wang 등 [3]은 3차원 중 방향 등방성 다층 자기-전기-탄성 단순지지 원형 판에 대한 해석적 결과를 제시하였다. Xue 등 [4]은 Kirchhoff 판 이론을 이용하여 자기-전기-탄성 직사각형 판에 대한 비선형 대 변형 모델을 연구하였다. Sladek 등 [5]은 무요소 국소 Petrov-Galerkin (MLPG) 방법을 이용하여 자기-전기-탄성 판의 대변형에 관하여 연구하였다. Li [6]는 탄성 기초위에 놓인 자기-전기-탄성 판의 좌굴 해석을 연구하였다. Li 등 [7]은 비국소 탄성이론을 통해 Pasternak 탄성지반위에 놓인 직사각형 Mindlin 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴 및 자유 진동 거동에 대한 해석적 연구가 수행하였다. 그들은 전위의 크기가 증가될 때 무차원 진동수가 감소하고 무차원 진동수는 자위의 크기가 증가될 때 함께 증가하는 결과를 발표하였다. Kim 등 [8]은 비국소 탄성이론을 이용한 점진기능재료 나노 판의 자유진동 해석을 수행하였다.

기존의 연구들은 평면 내 하중의 두 가지 방향에 대한 자기-전기-탄성 나노 판의 다양한 폭-두께 비와 탄성지반 매개변수에 대한 좌굴 해석은 거의 연구되지 않았다고 판단된다. 자기-전기 경계 조건 및 맥스웰 방정식에 따라, 자기-전기-탄성 판의 두께 방향을 따라 자기 및 전위의 변화가 결정된다. 해밀턴 원리에 의한 판의 두께 방향을 따른 전기, 자기 분포와 운동 지배 방정식을 구하기 위해 변분이론을 적용하였다. 본 연구에서는 다양한 매

개변수의 영향을 분석하기 위해 자기-전기-탄성 일차 전단변형 나노 판의 좌굴 해석 결과 표 및 그래프 형태로 제시하였다. 다양한 폭-두께 비, 전위 및 자위, 면내 하중 방향의 영향이 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴 응답에 미치는 영향을 조사하였다. 본 연구에서 제시한 방법으로 얻은 좌굴 응답은 참고문헌의 결과와 비교하였을 때 잘 일치함을 알 수 있었다.

2. 자기-전기-탄성 판의 구성방정식

2.1 탄성지반 모델

수직방향 압력과 전단변형이 동시에 고려된 Winkler-Pasternak 탄성지반 모델을 적용하였다. 수직방향 압력은 등가 스프링으로 가정하여 수직방향 변형에 저항하고 비압축성 전단층이 전단변형에 저항하는 것으로 탄성지반 효과를 고려하였다. 이러한 하중은 식(1)로 표현할 수 있다.

$$q_P = \bar{k}_W u_z - \bar{k}_P \nabla^2 u_z \quad (1)$$

여기서 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, \bar{k}_W 그리고 \bar{k}_P 는 Winkler 지반 계수 그리고 Pasternak 전단 지반계수를 의미한다. Pasternak 탄성지반 효과로 인해 추가되는 가상 변형에너지는 식(2)와 같다.

$$\delta U_{EF} = \int_A \left[\bar{k}_W u_z \delta u_z + \bar{k}_P \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial \delta u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial \delta u_z}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2)$$

2.2 전단 변형이론

일반적으로 전단변형이 고려된 5-변수 변위장은 식(3)으로 표현할 수 있다.

$$u_x = u_x^0 + z\theta_x, \quad u_y = u_y^0 + z\theta_y, \quad u_z = w^0. \quad (3)$$

여기서, u_x^0, u_y^0 는 중립면($z=0$)에서 면내 변위이고, u_z 는 판의 두께방향으로의 수직방향 변위이다. 또한 θ_x, θ_y 는 전단변형에 의한 전단변형 각이다.

2.3 자기-전기-탄성 판의 재료특성

자기-전기-탄성(Magneto-Electro-Elastic:MEE)체가 판의 상하면 사이에서 두께방향으로 자기장의 세기 Ω_0 과 전기장의 세기 V_0 를 받고 있는 경우를 가정한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{mij}E_m - f_{nij}H_n \\ D_i &= e_{ikl}\gamma_{kl} + h_{im}E_m + g_{in}H_n \\ B_i &= f_{ikl}\gamma_{kl} + g_{im}E_m + k_{in}H_n \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 σ_{ij} , D_i , 그리고 B_i 는 각각 응력, 전기 변위 그리고 자기유도(자속)을 나타내고 γ_{kl} , E_m , 그리고 H_n 는 변형률, 전기장 그리고 자기장을 나타낸다. 또한 C_{ijkl} , h_m , 그리고 k_{in} 는 탄성계수, 절연투과계수 그리고 자기투과계수이다. 또한 e_{mij} , f_{nij} , 그리고 g_{in} 는 압전계수, 압자기계수 그리고 자기-전기 계수이다. 식(4)에서 적절한 계수를 0으로 놓으면 다양한 비결합 경우를 유도할 수 있다.

일반적인 변형률-변위 관계는 식(5)와 같다.

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad H_i = -\varphi_{,i} \quad (5)$$

여기서 ϕ 그리고 ψ 는 각각 전기장과 자기장의 세기를 나타낸다.

체적력, 전하 그리고 전류밀도를 무시하면 동적평형 방정식은 식(6)과 같다.

$$\sigma_{i,j,j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad D_{j,j} = 0, \quad B_{j,j} = 0. \quad (6)$$

여기서 ρ 는 재료의 밀도이다.

2.4 비국소 탄성이론

비국소 탄성 이론에서 동적 평형방정식은 비국소 균형법칙으로부터 구할 수 있다[9].

$$t_{ij,j} + \mathcal{L}(f_i - \rho \ddot{u}_i) = 0, \quad (7)$$

여기서 t_{ij} 는 Hooke 응력 텐서이고 선형 미분 연산자 \mathcal{L} 은 식(8)로 정의된다.

$$\mathcal{L} = 1 - \mu \nabla^2, \quad \mu = e_0^2 \bar{a}^2, \quad (8)$$

여기서 μ 는 비국소 변수, e_0 는 실험으로 정해지는 재료 상수이고 \bar{a} 는 내적 특성 길이이다.

식(7)의 연산자를 Eringen [10, 11]이 제안한 비국소 응력 텐서를 표현하기 위한 구성 모델에 적용하면 비국소 구성방정식을 구할 수 있다.

$$\mathcal{L}(\sigma_{ij}) = C_{ijkl}e_{kl}. \quad (9)$$

일반적으로 식(8)의 미분 연산자 ∇ 는 3차원 라플라스 연산자이다. 2차원 문제를 해석하기 위해 라플라스 연산자 ∇ 는 2차원으로 감차할 수 있다. 2차원 선형 미분 연산자 $\bar{\mathcal{L}}$ 는 식(10)과 같다.

$$\bar{\mathcal{L}} = 1 - \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

미분 연산자 $\bar{\mathcal{L}}$ 는 z 방향에 대해 독립적이다.

3. 동적 평형방정식

Hamilton 원리를 이용하여 자기-전기-탄성(MEE) 미소스케일 판의 동적평형방정식을 유도하면 식(11)과 같다[12].

$$\int_0^T [(\delta U + \delta W) - \delta K] dt = 0 \quad (11)$$

여기서 δU 는 가상변형에너지, δW 는 외력에 의한 가상 일, 그리고 δK 는 가상운동에너지이다.

자기-전기-탄성(MEE)판의 변형에너지는 식(12)와 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}\gamma_{ij} - D_i E_i - B_i H_i) d\Omega dz \quad (12)$$

자기-전기-탄성(MEE)판이 얇으면 면내 전기장 및 자기장은 무시할 수 있다. 즉 $E_x = E_y = 0$ 그리고 $H_x = H_y = 0$ 이다.

자기-전기-탄성(MEE)판의 운동에너지는 식(13)으로 나타낼 수 있다.

$$K = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \rho (\dot{u}_l)^2 d\Omega dz \quad (l = x, y, z) \quad (13)$$

여기서 위첨자는 시간에 대한 미분을 의미한다.

면내력에 의한 위치에너지는 식(14)로 주어진다.

$$W = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} N_{xi} & N_{xyi} \\ N_{xyi} & N_{yi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{bmatrix} d\Omega, \quad (14)$$

($i = m, e, q$)

N_{xm} , N_{xe} , N_{xq} , N_{ym} , N_{ye} 그리고 N_{yq} 은 역학적, 전기적 그리고 자기적 x - 그리고 y - 방향 힘들이며 식(15)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_{xm} &= -R, & N_{xe} &= -e_{31} V_0, & N_{xq} &= -f_{31} \Omega_0 \\ N_{ym} &= -\lambda R, & N_{ye} &= -e_{31} V_0, & N_{yq} &= -f_{31} \Omega_0 \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 R 은 x - 방향 역학적 하중이고 λ 는 직각방향(2방향)하중 비이다.

식(11)에 식(12),식(13) 그리고 식(14)를 대입하고 부분적분하여 정리하면 식(16)과 같은 평형방정식을 얻을

수 있다.

$$\delta u_x^0 : M_{xx,x}^{(0)} + M_{xy,y}^{(0)} = 0, \quad (16a)$$

$$\delta u_y^0 : M_{xy,x}^{(0)} + M_{yy,y}^{(0)} = 0, \quad (16b)$$

$$\delta u_z : M_{xz,x}^{(0)} + M_{yz,y}^{(0)} - \bar{\mathcal{L}} [-q_z + \bar{N}] = 0, \quad (16c)$$

$$\delta \theta_x : M_{xx,x}^{(1)} + M_{xy,y}^{(1)} - M_{xz}^{(0)} = 0, \quad (16d)$$

$$\delta \theta_y : M_{xy,x}^{(1)} + M_{yy,y}^{(1)} - M_{yz}^{(0)} = 0, \quad (16e)$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (16f)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (16g)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{N} = & \bar{k}_p \nabla^2 w^0 - \bar{k}_w w^0 + (N_{xm} + N_{xe} + N_{xq}) \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ & + (N_{ym} + N_{ye} + N_{yq}) \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

식(16)에서 $\bar{\mathcal{L}} = 1$ 이라고 놓으면 비국소탄성 이론이 적용되지 않은 정식을 유도할 수 있다.

식(4)의 D_i 그리고 B_i 를 식(16f)와 (16g)에 대입하면 식(17)과 식(18)을 얻을 수 있다.

$$e_{31} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + e_{31} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - h_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - g_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (17)$$

$$f_{31} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + f_{31} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - g_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - k_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (18)$$

크라머 법칙을 적용하면 식(19)를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = M_1 \Delta, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = M_2 \Delta. \quad (19)$$

여기서

$$\begin{aligned} M_1 = & \frac{k_{33}e_{31} - g_{33}f_{31}}{h_{33}k_{33} - g_{33}^2}, \quad M_2 = \frac{k_{33}f_{31} - g_{33}e_{31}}{h_{33}k_{33} - g_{33}^2}, \\ \Delta = & \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y}. \end{aligned} \quad (20)$$

식(19)와 식(20)로부터 식(21)을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = M_1 z \Delta + \phi_0(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = M_2 z \Delta + \varphi_0(x, y). \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{M_1 \Delta}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{V_0}{h} z + \frac{V_0}{2}, \\ \varphi = & \frac{M_2 \Delta}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{\Omega_0}{h} z + \frac{\Omega_0}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 전기적 경계 및 자기적 경계는 $\phi(h/2) = V_0$, $\phi(-h/2) = 0$ 그리고 $\psi(h/2) = \Omega_0$, $\psi(-h/2) = 0$ 로 정의된다.

자기-전기-탄성(MEE)판의 합응력은 식(23)과 같다.

$$M_{ij}^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(z)^k dz \quad (k=0, 1, 2) \quad (23)$$

식(23)의 합응력으로부터 면내변형률이 무시된 식(24)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_{xx}^{(1)} = & \tilde{C}_{11} \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \tilde{C}_{12} \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \\ M_{yy}^{(1)} = & \tilde{C}_{12} \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \tilde{C}_{22} \frac{h^3}{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \end{aligned} \quad (24)$$

여기서

$$\tilde{C}_{ij} = (C_{ij} + e_{31}M_1 + f_{31}M_2)$$

식(24)를 식(16d)와 식(16e)에 대입하면 개선된 지배 방정식을 구할 수 있다.

4. 해석적 방법

미소 규모 효과가 고려된 자기-전기-탄성 나노 스케일 판의 해석 시 비국소 이론을 이용한 단순지지 판의 좌굴 해석 결과를 연구하였다. 판의 중립면에서의 변위를 식(25)와 같이 이중 푸리에 급수로 가정하여 Navier 방법을 적용할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x^0(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \xi x \sin \eta y, \\ u_y^0(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \xi x \cos \eta y, \\ u_z(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \xi x \sin \eta y, \\ \theta_x(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \xi x \sin \eta y, \\ \theta_y(x, y) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \xi x \cos \eta y. \end{aligned} \quad (25)$$

여기서, $\xi = m\pi/a$, $\eta = n\pi/b$ 이다.

자기-전기-탄성 나노 스케일 판의 좌굴 해석을 위하여 식(25)를 식(16a)-(16e)에 대입하고 행렬형태로 정리하면 평형방정식 식(26)을 얻을 수 있다.

$$([\mathbf{K}] - \lambda_{mn} [\mathbf{G}]) \{\Delta\} = \{\mathbf{0}\}. \quad (26)$$

여기서,

$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}$, $[\mathbf{K}]$ 는 강성행렬, λ_{mn} 은 좌굴하중 그리고 $[\mathbf{G}]$ 는 기하강성행렬이다.

5. 결과 분석

자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴해석 결과를 참고문헌의 결과들과 비교, 분석하기 위하여 재료의 물성치는 식(27)로 가정하였다. Fig. 1에는 탄성지반위에 놓인 자기-전기-탄성 나노 판의 기하학적 성질을 제시하였다.

$$\begin{aligned} C_{11} &= 22.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & C_{12} &= 12.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ C_{22} &= 21.6 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & C_{44} &= 4.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ e_{31} &= -2.2 \text{ C/m}^2, & f_{31} &= 290.2 \text{ N/(Am)}, \\ h_{33} &= 63.5 \times 10^{-10} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2), \\ g_{33} &= 27.375 \times 10^{-10} \text{ Ns}/(\text{VC}), \\ k_{33} &= 835,000 \times 10^{-10} \text{ Ns}^2/\text{C}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

자기-전기-탄성 나노 판의 탄성지반 매개변수와 좌굴하중은 식(28)을 이용하여 무차원화 하였다.

$$k_W = \frac{\bar{k}_W a^4}{C_{11} h^3}, \quad k_P = \frac{\bar{k}_P a^2}{C_{11} h^3}, \quad P_{cr} = \frac{N_{ij} a^2}{C_{11} h^3}. \quad (28)$$

2방향 면내 하중을 받는 탄성지반위에 놓인 자기-전기-탄성판을 Fig. 2에 나타내었다.

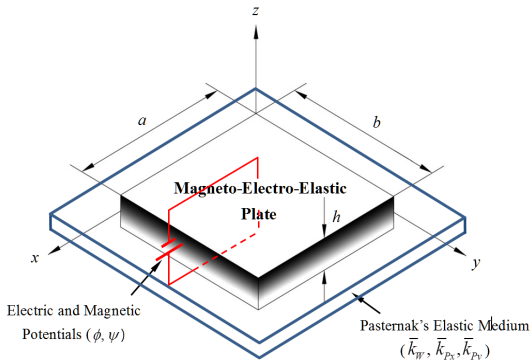


Fig. 1. Geometry of MME nano plate on elastic foundation.

5.1 정확도 검증

첫 번째 예제는 폭-두께 비가 100인 경우의 자기-전

기-탄성 나노 판의 일축좌굴하중, 이축면내압축 좌굴하중 그리고 이축 면내 압축 및 면내 인장 작용 시 좌굴하중을 참고문헌의 결과와 비교하여 Table 1에 나타내었다. 진단보정계수는 5/6를 적용하여 해석하였다.

본 연구의 결과는 참고문헌의 결과와 잘 일치하였으나 Li [6]는 진단보정계수를 $\pi^2/12$ 을 사용하여 약간의 차이를 나타내었다. 폭-두께 비가 100이기 때문에 고차 전단변형을 고려한 Han과 Park[13]의 결과와도 오차가 거의 발생하지 않았다.

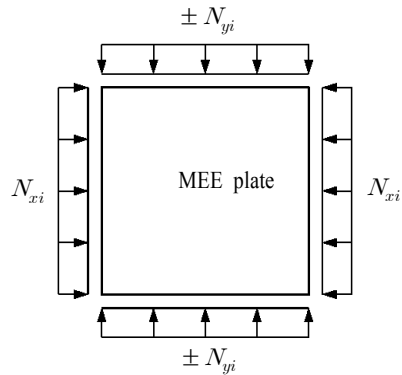


Fig. 2. MEE nano-scale plate on elastic foundation under biaxial loads. ($i = m, e, q$)

Table 1. Buckling loads for MEE plates.

P_{cr}	Side to thickness ratio (a/h)		
	100		
	Li [6]	Han and Park [13]	Present
$\lambda = 0$	3.2760	3.27604	3.276038
$\lambda = 0.5$	2.1840	2.18403	2.184025
$\lambda = -0.5$	6.5520	6.55208	6.552076

두 번째 비교예제는 전위와 자위의 변화에 따른 좌굴하중의 변화를 Fig. 3에 비교하였다. 전위의 증가는 좌굴하중을 증가시키고 자위의 증가는 좌굴하중을 감소시켰으며 참고문헌의 결과와 일치하는 결과를 나타내었다. 자위가 좌굴하중의 변화에 미치는 효과가 전위가 좌굴하중의 변화에 미치는 효과에 비해 상대적으로 큰 효과를 나타낼 수 있었다.

5.2 예제 분석

일축압축, 2축 압축 그리고 면내 압축과 면내 인장을 받는 경우의 좌굴하중을 Fig. 4에 나타내었다. 일반적으로

로 예측할 수 있듯이 면내 압축과 면내 인장을 동시에 받는 자기-전기-탄성 나노 판의 경우가 가장 큰 좌굴하중이 발생 하였다. 폭-두께 비의 변화에 따른 좌굴하중의 수렴 값은 이축압축이 작용하는 경우 일축압축일 경우의 66.7%로 작아졌고 면내 압축과 면내 인장 동시에 작용하는 경우는 일축압축일 경우의 200% 증가하였다.

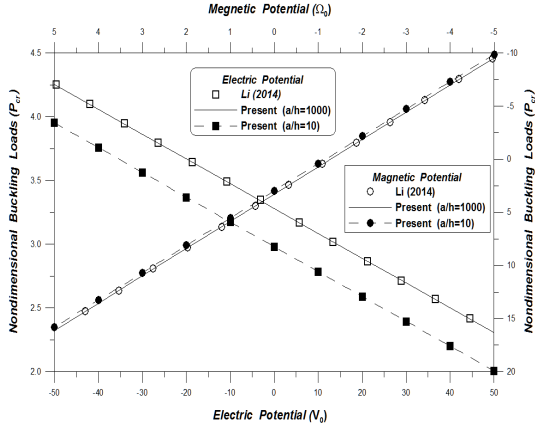


Fig. 3. Buckling loads of MEE nano-scale plate under magnetic and electric potential.

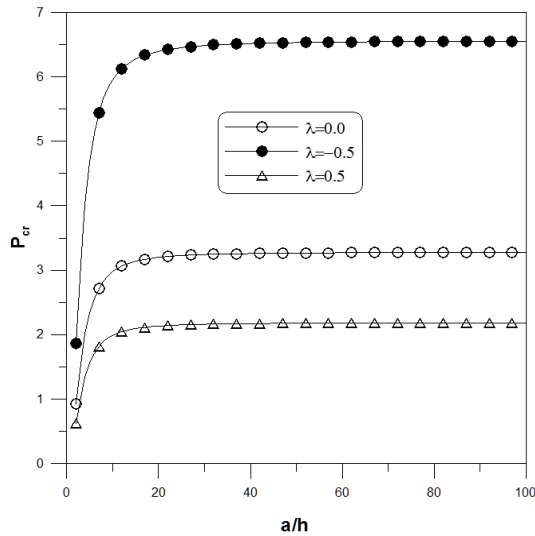


Fig. 4. Buckling loads of MEE nano-scale plate under uniaxial and biaxial loads ($\mu = V_0 = \Omega_0 = k_W = k_P = 0$).

Fig. 5에서는 비국소 매개변수의 변화에 따른 면내 압축과 면내 인장이 작용하는 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴하중을 분석하였다. 비국소 매개변수의 증가는 좌굴

하중을 감소시켰으며 국소이론의 결과보다 최대 55.8%로 감소하였다.

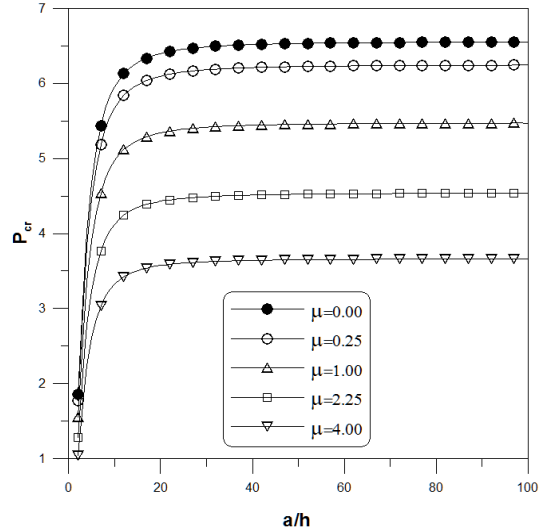


Fig. 5. Buckling loads of MEE nano-scale plate with various nonlocal parameters ($V_0 = \Omega_0 = k_W = k_P = 0, \lambda = -0.5$).

전위가 50일 때 자기-전기-탄성 나노 판의 비국소 매개변수의 변화에 따른 좌굴하중을 Fig. 6에 나타내었다. 폭-두께 비가 2인 경우에 좌굴하중의 부호가 바뀌는 현상이 발생하였다. 전위의 효과가 강성의 부호를 바꾸는 원인이 된 것으로 판단된다. 이러한 현상은 물리적 의미를 파악하기가 용이 하지 않으며 수치적 해석의 한계라고 판단된다. 실험적 연구를 통한 정확한 물리적 한계를 규명해야 할 것으로 판단되며 실험적 규명이 이루어지기까지는 폭-두께 비의 허용범위를 설정해야 할 필요성을 제시할 수 있다.

Fig. 7에서는 자위가 5인 경우의 자기-전기-탄성 나노 판의 비국소 매개변수의 변화에 따른 좌굴하중을 분석하였다. 자위는 상대적으로 전위 보다 좌굴하중의 변화에 미치는 효과가 큼을 알 수 있다. 특히 전위는 좌굴하중을 감소시켰으나 자위는 좌굴하중을 증가시킨다는 것을 알 수 있었다.

Fig. 8에서는 전위, 자위 그리고 탄성지반 효과가 고려된 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴하중을 분석하였다. Winkler 탄성지반 계수는 좌굴하중을 증가시킴을 알 수 있다.

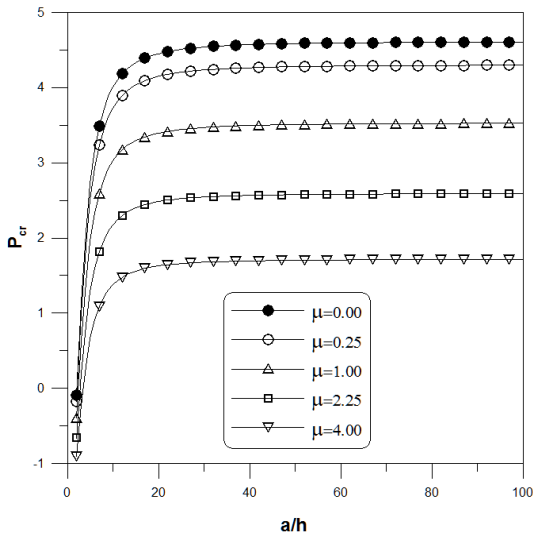


Fig. 6. Buckling loads of MEE nano-scale plate with various nonlocal parameters ($V_0 = 50, \Omega_0 = k_W = k_P = 0, \lambda = -0.5$).

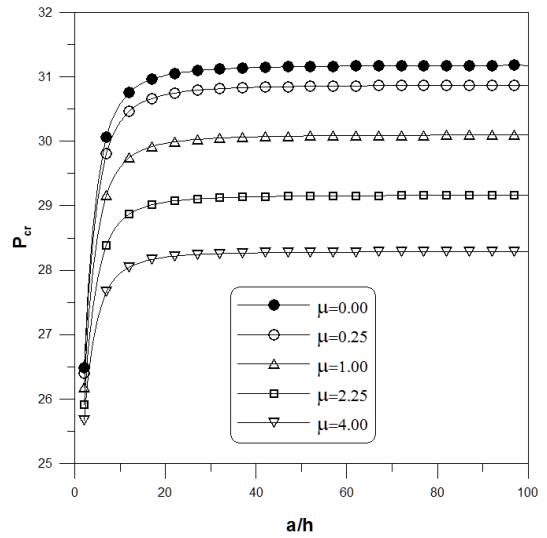


Fig. 8. Buckling loads of MEE nano-scale plate with various nonlocal parameters ($V_0 = 50, \Omega_0 = 5, k_W = 1000, k_P = 0, \lambda = -0.5$).

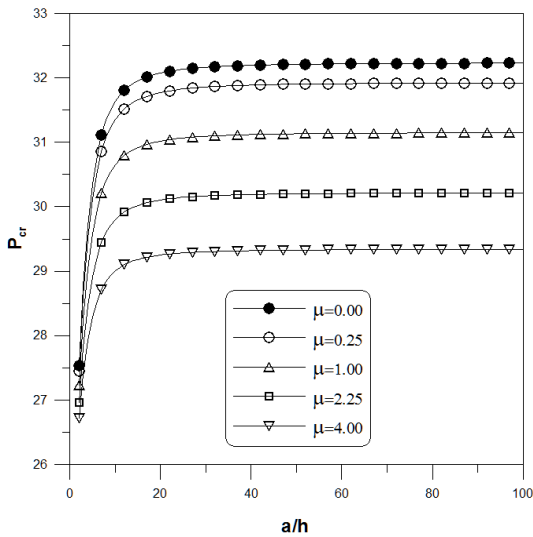


Fig. 7. Buckling loads of MEE nano-scale plate with various nonlocal parameters ($V_0 = 0, \Omega_0 = 5, k_W = k_P = 0, \lambda = -0.5$).

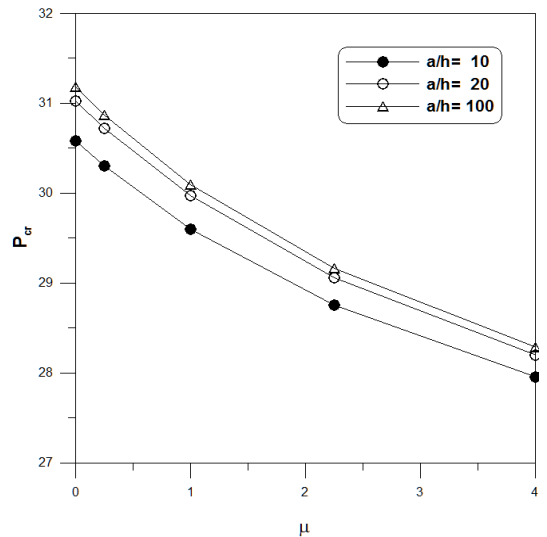


Fig. 9. Buckling loads of MEE nano-scale plate with various side-to-thickness ratios ($V_0 = 50, \Omega_0 = 5, k_W = 1000, k_P = 0, \lambda = -0.5$).

폭-두께 비에 따른 비국소 매개변수의 영향을 Fig. 9에 나타내었다. 폭-두께 비가 20이상이 되면 좌굴하중의 변화는 폭-두께 비가 100인 경우에 거의 수렴됨을 알 수 있었다.

Fig. 10과 Fig. 11에서는 형상비의 변화에 따른 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴하중을 분석하였다. Fig. 10은 면내 압축과 면내 인장을 동시에 받는 경우이고 Fig. 11은 이축압축을 받는 경우이다. 비국소 매개변수는 0과 1로 제한하였다. 면내 압축과 면내 인장을 동시에 받는 경우에 형상비가 1인 경우에 좌굴하중이 무한대로 발산하

는 것을 알 수 있으며 특히 형상비가 1이하인 경우 주목할 만한 현상을 나타내었다. 좌굴하중의 부호가 음으로 발생하였다는 것은 형상의 변화에 따라 면내 압축과 면내 인장의 방향이 바뀌었을 경우에 좌굴이 발생한다는 것을 알 수 있다. 비국소 매개변수가 1인 경우에 국소 탄성이론의 결과와 상이 한 결과를 나타낸 부분은 정확한 비국소 이론의 분석을 위해 매우 중요한 의미를 가진다고 할 수 있다.

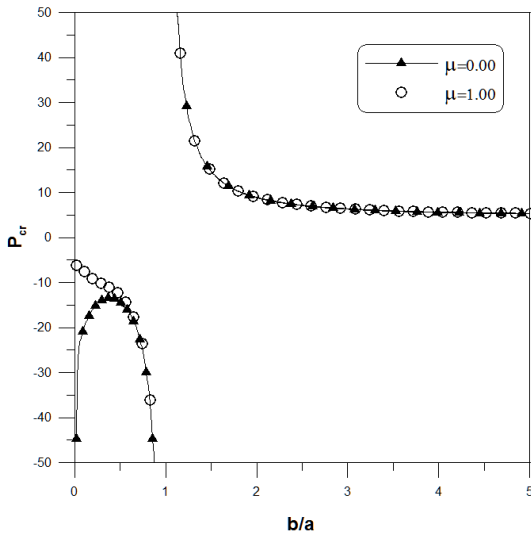


Fig. 10. Buckling loads of MEE nano-scale plate ($V_0 = 50, \Omega_0 = 5, k_W = 1000, k_P = 100, \lambda = -1.0$).

이축압축을 받는 경우는 Fig. 10과 매우 상이한 결과를 나타내었다. 형상비가 1인 경우에도 좌굴하중은 발산하는 현상은 발생하지 않았으며 이러한 현상은 충분히 물리적으로 예측 가능한 현상이라고 할 수 있다. 하지만 형상비가 0.3이하 인 경우에 좌굴하중이 감소되는 현상은 비국소 매개변수의 영향을 분석하는데 중요한 역할을 할 것으로 판단된다.

6. 결론

탄성지반위에 놓인 자기-전기-탄성 나노 판의 정식을 유도하기 위하여 1차 전단변형과 비국소 탄성이론을 이용하였다.

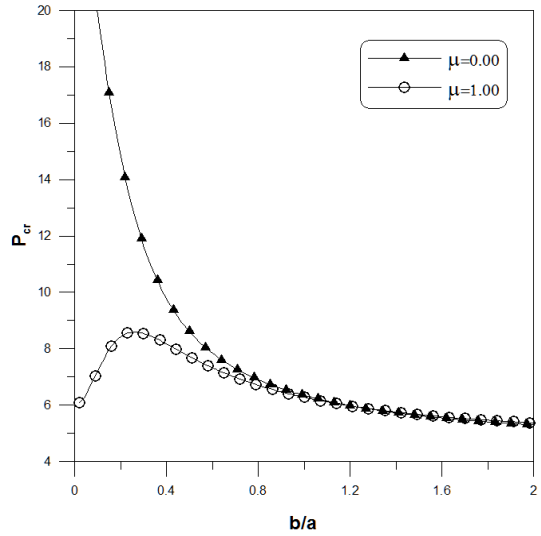


Fig. 11. Buckling loads of MEE nano-scale plate ($V_0 = 50, \Omega_0 = 5, k_W = 1000, k_P = 100, \lambda = 1.0$).

본 연구의 결과로부터 면내 하중의 방향, 비국소 매개변수 및 전위, 자위, 탄성지반 계수가 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴하중에 매우 중요한 영향을 준다는 것을 알 수 있었다. 비국소 탄성이론을 적용한 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴하중은 국소 탄성이론을 적용한 경우보다 항상 작은 값을 나타내었다. 또한 다음과 같은 구체적인 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 이축 하중을 받는 경우에 면내 압축과 면내 인장을 동시에 받는 자기-전기-탄성 나노 판이 가장 큰 좌굴 하중이 발생 하였다. 폭-두께 비의 변화에 따른 좌굴 하중의 수렴 값은 이축압축이 작용하는 경우 일축압축일 경우의 2/3로 작아졌고 면내 압축과 면내 인장 동시에 작용하는 경우는 일축압축일 경우의 2배로 증가하였다.
- (2) 전위의 효과가 강성의 부호를 바꾸는 원인이 되는 수치적 해석의 한계라고 판단되며 실험적 연구를 통한 정확한 물리적 한계를 규명해야 할 것으로 판단 된다.
- (3) 자위와 탄성지반 계수가 증가할수록 자기-전기-탄성 나노 판의 강성이 증대되어 좌굴하중은 커지는 것을 알 수 있었다.
- (4) 전위, 자위 그리고 탄성지반의 영향이 모두 고려된 나노 판에 면내 압축과 면내 인장이 동시에 작용하는 경우에 형상비가 1이하인 경우 좌굴하중의 부호

가 음으로 발생하였으며 이러한 현상은 형상의 변화에 따라 면내 압축과 면내 인장의 방향이 바뀌었을 경우에 좌굴이 발생한다는 것을 알 수 있다.

미국소 이론을 적용한 자기-전기-탄성 나노 판의 경우 최근에 연구가 시작되고 있는 상황이라고 할 수 있다. 그러나 이축 하중에 의한 정확한 좌굴하중의 변화를 연구한 자료는 전무한 실정이다. 본 연구의 결과는 향후 자기-전기-탄성 나노 판의 좌굴해석 연구자들을 위한 비교자료로 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

References

- [1] E. Pan, "Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates", Journal of Applied Mechanics, vol. 68, pp. 608-618, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.1380385>
- [2] E. Pan, P. R., Heyliger, "Free vibration of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates", Journal of Sound and Vibration, vol. 252, no. 3, pp. 429-442, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3693>
- [3] R. Wang, Q. Han, E. Pan, "An analytical solution for a multilayered magneto-electro-elastic circular plate under simply supported lateral boundary conditions", Smart Materials and Structures, vol. 19, pp. 065025, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/6/065025>
- [4] C. X. Xue, E. Pan, S. Y. Zhang, H. J. Chu, "Large deflection of a rectangular magneto-electro-elastic thin plate", Mechanics Research Communications, vol. 38, pp. 518-523, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2011.07.003>
- [5] J. Sladek, V. Sladek, S. Krahulec, E. Pan, "The MLPG analyses of large deflections of magneto-electro-elastic plates", Engineering and Analysis of Boundary Elements, vol. 37, pp. 673-682, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.02.001>
- [6] Y. S. Li, "Buckling analysis of magneto-electro-elastic plate resting on Pastrenak elastic foundation", Mechanics Research Communications, vol. 56, pp. 104-114, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.12.007>
- [7] Y. S. Li, Z. Y. Cai, S. Y. Shi, "Buckling and free vibration of magneto-electro-elastic nanoplate based on nonlocal theory", Composite Structures, vol. 111, pp. 522-529, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.033>
- [8] W. J. Kim, W. H. Lee, W. T. Park, S. C. Han, "Nonlocal elasticity effects on free vibration properties of sigmoid functionally graded material nano-scale plates", J. Korea Academic-Industrial cooperation Society, vol. 15, no. 2, pp. 1109-1117, 2014. DOI: <https://doi.org/10.5762/KAIS.2014.15.2.1109>
- [9] A. C. Eringen, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", Journal of Applied Physics, vol. 54, pp. 4703-4710, 1983. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.332803>
- [10] A. C. Eringen, Nonlocal continuum field theories. Springer-Verlag, 2002.
- [11] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, CRC Press, 2007.
- [12] W. T. Park, S. C. Han, "Buckling analysis of nano-scale MEE(Magneto-Electro-Elastic) plates using the nonlocal elasticity theory", Advances in Mechanical Engineering, 2017, under review.

한 성 천(Sung-Cheon Han)

[정회원]



- 1991년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학석사)
- 1996년 8월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1996년 3월 ~ 현재 : 대원대학교 철도건설과 정교수

<관심분야>

선형 및 비선형 구조해석, 유한요소법, 고유치 해석, 복합구조 설계, 나노구조의 해석

박 원 태(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 대학원 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 대학원 토목공학과(공학박사)
- 1995년 3월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 정교수

<관심분야>

구조공학, 복합재료, 좌굴해석, 비선형 구조해석, 동적 해석, 나노구조의 해석