Journal for History of Mathematics
Vol. 30 No. 4 (Aug. 2017), 247–258
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.4.247

Metaphors for Mathematics and Philosophical Problems

수학에 대한 은유와 철학적 문제들

Park Chang Kyun 박창균

The goal of this essay is to examine metaphors for mathematics and to discuss philosophical problems related to them. Two metaphors for mathematics are well known. One is a tree and the other is a building. The former was proposed by Pasch, and the latter by Hilbert. The difference between these metaphors comes from different philosophies. Pasch's philosophy is a combination of empiricism and deductivism, and Hilbert's is formalism whose final task is to prove the consistency of mathematics. In this essay, I try to combine two metaphors from the standpoint that 'mathematics is a part of the ecosystem of science', because each of them is not good enough to reflect the holistic mathematics. In order to understand mathematics holistically, I suggest the criteria of the desirable philosophy of mathematics. The criteria consists of three categories: philosophy, history, and practice. According to the criteria, I argue that it is necessary to pay attention to Pasch's philosophy of mathematics as having more explanatory power than Hilbert's, though formalism is the dominant paradigm of modern mathematics. The reason why Pasch's philosophy is more explanatory is that it contains empirical nature. Modern philosophy of mathematics also tends to emphasize the empirical nature, and the synthesis of forms with contents agrees with the ecological analogy for mathematics.

Keywords: metaphor, tree, building, Pasch, Hilbert, ecological model, philosophy of mathematics; 은유, 나무, 건물, 파쉬, 힐베르트, 생태학적 모델, 수학철학.

MSC: 01A72, 03A05 ZDM: E20

1 들어가는 말

은유법의 사전적 정의는 다음과 같다. "직유법과 대조되며 암유(暗喩)라고도 한다. 원관념은 숨기고 보조관념만 드러내어 표현하려는 대상을 설명하거나 그 특징을 묘사하는

본 연구는 2015학년도 서경대학교 교내연구비 지원에 의하여 이루어졌음.
Park Chang Kyun: Dept. of Philosophy, Seo Kyeong Univ. E-mail: ckpark4g@gmail.com
Received on Aug. 1, 2017, revised on Aug. 18, 2017, accepted on Aug. 25, 2017.

표현법이다. 원관념과 비유되는 보조관념을 같은 것으로 보므로 'A(원관념)는 B(보조관념)다' 의 형태로 나타난다."[1] 라코프와 존슨의 은유의 핵심에 대한 견해에 따르면 원관념을 보조관념으로 이해하고 경험한다는 것이다.[2] 감각적 은유법이 기억하기 편하다는 강점이 있다는 실험결과도 있지만 일반적으로 어떤 대상을 은유적으로 표현한다는 것은 특히 그 대상이 추상적일 때 그 대상을 구체적이고 친근한 대상으로 바꾸어 원관념에 대한 이해와 통찰을 돕는다는 점에서 장점이 있다. 그런데 은유의 목적에 따라 다르겠지만 어떤 대상에 대한 은유는 단순한 이미지 전달을 뛰어 넘는 그 대상에 대한 철학이 개입되어 있다. 수학에 대한 은유에 주목하는 이유는 환원주의적 욕구 충족이나 단순한 호기심의 발로가 아니라 그 은유 속에 수학의 정체성과 관련한 철학이 개입되어 있고 수학적 실천에도 영향을 주기 때문이다.

수학은 인간이 가진 가장 추상적인 학문이라는 것을 부인하는 사람은 별로 없다. 수학의 경우 그 고도의 추상성으로 인해 학문적 정체성을 파악하는 데 있어서나 교육적인 측면에서 수학이 무엇인가를 소개하는 데 있어서 어려움을 갖는다. 수학에 대한 은유는 이러한 상황과 관련하여 답을 제시하는 하나의 방식이라고 할 수 있다. 주지하는 바와 같이 수학은 19세기 말에서 20세기 초에 철학적으로 큰 변화가 있었다. 사실 이러한 변화는 19세기 초부터 이어져 온 수학의 전개가 누적된 결과라고 할 수 있다. 비유클리드 기하학의 등장과 사원수의 발견, 해석학의 엄밀화, 기하학의 공리화, 집합론의 발견 등으로 인해 수학의 정체성을 심각하게 묻지 않을 수 없었다. 수학사가들은 20세기를 전후한 시기를 수학적 존재론이나 인식론에서 결정적이고 급격한 변화의 시기였다고 기술한다. 흔히 20세기의 수학에서의 기초론적인 논의—논리주의, 형식주의, 직관주의 등—에 초점을 맞추지만 사실 이러한 논쟁에 선행하는 역사적 배경은 수학에 대한 은유를 통해 이해의 깊이를 더할 수 있다. 수학을 어떤 철학적 관점에서 보느냐는 것은 수학을 연구하는 자세나 수학을 가르치는 데 영향을 준다. 이러한 점에서 수학에 대한 은유는 은유가 표상하는 이미지에 의한 단순성 확보나 은유에 대한 해석의 다양성이 가져다주는 흥미가 목적일 수만은 없고 수학의 본질에 대한 통찰을 주고 연구와 교육의 태도를 결정하는 요인으로 작동한다.

이 글의 목표는 수학에 대한 은유를 살펴보고 이와 관련된 수학철학적 문제를 논의하는 데 있다. 수학에 대한 두 가지 은유가 알려져 있다. 하나는 나무이고 다른 하나는 건물이다. 전자는 파쉬(Pasch)에 의해 제안되었고, 힐베르트가 후자를 제안했다. 두 은유 모두 수학에서 발견할 수 있는 특성을 반영하고 있다. 나무는 뿌리와 가지가 함께 자랄 수 있는 유기적 생명체인데 반해 건물은 인공적인 것으로 기초가 튼튼하지 않으면 붕괴될 수 있다. 두 은유는 서로 다른 수학관의 결과이다. 수학의 기원은 경험적인 것과 연관되는가? 수학의 기초라고 할 수 있는 것이 존재하는가? 있다면 어디에 있는가? 등의 물음에 대한 답에 따라 두 은유로 갈린다. 즉 이

1) http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1133522&cid=40942&categoryId=32978

2) G. Lakoff, M. Jonson, Metaphors We Live By, 2nd ed. Chicago, Illinois: University of Chicago University Press, 2003

두 은유의 차이는 본질적으로 서로 다른 수학철학에서 비롯된다. 파쉬의 철학은 경험주의와 연역주의가 결합되어 있고, 힐베르트의 철학은 수학의 무모순성 증명이 최종적 과제가 된 형식주의이다. 이 글에서는 '수학은 생태계의 일부' 라는 입장에서 두 은유의 생태학적 결합을 시도한다. 왜냐하면 두 은유 모두 역사적으로 발전해온 수학의 모습을 담기에는 미흡하다고 보기 때문이다. 두 은유는 초시간적인 수학에 대한 은유라고 할 수 있는데 이를 생태학적으로 결합한다는 것은 두 은유에 시간을 개입시키고 다른 환경 (학문) 과의 유기적 관계를 배제하지 않는 것을 의미한다.

수학에 대한 은유가 그 밑바탕에 전제되어 있는 수학철학적 입장을 드러낸다면 과연 바람직한 수학철학은 무엇인가라는 질문을 던지게 한다. 비록 힐베르트의 형식주의가 현대 수학의 지배적 패러다임이기는 하지만 수학에서 경험적 요소를 완전히 배제한 인식론이 과연 정당한가라는 문제를 제기한다. 물론 힐베르트가 당시 수학의 상당 부분을 상실할지 모른다는 위기감에서 제시한 처방으로 이해가 가지 않는 것은 아니나 형식주의는 수학을 습기가 없는 메마른 사막에 고립시킨 것 같은 느낌을 준다. 파쉬의 수학철학은 경험주의와 연역주의가 결합되어있는 독특한 구조이다. 물론 논리적 기호의 도입과 같이 좀 더 주의깊게 전제되어야 할 것이 있지만 거칠게 말해 파쉬의 수학철학에서 경험적 요소가 배제된 것을 형식주의라고 한다면, 바람직한 수학철학을 정의하기에 따라서는 파쉬의 철학을 보다 균형적인 것으로 주목할 필요가 있다. 현대 수학철학도 수학의 경험적 성격을 부각하고 있거니와 이러한 형식과 내용의 종합은 주위 환경과의 관계를 중시하는 수학에 대한 생태학적 비유와도 부합한다고 할 수 있다.

이 글은 슈림 (Schlimm) 의 논의를 중심으로 먼저 파쉬와 힐베르트에 의해 제시된 수학에 대한 두 은유를 살펴보고 두 은유의 생태학적 결합을 시도한다. 그리고 이 은유들이 나오게 된 파쉬와 힐베르트의 수학철학을 조사한다. 그리고 바람직한 수학철학의 기준이 무엇인지 허시 (Hersh) 가 제시한 기준을 수정하여 제안하고 이들 두 사람의 수학철학을 평가하는 순서로 진행한다.

2 두 은유와 생태학적 비유

학문을 나무에 비유한 것은 생경한 일은 아니다. 학문을 나무에 비유한 데카르트에 따르면 형이상학은 뿌리에 해당하고 줄기는 수학이나 물리학과 같은 순수 자연과학이라고 할 수 있는 자연학, 그리고 그 위에 의학, 기계학, 도덕학과 같은 실용적 학문들이 큰 가지를 이루고 있는 구조이다. 이 모델에서 데카르트는 모든 학문이 유기적으로 연관되어 있고 그 연관성에 있어서 서열이 있음을 강조하고 있다. 즉 응용학문은 이론적 학문에 기초해 있고 이론적 학문은 형이상학에 뿌리를 가지고 있다고 본 것이다. 이러한 비유는 학문전체의 체계와 관련한 비유라고 할 수 있는데 단일 학문에 대해서도 하나의 비유를 가지는 것은 그 학문의 정체성을 파악하는

것과 관련하여 유용하다. 수학에는 어떠한 비유가 가능한가? 비유 중에서도 은유는 그 해석의 풍부함 때문에 우리의 상상력을 자극한다.

슈림에 따르면 수학의 본질과 관련하여 수학에 대한 두 가지 은유가 있다.[3] 하나는 수학을 나무에 은유(이하 '나무은유')한 것이고, 다른 하나는 수학은 건물(이하 '건물은유')이라고 한 것이다. 전자는 파쉬에 의해 본격적으로 제안되었는데 클라인, 프레게 등도 유사한 견해를 가졌다. 한편 수학의 무모순성을 보이려했던 힐베르트는 후자를 주장했고 후에 부르바키학파에 의해 계승되었다고 할 수 있다. 그런데 흥미로운 것은 두 은유의 대표자격인 파쉬와 힐베르트의 논의에 기하학이 매개역할을 하고 있다는 것이다.

수학에 대한 나무은유의 입장은 수학을 자연적이고 살아있는 유기체로 파악한다는 것이다. 경험적 기하개념에 근거한 공리화와 기하의 모든 명제들이 연역되는 공리화를 구분했던 파쉬는 사영기하는 수학적 줄기로부터 나오는데, 그 줄기는 사영부분의 분리 전에 기하의 핵으로부터 연역을 통해 얻어진다고 했다.[4] 당시 각종 기하학을 에를랑겐 프로그램으로 정리한 클라인은 유기적 연관성을 강조하여 수학을 가지를 위로 자유롭게 펼치는 동안 그 뿌리를 땅 속으로 점점 깊이 밀어 넣는 나무에 비유한다. 그리고 뿌리와 가지 중에 어떤 것을 더 핵심적인 부분으로 생각할 것인가를 묻고 이러한 질문에 대해 "식물학자들은 그 질문이 잘못 제기되었으며 오히려 유기체의 생명은 부분들의 상호작용에 기초해 있다고 가르쳐 준다."[5]고 했다.

파쉬와 클라인은 나무은유를 경험주의적 입장에서 사용했지만 논리주의자인 프레게는 수학발전의 출발점을 진리에 두었고, 식물이 원래 씨앗에 숨겨져 있는 것처럼 결론은 그들의 정의에 포함되어있다는 것을 지적한다.[6]

한편 수학 기초론에서 형식주의를 주장한 힐베르트는 수학을 건물에 은유한다. 그는 건물이 커지면 커질수록 보다 깊고 견고한 기초를 가지는 것은 자연스럽다는 입장에서 수학이 기초가 지탱할 수 있는 것을 초과하면 균열이 생기고 틈이 벌어져서 심지어 붕괴한다며 건물의 토대를 점검하는 것이 필요하다고 역설한다.[7]

수학에 대한 두 가지 은유는 나름대로 설명력을 가진다. 나무은유는 수학이 전개되는 과정과 부합하는 것처럼 보이고, 건물은유는 형식 과학으로서의 수학의 성격을 잘 드러낸다. 그러나 역으로 나무은유는 수학의 형식적 체계성을 온전히 나타내지 못하고 건물은유는 수학이 전개되어 온 실상을 잘 반영하지 못한 것 같다. 이 상반되어 보이는 두 은유를 종합하는 것은 가능한가? 수학은 생태계의 일부라고 전제하면 종합의 가능성이 열린다. 다음과 같이 '수학의 생태계'를 상상해 보자.

---

3) Dirk Schlimm, Metaphors for mathematics from Pasch to Hilbert, *Philosophia Mathematica* 24(3) (2016), 308–329.

4) ibid., 312.

5) ibid., 312.

6) ibid., 313.

7) ibid., 318.

생태계에 소속된 구성원들은 각각 존재론적 지위를 확고히 가지고 있으며 상호 연관되어 있다. 단지 우리의 관심이 수학이라는 나무에 고정되어 있고 수학을 중심으로 상황을 파악하고 있을 뿐이다. 수학의 생태계에는 수학이라는 나무(이하 '수학나무')를 중심으로 '물리학나무', '천문학나무' 등이 가까이 자리를 잡고 있다. 이 생태계에는 여러 종류의 나무들과 풀 등 자연적인 것뿐만 아니라 인공적인 건물도 있으며 그들도 학문 생태계의 구성원이다. 수학나무는 오랜 세월을 걸쳐 자연 환경 속에서 나이테를 만들며 가지를 뻗고 뿌리를 내리며 성장해 왔다. 그런데 20세기를 전후하여 수학나무의 질병을 인식한 나무 관리사들(수학자들)이 수학 나무에 문제가 생겨 유전자 검사를 통하여 나무의 본질적 구조를 확인하기 시작했다. 그러나 그 구조를 살펴본 사람들 간에 의견은 일치하지 않아 의견이 분분했다. 어떤 사람들은 수학나무를 '논리학나무' 에 접붙이기를 통해 수학나무를 계속 뻗어나가게 할 수 있다고 주장했고, 다른 이들은 나무에 집중하지 말고 나무 관리사가 직관을 가지고 새로운 품종을 개발(구성)하는데 주목할 필요가 있다고 했다. 또 다른 이들은 수학이라는 건물의 기본적 구조가 중요하며 그 건물의 기초 설계에 하자가 없음이 증명되면 옆에 있는 수학나무를 모두 베어서 집짓는 재료로 활용할 수 있다고 주장했다. 이 중 논리학나무에 접붙이면 된다는 목소리는 점차 약해졌고, 직관을 가지고 새로운 품종을 구성하는 방식은 너무 심하게 가지치기를 하여 무성했던 나무를 왜소하고 앙상하게 만든다고 많은 나무관리사들에게 지지를 받지 못했다. 그 당시 주류의 관리사들이 선호했던 것은 건물의 기초에 문제가 없음을 보이면 된다는 세 번째 가능성이었다. 그런데 건물의 기초 공사를 한창하고 있던 중에 한 젊은 감리사(괴델)가 와서 이러한 수학건물을 짓는 것은 불가능하다고 진단했다. 즉 건물 공사가 중단될 위기에 처한 것이다. 그렇지만 그 일부 다진 기초를 토대로 지은 건물은 처음 계획했던 그렇게 웅장한 것은 아니지만 그래도 세 개의 기초적 구조—순서, 대수, 위상—위에 아담한 그림과 같은 집을 지었던 일군의 사람들(부르바키학파)도 있었다. 비록 수학나무를 전부 사용하여 지으려던 건물은 완성되지 못했지만 그렇다고 수학나무가 고사된 것은 아니었다. 아직 수학나무는 건재하여 여전히 세세한 뿌리를 내리고 가지는 점점 더 뻗어나가고 있다. 오히려 전산학, 금융학 등과 같은 새로운 가지를 뻗어 수학나무는 풍성함을 더하고 있다. 이러한 풍성함의 이유는 수학나무가 주변 다른 나무와 연계되어 영향을 주고받는 것에 있다.

하나의 학문이 다른 학문과의 상호 영향을 주고받음으로써 발전한다는 말은 지극히 상식적인 사실이다. '모든 것이 다른 것과 연관되어 있다.' 는 것이 생태학의 제1법칙이라고 한 카머너(Commoner)의 지적은 수학을 파악하는 데 있어서도 유효한 원리이다. 수학의 정체성 탐구를 수학나무만으로 고립시키는 방식으로 수행한다면 수학에서 경험적 요소를 배제하고 역사적 발전을 사상해 버리는 결과를 초래한다. 비유하자면 고립된 수학은 수학나무를 건조한 사막에 조성하는 것과 같다. 수학나무의 곁에 물리학, 천문학, 생물학, 경제학, 사회학, 공학, 특히 전산학 등이 나무의 이름을 달고 조성되어 있을 때 그 생태계는 더욱 풍성한 숲을 이루고 각

나무는 탐스런 실과를 기대할 수 있을 것이다. 식물들끼리도 서로 신호를 주고받는다는 것을 밝혀낸 오늘날 생물학자들의 연구는 이러한 비유가 과장이 아님을 보여준다.

3 파쉬와 힐베르트의 수학철학

수학에 대한 두 은유는 한 부분이 나머지 구조를 가능하게 한다는 점에서 공통점[8)]이 있지만 그 배후에 서로 다른 수학철학이 자리를 잡고 있다. 파쉬와 힐베르트의 수학철학은 그 논의의 출발에 기하학이라는 공통의 영역이 존재함에도 불구하고 그들의 철학에 있어 차이를 보인다. 힐베르트는 파쉬의 작업에 영향을 받았지만 그의 작업을 수학일반으로 확대하여 당시 수학이 처한 위기에 대한 처방으로 그의 프로그램을 제시한다.

주지하는 바와 같이 파쉬의 수학사에서의 업적은 사영기하학의 공리화이다. 그는 '사이관계'를 최초로 공리화 했으며, 유클리드 기하의 논리적 틈새를 지적했다. 뿐만 아니라 기하학에서 논리적 연역에 대해 명료한 정식화를 제시했다. 이러한 내용은 그의 기념비적 저서인『새로운 기하학에 대한 강의』(1882)에 실려 있다.[9)] 수학을 나무에 은유한 파쉬에 대한 평가는 그가 비교적 덜 알려진 수학자라는 것에 비해 매우 높다. 파쉬는 공리계의 독립성과 무모순성을 지적함으로써 후대에 영향을 끼치게 되는데, 그에 대해 타마리(Tamari)는 '현대 공리학의 아버지' 라고 하고, 프로이텐탈은 '기하학에서 엄밀함의 아버지' 라고 한다.[10)] 사영기하학에 대해 케일리는 '모든 기하학' 이라고 하고, 마오는 현대수학으로 가는 길목에서 비유클리드기하와 함께 기하학의 역사에 있어 가장 혁명적인 발견의 하나였다고 한다.[11)] 유클리드기하에서는 도형의 크기와 모양이 관심사였다면 사영되었을 때 변치 않은 성질을 연구하는 사영기하에서는 도형을 무한과 관련시켜 보다 근본적인 성질에 주목한다. 유클리드기하에서 평행선은 서로 만나지 않지만 사영기하에서는 무한에서 만나 무한점을 가지고 이 무한점들이 모여 무한직선을 형성한다. 유클리드기하에서 위치를 표시하는 점은 가장 기초적 개념으로 이를 토대로 선을 정의하지만 사영기하에서 점은 유클리드기하에서처럼 기초개념으로서의 배타적 지위를 갖지 못한다. 왜냐하면 사영기하에서는 직선이 점과 같은 존재론적 지위를 갖기 때문이다.[12)] 그래서 사영기하에서는 점을 직선으로 직선을 점으로 바꾸어 한 명제의 쌍인 다른 명제를 얻을 수 있는 이른바 '쌍대성의 원리' 가 성립하는데 이것이 수학자들에게는 사영기하에서 볼 수 있는 아름다움이기도 하지만 유클리드기하로부터의 해방의 단초를 제공했다고 볼 수 있다. 19세기에 비록 새로운 기하가 등장했지만 유클리드기하는 여전히 진리의 표상으로서의 지위를

8) Dirk Schlimm, Metaphors for Mathematics from Pasch to Hilbert, *Philosophia Mathematica*, Advance Access publication January 24(3) (2016), 309.
9) ibid., 310 참조.
10) Dirk Schlimm, Pasch's Philosophy of Mathematics, *The Review of Symbolic Logic* 3(1) (2010), 103.
11) Eli Maor, *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinity*, 108, Birkhäuser, 1987.
12) ibid.,117.

가지고 있었는데 파쉬의 사영기하의 공리화는 수학의 추상화와 자유화에 기폭제가 되었고 20세기의 현대수학을 여는 문의 역할과도 같았다. 힐베르트의 형식주의가 20세기 수학을 대표한다면 파쉬의 수학은 그것을 가능케 한 디딤돌과 같은 것이었다.

파쉬의 수학철학의 독특성은 경험주의와 연역주의를 결합한 것에 있다. 수학이 연역적인 학문이라는 점에서 연역주의는 쉽게 수긍이 가지만 경험주의가 어떻게 수학과 관련되는가 하는 의문이 자연스럽게 제기된다. 그의 경험주의는 수학의 기본 개념에 대한 입장과 관련된다. 슈림이 정리한 바[13]에 따르면 파쉬의 수학철학은 크게 두 층위로 나누어져 있다. 하나는 수학적인 층위이고 다른 하나는 철학적인 층위인데 각 층위는 다시 각각 두 개의 다른 목표와 방법으로 이루어진 층으로 구성되어 있다. 수학적 층위는 일종의 상부구조이고 철학적 층위는 하부구조라 할 수 있는데, 전자와 후자는 다시 각각 두 개 층으로 이루어졌다. 전자의 위층은 일상적으로 수학자들이 새로운 수학적 결과를 얻기 위하여 연구하는 곳이고 바로 그 아래층은 수학층의 토대가 되는 층으로 바로 위층에서 연구가 가능하도록 수학의 기본 개념과 기본 명제들을 도출하는 곳이다. 파쉬는 이 기본 개념과 명제에 해당하는 것을 '줄기'(stem)로 수식하여 줄기개념과 줄기명제로 부르는데 이는 다른 것으로 가지(분화)를 칠 수 있다는 의미에서 명명한 것으로 보인다. 이들 즉 줄기개념과 줄기명제가 확립되면 이를 기초로 다른 수학적 결과들은 연역적으로 도출될 수 있는 것이다. 이 '줄기개념과 줄기명제' 란 사실 공리계에 해당하는 것이다. 파쉬는 이렇게 일단 두 개의 수학적 층위가 수학이론을 형성하게 되면 이제 그 이론을 지지하고 근거를 짓는 하부구조가 제공되어야한다고 생각했다.[14] 그것은 수학적 용어의 의미를 부여하고 수학을 세계에 응용하는 것을 설명하는 것과 같은 철학적 작업이다.[15] 두 개로 이루어진 이 철학적 탐구 층위의 위층은 '핵심'(core) 개념과 명제들을 목표로 하는 토대적 작업을 하는 층이고 아래층은 필요조건이나 숙련된 기능 등을 목표로 하는 전과학적(Pre-scientific)인 작업과 관련된 곳이다. 네 개 층위 가운데 맨 아래층인 이 전과학적인 탐구층은 기본개념을 채용하고 상위층의 탐구를 수행하는 데 있어서 필요조건이나 기술 등을 알아내는 것과 관련된다.[16] 네 개의 층위 중 위의 세 개 층위는 의존적이라기보다 독립적으로 추구된다고 보았던 파쉬는 이런 층이 가지는 위계와 그들의 유기적 결합에서 '나무'라는 은유를 생각해낸 것으로 보인다.[17] 파쉬는 수학이라는 나무를 생각할 때 수학적 탐구는 줄기를 중심으로 지상에서 펼쳐지고, 철학적 탐구는 뿌리에 해당하는 것으로 보았던 것 같다.

19세기에 기하학에서 비유클리드기하의 발견이나 해석학에서 공간을 채우는 곡선과 모든 곳에서 미분 불가능한 연속곡선의 발견 등은 기학적 직관에 어긋나는 것으로서 기하학이 수학의

13) Dirk SCHLIMM, Pasch's Philosophy of Mathematics, *The Review of Symbolic Logic* 3(1) (2010), 95–99 참조.
14) ibid., 96.
15) ibid., 96.
16) ibid., 97.
17) ibid., 97.

확실성을 보장한다는 믿음에 균열이 가게 만들었다. 이로 인해 수학의 기초를 산수에서 찾게 되었다. 수학에 닥친 위기는 다른 한편으로 수학의 정체성을 확립하려는 노력으로 이어졌다. 20세기 수학의 기초에 대한 논쟁은 바로 이러한 노력의 일환으로 형식주의는 주류의 학자들이 선호하는 입장이었다. 힐베르트는 바로 이 형식주의의 제창자이다. 힐베르트의 형식주의는 커리(H. Cury)와 같은 엄밀한 형식주의는 아니었지만 유한한 방법에 의해 칸토어의 집합론을 포함한 고전수학의 무모순성을 증명하려고 했다. 그의 이러한 공리적 체계에 대한 관심은 그의 저서 『기하학의 기초』에서 나타나기 시작했다. 기하학을 순수한 논리적인 체계로 만들려고 했던 파쉬의 작업에 영향을 받은 힐베르트는 유클리드 기하를 5개의 공리군—결합, 순서, 합동, 연속, 평행—으로 나누어 보다 분명한 공리적 체계로 표현했다. 힐베르트가 파쉬의 책을 읽기 전과 후의 강연이 달라진 것으로 보아 파쉬의 영향을 받은 것은 명백하다. 실제로 힐베르트의 공리중 상당수가 파쉬에게서 왔으며 그가 사용한 많은 구절이 파쉬의 것을 바꾸어 표현한 것이었다.[18)] 건물은유가 가진 혁명적인 의미는 수학이 인간의 자유로운 창조물이라는 것이다. 그 당시 대부분의 사람들이 수학의 근거가 인간 외부에 존재하는 것으로 받아들였는데 근거가 외부에 있는 것이 아니라 인간 내부에 있다는 것이다. 그래서 힐베르트는 사영기하의 무한점과 같은 이상적 요소들을 매우 높이 평가했다고 한다. 힐베르트는 칸토어가 제안한 집합론에 대해서도 “인간의 순수한 지적 활동에 의해서 얻어진 최고의 걸작품”[19)]으로 예찬하며 “그 누구도 칸토어가 만들어 준 낙원에서 우리를 내쫓지는 못 할 것이다.” 라고 단언했다.[20)] 기초가 부실하고 얼기설기 연결된 건물이 붕괴의 위험이 있듯이 수학이라는 건물의 안전성을 확보하고 층을 높이 쌓아 올라가기 위해서는 기초가 튼튼하고 건축 자재들 사이가 잘 결합되어야(논리적 증명) 한다. 힐베르트는 자신의 프로그램이 이런 기초를 제공할 것으로 믿었다. 당시 무모순성 증명은 상대적이었다. 즉 유클리드기하가 무모순이면, 비유클리드기하도 무모순하다든가 힐베르트가 보인 것처럼 유클리드기하의 무모순성은 산수의 무모순성에 의존한다는 것과 같이 절대적이지 않았다. 산수가 절대적인 의미에서 모순이 없다는 것을 추구한 것은 수학의 기초를 확보하는 데 반드시 해결해야 하는 과제였고, 힐베르트는 이의 해결을 통해 수학이라는 건축물의 축조가능성을 낙관적으로 전망했었다.

4 바람직한 수학철학

파쉬와 힐베르트의 철학에서 살펴본 것과 같이 수학철학은 그 시대의 수학의 지향점을 일정 부분 반영하고 있다. 파쉬의 프로그램은 경험주의 전통을 반영하고 있었다. 힐베르트의 형식주의 프로그램은 19세기 수학이 추상화의 길을 걷게 되면서 도달할 수밖에 없는 종착점이기도

18) Dirk Schlimm, Metaphors for Mathematics from Pasch to Hilbert, *Philosophia Mathematica*, Advance Access publication January 24(3) (2016), 316.

19) Constance Reid, *Hilbert*, 176, Springer-Verlag, 1996.

20) ibid., 177.

했지만 고전 수학의 상당 부분을 포기하게 되는 당시 수학의 위기에 대한 처방이었다.

바람직한 수학철학이란 어떤 조건을 만족하는 것인가? 이 질문에 대한 답을 위해서는 먼저 수학철학이 무엇인가를 논의해야 하지만 이 글에서는 수학에 대한 철학적 성찰 내지 총체적 이해라는 일반적 정의를 전제한다. “바람직한” 이라는 표현은 이미 어떤 가치를 전제하고 있다. 그 가치를 표현한 것이 기준이라고 할 수 있겠지만 암묵적으로 전제한 것은 수학철학이란 무엇보다도 수학에 대한 ‘총체적’ 이해를 가능케 하는 것이야 한다는 것이다. 그렇다면 과연 수학철학에 적용되는 가치 또는 수학철학을 평가는 기준에는 무엇이 있는가? 허시는 『도대체 수학이란 무엇인가?』에서 수학철학의 평가기준으로 13가지를 열거했다. 그것들은 폭, 인식론과 과학철학과의 연계, 실천에 대한 타당성, 심미성, 경제성, 이해가능성, 정확성, 단순성, 일관성, 독창성과 참신성, 확실성과 명백성, 응용가능성, 수용가능성 등이다.[21] 허시는 이 중 처음 세 기준—수학의 범위와 다양성에 대한 인식과 관련된 폭, 일반적인 인식론과 과학철학에 부합함, 수학적 실천과의 양립가능성—은 필수적이라고 주장하고 일관성은 필수적이기는 하지만 처음 세 기준만큼 달성이 어려운 것이 아니라고 했다.[22] 그런데 허시의 이런 기준은 그가 과학철학과의 연계를 중요한 요소로 생각한 것에서 짐작할 수 있지만 쿤의 패러다임 이론에 영향을 많이 받은 것으로 보인다. 즉 하나의 정상과학을 지배하는 패러다임을 평가하는 기준과 유사성이 있다. 그러나 수학은 자연과학과 다루는 대상과 연구방법이 같지는 않다. 따라서 평가의 기준도 완전히 똑같을 수는 없다. 그리고 그가 기준으로 채택하고 있는 ‘경제성’ 이나 ‘단순성’ 의 맥락과는 좀 다른지 모르겠지만 평가기준이 너무 많이 제시되면 수학철학을 평가하는 것 자체가 경제적이지도 단순하지 않다. 따라서 경제성을 가지고 수학을 전체적으로 조망하는 단순화 시키는 작업이 필요하다.

‘수학철학’ 에서 ‘철학’ 을 수학에 대한 총체적 이해라는 넓은 의미에서의 철학이라 하고 좁은 의미의 철학으로 수학에 있어서 존재론과 인식론을 포함하여 수학적 지식의 본질에 대한 문제를 탐구하는 것으로 이해한다면 수학철학의 영역을 크게 ‘좁은 의미의 철학’(이하 범주1), 역사(이하 범주2)와 실천(이하 범주3)이라는 세 범주에서 평가하는 것이 허시의 기준을 상당히 반영하면서도 경제성과 단순성을 다소 살리는 것이 된다고 본다. 어떤 학문이든 그 학문의 정체성을 살피기 위해서는 그 학문을 철학(범주1)과 역사(범주2)의 좌표위에 놓는 작업이 필요하다. 물론 이때 철학은 좁은 의미의 철학이고, 역사는 문화와 사회를 포괄하는 개념이다. 그 외에 그 학문의 실천(범주3)에 대해 얼마나 설득력이 있는 해명을 하는가가 수학철학의 중요한 과제이다. 결국 수학철학을 위한 평가기준은 세 가지 범주의 질문과 관련된다. 첫째, 수학적 지식의 본질은 무엇인가? 수학적 대상의 존재론적 지위는 무엇이며 이를 어떻게 인식하는가? 둘째, 실제 수학의 역사(문화와 사회 포함)와 부합하는 수학철학인가? 마지막으로,

21) Reuben HERSH, *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, 1997, 24–34.
22) ibid., 33.

수학을 연구하고 응용하고 교육하는 실천에 그 수학철학은 얼마나 설명력을 가지는가? 이러한 질문에 대한 답을 추구하는 것이 수학철학이라고 할 수 있다. 따라서 수학철학자의 임무는 수학의 뿌리가 되는 철학, 그리고 그 학문이 시간을 따라 전개되어 온 역사(문화, 사회) 과정, 그리고 연구, 응용, 교육 등 수학적 실천을 중심으로 수학을 바라보고 탐구하는 것이다. 이를 삼차원 공간으로 비유한다면 철학과 역사가 평면좌표를 형성하고 그 위에 실천이 전개된 것을 관조하는 것이 수학철학이다.

이런 기준을 가지고 파쉬의 철학과 힐베르트의 철학을 평가해보기로 하자. 우선 파쉬의 철학은 범주1에서 수학의 뿌리가 되는 철학적 탐구를 통해 수학의 기원과 수학지식의 성격을 제시하는데 수학의 형식만이 아니라 그 의미를 문제시함으로써 플라톤주의가 가지는 난점인 인식적인 면에서도 곤란을 피할 수 있게 한다. 또한 범주2의 문제도 철학적 탐구 층위를 가지고 있기에 관련짓기가 어렵지 않다. 마지막 기준인 수학적 실천의 문제에서도 연구하는 방법이나 교육에 설명력을 가지는데 이 역시 그의 철학이 연역주의에 경험주의를 결합한 것에 기인한다. 무엇보다도 수학이 어떻게 세계에 응용이 가능한가 하는 문제는 수학철학에서 답하기 매우 어려운 문제인데 그의 경험주의 철학은 이에 대해서도 응답이 가능하다. 왜냐하면 파쉬는기하학이 이상적 삶과 과학에서 성공적인 것은 기하학적 개념이 원래 경험적인 대상에 정확하게 부응한다고 보았기 때문이다.[23)]

반면에 힐베르트의 철학의 경우는 위의 기준들을 만족시키는 데 어려움이 있다. 비록 힐베르트 자신은 수학 특히 기하학에서 경험적 요소를 완전히 무시하지 않은 것으로 알려져 있지만[24)] 형식주의는 범주1을 제외한 나머지 범주에서 설득력을 가지기 어렵다. 범주1과 관련해서 수학의 존재에 대한 질문에 대한 대답보다는 수학적 지식의 본성을 공리적 형식에서 찾았다고 할 수 있다. 그러나 두 번째 기준인 역사적으로 문화와 더불어 발전해 온 것을 설명하는 데 있어서나 수학적 실천에 그렇게 설득력을 갖춘 수학철학이라고 보기는 어렵다. 좀 과장하여 말한다면 수학의 연구자는 수학의 역사적 배경이나 동기에 대한 관심보다는 그저 수학이라는 형식 게임을 다루는 프로게이머와 다를 바가 없게 된다. 이는 쾨르너(S. Körner)가 힐베르트는 "응용수학의 철학적 문제를 본격적으로 다룬 적이 없다."[25)]고 한데서도 확인할 수 있다. 따라서 수학철학의 평가기준을 세 범주로 한정한다면 파쉬의 수학철학이 힐베르트의 수학철학보다 균형을 가지고 있고 훨씬 설명력을 가진다고 볼 수 있다.

23) Dirk Schlimm, Pasch's Philosophy of Mathematics, *The Review of Symbolic Logic* 3(1) (2010), 99.
24) ibid., 99. 각주 28참조.
25) 스테판 쾨르너, 수학철학, (최원배 옮김), 나남, 2015, 131.

5 나가는 말

나무는 인간의 의지와는 상관없이 성장하는 유기체이고 자연재해와 같은 외부적 요인에 의해 피해를 입는다. 빌딩은 인간의 기획에 의해 건축되는 인공물이고 인간의 설계가 잘 못 되었을 때 붕괴될 위험에 처한다. 단순화 시킨다면 나무는 인간과 독립적이고, 건물은 인간에 의존적이다. 위에서 살펴 본 '나무은유' 와 '건물은유' 는 추상적인 수학을 친근하게 만드는 이점이 분명히 있으나 수학의 총체적 모습을 반영하기는 미흡하다고 생각하여 이 둘을 종합한 역동적인 비유로서 생태학적 비유를 제안했다.

두 은유는 수학에 대한 다른 관점을 반영한다. 파쉬와 힐베르트는 다른 수학철학을 가졌다. 수학적 탐구영역 외에 파쉬의 수학 철학의 뿌리에는 경험적인 요소를 반영한 철학적 탐구영역이 있었다. 그러나 힐베르트는 파쉬의 상부구조만을 즉 수학적 탐구영역만을 수학의 참 모습이라고 간주했다. 흔히 파쉬를 19세기의 경험주의 전통을 이어 받은 수학자로, 힐베르트는 20세기 수학정신의 상징으로 단순화시키기도 하지만 무엇이 진정 바람직한 수학이냐에 따라 시간적으로 후대의 철학이라고 해서 반드시 우월한 것이라 할 수는 없다. 바람직한 수학철학의 평가기준으로 철학, 역사, 실천 등 세 범주로 한정하여 파쉬와 힐베르트의 철학을 평가하여 보았다. 이러한 세 범주를 고려하면 오히려 파쉬의 철학이 힐베르트의 철학보다 균형을 가지고 있으며 설명력이 강하다. 그러나 이는 그 시대적 요구와 관련되어 해명될 수 있는 문제라고 보인다. 즉 경험주의를 도입한 파쉬의 수학철학이나 그것을 배제한 힐베르트의 수학철학이 차이를 보이게 된 것은 당시 각각 그들이 과제라고 생각한 것이 달랐기 때문이다. 이러한 사실을 해명하는 것 자체가 바람직한 수학철학의 평가기준으로 제안한 세 범주—철학, 역사, 실천—를 정당화한다. 단지 세 범주는 큰 분류이고 각 범주에 대한 하위 범주를 세세하게 규정해야 하나 본고에서는 이를 구체적으로 다루지 않고 큰 틀에서만 논의했다.

References

1. N. BOURBAKI, "The architecture of mathematics" *American Mathematical Monthly* 57(4) (1950), 221–232.
2. Reuben HERSH, *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, 1997.
3. David HILBERT, *The Foundations of Geometry*, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.
4. Stephan KÖRNER, *The Philosophy of Mathematics: An Introductory Essay*, Dover Publications, 2009. 최원배 옮김, 수학철학, 나남, 2015.
5. G. LAKOFF, M. JONSON, *Metaphors We Live By*, 2nd ed. Chicago, Illinois: University of Chicago University Press, 2003.
6. Eli MAOR, *To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinity*, Boston, Birkhäuser, 1987.
7. G. MCCOLM, 'A Metaphor for Mathematics Education', *Notices of the American Mathematical Society* 54(4) (1950), 499–502.

8. Constance Reid, *Hilbert*, New York, Springer-Verlag, 1996.
9. S. Shapiro, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, 2000.
10. Stephen Pollard (ed.), *Essays on the Foundations of Mathematics by Moritz Pasch*, Springer, 2010.
11. Dirk Schlimm, Pasch's Philosophy of Mathematics, *The Review of Symbolic Logic* 3 (2010), 93–118.
12. Dirk Schlimm, Metaphors for mathematics from Pasch to Hilbert, *Philosophia Mathematica* 24(3) (2016), 308–329.
13. http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1133522&cid=40942&categoryId=32978