Journal for History of Mathematics
Vol. 30 No. 4 (Aug. 2017), 233–246
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.4.233

On the Results of Summability for Fourier series

푸리에 급수에 대한 총합가능성의 결과들에 관하여

Lee Jung Oh 이정오

Cesàro summability is a generalized convergence criterion for infinite series. We have investigated the classical results of summability for Fourier series from 1897 to 1957. In this paper, we are concerned with the summability and summation methods for Fourier Series from 1960 to 2010. Many authors have studied the subject during this period. Especially, G.M. Petersen, Kôsi Kanno, S.R. Sinha, Fu Cheng Hsiang, Prem Chandra, G. D. Dikshit, B. E. Rhoades and others had studied neoclassical results on the summability of Fourier series from 1960 to 1989. We investigate the results on the summability for Fourier series from 1990 to 2010 in section 3. In conclusion, we present the research minor lineage on summability for Fourier series from 1960 to 2010. Hüseyin Bor is the earliest researcher on $|\bar{N}, p_n|_k$-summability. Thus we consider his research results and achievements on $|\bar{N}, p_n|_k$-summability and $|\bar{N}, p_n, \gamma|_k$- summability.

Keywords: Cesàro summability, Summability of Fourier series, Cesàro mean, infinite series; 체사로 총합가능성, 푸리에 급수의 총합가능성, 체사로 평균, 무한급수.

MSC: 42A20, 42A32

1 서론

푸리에 급수는 주기 함수를 간단한 사인과 코사인의 일차 결합인 삼각계 함수의 가중치로 분해한 편리성 때문에 공학에서 특히 많이 사용된다. 푸리에 급수는 주기적 시간 신호로 된 가진력(vibratory force)과 진동 응답의 특성을 지닌 디젤엔진 연소실 압력 기계 시스템공학, 프로펠러 압력 변동을 연구하는 항공공학, 주기적 수중 음향의 매질(medium)을 연구하는 해양공학, 잡음신호를 제거하기 위해 신호를 시간의 영역에서 주파수의 영역으로 변환하는 전자공학, 진동해석과 파동해석, 화상신호와 신호 테이터 압축을 위한 통신공학, 분광기를 이용 빛을 주파수 별로 분해하여 광학 등 여러 공학 분야에서 광범위하게 사용된다. 따라서 푸리에 해석에서 푸리에 급수의 수렴성 문제를 급수의 총합가능성 여부로

Lee Jung Oh: Dept. of Liberal Arts, Chosun College of Science and Technology
E-mail: jolee@cst.ac.kr
Received on May 1, 2017, revised on Jul. 7, 2017, accepted on Jul. 10, 2017.

논하는 주제가 흥미를 끈다. 이때 주어진 임의의 급수가 수렴하면 그 급수의 합을 구할 수 있지만 반대로 주어진 급수가 수렴성이 없어 발산하는 경우에도 그 급수의 합을 정할 수 있을까? 하는 질문은 자연스럽다. 이 질문에 대하여 총합가능성(summability)의 개념은 긍정적이고 효과적인 대답이 된다. 일반적으로 체사로 총합가능성(Cesàro summability)은 수렴하지 않는 어떤 무한 급수의 총합에 대해 값을 정하는 것으로 급수의 부분합에 대한 산술평균의 극한으로 정의된다. 푸리에 급수 수렴성을 논하는 데 중요한 도구 중 하나인 총합가능성에 대한 몇가지 정의를 먼저 소개한다.

임의의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

의 n번째 부분합이

$$\tilde{S}_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

이고 부분합 $\tilde{S}_n$에 대한 산술평균의 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tilde{S}_k = L$$

이 존재하면 급수 (1)을 체사로 총합가능 또는 $(C, 1)$ 총합 가능이라 한다. 또한 n번째 체사로 평균 m_n을

$$m_n = \frac{\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 + \tilde{S}_3 + \cdots + \tilde{S}_n}{n}$$

으로 정의한다. 이제 구간

$$T = \{t \in R | -\pi \leq t \leq \pi\} \tag{2}$$

에서 정의된 2π 주기를 가진 적분 가능한 함수 $f(t)$의 푸리에 급수

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{3}$$

와 (3)의 공액급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt) \tag{4}$$

이다. 그리고 (3)의 부분합은

$$S_n(t) = S_n^0(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(t) \tag{5}$$

로 표현한다. [36]의 3장 1절과 5절에서 소개된 푸리에 급수 (3)의 α차 n-번째 (C, α) 평균은 α가 음이 아닌 정수일 때

$$\sigma_n^\alpha(t) = \sigma_n^\alpha(t; f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) K_n^\alpha(s) ds$$

이다. 여기서

$$K_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} D_\nu(s)$$

이고

$$D_\nu(s) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)s}{2\sin\frac{1}{2}s}$$

이다. 또한

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{\alpha} \approx \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

이다. 만약

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n^\alpha(t) - \sigma_{n-1}^\alpha(t)| < \infty$$

이면 급수 (3)을 점 t에서 (C,α) 절대 총합가능 또는 $|C,\alpha|$ 총합가능이라 한다. 한편 주어진 점 t_0에서 대하여 $\phi(t)$를

$$\phi(t) = \phi_{t_0}(t) = \frac{1}{2}\{f(t_0+t) + f(t_0-t)\} \tag{6}$$

로 표현하면

$$\phi_{t_0}(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_0)\cos nt$$

이다. 주어진 수열 (1)에 대하여 $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$ 이고 $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n)$ 이다.

또한 양의 실수 상수 수열 $\{p_n\}$에 대하여

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \to \infty, \quad n \to \infty \tag{7}$$

일때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty \tag{8}$$

을 만족하면 급수 (1)을 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합가능이라 한다. 여기서

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \quad (P_n \neq 0)$$

이고 $1 \leq k$ 이다. 한편 임의의 수열 $\{b_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여

$$\Delta^2 b_n \geq 0 \tag{9}$$

을 만족할 때 이 수열 $\{b_n\}$을 볼록(convex)이라고 한다.

푸리에 급수의 수렴성을 논하는 데 중요한 수학적 도구 중 하나가 총합가능성이다. 본 논문에서는 1960년부터 2010년까지 체사로 총합가능성에 관한 연구 결과들을 2장과 3장에서 차례로 수학사적 관점에서 고찰한다.

2 1960년 초부터 1980년 말까지 푸리에 급수의 총합가능성에 관한 연구

체사로 총합가능성을 이용한 푸리에 급수의 수렴성에 관한 연구들을 1897년부터 1950대 말까지 [23]에서 이미 고찰하였다. 이어서 본 절에서는 1960년부터 1980년 말까지 푸리에 급수의 총합가능성에 관한 결과들을 살펴본다. 1960년대에 체사로 총합가능성에 관한

연구는 비교적 활발하게 이루어진다. 먼저, 영국 스완지대학교(Swansea University)[1] 의 피터슨(G.M. Petersen)은 1960년 '푸리에 급수의 총합가능 족' [26]을 연구한다. 여기에서 그는 구간 $(0, \pi)$ 에서 함수 $f(t)$ 가 르베그 적분가능이고 임의의 t에 대하여 $h \to +0$ 일 때

$$|f(t+h) - f(t)| = O\left[\left(\log \frac{1}{|h|}\right)^{-1}\right]$$

을 만족하면 $f(t)$ 의 푸리에 급수가 삼각행렬 $A = (a_{nk})$ 에 의한 총합 가능함을 보인다. 그 이전 [36, p. 45]에 의해 르베그 적분 가능한 함수 $f(t)$ 의 푸리에 급수 (3) 에 대한 체사로 총합가능성은 이미 잘 알려져 있다. 그리고 같은 해 대만 국립 타이완 대학(National Taiwan University) 의 푸청셍(Fu Cheng Hsiang) 은 '푸리에 급수와 그 공액급수의 절대 총합에 관하여' [16] 을 소개한다. 이어서 야마가타대학((Yamagata University) 코시켄노(Kôsi Kanno)는 1961년 '푸리에 급수의 절대 총합가능성에 관하여' [17]를 소개한다. 이 결과는 2 년전 선행된 코시켄노와 타모츠츠치쿠라(Tamotsu Tsuchikura)의 1959년 공동연구[2] 보다 더 개선된 결과이다. 또한 일본 지바공업대학(Chiba Institute of Technology) 히로시히로카와(Hiroshi Hirokawa)는 1962년 '푸리에 급수의 절대 체사로 총합가능성에 관하여' [14]를 발표한다. 즉 주어진 함수

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

가 (2)의 2π 주기를 가진 적분 가능한 우함수이고

$$g_\alpha(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \qquad \alpha > 0$$

에 대하여 만약 $f(t)$ 의 푸리에 급수가 $t = 0$ 에서 $|C, \alpha|$ 총합이 영(zero) 값으로 수렴하면 $g_\alpha(t) = o(t^\alpha)$ 임을 보인다. 그는 여기서 오브레스코프(N. Obreschkoff)[3] 의 리이만 총합 방법에 관한 증명 방법을 이용하였다. 한편 이듬해인 1963에 인도의 알라하바드대학 시나(S.R. Sinha)는 '푸리에 급수의 절대 체사로 총합가능성에 관한 어떤 정리' [32]라는 결과를 소개한다. 이 연구는 1953년과 1958년에 발표한 결과에 이어서 그의 절대 체사로 총합에 관한 연구이다. 이 연구는 보잰킷(Lancelot Stephen Bosanquet)의 1934년 '체사로 총합가능성에 관한 연구'[4] 와 유사한 결과이다. 또한 1965년 대만 국립 칭화대학(National Tsing Hua University) 싸셍류(Tsai-Sheng Liu)의 연구[5] 에 이어 1967년 일본 도호쿠대학(Tohoku

1) 영국 웨일스 스완지 카운티의 해안도시 스완지에 있는 공립 종합대학교, 2007년 교명이 웨일스스완지 대학교에서 현재의 교명으로 변경됨.

2) On the absolute summability of Fourier series, *Tohoku Mathematical Journal*, Second Series, 11(3)(1959), 456-479.

3) Über das Riemannsche Summierungsverfahren, *Math. Z.* 48 (1942), 441–454.

4) On the Cesàro summation of Fourier series and allied series, Proceedings of the Mathematical Society, 2(1)(1934), 17-32.

5) On the absolute Cesàro summability factors of Fourier series, *Proceedings of the Japan Academy* 41(9) (1965), 757–762.

University) 젠-이치로 수노우치(Gen-ichiro Sunouchi)는 '푸리에 급수의 절대 총합가능성을 위한 몇가지 기준' [34]을 소개한다. 그는 주 정리 2에서 만약 $p \in (1,2]$, $\delta > 0$ 이고 연속인 주기 함수 f 의 절댓값 적분에 대해

$$\begin{aligned}\omega_p(s,f) &= \sup_{0<h<s}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+h)-f(t-h)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\\ &= O\left\{\left(\log\frac{1}{s}\right)^{-\frac{1}{2}-\delta)}\right\}\end{aligned}$$

이면 푸리에 급수 (3)는 거의 모든 점에서 $|C,\alpha|$ 총합 가능임을 보인다. 여기서 $\alpha > \frac{1}{p}$ 이다.

그후 헝가리 세게드대학(University of Szeged) 이스트만 샬라이(István Szalay)는 1971년 스승 벨라 슈케폴비 나기(Béla Szőkefalvi-Nagy)와 나슬로레인러(László Leindler)로부터 학위를 받기 전 1969년 야노시보여이(János Bolyai) 연구소에서 연구를 통해 '푸리에 급수의 절대 총합가능성에 대하여' [35]를 소개한다. 그는 먼저 $p \in [1,\infty)$ 일 때 적분 가능한 주기 함수 $f(t) \in L^p$ 에 대하여

$$\omega_p^{(2)}(s,f) = \sup_{0<h<s}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+h)+f(t-h)-2f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

를 정의하고 스노우치 [34]의 결과를 더욱 확장한다. 주 정리 2에서 주어진 함수 $f(t)$가 $f(t) \in L^p$ 이고 $p \in (1,2]$ 일 때 수열 $\{\mu_n\}$은 0에 가까워지는 증가하지 않는 단조 수열이다. 조건

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right)^2} < \infty$$

을 만족하는 수열 $\{\mu_n\}$ 에 대해 만약

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\omega_p^{(2)}\left(\frac{1}{n},f\right) < \infty$$

이면 함수 $f(t)$의 푸리에 급수 (3)이 $\alpha > \frac{1}{p}$ 인 거의 모든 점에서 $|C,\alpha|$ 총합 가능함을 보인다. 이어서 대만 국립 타이완대학(National Taiwan University) 푸청셍(Fu Cheng Hsiang)은 1970년 '주어진 점에서 푸리에 급수의 $|C,1|$ 총합가능성 인자들에 관하여' [15]라는 결과를 내놓는다. 그는 푸리에 급수 (3)에 대하여 모든 $\alpha > 0$ 대하여

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t)\frac{1}{n^\alpha} \tag{10}$$

$|C,1|$ 총합 가능함을 기존과 다른 결과를 이용하여 보인다. 그는 주 정리 1에서 $t \to +0$ 일때 (6)에 대하여 만약

$$\Phi(t) = \int_0^t|\phi(s)|ds < \infty$$

이면 급수 (10)이 $|C,1|$ 총합 가능함을 보인다. 한편 인도 자발푸르대학(University of Jabalpur) 딕싯과 아룬쿠마르(H. P. Dikshit and Arun Kumar)는 1975년 공동 연구를 통해

'인자들을 가진 푸리에 급수의 절대 총합가능성' [12]에서 $0 \le \alpha < 1$ 이고 $\alpha < \beta$ 또한 양의 상수 K와 (6)에 대하여 만약

$$\int_0^\pi t^{-\alpha}|d\phi(t)| \le K$$

이면 급수

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)n^\alpha$$

은 $|C,\beta|$ 총합 가능함을 보인다. 이어서 이탈리아 파르마대학(Universita di Parma) 프렘찬드라(Prem Chandra)는 1977년 '푸리에 급수와 그 공액함수의 $|E,q|$ 총합가능성에 관하여' [10]를 소개한다. 급수(1)이 $q > 0$에 대하여 만약

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q+1}\right)^n\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}a_k\right| < \infty$$

이면 급수 (1)을 (E,q) 절대 총합가능이라 정의한다. 그는 주 정리에서

$$\phi_\alpha(t) = \frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds$$

로 놓고 $0 < q < 1$ 이고 $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ 일 때 유계변동 BV(Bounded Variation)에 대해

$$t^{-\alpha}\phi_\alpha(t) \in BV(0,\pi)$$

이면 푸리에 급수(3)가 $|E,q|$ 절대 총합 가능함을 보인다. 이후 프렘찬드라(Prem Chandra)는 뉴지랜드 오클랜드대학교(The University of Auckland) 딕싯(G. D. Dikshit)과 함께 공동 연구를 통해 1981년 '푸리에 급수와 그 공액급수 그리고 그들로부터 유도된 급수의 $|B|$와 $|E,q|$ 총합가능성에 관하여' [11]를 소개한다. 계속해서 딕싯(G. D. Dikshit)은 미국 뉴오릴랜드대학 리스(C. S. Rees)와 1981년[6)] 공동 연구에 이어 1984년 '푸리에 급수의 절대 리즈 총합가능성 II' [13]을 공동 연구하여 발표한다. 또한, 1985년 러시아 페트로비치(A Yu Petrovich)는 '아벨 방법에 의한 일반화된 푸리에 급수의 총합가능성에 관하여' [27]를 소개하고 이어서 미국 인디애나대학교(Indiana University) 로어드스(B. E. Rhoades)는 1988년 '포함 정리에 기초한 푸리에 급수의 행렬 총합가능성 II' [28]를 발표한다. 1989년에 후세인보르(Hüseyin Bor)가 '인자로 된 푸리에 급수의 $|\bar{N},p_n|_k$ 총합 가능인 극부적 성질' [6]을 소개한다. 그는 1980년대 후반 이후부터 푸리에 급수의 총합가능성에 대한 놀라운 연구 결과를 활발하게 소개하여 세계적인 주목을 받는다.

3 1990년부터 2010년까지 푸리에 급수의 총합가능성에 관한 연구

1990년부터 2010년 사이에 터키 후세인보르(Hüseyin Bor)의 연구가 단연 돋보인다. 그는 1991년 '멱급수와 푸리에 급수의 인자에 대한 절대 놀런드 총합가능성' [2]을 소개하고 이어서

6) Absolute Riesz summability of Fourier series, I, Proc. Amer. Math. Sot. 82(1981), 231-238.

1992년에는 '인자로 된 푸리에 급수의 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합가능성에 대한 극부적 성질에 관하여' [9]를 소개하는데 주 정리에서 $1 \le k$ 와 상수 수열 $\{p_n\}$ 에 대하여 (7) 의 P_n 이

$$R_n = n^{-1}\frac{P_n}{p_n} \tag{11}$$

를 만족하고 수열 $\{p_n\}$ 와 (9) 의 수열 $\{b_n\}$ 이

$$\Delta R_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{k-1}\frac{|b_n|^k + |b_{n+1}|^k}{n} < \infty.$$

그리고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(R_n^k + 1)|\Delta b_n| < \infty$$

을 만족하면 (3) 에 관한 인자로 된 푸리에 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) b_n R_n \tag{13}$$

가 한 점에서 극부적 성질에 의해 (8) 에서 정의된 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합가능성이 보장됨을 보인다. 연이어 1993년 그는 '인자로 된 푸리에 급수의 $|\bar{N}, p_n, \delta|_k$ 총합가능성의 극부적 성질에 관하여' [7]를 소개한다. 여기서 그는 $1 \le k, 0 \le \delta$ 이고 (11) 에 의하여 $\frac{P_n}{p_n} = nR_n$ 이므로 수열 $\{p_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 이 (12) 와

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nR_n)^{\delta k-1}\, R_n^k(|b_n|^k + |b_{n+1}|^k) < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nR_n)^{\delta k}\, (R_n^k + 1)|\Delta b_n| < \infty, \tag{14}$$

그리고

$$\sum_{n=\mu}^{\infty} (nR_n)^{\delta k-1}\, \frac{1}{P_{n-1}} = O\left\{\left(\frac{P_\mu}{p_\mu}\right)^{\delta k}\frac{1}{P_\mu}\right\}.$$

을 만족하면 (3) 에 관한 인자로 된 푸리에 급수 (13) 이 한 점에서 극부적 성질에 의해 $|\bar{N}, p_n, \delta|_k$ 총합 가능성임을 보인다. 한편, 터키 파무칼레 대학 (Pamukkale University) 의 머허멧 엘리 세리골 (Me hmet Ali Sarigol) 은 [9] 결과를 더 확장하여 일반화한 정리를 1994년 '인자로 된 푸리에 급수의 $|A|_k$ 총합 가능성의 극부적 성질에 관하여' [29] 에서 소개한다. 이어서 1995년 미국 스트라우즈버그대학 (East Stroudsburg University) 의 쉼바리 (Nunzio Paul Schembari) 는 이전 시러큐스대학 (Syracuse University) 에서 1991년 연구논문[7] 으로 스승 워터멘 (Daniel Waterman) 으로부터 학위를 받은 이후 1995년 스승과 공동 연구를 통해 '미분된 푸리에 급수의 $(C,1)$ 총합가능성' [31] 을 소개한다. 한편 이듬해 1996년 이스라엘 (Israel)

7) Functions of Generalized Bounded Variation, Generalized Absolute Continuity and Applications to Fourier Series, 1991.

북부 항구 도시 하이바(Haifa)에 있는 기술원(Technion) 수학과 에드워드벨린스키(Eduard S. Belinskii(또는 Belinsky))는 '$H^p(0 < p \leq 1)$에서 기인 된 주기 함수에 대한 푸리에 급수의 강한 총합 가능성' [1]에 관한 연구 결과를 발표한다. 에드워드벨린스키는 열정적인 학문 연구를 수행한 수학자로서는 불행한 일생을 보낸다. 그는 우크라이나(Ukraine) 도네츠크(Donetsk) 소재 응용 수학 및 역학 연구소에서 1977년 관심 분야인 푸리에 급수를 연구하여 학위 논문[8] 을 발표한 이후 그는 여러 나라 대학과 연구소를 떠돌며 연구를 통해 총 56편의 연구 결과를 발표한다. 한편 2000년에 들어와서 조지아(Georgia) 내 자치 공화국 아브하지아(Abkhazia)의 아브하지안대학(Abkhazian State University) 파휼리아(N. L. Pachulia)는 2000년 '총합 가능한 함수의 푸리에 급수에 대한 강한 총합가능성에 관하여' [25]를 소개한다. 그는 f가 구간 (3)에서 2π 주기를 가진 총합 가능이고 거리 함수를 전제하고 푸리에 급수 (3)와 그 부분합 (5)에 대하여 $\rho_k(f;t) = f(t) - S_k(t)$ 이고 $\mu > 0$ 이고 λ_k 는 음수가 아닌 특정한 수열 일 때

$$\Psi(f;t;\mu) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |\rho_k(f;t)|^{\mu} \right\}^{\frac{1}{\mu}}$$

를 정의하여 주 정리를 증명한다. 이어서 하코트버틀러 이공계 대학(Harcourt Butler Technological Institute) 수학과에서 하시암랄(Shyam Lal)은 그의 동료 교수 헤어 크리시남 니검(Hare Krishna Nigam)과 2001년 공동 연구를 통해 페티(T. Pati)[9] 의 연구 결과를 일반화한 '공액 푸리에 급수의 대략적 (N, p, q) 총합가능성에 관하여' [18] 결과를 소개한다. 이어서 그는 프렘나라인싱(Prem Narain Singh)과 2003년 공동 연구를 통해 공액급수(4)에 대하여 'K^{λ}-총합가능성 방법들에 의한 푸리에 급수의 공액급수의 연구에 관하여' [19] 라는 결과를 발표한다. 이 결과는 1999년 하시암랄과 아자이프라탑(Ajay Pratap)[10] 의 결과를 일반화한 것이다. 이라크(Iraq) 모술대학교(Mosul University) 술라이만(W.T. Sulaiman)은 [7, 9]의 결과를 일반화한 개선된 정리를 2004년 '인자로 된 푸리에 급수의 $|\bar{N}, p_n, \delta|_k$ 총합가능성의 극부적 성질에 관하여' [33]를 발표한다. 여기서 그는 보어 [7]의 (14)조건보다 더 약한 조건인

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nR_n)^{\delta k} R_n |\Delta b_n| < \infty,$$

을 사용하여 증명한다. 한편 2004년 보어(Hüseyin Bor)는 '푸리에 급수의 극부적 성질에 관한 어떤 연구' [4]을 소개한다. 이어서 그는 2006년 '인자로 된 푸리에 급수의 극부적 성질에 관한 참고 사항' [3]에서 기존 [4] 연구 결과를 다시 일반화하여 소개한다. 또한 그는 볼록수열(convex sequence)을 이용 2009년 '인자로 된 푸리에 급수의 극부적 성질' [5]을 발표한데 이어 2010년 '인자로 된 푸리에 급수의 극소화' [8]을 소개한다. 한편 1989년과 1992년 그리고

8) Application of the Fourier Transform to Summability of Fourier Series.

9) T. Pati, A generalization of a theorem of Iyengar on the harmonic summability of Fourier series, *Indian J. Math.* 3 (1961), 85–90.

10) On K^{λ}-summability of Fourier series, *Ganita Sandesh* 13(1) (1999).

1995년 보어와 공동 연구를 진행하였던 터키 파무칼레 대학(Pamukkale University) 써리걸(Mehmet Ali Sarıgöl)은 같은 해 '인자로 된 푸리에 급수의 극부적 성질에 관하여' [30]를 발표한다.

살펴본 것처럼 1990년부터 2010년 시기에는 터키 수학자를 중심으로 특히 인자로 된 푸리에 급수의 총합가능성에 대한 극부적 성질에 관한 논의가 활발한 시기였다.

4 결론 : 급수의 총합가능성

총합가능성에 관한 연구 역사는 페예르(Fejer), 르베그(Lebesgue), 하디(Hardy) 보렐(Borel)등을 거쳐 약 120년이 넘는다. 푸리에 급수의 총합가능성에 관한 최근 연구는 보어 [8], 머허멧엘리세리골 [30], 술라이만 [33]등 많은 사람들에 의해 연구되어지고 있다. 결론으로 푸리에 급수의 총합가능성에 관한 1960년부터 2010년까지 연구자 소 계보를 제시하고 특히 후세인보어(Hüseyin Bor)의 연구 결과들을 큰 관점에서 살펴본다.

터키 예르지예스대학(Erciyes University) 후세인보어(Hüseyin Bor)는 총합가능성 이론(Summability Theory)에 관하여 1987년부터 2017년 현재까지 무려 207편의 연구 결과물을 소개하고 있는데 그의 연구를 개괄적으로 고찰한다.

보어는 무한 급수의 총합가능성 방법에서 $|\bar{N}, p_n|_k$와 $|C, 1|_k$ 관계를 규명하면서 급수 (1)이 $|C, 1|_k$ 총합 가능일 때 만약 급수 (1)이 $|\bar{N}, p_n|_k, 1 \leq k$ 총합가능이 되려면 (7)에서 정의된 수열 $\{p_n\}$[11] 에 무슨 부가적인 조건이 필요하는지? 에 대해 다음 두 가지 결과를 제시한다. 첫째, 즉 (7)의 양의 상수 수열 $\{p_n\}$이

$$np_n = O(P_n), \tag{15}$$

$$P_n = O(np_n) \tag{16}$$

을 만족하고 $n \to \infty$ 일 때 만약 무한급수 (1)의 $|C, 1|_k$ 총합가능이면 (1)은 또한 $|\bar{N}, p_n|_k, 1 \leq k$ 총합가능함을 제시한다. 둘째, 양의 상수 수열 $\{p_n\}$이 (15)와 (16)을 만족하고 만약 급수 (1)이 $|\bar{N}, p_n|_k$ 총합가능이면 또한 $|C, 1|_k, 1 \leq k$ 총합가능함을 제시한다. 급수 (1)의 $(\bar{N}, p_n)$ 평균 수열을 $\{T_n\}$ 이라 표현하고 수열 $\{\tilde{S_\nu}\}$과 $\{p_n\}$을 사용하여 수렴 속도를 향상 시키기 위해 이용되는 일반적인 수열-수열 변환을 통해

$$T_n = {P_n}^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \tilde{S_\nu}$$

를 정의한다. 그러면 $0 \leq n$ 일 때

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu$$

11) G.H.Hardy, *Divergent series*, Oxford University Press, Oxford, 1949.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{P_n}\left[p_0\sum_{\mu=0}^{0}a_\mu + p_1\sum_{\mu=0}^{1}a_\mu + p_2\sum_{\mu=0}^{2}a_\mu + \cdots + p_n\sum_{\mu=0}^{n}a_\mu\right]\\
&= \frac{1}{P_n}\left[p_0a_0 + p_1(a_0+a_1) + \cdots + p_n(a_0+a_1+\cdots+a_n)\right]\\
&= \frac{1}{P_n}\left[(p_0+\cdots+p_n)a_0 + (p_1+\cdots+p_n)a_1 + \cdots + p_na_n\right]\\
&= \frac{1}{P_n}\left[P_0a_0 + (P_n-p_0)a_1 + \cdots + p_na_n\right]\\
&= \frac{1}{P_n}\left[P_na_0 + (P_n-P_0)a_1 + \cdots + (P_n-P_{n-1})a_n\right]\\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n}(P_n-P_{\nu-1})a_\nu
\end{aligned}
$$

이다. 따라서

$$
\begin{aligned}
\Delta T_{n-1} &= T_n - T_{n-1}\\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu\tilde{S_\nu} - \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu\tilde{S_\nu}\\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{\nu=1}^{n}(P_n-P_{\nu-1})a_\nu - \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{\nu=1}^{n-1}(P_{n-1}-P_{\nu-1})a_\nu\\
&= \frac{P_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{\nu=1}^{n}P_{\nu-1}a_\nu, \quad 1\le n
\end{aligned}
$$

이다. 이를 이용하여 만약 조건

$$\sum_{n=1}^{\infty}{P_n}^{k-1}{p_n}^{1-k}|\Delta T_{n-1}|^k < \infty$$

을 만족하면 무한급수 (1)을 $|\bar{N},p_n|_k,(1\le k)$ 총합 가능이라고 한다. 여기서 $p=1,k=1$ 인 경우 $|\bar{N},p_n|_k-$ 총합가능성은 결국 플렛 (T.M. Flett)[12) 이 정의한 $|C,1|_k-$ 총합 가능성과 같게 되고 일반적으로 $|\bar{N},p_n|_k-$ 총합가능성과 $|C,\delta|_k-$ 총합가능성 방법은 비교 가능하지 않다고 알려져 있다. 또한

$$t_n = n(\sigma_n - \sigma_{n-1})$$

라 표현하고 만약 조건

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\gamma k+k-1}|\Delta\sigma|^k < \infty$$

또는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|t_n|^{k\gamma+k}}{n} < \infty$$

을 만족하면 (1)을 $|C,1,\gamma|_k$ 총합 가능이라고 한다. 이때, $1\ge k$ 이고 $0\ge\gamma$ 이다. 특히

12) T.M.FIett, On an extension of absolute summability and some theorem of Littlewood and Paley, *Proc. London Math. Soc.* 7 (1957) 113–141.

$\gamma = 0$ 인 경우는 $|C, 1, \gamma|_k-$ 총합 가능성은 결국 $|C, 1|_k-$ 총합 가능성이 된다. 또한 모한티 (R. Mohanty)[13) 가 정의한 $|R, \log n, 1|$ 총합 가능성에 대하여 만약 조건

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}|\tilde{S_\nu}|^k = O(\log n), \quad n \to \infty$$

을 만족하면 급수 (1) 을 유계된 $[R, \log n, 1]$ 이라 한다. 그리고 만약 조건

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_n|\tilde{S_\nu}|^k = O(P_n), \quad n \to \infty$$

을 만족하면 급수 (1) 을 유계된 $[\bar{N}, p_n]_k$ 이라 한다. 특히 만약 $k = 1, p_n = \frac{1}{(n+1)}$ 인 경우 $[\bar{N}, p_n]_k$ 유계는 $[\bar{N}, p_n]$ 유계와 같다. 따라서 $|\bar{N}, p_n|_k-$ 총합가능성은 결국 $|R, \log n, 1|-$ 총합가능성과 같게 된다. 또한 양의 실수 상수 수열 $\{\zeta_n\}$ 이 만약 조건

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^{k-1}|\Delta T_n|^k < \infty$$

을 만족하면 급수 (1) 을 $|\bar{N}, p_n, \zeta_n|_k$ 총합 가능이라 한다. 단, $1 \le k$ 이다. 그리고 만약 $\zeta_n = \frac{P_n}{p_n}$ 이면

$$\left|\bar{N}, p_n, \frac{P_n}{p_n}\right|_k = |\bar{N}, p_n|_k, \qquad |\bar{N}, p_n, 1|_1 = |\bar{N}, p_n|$$

이다. 여기서 $|\bar{N}, 1, n|_k = |C, 1|_k$ 임을 알 수 있다. 단, $|\bar{N}, p_n|_1 = |\bar{N}, p_n|$ 이다.

종합하여 보면 보어 [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] 는 $|\bar{N}, p_n|$ 총합가능성을 처음으로 연구하였고 차수가 $k, 1 \le k$ 인 경우에 대해 $(\bar{N}, p_n)$ 의 절대 총합가능성을 $|\bar{N}, p_n|_k$ 로 표시하고 $|\bar{N}, p_n|_k-$ 총합가능성이 절대 체사로 $|C, 1|_k-$ 총합가능성보다 더 일반화된 개념임을 최초로 소개한다. 더욱이 그가 $0 \ge \gamma$ 를 소개하여 $|\bar{N}, p_n|_k$ 을 $|\bar{N}, p_n, \gamma|_k$ 로 확장한 연구 결과는 높게 평가 받고 있다. 현재 보어 이외에도 머허멧엘리세리골 [29, 30], 술라이만 [33] 등도 $|\bar{N}, p_n|_k$ 보다 더 약한 조건을 연구한 결과를 최근까지 내놓고 있다.

13) R. Mohanty, On the summability $|R, \log W, 1|$of Fourier series, J. London Math. Sot. 25(1950), 67-72.

G. M. Petersen [26]	1960
Fu Cheng Hsiang [16]	1960
Kôsi Kanno [17]	1961
Hiroshi Hirokawa [14]	1962
Gen-ichiro Sunouchi [34]	1967
István Szalay [35]	1969
Fu Cheng Hsiang [15]	1970
H. P. Dikshit [12]	1975
Prem Chandra, G.D. Dikshit [11]	1981
B. E. Rhoades [28]	1988
Hüseyin Bor [6]	1989
Hüseyin Bor [7]	1993
Mehmet Ali Sarıgöl [29]	1994
N. P. Schembari, D. Waterman [31]	1995
E. S. Belinskii [1]	1996
N. L. Pachulia [25]	2000
Shyam Lal, Hare Krishna Nigam [18]	2001
W. T. Sulaiman [33]	2004
Hüseyin Bor [3]	2006
Mehmet Ali Sarıgöl [30]	2010
Hüseyin Bor [8]	2010

Figure 1. The researcher minor lineage of summability for Fourier series ; 푸리에급수의 총합가능성에 관한 연구자 소 계보(1960–2010)

References

1. E. S. Belinskii, Strong summability of Fourier series of the periodic functions from $H^p(0 < p \leq 1)$, *Constructive Approximation* 12(2) (1996), 187–195.
2. Hüseyin Bor, Absolute Norlund summability factors of power series and Fourier series, *Ann. Polon. Math.*, 56 (1991), 11–17.
3. Hüseyin Bor, A note on local property of factored Fourier series, *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 64(3) (2006), 513–517.

4. Hüseyin BOR, A study on local properties of Fourier series, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 57(2) (2004), 191–197.
5. Hüseyin BOR, Local properties of factored Fourier series, *Applied Mathematics and Computation* 212(1) (2009), 82–85.
6. Hüseyin BOR, Local property of $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of factored Fourier series, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 17 (1989), 165–170.
7. Hüseyin BOR, On local property of $|\bar{N}, p_n, \delta|_k$ summability of factored Fourier series, *Journal of mathematical analysis and applications*, 179(2) (1993), 646–649.
8. Hüseyin BOR, On The Localization of Factored Fourier Series, *Acta Universitatis Apulensis* 24 (2010), 239–245.
9. Hüseyin BOR, On the local property of $|\bar{N}, p_n|_k$ summability of factored Fourier series, *J. Math. Anal. Appl.*, 163 (1992), 220–226.
10. Prem CHANDRA, On the $|E, q|$ summability of a Fourier series and its conjugate series, *Riv. Mar. Univ. Parma*, 4(3) (1977), 65–78.
11. Prem CHANDRA, Ganesh D. DIKSHIT, On the $|B|$ and $|E, q|$ summability of a fourier series its conjugate series and their derived series, *Indian J. Pure appl. Math*, 12(11) (1981), 1350–1360.
12. H. P. DIKSHIT, Arun Kumar, Absolute summability of Fourier series with factors, *Pacific Journal of Mathematics*, 61(1) (1975), 59–69.
13. Ganesh D. DIKSHIT, Charles Sparks Rees, Absolute Riesz summability of Fourier series, II, *Journal of mathematical analysis and applications*, 102(2) (1984), 549–565.
14. Hiroshi HIROKAWA, On the absolute Cesàro summability of Fourier series, *Proceedings of the American Mathematical Society* 13(2) (1962), 236–243.
15. Fu Cheng HSIANG, On $|C, 1|$ Summability Factors of Fourier series at a given point, *Pacific Journal Math*, 33(1) (1970), 139–147.
16. Fu Cheng HSIANG, On the Absolute Summability of a Fourier Series and its Conjugate Series, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11(1) (1960), 32–38.
17. Kôsi KANNO, on the absolute summability of fourier series (II), *Tohoku Mathematical Journal, Second Series 1* 13(2) (1961), 201–215.
18. Shyam LAL, Hare Krishna Nigam, On almost (N, p, q) summability of conjugate Fourier series, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 25(6) (2001), 365–372.
19. Shyam LAL, Prem Narain Singh, On the study of conjugate series of a Fourier series by K^λ-summability methods, *Tamkang Journal of Mathematics*, 34(2) (2003), 147–154.
20. Jung Oh LEE, A brief study on Bhatia's research of L^1-convergence, *The Korean Journal for History of Mathematics*, 27(1) (2014), 81–93.
21. Jung Oh LEE, On Classical Studies for the Summability and Convergence of Double Fourier Series, *The Korean Journal for History of Mathematics*, 27(4) (2014), 285–297.
22. Jung Oh LEE, On $L^p(T^2)$-convergence and Móricz, *Journal for History of Mathematics*, 28(6) (2015), 321–332.
23. Jung Oh LEE, On the classical results of Cesàro summability for Fourier series, *Journal for History of Mathematics*, 30(1) (2017), 17–29.
24. Jung Oh LEE, The Life of Fourier, the Small Lineage of His younger scholars and a the-

orem of Telyakovskii on L^1-convergence, *The Korean Journal for History of Mathematics*, 22(1) (2009), 25–40.

25. N. L. Pachulia, On Strong Summability of Fourier Series of Summable Functions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 52(8) (2000), 1264–1273.
26. G. M. Petersen, Summability of a class of Fourier series, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 11(6) (1960), 994–998.
27. A. Yu Petrovich, On The Summability of generalized Fourier series by Abel's method, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 50(1) (1985), 227–239.
28. B. E. Rhoades, Matrix summability of Fourier series based on inclusion theorems II, *Journal of mathematical analysis and applications*, 130(2) (1988), 525–537.
29. Mehmet Ali Sarigöl, On local property of $|A|_k$ summability of factored Fourier series, *Journal of mathematical analysis and applications*, 188(1) (1994), 118–127.
30. Mehmet Ali Sarigöl, On the local properties of factored Fourier series, *Applied Mathematics and Computation* 216(11) (2010), 3386–3390.
31. N.P. Schembari, D. Waterman, $(C, 1)$ Summability of the Differentiated Fourier Series, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 191(3) (1995), 633–646.
32. S.R. Sinha, A Theorem on the absolute Cesaro summability of fourier series, *Proceedings of the National Institute of Sciences of India: Physical sciences* 29(1-3) (1963), 302.
33. W. T. Sulaiman, On local property of $|\bar{N}, p_n, \delta|_k$ summability of factored Fourier series, *Journal of mathematical analysis and applications* 292(2) (2004), 340–343.
34. Gen-ichiro Sunouchi, Some criteria for the absolute summability of a Fourier series, *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 19(3) (1967), 311–314.
35. István Szalay, On the absolute summability of Fourier series, *Tohoku Mathematical Journal Second Series* 21(4) (1969), 523–531.
36. Antoni Zygmund, Trigonometric series, Vol.1. Cambridge Univ.Press, Cambridge, 1959.
37. https://en.wikipedia.org/wiki.
38. https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu.