

<https://doi.org/10.7236/IIBC.2017.17.4.83>

IIBC 2017-4-11

MIMO 통신에서 黃金比 자켓코드의 응용

Application of Golden Ratio Jacket Code in MIMO Wireless Communications

김정수*, 이문호**

Jeong-Su Kim*, Moon-Ho Lee**

요약 일상생활에서 신용카드 가로세로의 비가 1:1.56이고, A4 프린터 용지도 1:1.414 등 비교적 균형 잡힌 황금비로 되어 있다. 본 논문은 인식하기에 가장 균형적이고 이상적으로 보이는 비율인 황금비를 바탕으로 피보나치 Golden 비를 다항식으로 표현했고 오일러와 대칭 자켓 다항식의 응용을 BPSK, QPSK 정상도의 관계됨을 보였다. 증명방법으로 피보나치 Golden과 Galois 필드 요소 다항식을 유도했다. 이어서 수학적으로 직교 속성을 가진 적합한 코드를 생성하는데 사용될 수 있고 단순히 역 계산으로 사용할 수 있는 Golden 자켓코드를 새롭게 유도했고 MIMO 이동통신채널에서 Block Jacket 행렬을 이용 채널상관관계의 변화에 따른 채널용량을 구했다.

Abstract In everyday life, the ratio of credit card aspect ratio is 1: 1.56, and A4 printer paper is 1: 1.414, which is relatively balanced golden ratio. In this paper, we show the Fibonacci Golden ratio as a polynomial based on the golden ratio, which is the most balanced and ideal visible ratio, and show that the application of Euler and symmetric jacket polynomial is related to BPSK and QPSK constellation. As a proof method, we have derived Fibonacci Golden and Galois field element polynomials. Then mathematically, we have newly derived a golden jacket code that can be used to generate an appropriate code with orthogonal properties and can simply be used for inverse calculation. We also obtained a channel capacity according to the channel correlation change using a block jacket matrix in a MIMO mobile communication.

Key Words : Golden Ratio, Fibonacci, Golden Jacket Code calculated the Channel Capacity MIMO communication

1. 서론

황금비(黃金比 : Golden Ratio)는 이 인식하기에 가장 균형적이고 이상적으로 보이는 비율이다.^[2-6]

그리스의 수학자 피타고라스(BC 582? ~ 497?)는 만물의 근원을 수(數)로 보고, 수학적 법칙에 따라 세상을 표현하고자 하였으며, 정오각형 모양의 별에서 이상적인 비율을 발견하였다. 그는 정오각형의 각 꼭짓점을 대각

선으로 연결하면 내부에 별 모양이 생기며, 이 별 내부에 또 다른 정오각형이 만들어지는데, 이때 정오각형 내부의 대각선이 교차하는 각 대각선에 대해 약 $5 : 8 = 1 : 1.6$ 의 비율로 분할하는 것을 발견하였다.^[2] 이것이 황금비의 개념이 생겨난 시초라 할 수 있으며, 이때 「정오각형의 같은 꼭짓점을 지나지 않는 2개의 대각선은 서로 다른 쪽을 황금분할한다.」(그림 1).

*정회원, 숭실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과(주저자)

**정회원, 전북대학교 전자공학부(교신저자)

접수일자: 2017년 6월 23일, 수정완료: 2017년 7월 23일

게재확정일자: 2017년 8월 11일

Received: 23 June, 2017 / Revised: 23 July, 2017 /

Accepted: 11 August, 2017

**Corresponding Author: moonho@jbnu.ac.kr

Dept: Division of Electronic Engineering, Chonbuk National University, Korea

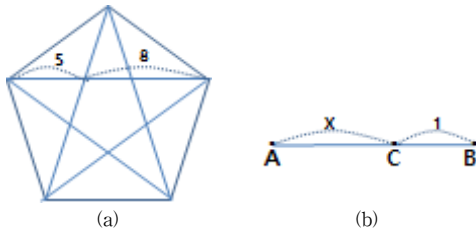


그림 1. 5각형과 선 AB의 황금 비
Fig. 1. pentagon and Golden ratio of line AB

이후 그리스의 수학자 유클리드(BC 330? ~ 275?)가 황금비에 대해 이론적으로 구체화시킴으로써 널리 알려졌다. 유클리드는 황금비를 「한 선분을 전체 직선과 긴 선분의 비가 긴 선분과 짧은 선분의 비와 같도록 나누는 것」으로 정의하였다. 이 정의에 따르면 한 선분은 한 점에 의해서 두 부분으로 나눌 수 있는데, 선분 AB의 길이를 $x : 1$ 로 나누는 점 C에 대해 $AB : AC = AC : BC$ 인 경우, 「점 C는 선분 AB를 황금분할한다.」고 하고, 이때의 x 가 「황금비」가 되는 것이다.

즉, 긴 선분인 AC(단, $x > 1$)에 대하여 $AC^2 = (AB) \cdot (BC)$ 가 성립하므로 이를 두 선분의 비로 나타내면

$$(x+1) : x = x : 1 ; \text{ 즉 } x^2 - x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{따라서 } x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61 \dots (x > 1)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.61803 (x < 1) \text{ 이다.}$$

일반적으로 이렇게 구해진 긴 선분의 분할에 대한 비 1.618033989...에서 소수 셋째 자리까지만 나타낸 1.618을 황금비로 활용한다. 황금비를 활용한 가장 대표적인 예로 두 변의 비가 황금비를 이루는 직사각형을 가장 모양이 좋은 직사각형으로 평가한다. 한편, 조화와 균형을 신봉한 고대 그리스인들은 황금비를 회화·조각과 같은 예술 작품과 건축물 등 모든 일상에서 적용하였다고는 하지만, 실제 정확하게 비율을 따져서 제작되었는지는 의문이다[부록 1 2 3의 피보나치수열 증명].

그럼에도 불구하고 황금비율적 관점에서 보면 파르테논 신전, 이집트의 피라미드, 레오나르도 다 빈치의 비너스 조각상과 모나리자(인체비율이나 회화의 구도) 등에서 1.618의 비율인 황금비를 찾아볼 수 있다. 오늘날 일상 생활에서는 1.618 외에도 신용카드 등에 사용되는 1 : 1.56, A4 용지에 사용되는 1 : 1.414 등도 비교적 균형 잡

힌 황금비율로 활용되고 있다.

한편 이탈리아 수학자 피보나치(Fibonacci 1170-1250) 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...와 1,2,3,5,8,13,21,34도 황금비를 만들어 내고 이 두 수열은 각각

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180 \dots = \frac{5}{8} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180 \dots = \frac{8}{5}$$

에 수렴한다. 이것은 황금분할의 비로 잘 알려진 수로, 자연계에서 많은 생물의 구조가 이를 따르는 것으로 밝혀져 있다. 예를 들어, 솔방울을 살펴보면 비늘 같은 조각이 오른쪽나선과 왼쪽나선을 이루며 교차하고 있는데, 그 나선의 수는 각각 8개와 5개로 되어 있다. 5와 8은 피보나치수열에서 서로 이웃하는 항이다. 이 밖에도 식물 중에는 꽃잎의 배열이 13:8 또는 34:21 등으로 되어 있는 경우가 많다. 또한 앵무조개의 달팽이 모양 껍데기의 구조도 황금분할의 비를 잘 보여 준다. 이러한 황금분할의 비는 예로부터 자연계의 가장 안정된 상태를 나타내는 것으로 알려져 있으며, 수학·음악·미술 등의 분야에서 매우 중요하게 다루어졌다. 레오나르도 다 빈치의 미술작품들이 철저히 황금분할을 이용한 것이란든지, 음악에서 고전파의 소나타 형식이 황금분할의 비를 나타내고 있는 것 등이 그 예이다. 특히 B.바르토크의 ‘현악기와 타악기 및 첼레스타를 위한 음악’은 피보나치 수열에 따라 새로운 주제의 도입, 악기의 배치, 음색 변경 등의 시점을 정한 것으로 유명하다.

본 논문은 II장에서 황금비 다항식과 오일러 공식과 연계성, III. BPSK, QPSK성상도와 Jacket 행렬, IV. Golden과 Galois Field 다항식, V. Golden Jacket Codes를 VI장에서 MIMO 이동통신에 Block 회전 Jacket 행렬 응용, VII장에서 결론을 맺는다.

II. 황금비 다항식과 오일러 공식과의 연계성

Jacket 행렬은 non-zero, 실수, 복소수로 이루어진 n 차

의 정방형 대칭 행렬 $A = (a_{ij})$ 이다.^[1] 그러므로,

$$[A][B] = [B][A] = [I] \quad (3)$$

여기에서, $[B] = [A]^{-1}$ 이다.

Euler's 공식에서 식 (4)와 같이 나타낸다.

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad (4)$$

여기서 e 는 자연로그, i 는 허수를 갖는다. 노벨 상을 수상한 Richard Feynman는 오일러 공식에 바탕을 둔 e 와 i 를 π 와 Φ 의 관계로 근사화했다.^[2]

$$e^{i\pi} = \Phi^{-1} - \Phi = -1 \quad (5)$$

$$\text{이때 } \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

여기서 Φ (phi) 는 연속 기하학적 비율이 $\Phi:1::1:1/\Phi$ 인 황금비이다. 그림 2과 같이 단위가 Φ 와 $1/\Phi$ 사이의 기하학적 평균이 된다.

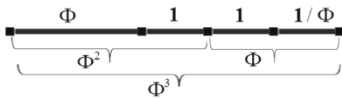


그림 2. 연속 기하학 비율을 가진 황금비(Golden ratio)
 Fig. 2. Golden ratio with continuous geometry ratio

황금비는 동시에 덧셈과 곱셈 성질은 간단한 2차 방정식 $x^2 - x - 1 = 0$ 로 표현되며, 하나는 양수, 하나는 음수, Φ 와 $-\Phi^{-1}$ 으로 표현한다.

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (6)$$

즉,

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803..,$$

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803..$$

또한 다음과 같은 중요한 정체성(Identity)을 갖는다.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \text{ 그리고 } \Phi = \sqrt{1 + \Phi} \quad (7)$$

따라서,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{i\pi}{n} \right)^{\frac{n}{i\pi}} \right]^{i\pi} = e^{i\pi} = 0.61803.. - 1.61803.. = -1 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} \end{aligned}$$

또는

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} \\ &= 1.61803398874989484882.. \quad (9) \end{aligned}$$

(2)식과 (9)식에서 황금비가 같음을 확인했다.

III. BPSK, QPSK성상도와 Jacket 행렬

Euler와 Fibonacci 관계를 구하면 실수 ± 1 는 다음과 같다.

i, $e^{i\pi}$ 경우

$$e^{i\pi} = \frac{1}{\Phi} - \Phi = \frac{1}{\Phi} - \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right) = -1 \quad (10)$$

ii, $e^{-i\pi}$ 경우

$$e^{-i\pi} = \frac{1}{\frac{1}{\Phi} - \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right)} = \frac{1}{-1} = -1 \quad (11)$$

Euler와 Fibonacci 그리고 Jacket 식과 관계는 (12) 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} e^{i\pi} \cdot \underbrace{e^{-i\pi}}_{\text{Inverse}} &= -1 \times \underbrace{\frac{1}{-1}}_{\text{Elementwise inverse}} = 1, \\ (-1) \times (-1) &= 1 \quad (12) \end{aligned}$$

허수(Imaginary number)인 경우는 다음과 같다.

$$i, e^{\frac{i\pi}{2}} \text{ 경우}$$

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i \quad (13)$$

$$ii, e^{-\frac{i\pi}{2}} \text{ 경우}$$

$$e^{-\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i \quad (14)$$

그러므로,

$$e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{i\pi}{2}}}_{\text{Symmetric Inverse}} = (i) \cdot \underbrace{(-i)}_{\text{Elementwise Inverse}} = 1 \quad (15)$$

$$\text{즉 } (i) \times (-i) = 1 \quad (16)$$

(12)식과 (14)식은 Jacket 행렬식 정의 (3)식을 만족한다. (10), (11)식은 실수공간의 BPSK이고 실수(±1)와 허수(±i)를 합하면 ±1 ± i로 QPSK 공간 성상도가 된다.

응용 : BPSK, QPSK 신호에서 송신신호에 의해 전달되는 정보는 신호의 위상(Phase)에 포함된다. BPSK는 위상의 180° 점인 (±1)의 점이고 그림3과 같다. QPSK 시스템에서 변조된 신호는 4개의 동일한 간격으로 배치된 서로 상이한 위상 상태를 가지게 된다.

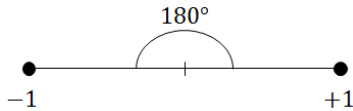


그림 3. BPSK 변조 성상도
Fig. 3. BPSK modulation constellation diagram

BPSK 신호 성상을 (±1)이므로 Jacket 행렬 식(3)을 이용하면

$$\begin{bmatrix} - & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix} = [1 + 1] = 2[I]_2 \quad (17)$$

QPSK 경우 시스템 반송파의 위상은 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, 4개의 동일 간격으로 배치된 위상 중 하나가 된다. 이 위상 집합에 대해 송신신호는 다음과 같다.

$$S_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E}{T_s}} \cos(2\pi f_c t + (2i-1)\frac{\pi}{4}), & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 \end{cases} \quad (18)$$

여기서 i 는 1,2,3,4가 되고 E 는 심볼당의 송신 에너지, T_s 는 심볼의 시간을 나타낸다. 이때 QPSK 신호 공간 특성을 다음 표 1과 같고 부호화된 신호 성상도는 그림 4와 같다.

표 1. QPSK의 신호 공간특성
Table 1. Signal Spatial Characteristics of QPSK

입력비트 $0 \leq t \leq T_s$	QPSK 신호위상	신호점의 좌표	
		S_{i1}	S_{i2}
10	$\frac{7\pi}{4} = -1 + i$	$\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$
00	$\frac{5\pi}{4} = -1 - i$	$-\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$
01	$\frac{3\pi}{4} = -1 + i$	$-\sqrt{E/2}$	$\sqrt{E/2}$
11	$\frac{\pi}{4} = 1 + i$	$\sqrt{E/2}$	$\sqrt{E/2}$

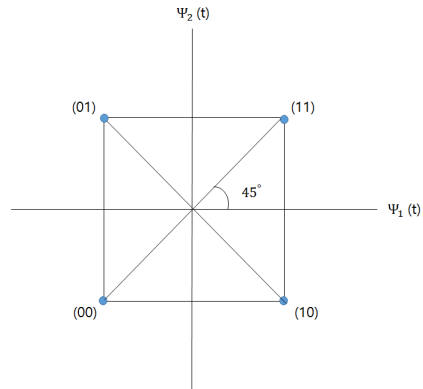


그림 4. QPSK Gray 부호화된 신호 성상도
Fig. 4. QPSK Gray coded signal constellation diagram

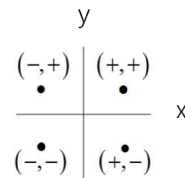


그림 5. QPSK 성상도 ±1 부호
Fig. 5. QPSK constellation ±1 code

이때 Jacket 식 (3)을 이용하며

$$\begin{bmatrix} 01 & \vdots & 11 \\ 00 & \vdots & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & + & \vdots & + & + \\ - & - & \vdots & + & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ + & - \\ + & + \\ + & - \end{bmatrix} = 4[J]_2 \quad (19)$$

(19) 식이 된다.

이것은 (17), (19)식 모두 (3)식을 만족한다. 한편 M=16인 QAM 신호 공간 분해 인 경우 그림 6과 같으며

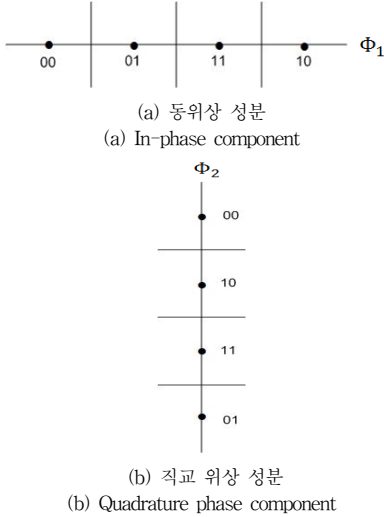


그림 6. M=16QAM 신호공간의 분해
 Fig. 6. M=16QAM Decomposition of signal space

8PSK:

$$E_{PM} = E_P = E_b \times \log_2 M$$

$$P_{eM} = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0} \sin \frac{\pi}{M}}\right)$$

$$F_b = \frac{P_{eM}}{10 \log_2 M}$$

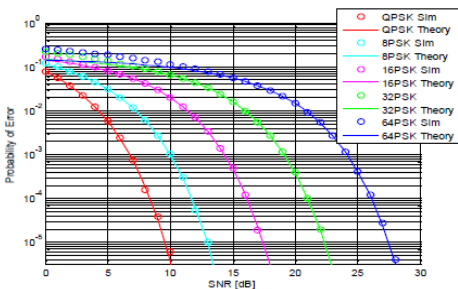
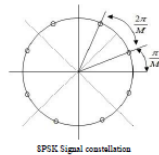


그림 7. BPSK와 QPSK 그리고 8PSK 시뮬레이션도
 Fig. 7. BPSK, QPSK and 8PSK simulation

이때, 직교 신호 정상도 (20) 식과 같고 부록 3에 증명했다.

$$\begin{pmatrix} 00 & \vdots & 11 \\ 10 & \vdots & 01 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ++ & -- \\ -+ & +- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +- \\ ++ \\ -+ \\ -- \end{pmatrix} = 4I_2 \quad (20)$$

또한 8PSK 변조 시뮬레이션도는 그림 7과 같다.

IV. Golden과 Galois Field 다항식

Golden 비와 연결된 Euler 수식에 의해 주어질 수 있다.^[2]

$$e^{i\pi} = \phi^{-1} - \phi = -1 \quad (21)$$

여기서 ϕ 는 연속 기하학적 비례 관계 $\phi:1:\phi^{-1}$ 인 Golden section이다. 그리고 (21)은 다음과 같은 간단한 다항식으로 표현 될 수 있다.

$$\phi^{-1} - \phi = -1 \rightarrow \phi(\phi^{-1} - \phi) = \phi(-1) \Rightarrow 1 - \phi^2 = -\phi \quad (22)$$

여기에서 $\phi \neq 0$. x 를 ϕ 로 대체하면 식 (14)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$x^{-1} - x = -1 \rightarrow 1 - x^2 = -x \rightarrow x^2 - x = 1 \quad (23)$$

$x \neq 0, 1$ 일 때, 유명한 Galois Field 다항식 함수, $x^2 + x + 1 = 0$ 와 다른 Golden 다항식을 식 (23)과 같이 정의 할 수 있다. Golden 다항식의 경우, 주로 다항식 4개를 다음과 같이 얻는다.

$$\{0, 1, x, x^{-1}\} \text{ with operation "-"}, \quad (24)$$

또한 Galois 필드 다항식의 요소는 식 (25)과 같이는 다르다.

$$\{0, 1, x, x^2\} \text{ with operation "+"}. \quad (25)$$

A. Jacket Matrices

2×2 Jacket 행렬은 원소 단위의 역행렬을 사용하여 아래와 같이 간단하게 정의 할 수 있다.

$$[J]_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, [J]_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/c \end{bmatrix}. \quad (26)$$

아래와 같이하면

$$[J]_2^{-1} - [J]_2 = -[I]_2, \quad (27)$$

(23)와 같은 Golden 다항식과 마찬가지로 흥미로운 결과는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/b & 1/c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

아래와 같게 하면

$$1/a - a = -1, \text{ 그리고 } 1/c - c = -1, \quad (29)$$

다음을 의미한다.

$$1 - a^2 = -a \rightarrow a^2 - a - 1 = 0. \quad (30)$$

식 (22)의 근은 다음과 같이 계산 될 수 있다.

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (31)$$

따라서 새로운 Jacket 행렬을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[J]_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[J]_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1 \\ 1 & \frac{2}{1-\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

따라서 다음식을 갖는다.

$$[J]_2 [J]_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1 \\ 1 & \frac{2}{1-\sqrt{5}} \end{bmatrix} = 2[I]_2 \quad (34)$$

이 함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{2}{1-\sqrt{5}} \rightarrow (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) = -4 \quad (35)$$

B. Golden Jacket Matrices 와 Golden Jacket Polynomial

(27)와 같은 다항식 함수가 Golden Jacket Polynomial의 한 종류로 불릴 수 있고 (32)와 같은 결과 Jacket 행렬로 불릴 수 있다는 것은 분명하며 이것은 Golden Jacket Matrix의 한 종류로 불릴 수 있다.

예제 1 : 2×2 Jacket 행렬을 사용한 Golden Jacket Polynomial.

$$[J]_2^{-1} - [J]_2 = -[I]_2 \quad (36)$$

상기결과 Golden Jacket 행렬은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[J]_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad [J]_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

Golden Jacket 다항식 요소는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{0, [I]_2, [J]_2, [J]_2^{-1}\}. \quad (38)$$

또한 $N \times N$ Jacket 행렬이 있는 Golden Jacket Polynomial은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[J]_N^{-1} - [J]_N = -[I]_N. \quad (39)$$

V. Golden Jacket Codes

Golden Jacket 행렬로 구성된 코드는 골든 자켓 코드로 정의 할 수 있다.

예제 2 : Golden Jacket 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$[J]_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

위의 역(Inverse) 은 다음과 같다.

$$[J]_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & 1 \\ 1 & \frac{2}{1-\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ \frac{2}{1-\sqrt{5}} & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

식 (40)을 이용하여 매개 변수화 된 공간 시간 코드로 코딩 할 수 있다.

$$[GJ]_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin \theta \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (42)$$

식 (33)을 바탕으로 요소 역은 다음과 같이 주어진다.

$$[GJ]_2^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{2}{1+\sqrt{5}} \sin \theta \\ \frac{2}{1-\sqrt{5}} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (43)$$

그러므로 아래와 같이 쉽게 얻을 수 있다.

$$[GJ]_2 ([GJ]_2^{-1})^T =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin \theta \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \frac{2}{1-\sqrt{5}} \sin \theta \\ \frac{2}{1+\sqrt{5}} \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \frac{2}{1-\sqrt{5}} \sin \theta \cos \theta + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin \theta \cos \theta \\ \frac{2}{1+\sqrt{5}} \sin \theta \cos \theta + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad (44)$$

(17),(19),(20),(44) 식은 Jacket 행렬식(3)을 만족한다.

VI. MIMO 이동통신에 블록회전 Jacket 행렬 응용

(26) 식 $[J]_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ 일 때, 행렬 요소 2X2 블록 N=2p 일 때 Jacket 행렬식 증명은 다음과 같다.

블록 Circulant Jacket 행렬을 $[C]_N \triangleq \begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_1 & C_0 \end{pmatrix}$,

$$\dot{y} = C_0 = C_1 = 2p \text{ Jacket 행렬} \quad (45)$$

$$C_0 C_1^{RT} + C_1^{RT} C_0 = [0]_{N'} \quad (46)$$

RT is Reciprocal Transpose

증명, C_0 와 C_1 이 Jacket 행렬이면, $C_0 C_1^{RT} = p[\tilde{J}]_p$ and $C_1 C_1^{RT} = p[\tilde{J}]_p$, 따라서 $[C][C]^{RT} = NI_{N'}$ 그리고 C

Jacket matrix 필요충분조건은

$$[C][C]^{RT} = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_1 & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_1 & C_0 \end{pmatrix}^{RT}$$

$$= \begin{pmatrix} 2p[\tilde{J}]_p & C_0 C_1^{RT} + C_1 C_0^{RT} \\ C_0 C_1^{RT} + C_1 C_0^{RT} & 2p[\tilde{J}]_p \end{pmatrix} = NI_{N'}. \quad (47)$$

따라서 $[C]_N$ Jacket matrix 필요충분조건은

$$C_0 C_1^{RT} + C_1 C_0^{RT} = [0]_{N'}. \quad (48)$$

$$\text{예) } C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} a & -a \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad (49)$$

$C_0 C_0^{RT} = 2[\tilde{J}]_2$ 그리고 $C_1 C_1^{RT} = 2[\tilde{J}]_2$, C_0 그리고 C_1 는 order 2의 Jacket matrices.

$$C_0 C_1^{RT} + C_1 C_0^{RT}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -a \\ -\frac{1}{a} & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -a \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2a \\ \frac{2}{a} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -\frac{2}{a} & 0 \end{pmatrix} = [0]_2 \quad (50)$$

그러므로

$$C_4 = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ C_1 & C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -a \\ 1 & -1 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} \\ a & -a & 1 & 1 \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

SNR이 높을 때는 송신부에서 채널 정보가 가용해도 큰 이득이 없음을 확인할 수 있다. SNR이 매우 높을 때에는 가장 낮은 모드의 SNR까지 높아, 사용되지 않는 모드가 없고, 채널 정보에 따라 각 모드가 할당 받는 전력도 거의 동일하게 됨을 의미한다.

MIMO 채널의 상관관계에 따른 채널 용량 변화를 구했다. Deterministic 채널 용량 수식으로부터, SNR이 높을 때 다음 식으로 근사화 할 수 있다.

$$C \approx \max_{R_{x,x}} \text{Tr}(R_{x,x}) = N \log_2 \det(R_{x,x}) + \log_2 \det\left(\frac{E_x}{N_0 N} H_w H_w^H\right) \quad (51)$$

위 수식으로부터 $\det(R_{x,x})$ 가 최대가 되기 위해서는 조건 $R_{x,x} = I_N$ 이 만족되어야 함을 알 수 있다. 상관관계가 있는 MIMO 채널을 식 (52)과 같이 모델링하면, 해당 채널 용량은 식 (53)와 같이 표현된다.

$$H = R_r^{1/2} H_w R_t^{1/2} \quad (52)$$

$$C = \log_2 \det\left(I_{N_r} + \frac{E_x}{N_0 N_T} R_r^{1/2} H_w R_t^{1/2} H_w^H R_r^{1/2}\right) \quad (53)$$

식 (53)로 부터 $N_T = N_R = N$, R_r 과 R_t 가 full rank이고 SNR이 높을 때, 다음의 근사식을 얻는다.

$$C \approx \log_2 \det\left(\frac{E_x}{N_0 N_T} H_w H_w^H\right) + \log_2 \det(R_r) + \log_2 \det(R_t) \quad (54)$$

식 (54)와 관계식 (55) 및 (56)에 의해, 상관관계가 있는 때 MIMO 채널 용량이 감소함을 알 수 있다.

$$\det(R_r) = \prod_{i=1}^N \lambda_i(R_r) \leq 1 \quad (55)$$

$$\log_2 \det(R_r) \leq 0 \quad (56)$$

송신 안테나 사이와 수신 안테나 사이에 모두 상관관계가 있을 때 아래 수식으로 표현되는 만큼 용량이 감소된다.

$$\log_2 \det(R_r) + \log_2 \det(R_t) \quad (57)$$

Determinant와 eigenvalue의 관계는 아래와 같다.

$$\det(R) = \prod_i \lambda_i(R) \quad (58)$$

또한, 산술평균과 기하평균의 관계에 의해 아래 관계가 성립한다.

$$\left(\prod_i \lambda_i\right)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{n} \sum_i \lambda_i = 1 \quad (59)$$

위의 두 관계식을 결합하면 아래의 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{N} \log_2 \det(R) \leq 0 \quad (60)$$

$$\log_2 \det(R) \leq 0 \quad (61)$$

그림 8은 채널 상관관계에 따른 용량 감소를 나타낸다. 송신단 안테나간에는 상관관계가 있고 수신단 안테나간에는 $R_r = I_r$ 와 같이 상관관계가 없다고 가정하였다. SNR=18dB에서 약 3.3 bps/Hz의 용량이 상관관계에 의해서 감소함을 관찰할 수 있다. 상관관계가 높다는 것은 modal decomposition에 의해 표현되는 여러 모드들 중 낮은 SNR을 갖는 모드가 존재할 확률이 높다는 의미이다.

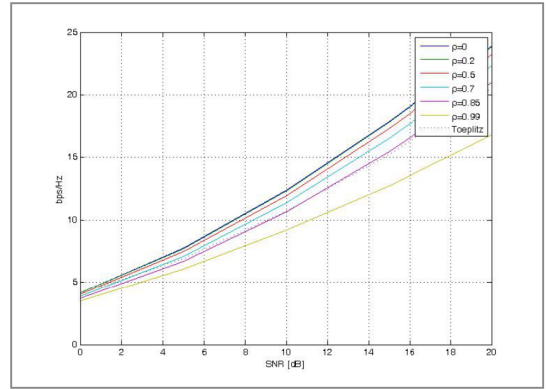


그림 8. 채널 용량 대 SNR.

Fig. 8. Channel capacity versus SNR.

그림 8. 채널 캐퍼시티와 SNR 또한, R_t 가 다음과 같이 Toeplitz 행렬과 Block Circulant 행렬 (63)일 때, BER과 E_b/N_0 와 CDF의 시뮬레이션도 보인다.

$$R_t = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & & \\ t_2 & t_1 & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{n-1} & & & & t_0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

따라서,

$$R_t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \rho \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (63)$$

Toeplitz 채널 행렬에 비해 제한한 채널 블록 회전 Jacket 행렬이 우수함을 보였다.

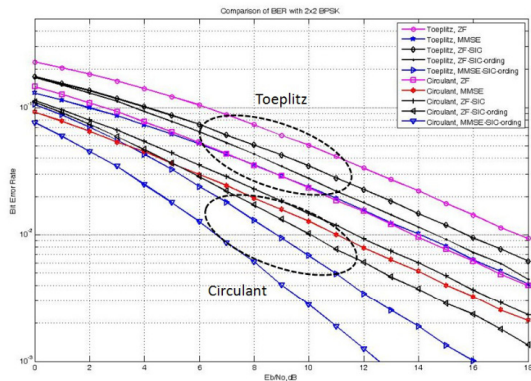


그림 9. 4 X 4 MIMO와 대각 블록 4 X 4 MIMO 심볼 에러율.
 Fig. 9. Comparison of 4 X 4 MIMO and Block Diagonal 4 X 4 MIMO Symbol Error Rate.

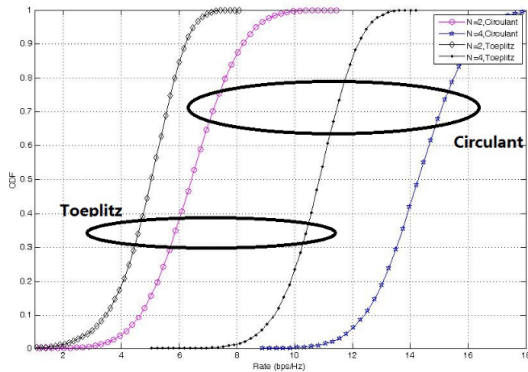


그림 10. 2 X 2, 4 X 4 MIMO 채널 상관 CDF.
 Fig. 10. CDFs of the correlate 2 X 2 and 4 X 4 MIMO channel.

VII. 결론

본 논문은 Fibonacci 황금비 Euler Jacket 행렬관계를 수식으로 증명했고 예를 들어 QPSK 변조방식을 들었다. 오일러 $e^{\pi i} + 1 = 0$ 와 Richard Feynman $e^{\pi i} = \Phi^{-1} - \Phi$ 관계는 2차 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 관계에 착안하여 Jacket Code를 설계했다. 즉 Golden section과 Golden Jacket 행렬 패턴은 직교 속성을 가진 적합한 코드를 생성하는데 사용될 수 있고 단순히 역 계산으로 사용할 수 있다. 응용으로 MIMO 통신채널에서 상관관계 변화에 따른 채널용량을 구했다.

References

- [1] Moon Ho Lee, Jacket Matrices: Construction and Its Applications for fast Cooperative Wireless Signal Processing, LAMBERT, Germany, 2012.
- [2] S. Olsen, The Golden Section, Bloomsbury, USA, 2006.
- [3] Gilbert Strang, Liner Algebra and Its Applications, Thomson learning, 1988.
- [4] Moon Ho Lee, MIMO Communication Method and System using the Block circulant Jacket Matrices, USA patent N8.9.356.671, 2016. 5. 31.
- [5] Frank Wilczek, A Beautiful Question, Penquin Books, 2015.
- [6] Scott Olsen, The Golden Section, Bloomsbury USA, 2006.

- 부 록 -

1. Fibonacci수

1	$1 = \frac{\phi^2 + 0}{\phi^2}$	$= \phi^0 + 0/\phi^2 = G^0$	$= 1$
2	$2 = \frac{\phi^3 + 1}{\phi^2}$	$= \phi^1 + 1/\phi^2 = G^1 + L^2$	$= 1.61803398... + 0.38196601...$
3	$3 = \frac{\phi^4 + 1}{\phi^2}$	$= \phi^2 + 1/\phi^2 = G^2 + L^2$	$= 2.61803398... + 0.38196601...$
4	$5 = \frac{\phi^5 + 2}{\phi^2}$	$= \phi^3 + 2/\phi^2 = G^3 + 2L^2$	$= 4.23606797... + 0.76393202...$
5	$8 = \frac{\phi^6 + 3}{\phi^2}$	$= \phi^4 + 3/\phi^2 = G^4 + 3L^2$	$= 6.85410196... + 1.14589803...$
6	$13 = \frac{\phi^7 + 5}{\phi^2}$	$= \phi^5 + 5/\phi^2 = G^5 + 5L^2$	$= 11.09016994... + 1.90983005...$
7	$21 = \frac{\phi^8 + 8}{\phi^2}$	$= \phi^6 + 8/\phi^2 = G^6 + 8L^2$	$= 17.94427191... + 3.05572808...$

2. 삼각함수 관련 ϕ

다음 5각형 대칭 관계를 각도에 따라 대칭 ϕ 를 구할 수 있다. 그림 11.은 5각형(5행)과 인체(대칭) mapping을 보인다. 이등변 삼각형 꼭지점의 대칭(18°)을 기반으로 2배는 36°, 3배는 54°, 4배는 72°가 모두 대칭이고 이때,

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ 를 보인다. 또한 인체는 머리를 정점으로 양팔, 양다리가 5각형에 Mapping이 잘 됐다. 5각형은 5行(Substance)이 대칭관계와 같다.

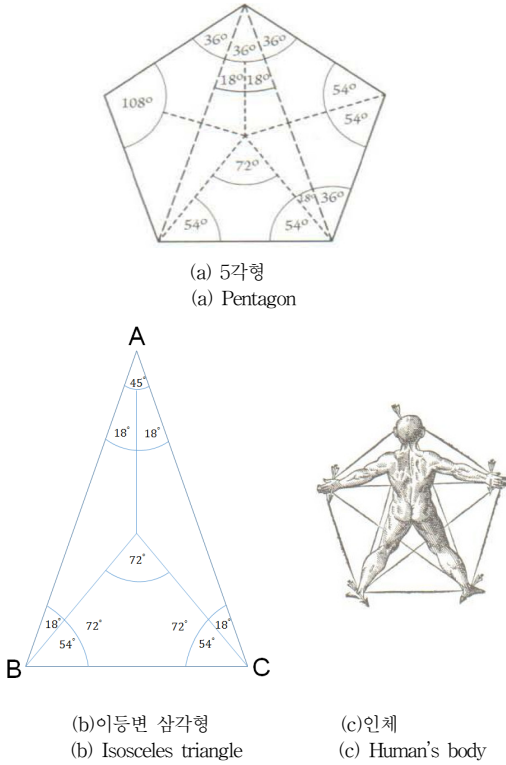


그림 11. 대칭 오각형과 이등변 삼각형 및 인체
Fig. 11. Symmetric pentagon and isosceles triangle and human's body

Angle θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ
18	$\frac{\sqrt{1-1/\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{1-1/\Phi}}{\sqrt{2+\Phi}}$
36	$\frac{\sqrt{2-1/\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{1+\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-1/\Phi}}{\sqrt{1+\Phi}}$
54	$\frac{\sqrt{1+\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-1/\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{1+\Phi}}{\sqrt{2-1/\Phi}}$
72	$\frac{\sqrt{2+\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{1-1/\Phi}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\Phi}}{\sqrt{1-1/\Phi}}$

리처드 페인만(Richard Feynman, 1918-1988)은 오일러(Euler, 1707-1783, swiss) 방정식에 기반해 이 관계식이 $e^{i\pi} = \Phi^{-1} - \Phi$ 와 같이 나타낼 수 있음을 알아냈고 이 문호는 $e^{i\pi} e^{-i\pi} = 1$ 임을 발견했다. 따라서 $2\sin(i \ln \Phi) = i$ 와 $2\sin(\pi/2 - i \ln \Phi) = \sqrt{5}$ 라는 결

과를 알 수 있다.

(증명)

그림 11의 Golden 비를 $\triangle ABC$ 라고 가정하고 여기서 $AB = AC$ 이고 $\angle ABC = \angle ACB$ 이다. 다음과 같이 삼각 함수를 얻을 수 있다.

$$\sin \alpha = \sin(\pi/2 - \alpha) = \cos 4\alpha \quad (64)$$

$$\sin 2\alpha = \sin(\pi/2 - 2\alpha) = \cos 3\alpha \quad (65)$$

그리고

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha \cos\alpha \\ &= \cos 3\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ &= \cos\alpha(4\cos^2\alpha - 3) \end{aligned} \quad (66)$$

그러므로

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha &= (4\cos^2\alpha - 3) \\ &= 4 - \sin^2\alpha - 3 \\ &= -4\sin^2\alpha + 1 \end{aligned} \quad (67)$$

그리고

$$4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0 \quad (68)$$

여기에는 두 개의 해가 있고 하나는 양수이고 하나는 음수이다.

$$\sin \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \quad (69)$$

(69)식으로부터 양수값을 취한다.

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = 0.3142 \quad (70)$$

따라서

$$\begin{aligned} e^{0.3142i} \cdot e^{-0.3142i} \\ = (\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)(\cos 18^\circ - i\sin 18^\circ) = 1 \end{aligned} \quad (71)$$

3. QAM 신호 공간의 분해

신호 공간 상에서 i 번째 신호점은 Ad_m 과 Ae_m 으로 주어지게 된다. 그리고, (d_m, e_m) 은 다음과 같은 $L \times L$ 행렬의 요소가 된다.

$$\left\{ d_m, e_m \right\} = \begin{bmatrix} (-L+1, L-1)(-L+3, L-1) \cdots (L-1, L-1) \\ (-L+1, L-3)(-L+3, L-3) \cdots (L-1, L-3) \\ \cdots \cdots \cdots \\ (-L+1, -L+1)(-L+3, -L+1) \cdots (L-1, L+1) \end{bmatrix} \quad (72)$$

여기서 $L = \sqrt{M}$ 이다. 예를 들어 $M=16 (L=4)$ 인 경우, 다음과 같은 행렬을 얻을 수 있다.

$$\{d_m, e_m\} = \begin{bmatrix} (-3,3) & (-1,3) & (1,3) & (3,3) \\ (-3,1) & (-1,1) & (1,1) & (3,1) \\ (-3,-1) & (-1,-1) & (1,-1) & (3,-1) \\ (-3,-3) & (-1,-3) & (1,-3) & (3,-3) \end{bmatrix} \quad (73)$$

4QAM 및 16QAM 분해를 나타내면 (74) 식과 같이 표현한다.

$$M=16=4^2 \leftarrow L=4$$

$$M=4=2^2 \leftarrow L=2 \quad (74)$$

4QAM의 경우 (75) 식과 같이 나타낸다[그림 6].

$$\begin{bmatrix} (-1, 1) & (1, 1) \\ (-1, -1) & (1, -1) \end{bmatrix} \leftarrow 2 \times 2 \quad (75)$$

저자 소개

김 정 수(정회원)



- 1998년 : 전북대학교 정보통신공학과 석사
- 2003년 : 전북대학교 컴퓨터공학과 박사
- 2002년 6월 ~ 현재 : 숭실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과 부교수

<주관심분야 : 이동통신, IoT>

이 문 호(정회원) 교신저자



- 1984년 : 전남대학교 전기공학과 박사, 통신기술사
- 1985년 ~ 1986년 : 미국 미네소타 대학 전기과 포스트닥터
- 1990년 : 일본동경대학 정보통신공학과박사
- 1970년 ~ 1980년 : 남양MBC 송신소장
- 1980년 10월 ~ 2010년 2월 : 전북대학교 전자공학부 교수
- 2010년 2월 ~ 2013년 : WCU-2 연구책임교수
- 2015년 : 국가연구개발 우수성과 100선
- 현재 : 전북대학교 전자공학부 초빙교수

<주관심분야 : Jacket행렬, 무선이동통신, Molecular 통신>

※ This work was supported by MEST 2015R1A2A1A05000977 NRF, Korea