대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 3, 599 ~ 614. Aug 2017

SimCalc MathWorlds를 활용한 함수적 상황에서 드러나는 중학생들의 일정한 변화율에 대한 이해

마 민 영*

본 연구의 목적은 심칼 프로그램을 활용하여 역동적인 함수적 상황을 관찰하고, 이를 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 중학생들의 일정한 변화율에 대한 이해를 비교 및 분석하는 것이다. 본 연구에서 분석된 수업은 중학교 1학년 학생 6명을 대상으로 진행된 수업 자료의 일부이다. 수업 자료를 분석한 결과, 심칼 프로그램을 활용한 수업은 다음 두 가지 의미를 갖는 것으로 드러났다. 하나는 변화율이 일정한 상황에서 학생들이 주목하는 양들 사이의 관계가 서로 다를 수 있다는 것과, 다른 하나는 학생 스스로 변량의 변화를 조정하고 그 결과를 확인하는 활동을 통해 일정한 변화율의 의미를 더 정교하게 구성하였다는 것이다. 따라서 본 연구는 함수의 교수·학습 상황에서, 특히 일정한 변화율을 포함하는 상황을 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 활동에서 공학적 도구를 활용해야 할 필요성을 학생들과의 실제 수업에 근거하여 제시한 것으로, 학생의 이해 수준을 고려하여 공학적 도구를 활용한 함수 지도 내용과 그 방식을 계획하는 데 긍정적인 도움을 줄 것으로 사료된다.

I. 서론

학생들은 함수적 상황을 표현하고 해석하는 데 많은 어려움을 겪고 있다(이종희 · 김부미, 2003; 천유영 · 임대근 · 류현아, 2013). 함수의 교수 · 학습에서는 이러한 어려움을 해결하기 위해 두 변량 사이의 변화를 직관적으로 인식하는 동시에 함수의 다양한 표현들 사이의 변환 능력을 향상시키고자 공학적 도구를 활용하고 있다(고상숙 · 고호경, 2007; 손홍찬 · 류희찬, 2005; 오홍준 · 양명섭, 2013; 이광상 · 조민식 · 류희찬, 2006).

2015 개정에 따른 수학과 교육과정에서는 함수를 다양한 방식으로 표현할 수 있는 능력과 더불어 공학적 도구를 활용한 함수 지도의 중요성을 강조하였다. 구체적으로, 중학교 함수 영역의 교수 · 학습 방법 및 유의 사항에는 “다양한 상황을 일상 언어, 표, 그래프, 식으로 나타내고 이들 사이의 상호 변환 활동을 하게 한다.”와 “함수의 그래프를 그리고 여러 가지 성질을 탐구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.”가 명시되어 있다(교육부, 2015, pp. 32-33).

최근 수학교육공학의 연구들에서는 공학적 도구의 기능을 단순히 소개하기보다 공학적 도구를 활용한 수업에서 학생들의 성취 변화에 주목하는 경향이 있다(이수진 · 이종학 · 김원경, 2013). 이는 공학적 도구를 활용한 수업에서 어떤 공학적 도구를 어느 단계에서 어떻게 사용할 것인지에 대한 문제가 중요한 문제로 지적되고 있기 때문인 것으로 판단된다(Olive & Lobato, 2008).

* 인동중학교, mmy8724@naver.com

일차함수의 교수·학습에 대한 연구들에서도 공학적 도구를 활용한 수업에서 드러나는 학생들의 이해와 그 변화에 주목하고 있다. 예컨대, 학생들이 식 '$y=ax+b$'를 그래프로 (연구자의 관점에서) 적절하게 표현하고 해석할 수 있는지, '$y=ax+b$'에서 'a'와 'b'의 역할을 이끌어낼 수 있는지를 탐색하고 있으며, 이러한 내용에 대한 학생들의 이해를 돕기 위해 CAS 그래핑 계산기(박희정·김경미·황우형, 2011), 엑셀(이광상 외, 2006)과 같은 공학적 도구를 활용하고 있다.

그러나 역동적인 함수적 상황에서 학생 스스로 구성하는 변화하는 양들 사이의 관계와 이에 대한 (연구자의 관점에서 적절하지 않을 수도 있는) 표현과 해석을 탐색한 연구는 부족한 실정이다(Izsák, 2011; Olive & Lobato, 2008). 이에 본 연구는 공학적 도구를 활용하여 제시된 역동적인 함수적 상황을 표현하고, 해석하고, 활용하는 과정에서 드러나는 변화하는 양들 사이의 관계에 대한 학생들의 이해, 특히 일정한 변화율에 대한 이해에 주목하고자 한다.

이를 위해 본 연구를 위한 연구 문제는 다음과 같이 설정하였다.

- 연구 문제 1: 심칼 프로그램을 활용하여 역동적인 함수적 상황을 관찰하고, 이를 다양한 방식으로 표현하는 과정에서 학생들이 구성하는 양들 사이의 관계는 어떠하며, 학생간의 차이점은 무엇인가?
- 연구 문제 2: 주어진 문제를 해결하기 위해 학생 자신이 구성한 양들 사이의 관계에 대한 해석과 활용은 어떠하며, 학생간의 차이점은 무엇인가?

II. 선행 연구

1. 공학적 도구를 활용한 함수의 표현과 해석

학생들은 함수적 상황을 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 과정에서 많은 어려움을 겪고 있다. 이종희와 김부미(2003)는 중학교 2학년 학생 70명을 대상으로 두 변량 사이의 관계가 언어로 표현된 경우 이를 식과 그래프로 나타내거나, 제시된 그래프를 해석하여 상황에 적절한 그래프를 선택하는 과제를 해결하는 과정에서 드러나는 오개념을 탐색하여 범주화하였다. 천유영 등(2013)은 함수의 표현 양식을 상황·언어적 표현, 표, 그래프, 식으로 나누고 고등학교 1학년 90명을 대상으로 수학 성취 수준에 따른 표현 양식 사이의 변환 과정을 분석한 결과, 대부분의 학생들은 상황·언어를 식과 그래프로 변환하거나 그래프를 식으로 변환하는 데 어려움을 겪고 있음을 확인하였다. 또한 학생들은 주어진 그래프에서 변하는 대상과 그 변화를 파악하는 데 어려움을 겪었고, 상황에 제시된 물통의 모양이나 그래프의 모양에 근거하여 문제를 해결하였다.

이러한 학습의 어려움을 해결하기 위하여 고상숙과 고호경(2007)은 함수의 교수·학습 상황에서 변화율을 직관적으로 인식하고 다양한 표상을 학생 스스로 이끌어낼 수 있는 과제를 다룰 필요가 있음을 제안하였다. 그들은 중학교 3학년 120명을 대상으로 이차함수 개념에 대한 성취도, 수학적 성향 등을 조사한 결과, 그래핑 계산기(TI-92 Plus)를 주된 도구로 활용하여 주어진 상황에서 변화율을 찾고 이를 다양한 방식으로 나타낸다는 점을 보고하였다. 박희정 등(2011)은 학생들의 식과 그래프 표현 사이의 연결성을 돕기 위해, 공학적 도구(CAS 그래핑 계산기)를 활용하여 대수 계산이 가능한 화면과 그래프가 그려지는 화면을 한 화면에서 확인하며 상황에 적절한 그래프를 그릴 수 있도록 하였다. 이광상 등(2006)은 중학교 2학년 학생들에게 함수의 표상을 다양하게, 역동적으로 탐구할 수 있는 학습 기회를 주기 위해, 엑셀을

활용하여 식과 표와 그래프를 나타내는 활동을 제시하고 이러한 활동이 문제해결에 미치는 영향을 보고하였다.

이러한 연구들은 공학적 도구를 활용하여 함수 학습의 어려움을 해결할 수 있는 구체적인 지도 방안에 대한 정보를 제공하는 것은 사실이지만, 함수적 표현의 제한점과 그 원인을 진단하는 데는 한계가 있다. 이에 본 연구에서는 학생들에게 일정한 변화율을 포함하는 상황을 공학적 도구를 활용하여 역동적으로 제시할 때, 상황에서 변화하는 양들 사이의 관계를 찾고 이를 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 행위로부터 추론되는 학생들의 이해를 제시하고자 한다. 이를 위해 다음에서는 일정한 변화율을 포함하는 역동적인 상황에 대한 표현과 해석에서 드러나는 학생들의 이해에 주목한 연구 결과들을 살펴본다.

2. 역동적인 함수적 상황을 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 학생들의 이해

함수의 교수·학습에 대한 연구에서는 물리적 도구를 활용하여 제시된 역동적인 상황을 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 행위를 분석 및 제시하고 있다. 예를 들면, 신은주(2005)는 두 변량 사이의 선형 관계를 포함한 일차함수 개념의 형성 과정을 탐색하기 위해 수학에서 일차함수나 과학에서 등속도 운동을 배우지 않은 중학생 2명을 대상으로 수레의 움직임을 관찰하고 표현하고 해석하는 수업을 실시하였다. 수업에서 학생들은 수평면을 따라 등속도로 움직이는 수레를 관찰하며 0초부터 시작하여 0.1초씩 더해지는 시각에 대응하는 위치 또는 0초부터 시작하여 0.1초씩 더해질 때마다 그에 대응하여 늘어나는 위치를 교류용 시간기록계를 통해 종이테이프에 타점으로 나타내고 이를 오려붙인 그림에서 축이 가지는 의미와 종이테이프 윗부분을 연결한 선의 의미를 탐색하였다. 수업을 실시한 후 학생들은 등속도 운동에서 시간, 이동 거리, 속도 사이의 관계를 추론하고 그래프에서 변화를 해석하는 능력을 갖게 되었지만, 연구자가 초점을 둔 학생의 추론 능력은 시간과 속도 사이의 관계를 나타낸 그래프 아래의 면적이 이동 거리라는 것과 기억하고 있는 규칙이나 사실(거리=속력*시간, 속력=거리/시간)을 이해하는 수준이었다. 이와 같이 함수를 물리적 환경과 연결시켜주기 위해 도구를 활용하였지만, 이러한 과정에서 학생 스스로 구성하는 양들 사이의 관계에 주목한 것이라고 보기는 어렵다.

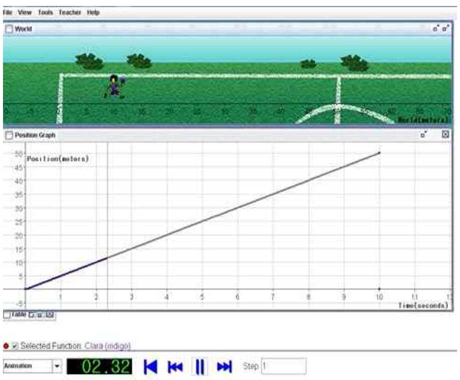
한편, Izsák(2003)은 물리적 도구를 사용하여 상황을 대수적으로 표현하고 이를 해석하는 과정에서 드러나는 학생들의 이해를 분석하였다. 그 결과 학생들은 자신의 수학적 경험으로부터 구성한 (연구자의 관점에서는 불완전할 수 있는) 기준(criteria)을 갖고 있었으며, 이러한 기준에 따라 주어진 상황을 식으로 표현하고 이를 사용하여 문제를 해결하였고, 물리적 도구를 조작하며 자신이 세운 식을 수정하였다. 또한 학생들이 변화율을 포함하는 함수적 상황을 표현하고 해석하는 과정에서 그 상황에 내재된 (선형 패턴과 같은) 일정한 관계를 찾고 표현하는 데 어려움을 겪고 있다는 점을 확인하였다. 본 연구는 이러한 연구에 기초하여 공학적 도구를 활용하여 제시된 일정한 변화율을 포함하는 역동적인 함수적 상황을 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 변량들 사이의 관계에 대한 학생들의 이해에 주목하고자 한다.

3. 심칼 프로그램(SimCalc MathWorlds)의 기능

본 연구는 학생들의 비례 관계, 선형 관계 및 변화율 개념의 구성에 도움을 주고자 심칼 프로

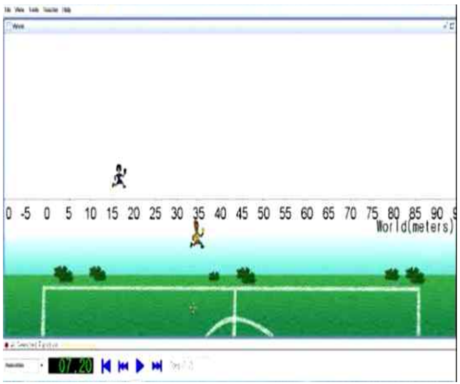
그램을 사용하였다(Olive & Lobato, 2008). 심칼 프로그램은 1980년대 Kaput과 Roschelle이 개발한 프로그램으로, 그 특징을 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 학생들은 심칼 프로그램에서 일정한 속력으로 움직이거나 속력이 변화하는 캐릭터를 만들 수 있고, 둘째, 이들의 움직임을 그래프와 대수식으로 나타낼 수 있다. 셋째, 그래프 또는 대수식을 조정할 수 있으며, 이에 해당되는 캐릭터의 움직임을 시각적으로 확인할 수 있다. 정리하면, 학생들은 다양한 수학적 표현을 한 화면에서 확인할 수 있으며, 한 표현을 변화시키는 즉시 또 다른 표현도 이에 따라 변화되는 것을 관찰할 수 있다.

본 연구를 위한 수업에서 활용된 심칼 프로그램의 기능은 다음과 같다. 학생들은 심칼 프로그램 화면에 제시된 캐릭터의 움직임을 시뮬레이션 할 수 있고, 움직인 시간을 조작할 수 있으며, 조작한 결과를 가시적으로 확인할 수 있었다. 구체적으로, 2015년도에 실시된 심칼 프로그램을 처음으로 도입한 수업에서 학생들은 역동적으로 움직이는 캐릭터와 캐릭터의 시간과 위치 사이의 관계를 나타낸 그래프를 한 화면에서 확인할 수 있었다([그림 II-1] 참고).



[그림 II-1] 2015년도 수업에서 학생들에게 제시된 심칼 프로그램 화면

2016년도 수업에서는 그래프에 대한 표현과 해석에서 드러나는 학생간의 차이와 그 원인을 진단하고자, 심칼 프로그램에서 모든 순간의 캐릭터의 위치만 시각적으로 확인할 뿐, 캐릭터의 시간과 위치 사이의 관계에 대한 그래프와 식 등은 활동지에 직접 표현하도록 하였다([그림 II-2] 참고).



[그림 II-2] 2016년도 수업에서 학생들에게 제시된 심칼 프로그램 화면

III. 연구 방법

1. 연구 방법 개관

본 연구에서는 실제 교수·학습 상황에서 학생들의 학습과정을 경험하고, 학생들의 수학지식의 발달에 관한 모델을 만드는 것을 목적으로 하는 교수실험법(Teaching Experiment Methodology)을 택하였다(Steffe, & Thompson, 2000). 교수실험에서 연구자들은 학생들의 수학적 활동을 이끌 수 있는 과제와 질문을 준비하고, 과제를 해결하는 행위에 근거하여 학생들의 사고와 학습에 대한 모델을 가정하고, 수업을 진행하는 과정에서 이를 지속적으로 수정 및 검증한다(Hackenberg, 2009). 본 연구에 참여한 두 명의 연구자 가운데

한 명[1)]은 교수실험을 진행하며 '교사' 역할을 수행하였고, 또 다른 연구자는 관찰자로서 참여 학생들의 수준을 진단하거나 다음 차시의 과제의 방향을 설정하는 데 도움을 주었다. 연구자들은 교수실험을 진행하는 동안 또는 교수실험이 모두 끝난 뒤 비디오 파일을 사용하여 수업을 검토하고 분석하며, 학생들의 사고와 학습에 대한 모델이 학생의 행위를 설명하거나 예측할 수 있는지 확인하고, 이에 적합한 모델을 만들기 위해 지속적으로 노력하였다(Norton & Boyce, 2015).

2. 자료 수집 및 분석 방법

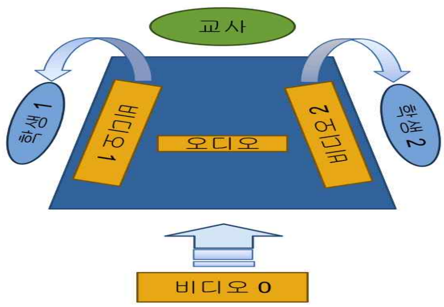
본 연구에서 분석된 자료는 중학교 1학년 학생 6명을 대상으로 실시된 교수실험에서 수집된 자료의 일부이다. 연구자들은 2015년도(2015.4.~2015.11.)와 2016년도(2016.5.~2016.7.)에 각각 (남학생인 학생 Q와 여학생인 학생 U를 포함한) 중학생 2명과 (여학생인 학생 P와 남학생인 학생 S, 여학생인 학생 R과 남학생인 학생 T로 2명씩 짝을 지어 수업에 참여[2)]한) 4명을 대상으로 교수실험을 진행하였다. 이 과정에서 연속적으로 변화하는 변량에 대응하는 또 다른 변량의 변화를 시각적으로 확인할 수 있으며 주어진 상황에서 불변하는 관계를 찾아 이를 다양한 방식으로 표현할 수 있는 과제를 학생들에게 제시해야 할 필요가 있다고 판단하였고, 이를 위해 심칼 프로그램을 활용한 수업을 계획하였다(<표 III-1> 참고). 모든 수업에서는 각 학생들의 문제 해결과정을 촬영하기 위해 카메라 2대([그림 III-1]의 비디오 1과 비디오 2)와 수업의 전체 장면을 담기 위해 카메라 1대([그림 III-1]의 비디오 0), 명확한 오디오 정보를 얻기 위해 녹음기 1대([그림 III-1]의 오디오), 프로그램을 조작하는 학생들의 행위를 촬영하기 위해 오캠[3)]이 사용되었다. 또한 학생들의 활동지, 수업 및 과제에 대한 회의자료, 메모 등도 수집되었다.

분석 과정에서는 캐릭터의 움직임을 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 두 변량 사이의 일정한 변화율에 대한 학생들의 의미(meaning)를 탐색하고자 수업에서 수집된 자료와 비디오 파일을 반복적으로 보면서, 학생 행위에 대한 기록을 지속적으로 만들어나갔다. 또한 각 학생들의 사고패턴, 변화, 제한점을 일관되게 설명할 수 있는 행위의 유사성을 찾고자 노력하였다(Hackenberg, 2009).

<표 III-1> 분석에 활용된 수업과 과제

과제에 제시된 상황	수업차시(일자)		
	학생 Q와 학생 U	학생 P와 학생 S	학생 R과 학생 T
두 변량 사이의 관계를 포함하는 역동적인 상황을 다양한 방식(표, 식($y=ax$), (직선 모양의) 그래프 등)으로 나타내고 해석하기	5차시(2015.5.16.)	6차시(2016.6.11.)	4차시(2016.6.11.)
두 변량 사이의 관계를 포함하는 역동적인 상황을 다양한 방식(표, 식($y=ax+b$), (직선 모양의) 그래프 등)으로 나타내고 해석하기	8차시(2015.6.4.) 10차시(2015.6.20.)	7차시(2016.6.13.)	5차시(2016.6.14.)

1) 본 논문의 저자이다.
2) 교사가 수업 중 학생의 행위에 근거하여 그들의 추론을 예측하고, 이를 다시 확인하거나 발달을 이끌기에 적합한 과제 및 발문을 제시하기 위해 2명씩 짝을 지어 수업을 진행하였다.
3) 컴퓨터 화면을 녹화할 수 있는 프로그램이다.



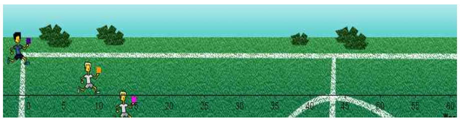
[그림 III-1] 교수실험 배치도

3. 연구 참여자와 과제 소개

본 연구에서 분석된 자료는 중학생들을 대상으로 실시된 교수실험에서 수집한 것이다. 교수실험의 목적은 학교수학에서 일차함수를 학습하기 이전 학생들을 대상으로, 일정한 변화율을 포함하는 상황을 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 행위로부터 드러나는 이해와 발달을 탐색하는 것이었다. 이를 위해 학교수학이나 사교육에서 일차함수를 학습한 경험이 전혀 없고, 수학 과목에 대한 성취감이 높으며 자신의 생각을 적극적으로 표현할 수 있는 학생들을 선발하였다.

학생들은 심칼 프로그램을 활용한 [과제1]과 [과제2]에서 출발하는 위치가 같고 시간과 이동거리 사이의 변화율이 서로 다른 두 캐릭터의 움직임(<표 III-2>의 [과제1] 참고)과 시간과 이동거리 사이의 변화율이 일정하지만 출발하는 위치가 서로 다른 세 캐릭터의 움직임(<표 III-2>의 [과제2] 참고)을 관찰하며, 시간과 위치 사이의 관계를 다양한 방식으로 표현하였다. 학생들은 [과제1]에 제시된 두 캐릭터 가운데 속력이 빠른 캐릭터를 주황([과제1]에서 아래), 느린 캐릭터를 파랑([과제1]에서 위), [과제2]에 제시된 세 캐릭터의 경우 0초일 때의 위치에 따라 앞에서부터 분홍([과제2]에서 맨 아래), 주황([과제2]에서 중간), 파랑([과제1]에서 맨 위)이라 불렀다. 학생들의 상황에 대한 이해의 차이는 프로그램을 조작하고, 자신의 짝 또는 교사와 대화하는 가운데 드러났다. 구체적으로, 심칼 프로그램을 조작하는 과정에서 학생들이 처음에 주목한 양이 서로 달랐으며, 시간과 거리 사이의 비인 속력을 구하더라도 새로운 과제를 해결하는 데 이를 활용하고 해석하는 방식의 차이를 보였다. 이에 본 연구에서는 역동적인 함수적 상황을 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 두 변량 사이의 관계에 대한 이해, 특히 일정한 변화율에 대한 이해에 주목하고자 한다.

<표 III-2> 학생들에게 제시된 [과제1]과 [과제2]

[과제1] 다음의 상황을 다양하게 표현하시오. 
[과제2] 다음의 상황을 다양하게 표현하시오. 

4. 일정한 변화율에 대한 학생들의 이해

Thompson과 Thompson(1992)은 일정한 속력을 포함하는 상황에서 학생들이 구성하는 시간과 거리의 변화, 그들 사이의 관계에 따라 추론의 수준을 나누고 그 특징을 제시하였다. 본 연구에 참여한 학생들은 초등학교에서 비와 비율, 속력 개념을 학습한 학생들로, 시간과 거리의 변화를 함께 상상할 수 있으며 시간과 거리의 값이 주어질 때 속력을 구할 수 있는, 즉 Thompson과 Thompson(1992)이 제안한 3수준 또는 4수준에 해당되는 학생들로 판단된다. Thompson과 Thompson의 연구(1992)에 제시된 3수준과 4수준인 학생의 특징을 살펴보면, 두 변량인 시간과 거리의 변화를 동시에 머릿속에 그릴 수 있으며,

시간과 거리 사이의 비의 불변성을 인식할 수 있다. 그러나 불변성에 대한 의미가 서로 다른데, 3수준인 학생에게 불변성은 먼저 인지된 시간과 거리의 값을 누적시켜 시간과 거리의 변화를 구성하는 것이고, 4수준인 학생에게는 두 양 사이의 비의 일정함을 의미한다.

본 연구는 Thompson과 Thompson(1992)이 제안한 3수준과 4수준의 특징에 비추어 일정한 변화율에 대한 학생들의 이해를 다음과 같이 세 유형으로 나누어 분석 및 제시하고자 한다. 첫째, 두 변량인 시간과 거리 사이의 비인 속력을 임의의 시각과 그에 대응하는 위치 사이의 일정한 비와 시간의 변화량과 거리의 변화량 사이의 일정한 비로 표현하고 해석하고 활용할 수 있는 수준인 학생(학생 T, 학생 U)과 둘째, 이러한 수준에 미치지 못하는 학생, 즉 주어진 상황에서 속력의 값을 구할 수 있지만 이를 임의의 시각과 그에 대응하는 거리 사이의 비 또는 임의의 시간 변화량과 그에 대응하는 거리의 변화량 사이의 비로 해석하는 데 어려움을 겪는 학생(학생 P, 학생 Q, 학생 R), 셋째, 수준의 변화를 보인 학생(학생 S)으로 나누어 분석한다. 학생들의 문제 해결과정 모두 흥미롭지만, 본 연구는 학생 간의 이해의 차이가 두드러지게 드러나는 학생 P, 학생 S, 학생 T의 해결과정을 분석 및 제시하고자 한다.

IV. 연구 결과

본 절에서는 심칼 프로그램으로 제시된 역동적인 함수적 상황을 다양한 방식으로 표현하는 과정에서 학생들이 구성하는 양들 사이의 관계와 주어진 문제를 해결하기 위해 이를 해석하고 활용하는 방식을 분석 및 제시한다. 먼저, 주어진 상황에서 두 변량인 시간과 거리 사이의 일정한 관계를 찾기 위해 프로그램 화면([그림 II-2] 참고)에 제시된 변량의 값을 정확히 읽으려고 하거나, ‘2.5초와 그에 대응하는 위치 사이의 비’가 움직임에서 찾은 속력과 같다는 것을 확인하기 위해 산술적 계산이 필요했던 학생 P의 문제 해결과정을 제시한다. 다음으로, 수업 초기에는 학생 P와 유사하게 두 양 사이의 변화를 설명하였지만, 프로그램을 조작하고 교사의 발문에 대답하는 중에 속력을 시간과 거리 사이의 불변하는 비로 표현하고 해석하기 시작한 학생 S의 문제 해결과정을 제시한다. 마지막으로, 주어진 상황에서 시간과 위치 사이의 비를 불변하는 하나의 양으로 인식하고, 이에 기초하여 상황을 식으로 표현한 학생 T의 문제 해결과정을 제시한다.

1. 두 변량 사이의 일정한 관계를 확인하기 위해 프로그램 화면에 제시된 변량의 값을 정확히 읽거나(학생 R), 산술적 계산을 하는(학생 Q) 학생 P

학생 P가 [과제1]에서 처음에 주목한 양은 0초부터 시작하여 1초씩 더해질 때마다 두 캐릭터의 위치 사이의 간격이었고, 이를 표로 나타내었다([그림 IV-1] 참고).

시간	둘사이의간격
0초	0m
1초	2.5m
2초	5m
3초	7.5m

[그림 IV-1] [과제1]에서 학생 P가 나타낸 표

이후 학생 P는 프로그램 화면에서 시간의 값을 변화시키며 그에 따른 캐릭터의 움직임을 관찰하였다. 이와 관련하여 교사와 학생 P가 나눈 대화 내용의 일부는 아래의 <발췌문 1>과 같다.

<발췌문 1> : 두 변량 사이의 일정한 관계를 확인하기 위해 프로그램을 조작하는 학생 P

교사: 학생 P가 [프로그램 화면에서 학생 P가 설정한 시간 간격을 가리키며] 0.35일 때를 하고 있네?

학생 P: 둘의 거리가 다른 1초일 때도 일정한지가 궁금해서요.

교사: 일정하다는 게?

학생 P: 두 사람의 간격이 0(초)일 때는 똑같잖아요. 그런데 1(초)이었을 때 2.5였고. 2초일 때는 5였고. 그래서 소수점으로 해도 둘의 거리가 일정한지?

학생 P는 <발췌문 1>과 같이 캐릭터의 움직임에서 시간 간격을 '0.35(초)'로 하였는데, 그 이유에 대해 0초, 1초, 2초가 아닌 임의의 시각에서도 1초 지날 때 두 캐릭터의 간격이 일정한지 확인하기 위함이라고 설명하였다. 교사는 학생 P가 먼저 언급한 '일정함'의 의미를 확인하기 위해 학생 P에게 그 의미를 물었고, 학생 P는 "다 2.5씩 늘어나는 상태"라고 답하였다. 학생 P는 0초부터 1초씩 더해질 때마다 두 캐릭터의 간격이 2.5가 된다는 규칙을 찾았고, 0.35초와 같은 시각에서 1초 더해질 때도 간격의 차이가 일정한지 아닌지를 확인하려 한 것으로 보인다. 즉, 학생 P는 주어진 상황에서 임의의 시각에 대응하는 위치가 존재한다는 것과 0초부터 1초씩 더해질 때마다 두 캐릭터의 간격 차이가 일정하다는 것을 이끌어내었지만, 임의의 시각에서 1초 늘어날 때 두 캐릭터 사이의 간격이 일정하다는 것에는 확신을 갖지 못했던 것으로 보인다.

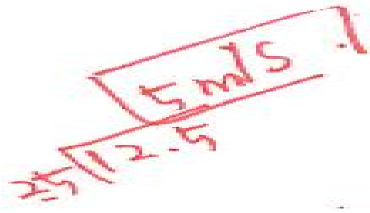
학생 P는 [과제1]에서 자신과 함께 수업에 참여한 학생 S와 대화를 나눈 후 속력에 주목하기 시작하였다. 이는 [과제2]에 제시된 상황에 대한 표현과 해석에도 영향을 미쳤다. 구체적으로, 학생 P는 [과제2]의 세 캐릭터의 움직임에서 "다 똑같이 1초가 지날 때마다 $5m$씩 나가니까 속력이 같아요"라고 말하였다. 교사는 학생 P가 언급한 '속력이 같다'는 의미를 확인하고자, 학생 P에게 파랑의 경우, '1초 $5m$', '2초 $10m$'와 같이 1초보다 2초에 대응하는 위치의 값이 더 크기 때문에 속력이 바뀌는 게 아니냐고 물었다. 학생 P는 "다 똑같이 한 시간 하나를 기준으로 보니까 이것도 기준을 1초로 봐가지고 하는 것 같아요"라고 말하면서 '$\frac{\text{거리}}{\text{시간}}$'를 적은 후, "다 똑같이 8초를 뛰고 거리도 똑같이 $40m$를 뛰잖아요. 다 똑같이 $5m/s$가 나와요"라고 대답하였다. 학생 P는 1초에 $5m$, 2초에 $10m$, 8초에 $40m$에 대해 기준 1초에 간 거리가 동일하며, 거리의 값을 시간의 값으로 나누면 모두 $5m/s$가 됨을 인지하고 있는 듯하다. 수업 중 교사는 학생 P가 [과제1]과 [과제2]에서 공통적으로 주목하는 시간의 변화가 0초, 1초, 2초와 같이 0초부터 1초씩 더해진다는 점에 주목하였다. 이에 교사는 임의의 시간 변화량에 대응하는 위치의 변화량을 찾는 과정을 확인해야할 필요성을 느꼈고, 이를 위해 학생 P에게 2.5초와 3.5초 사이에 이동 거리를 구해볼 것을 요구하였다. 학생 P는 아래의 <발췌문 2>와 같이 답하였다.

<발췌문 2> : 시간의 변화량과 거리의 변화량 사이의 관계에 대한 학생 P의 이해

학생 P: 2.5초와 3.5초 사이의 거리를... 2.5초일 때 파랑은 $12.5m$이구요. $5m$라는 게 [2.5와 3.5에서 앞에 숫자 2와 3을 가리키며] 2랑 3을 빼면 0.5잖아요. 0.5라는 건 1을 기준으로 딱 반이잖아요. 2초와 3초의 반이 2.5초니까 10하고 15의 딱 반이 되는 숫자를 구했어요. [12.5에서 2.5를 나눈 후([그림 IV-2] 참고)] 똑같이 $5m/s$인데요.

교사: 12.5가 뭐야?

학생 P: 2.5초를 갔을 때의 거리요.

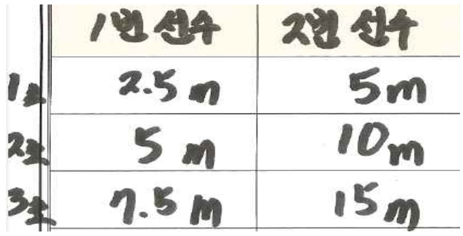


[그림 IV-2] [과제2]에서 산술적 계산을 통해 속력의 일정함을 확인하는 학생 P

학생 P는 <발췌문 2>에서와 같이, 2.5초와 3.5초 사이의 이동 거리를 구하기 위하여 파랑의 2.5초일 때의 위치로 12.5m를 구하였다. 구체적으로, 2.5에서 2와 3.5에서 3을 빼면 0.5인데, 0.5는 1의 반이기 때문에 2초의 위치인 10m와 3초의 위치인 15m의 중간 값을 구한 것이다. 이러한 과정에서 학생 P는 이전에 자신이 찾은 파랑의 속력 5m/s를 언급하지 않았고, 나아가 속력의 값이 일정하게 유지됨을 확인하기 위해 12.5를 그에 대응하는 시간의 값인 2.5로 나누었다([그림 IV-2] 참고). 즉, 학생 P는 속력 5m/s를 '2.5초와 2.5초에 대응하는 위치 사이의 비'로 해석하지 못한 것이다. 이러한 사실로부터 학생 P가 앞서 언급했던 '속력'과 '움직임에서 속력이 같다는 것'에는 2.5초와 같은 임의의 시각과 그에 대응하는 이동 거리 사이의 일정한 비에 대한 의미가 포함되어 있지 않은 것으로 판단된다.

2. 프로그램을 조작하며 두 변량 사이의 변화율의 일정함을 찾기 시작하는 학생 S

학생 S가 [과제1]에 주어진 캐릭터의 움직임에서 처음에 주목한 양은 '시간'과 '위치'였다. 그는 주황과 파랑의 시간에 따른 위치를 표로 나타낸 후([그림 IV-3] 참고), 파랑에 대해 "1초당 2.5m", 주황에 대해 "1초당 5m를 달리니까"라고 설명하였다.



	1번 선수	2번 선수
1초	2.5m	5m
2초	5m	10m
3초	7.5m	15m

[그림 IV-3] [과제1]에서 학생 S가 나타낸 표[4)]

교사는 학생 S가 구성하는 시간의 변화를 확인하고자 '1초당'에 대한 구체적인 설명을 요구하였고, 이에 대해 학생 S와 교사가 나눈 대화 내용은 아래의 <발췌문 3>과 같다.

<발췌문 3> : 1초부터 1초씩 더해지는 시간과 그에 대응하는 위치에 주목하는 학생 S

학생 S: 1초가 있으면 기준 값이잖아요. 1초를 더하면 2초가 되잖아요. 2초에 더하기 1초를 하면 3초가 되잖아요. 이렇게 계속 늘어나는 거요.

교사: 1.5초와 2.5초는 1초 늘어나는 거 아니에요?

학생 S: 아니죠. 2.5초면은 1초에 1.5초를 더한 값이 2.5초인데 1초가 늘어나는 값은 아니죠.

교사: 여기 1.5초 있어요?

학생 S: 있긴 있어요. [두 캐릭터의 움직임에서 시간을 조작하며 작은 목소리로] 아... (중략) 마지막에는 8초인데 자연수가 하나잖아요. 1초가 더 가면 다시 0으로 다시 되돌아가버리는데. 여기 0.5초가 더 들어가는데요. 8초가 되려면은 0.5초가 들어가야 돼서 1초는 안 들어가는데.

교사: 0.5초도 시간 아니에요?

학생 S: 시간인데 1초는 아니잖아요.

교사: 0.5초에는 안 움직이는 거에요? 0.5초 단위로 설명할 순 없나요?

학생 S: [작은 목소리로] 아...돼요...

4) 학생 S가 나타낸 표([그림 IV-3] 참고)와 설명에 비추어 보면, 표의 맨 윗줄에 적힌 '1번 선수'와 '2번 선수'는 각각 '파랑'과 '주황'을 의미하는 것으로 보인다.

<발췌문 3>과 같이, 학생 S는 1초를 기준 값으로 두고 1초부터 1초씩 더해지는 시간을 말하며, 1.5초와 2.5초 사이에 1초가 늘어나는 것은 아니라고 설명하였다. 그 이유를 두 가지로 설명하였는데, 하나는 2.5초는 1초에 1.5초를 더한 값이기 때문이고, 다른 하나는 1.5초부터 1초씩 더하게 되면 7.5초에서 1초가 아닌 0.5초를 더해야 8초가 되기 때문이라고 설명하였다. 학생 S는 1.5초와 2.5초 각각에 대응하는 위치의 존재는 인식하고 있지만, 그 값은 구할 수 없는 듯하다. 그 이유는 1.5초와 2.5초에 대응하는 위치의 값을 찾을 수 있다면, '1초와 2초 사이의 위치의 변화량'과 '1.5초와 2.5초 사이의 위치의 변화량'이 서로 같다는 것을 예상할 수 있기 때문이다.

교사는 학생 S에게 두 캐릭터의 움직임을 0.5초 단위로 생각할 수 있는지 묻자, 작은 목소리로 "아..."와 "돼요"를 차례대로 말하였다. 이러한 학생 S의 행위로부터, 그는 교사와 대화를 나누는 과정에서 1초가 아닌 0.5초씩 더해지는 시간에 대응하는 위치도 구할 수 있다는 점을 인지하기 시작한 것으로 보인다. 이러한 변화는 교사가 학생 S에게 7.2초와 8.2초 사이에 이동 거리를 구하도록 요구하였을 때 구체적으로 드러났다. 학생 S는 파랑의 7.2초의 위치의 값을 찾으려고 시도하였으며, 파랑이 1초에 2.5m를 가고 7.2초는 1초에 7.2를 곱한 것과 같기 때문에 1초의 위치에 7.2를 곱해서 7.2초에 대응하는 위치를 구할 수 있다고 설명하였다. 학생 S의 생각을 식으로 적으면 "2.5:1=7.2:(7.2초일 때의 파랑의 위치)"이다. 학생 S는 프로그램을 조작하고 교사와 대화를 나누는 과정에서 임의의 시각에서 위치가 존재함을 분명하게 인식하였고, 나아가 특정한 시간에서의 위치도 구할 수 있게 된 것으로 판단된다. 이후 교사가 학생 S에게 7.2초와 8.2초 사이에 이동 거리를 구하도록 다시 요구하였을 때, 아래의 <발췌문 4>와 같이 학생 S의 변량들 사이의 관계에 대한 이해의 변화가 더 분명하게 드러났다.

<u><발췌문 4> : 학생 S의 시간과 거리 사이의 관계에 대한 인식의 변화</u>

교사: 7.2초와 8.2초 사이에는 얼마나 이동했을까?

학생 S: 구해볼게요. <u>[기뻐하며] 아~맞다. 이거 안구해도 된다. 2.5m를 가면 되니까. 어쨌든 1초가 늘어난 거니까</u> (중략) 8.2초 빼기 7.2초를 하면 1초가 나오잖아요. 2.5m를 이동한 거나 마찬가지죠.

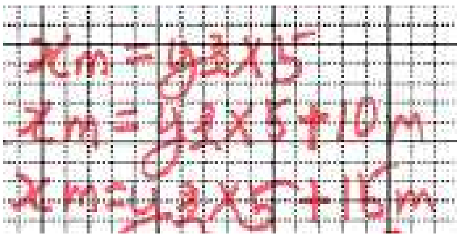
교사: 좀 전(<발췌문 3> 참고)에는 학생 S가 뭐라 그랬더라? 이거랑 이거는 다른데?

학생 S: <u>제가 생각이 좀 바뀌었나 봐요.</u>

<발췌문 4>에서와 같이, 학생 S는 7.2초와 8.2초 사이에 (파랑의) 이동 거리는 2.5m이며, 그 이유는 8.2초에서 7.2초를 빼면 1초이기 때문이라고 말하였다. 이는 <발췌문 3>에서 학생 S의 생각, 즉 '1.5초와 2.5초는 1초가 늘어난 게 아니다'라는 생각과 대비되는 것으로, 학생 S는 '0초부터 시작하여 1초씩 더해지는 시간에 대응하는 거리의 변화량'과 '임의의 시각에서 1초 더해지는 시간에 대응하는 거리의 변화량'이 서로 같다는 것을 인식한 것이다. 정리하면, 학생 S는 프로그램을 조작하는 활동을 통해 처음에 파랑의 움직임에서 찾은 '1초에 2.5m'를 '임의의 시각에서 1초 더해질 때 그에 대응하는 파랑의 이동 거리의 변화량'으로 구성할 수 있게 된 것으로 판단된다.

이와 유사하게 학생 S는 [과제2]에 제시된 세 캐릭터의 움직임을 보고 $5m/s$를 먼저 적었다. 교사가 캐릭터의 시간과 거리 사이의 관계를 식으로 표현할 것을 요구하자, "아! 맞다~이거!"라고 외치며 '$xm = y$초$\times 5$(파랑), $xm = y$초$\times 5 + 10m$(주황), $xm = y$초$\times 5 + 15m$(분홍)'를 적었다([그림

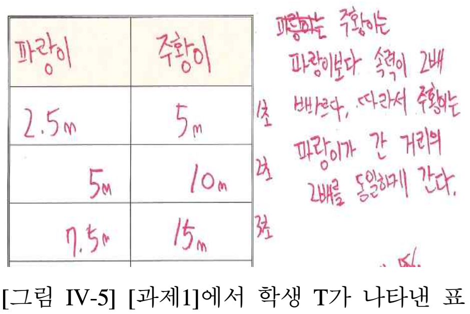
IV-4] 참고). 이는 [과제1]에서 7.2초에 대응하는 위치를 구한 행위와 연결되는 것으로, 학생 S는 [과제2]에서도 임의의 시각에 대응하는 위치를 찾을 수 있으며, 이를 일반화하여 상황에 적절한 식을 표현할 수 있었던 것으로 판단된다.



[그림 IV-4] [과제2]에서 학생 S가 나타낸 식

3. 두 변량 사이의 일정한 변화율을 찾고 (학생 U), 이를 활용하여 상황을 식으로 표현하는 학생 T

학생 T가 [과제1]에 주어진 캐릭터의 움직임에서 처음에 주목한 양은 '속력'과 '속력 사이의 관계'였다. 학생 T는 두 캐릭터의 움직임에서 시간의 값을 변화시키며, 시간과 거리 사이의 관계를 표로 나타내었고, 이후 표 오른쪽에 '주황이는 파랑이보다 속력이 2배 빠르다. 따라서 주황이는 파랑이가 간 거리의 2배를 동일하게 간다'를 적었다([그림 IV-5] 참고).



[그림 IV-5] [과제1]에서 학생 T가 나타낸 표

[그림 IV-5]와 같이, 학생 T는 교사보다 먼저 속력을 언급하며, 주황과 파랑의 속력 사이의 관계를 찾았다. 이후 교사는 학생 T에게 7.2초일 때의 거리, 12.7초일 때의 거리, 27.5m일 때의 시간을 구할 것을 요구하였고, 학생 T는 아래의 <발췌문 5>와 같이 어떤 특정한 시간에 대응하는 거리를 구할 수 있는 식을 이끌어내었다.

<발췌문 5> : [과제1]에서 움직임을 식으로 표현하고 해석하는 학생 T

학생 T: 속력이 일정하니까 1초에 2.5m, 1초에 5m잖아요. 아무거나 넣으려면은 x로 해서 x는 파랑이 초니까 1초에 2.5m갔으니까 10을 넣으면은 25m를 간다. (중략) 주황이의 경우는 [파랑의 식 '$2.5\times x=$간거리'에서 2.5를 가리키며] 여기를 5로 대체하면 돼요. 1초에 5m를 갔으니까 속력이 5m/s.

(중략)

교사: 2.5(m)와 7.5m 움직일 때 소요된 시간은 어떻게 될까?

학생 T: 1초요. (중략) 그러니까 이거 2.5m와 7.5m 사이가 5m를 간 거잖아요. 5x가 간 거리가 되니까 거리가 5가 나왔으니까 등식 하면 5 나누기 1[5]하면 1이 돼서 1이다. (중략) 얘는 속력이 같으니까 2.5에서 출발해서 7.5까지 갔다고 해도 같잖아요. 속력이 같으니까.

학생 T는 <발췌문 5>와 같이 파랑의 시간을 x라고 할 때 간 거리를 구하려면 2.5와 x를 곱하면 되고, 주황의 간 거리를 구하려면 2.5 대신에 5를 대입해야 된다고 답하였다. 이후 교사가 학생 T에게 2.5m에서 7.5m까지 이동할 때 걸린 시간을 묻자, 학생 T는 자신이 만든 식을 활용하여 1초라고 답하였다. 이로부터 학생 T는 주

5) 학생 A의 생각을 식으로 표현하면 '$5x=5$'이다. 학생 A가 x의 값으로 1을 구한 것으로 보아, 그가 언급한 "5 나누기 1"은 '5 나누기 5'를 의미하는 것으로 보인다.

황의 시간과 이동 거리 사이의 관계를 나타낸 식에서 ‘5’를 1) 임의의 시각에 대응하는 위치를 찾을 수 있는 일정한 수치, 2) 임의의 시각에서 1초 더해질 때 일정하게 더해지는 이동 거리로 구성한 것으로 판단된다.

교사는 학생 T에게 [과제2]에 제시된 세 캐릭터의 움직임에서 0.25초일 때의 위치를 구할 것을 요구하였고, 학생 T는 아래의 <발췌문 6>과 같이 대답하였다.

<발췌문 6> : 속력에 대한 학생 T의 이해

학생 T: 0.25초잖아요. 0초와 1초 갈 때 위치가 5니까 0.5의 위치를 구하려고 나누기 2하면 2.5가 되잖아요. 다시 나누기 2를 하면 1.25가 나와요. 1.25가 나와서 [0초의 위치를 가리키며] 여기서 1.25 더하면

교사: 더해 왜 더해? 세 사람 똑같이 1.25를 더하면 되는 이유는?

학생 T 그러니까. 얘네들(파랑, 주황, 분홍)은 출발하는 위치가 다른거지 속력은 같잖아요.

교사: 여기서 속력은 뭐길래?

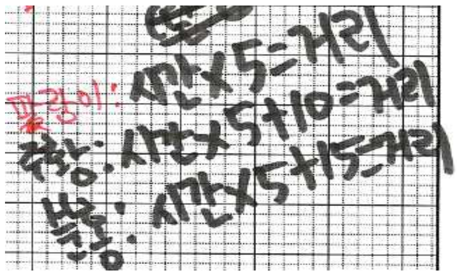
학생 T: 0.25초에 간 거리

교사: 속도가 줄어들었네? 1초에 5m가는데..

학생 T: 시간이 달라졌잖아요. 얘는 0.25초에 간 거리고 얘는 1초에 간 거리니까. 0.25초랑 1초랑 4배 차이나잖아요. 얘 곱하기 4하면 5가 돼서.

<발췌문 6>에서와 같이, 학생 T는 파랑의 0.5초일 때의 위치를 구하기 위해 1초의 위치인 5를 2로 나누었고, 0.25초의 위치를 구하기 위해 0.5초의 위치인 2.5를 2로 나누었다. 이후 학생 T는 주황과 분홍의 0.25초의 위치를 구하려면 주황과 분홍의 0초의 위치에 파랑의 0.25초의 위치인 1.25를 더하면 된다고 말하였다. 교사가 학생 T에게 부가적인 설명을 요구하자, 학생 T는 세 캐릭터의 출발하는 위치가 다를 뿐 속력이 같기 때문이라고 설명하였다. 교사가 학생 T에게 파랑의 0.25초의 위치가 1초의 위치보다 작기 때문에 속력이 변한 것인지를 묻자, 학생 T는 한 치의 망설임도 없이 속력은 변하지 않으며 시간이 달라졌을 뿐이라고 대답하였다. 학생 T는 0.25초의 위치를 구할 수 있을 뿐 아니라 시간과 위치 사이의 비도 일정하게 유지됨을 인지하고 있는 것으로 추정된다. 이는 이전에 살펴보았던 학생 P의 행위, 즉 ‘1초의 위치인 5m’와 ‘2.5초의 위치인 12.5m’와 같은 시간과 위치 사이의 관계에서 그들 사이의 비가 항상 같음을 알기 위해 산술적 계산을 했던 행위와 대비되는 반응이다.

나아가 교사가 학생 T의 짝인 학생 R에게 시간의 값에 따른 위치의 값을 알 수 있는, 즉 시간과 위치 사이의 관계를 식으로 표현할 것을 요구하였을 때, 학생 T는 교사의 발문 직후 “아” 라고 말하며 학습지에 빠르게 ‘파랑이 시간×5=거리, 주황: 시간×5+10=거리, 분홍: 시간×5+15=거리’를 차례대로 나란히 적었다([그림 IV-6] 참고). 교사는 학생 T에게 자신이 나타낸 식에서 공통점이 있는지 물었고, 학생 T는 아래의 <발췌문 7>과 같이 대답하였다.



[그림 IV-6] [과제2]에서 학생 T가 나타낸 식

<발췌문 7> : [과제2]에서 움직임에 대한 학생 T의 식 표현과 해석

학생 T: 공통점이 시간 곱하기 5. (중략) 2.5초에서 7.5초 동안 이동한 거리 25m. m로 따지자면 파랑이가. 파랑이 말고 다른 애

들(주황과 분홍)도 다 25m. (중략)
교사: 공통점이 있나? 빠르기라던가?
학생 T: 빠르기가 똑같죠.
교사: 빠르기가 얼마지?
학생 T: 수치로요? 빠르기가 5. 5m/s. (중략) 속도가 5m/s이니까 시간 곱하기 5가 거리니까 속도 의미를 그대로 [파랑, 주황, 분홍의 식([그림 IV-6] 참고)에서 '5'를 가리키며] 여기에 적은 것 같은데.
교사: 학생 T의 식([그림 IV-6] 참고)을 보자.
학생 T: 시작한 위치가 10이라서. 그거는 원래 ['시간×5=거리'를 가리키며] 이 식이면은 파랑이랑 같잖아요. 여기서 10으로 더 올라갔으니까. (중략) 근데 애들(주황과 분홍)은 시작하는 위치만 다르고 속력은 같아서 [주황과 분홍의 식([그림 IV-6] 참고)을 가리키며] 이 식이 성립되는 것 같아요.

학생 T는 <발췌문 7>과 같이, 공통점은 시간의 값에 5를 곱하는 것이고, 모두 다 2.5초와 7.5초 사이에 이동 거리는 25m가 되며 빠르기는 5 m/s로 똑같다고 말하였다. 또한 학생 T는 자신이 쓴 식([그림 IV-6] 참고)에서 '5'가 속도를 뜻하고, 파랑과 주황과 분홍은 시작하는 위치만 다를 뿐 속력이 같기 때문에 상황에 적절한 식이 된다고 설명하였다. 학생 T는 파랑의 시간과 거리 사이의 관계를 식으로 먼저 나타낸 후, 파랑과 주황과 분홍의 속력 사이의 관계에 대한 인식과 0초일 때의 위치를 고려하여 주황과 분홍의 관계식을 찾은 것으로 판단된다.

V. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 학생들이 심칼 프로그램을 활용하여 역동적으로 움직이는 캐릭터를 관찰하고, 두 변량인 시간과 이동 거리 사이의 관계를 표현하고 해석하고 활용하는 과정에서 드러나는 일정한 변화율에 대한 이해를 비교 및 분석하는 것이다. 본 연구에서 얻게 된 결과는 다음과 같다.

첫째, 주어진 상황에서 학생들이 구성하는 양들 사이의 관계는 서로 달랐다. 학생 P, (본 논문에서 분석되지 않은) 학생 Q와 학생 R이 처음에 주목한 양은 1초부터 1초씩 더해지는 시간과 그에 대응하는 이동 거리 또는 위치 사이의 간격이었다. 학생 T와 (본 논문에서 분석되지 않은) 학생 U의 경우, 캐릭터의 속력 사이의 일정한 관계를 찾고 표현하였다. 이러한 학생들이 초기에 구성한 양은 수업 중 교사의 질문에 대답하거나 프로그램을 조작하는 과정에서도 일관되게 드러났다. 그러나 학생 S의 경우 수업 초기에는 1초부터 1초씩 더해지는 시간의 변화에만 주목하였으나, 프로그램을 조작하며 모든 순간에 대응하는 위치가 존재한다는 것과 임의의 시각에서 일정 시간이 더해질 때마다 위치의 변화량이 항상 일정함을 시각적으로, 경험적으로 확인한 후 일정한 변화율에 대한 의미를 더 정교하게 이해하기 시작하였다. 따라서 본 연구에서는 심칼 프로그램을 활용하여 제시된 시간이 지남에 따른 이동 거리의 변화율이 일정한 상황에서 학생들이 주목하는 양들 사이의 관계가 서로 다를 수 있다는 것과 프로그램을 조작하는 활동을 통해 양들 사이의 관계에 대한 이해가 더 정교화되어가는 과정을 확인한 것이다.

둘째, 본 연구에 참여한 학생들은 주어진 상황에서 시간과 이동 거리 사이의 일정한 관계인 속력을 구하였지만, 임의의 시각에서의 위치, 임의의 시간 변화량에 대응하는 위치의 변화량을 찾는 과정에서 이를 해석하고 활용하는 방식이 서로 달랐다. 임의의 시각에 대응하는 위치를 구하기 위해 학생 S, 학생 T, 학생 U는 주어진 상황에서 속력을 찾은 후 이를 활용하였고, 학생 P와 학생 R은 프로그램 화면에 제시된 특정한 시

간에 대응하는 위치의 값을 정확히 읽으려고 시도하였다. 또한 학생 P와 학생 Q는 1초부터 1초씩 더해지는 시간에 대응하는 위치로부터 속력을 찾았지만, 2.5초와 그에 대응하는 위치 사이의 비 역시 이와 동일하다는 것은 산술적 계산으로 확인한 후에야 알 수 있었다.

정리하면, 본 연구에서는 학생들이 역동적인 함수적 상황을 관찰하고, 표현하고, 해석하는 과정에서 드러나는 두 변량 사이의 관계에 대한 이해와 그 변화를 살펴보았다. 이를 바탕으로 본 연구는 일차함수의 교수・학습 및 연구에 다음과 같은 시사점을 줄 수 있다.

첫째, 본 연구에서는 공학적 도구를 활용한 함수의 교수・학습 상황에서 드러나는 학생들의 다양한 추론 양상을 확인하였다. 구체적으로, 연구에 참여한 모든 학생들은 심칼 프로그램을 활용하여 캐릭터의 움직임을 조작하는 활동을 통해 7.2초와 8.2초와 같은 임의의 시각에 대응하는 위치의 존재를 분명하게 인지하였지만, 학생 S, 학생 T, 학생 U만이 변량의 변화를 연속 추론하며 변량들 사이의 비의 일정함을 인지하고 이를 활용하여 교사의 발문에 (연구자의 관점에서) 적절하게 대답하였다. 이는 함수적 상황을 표현하고 해석하는 행위로부터 드러나는 학생들의 일관된 사고 패턴에 주목해야 할 필요가 있으며, 학생들에게 제시하는 함수적 상황이 두 변량 사이의 변화율에 대한 의미를 정교하게 구성할 수 있도록 돕는 상황인지 아닌지를 고려해야 한다는 점을 시사한다. 따라서 본 연구의 결과는 공학적 도구를 활용하여 일차함수를 지도하는 교사에게 역동적인 함수적 상황에 대한 표현과 해석에서 드러나는 두 양의 변화 관계에 대한 학생들의 이해 수준을 진단하고 이를 변화시킬 수 있는 과제를 준비하는 데 긍정적인 도움을 줄 것으로 기대한다.

둘째, 본 연구에서는 함수적 상황에서 두 변량 사이의 관계에 대한 이해는 상황에 대한 식 표현과 해석에서도 중요한 역할을 한다는 점을 확인하였다. 학생 S와 학생 T는 [과제2]에 제시된 세 캐릭터의 움직임에서 불변하는 양을 찾은 후, 이에 근거하여 시간과 위치 사이의 관계를 식으로 표현하고 상황에 적절하게 해석하였다. 이러한 결과는 교육과정 및 교과서에서 함수식을 먼저 제시한 후 이를 다양한 방식으로 표현하는 과제만을 다루기보다 주어진 함수적 상황에서 변화하는 양을 찾고, 양들 사이의 관계를 일반화하고, 이에 대한 대수식을 학생 스스로 이끌어낼 수 있는 과제 역시 중요하게 다루어져야 할 필요가 있음을 시사한다.

셋째, 본 연구는 공학적 도구를 활용하는 목적과 그 방식의 측면에서 기존의 연구들과 차이점이 있다. 이전의 연구들에서는 함수의 학습에서 학생들이 겪는 어려움에 주목하였고(이종희·김부미, 2003; 천유영 외, 2013), 이를 해결하기 위해 공학적 도구를 활용하여 식을 그래프로 표현하거나 주어진 식에서 문자의 계수 또는 상수항의 역할에 대한 이해에 초점을 둔(박희정 외, 2011; 이광상 외, 2006) 반면, 본 연구는 주어진 상황을 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 과정에서 학생 스스로 구성하는 변량들의 변화와 그들 사이의 관계에 대한 이해에 주목하였으며, 특히 일정한 변화율에 대한 학생간의 이해의 차이점을 분석 및 제시하였다. 이처럼 본 연구는 역동적인 함수적 상황에서 학생 스스로 구성하는 양들 사이의 관계에 대한 이해를 세세하게 관찰하고 분석한 것으로, 함수적 상황을 다양한 방식으로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 추론과 그 발달에 대한 후속 연구에 기초가 될 것으로 사료된다.

참고문헌

고상숙 · 고호경(2007). 수학 교수 · 학습과정에서 사고력 신장을 위한 계산기의 활용-학생들의 수학화 발달에서 테크놀로지의 효과. **수학교육, 46**(1), 97-122.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제2015-74호[별책 8].

박희정 · 김경미 · 황우형(2011). CAS 그래핑 계산기를 활용한 수학 수업에 관한 사례 연구. **수학교육논문집, 25**(2), 302-430.

손홍찬 · 류희찬(2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용. **수학교육학연구, 15**(4), 505-522.

신은주(2005). 등속도 운동에서 일차함수 교수-학습 과정에 관한 사례연구: 수학과 과학의 통합교육 관점을 기반으로. **수학교육학연구, 15**(4), 419-444.

오홍준 · 양명섭(2013). GSP를 활용한 함수지도에 관한 연구. **한국지식정보기술학회 논문지, 8**(1), 31-37.

이광상 · 조민식 · 류희찬(2006). 엑셀의 활용이 일차함수 문제해결에 미치는 효과. **학교수학, 8**(3), 265-290.

이수진 · 이종학 · 김원경(2013). 수학교육공학 연구 동향의 비교 · 분석. **교사교육연구, 52**(2), 253-266.

이종희 · 김부미(2003). 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과 분석. **학교수학, 5**(1), 115-133.

천유영 · 임대근 · 류현아(2013). 수학 성취 수준에 따른 고등학생들의 함수적 표현의 번역 능력. **한국학교수학회논문집, 16**(1), 141-155.

Hackenberg, A. J. (2009). *Relationships between students' fraction knowledge and equation solving*. Paper presentation at the Research Pre-session of the annual conference of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

Izsák, A. (2003). "We want a statement that is always true": Criteria for good algebraic representations and the development of modeling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 191-227.

Izsák, A. (2011). Representative competence and algebraic modelling. In J. Cai & E. Knuth(Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 239-258). Berlin: Springer-Verlag.

Norton. A., & Boyce. S. (2015). Provoking the construction of a structure for coordinating n+1 levels of units. *Journal of Mathematical Behavior, 40*, 211-232.

Olive, J., & Lobato, J. (2008). The learning of rational number concepts using technology. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Research syntheses* (pp. 1-54). Charlotte, NC: Information Age and the National Council of Teachers of Mathematics.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1992). *Images of rate*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Middle School Students' Understanding of Constant Rate of Change in Functional Situations Using SimCalc MathWorlds

Ma, Minyoung (Indong Middle School)

The purpose of this study is to compare and analyze middle school students' understanding of constant rate of change, in terms of observing, representing and interpreting dynamic functions in various ways using the SimCalc MathWorlds. For this purpose, parts of a class conducted for six students in the first grade of middle school were analyzed. The results suggested two implications for a class that used this program (SimCalc MathWorlds): First, we confirmed that the relationships between the two quantities that students notice in the same situation can be different. Second, the program helped students to develop a more comprehensive understanding of the meaning of the constant rate of change. The study also revealed the need to use technology in teaching and learning about functions, particularly to represent and interpret a given situation that involves the constant rate of change in various ways. Further, the results can contribute to developing contents and methods to teach functions using technology in consideration of students' different levels of understanding.

* Key Words : functions(함수), technology(공학적 도구), SimCalc MathWorlds(심칼 프로그램), constant rate of change(일정한 변화율)

논문접수 : 2017. 7. 16
논문수정 : 2017. 8. 7
심사완료 : 2017. 8. 10