대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 3, 537 ~ 555. Aug 2017

한국과 싱가포르의 초등학교 수학 교과서에 제시된 분수의 덧셈 관련 시각적 표현에 대한 비교 분석[1)]

이 지 영[*] · 방 정 숙[**] · 서 은 미[***] · 김 경 훈[****]

본 논문은 선행 연구에서 제시한 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대한 지도 방향과 그 가능성을 탐색하기 위해 한국과 싱가포르 교과서를 비교·분석하였다. 이를 위해 한국과 싱가포르에서 분수의 덧셈과 관련된 내용인 동치분수, 분수의 크기 비교, 분수의 덧셈의 지도 계열 및 지도 시기를 살펴보고 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어인 전체 단위의 고정성, 공통 측정 단위의 필요성, 재귀적 분할과 이분모 분수 덧셈의 알고리즘의 연결과 관련하여 시각적 표현이 어떻게 제시되어 있는지를 비교·분석하였다. 분석 결과, 한국에 비해 싱가포르는 분수의 덧셈과 관련된 내용을 보다 점진적이고 체계적으로 지도하고 있음을 확인하였다. 싱가포르 교과서에 제시된 다양한 시각적 모델은 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어 지도 방향에 구체적인 시사점을 제공하였다. 본 연구 결과를 토대로 우리나라에서 보다 점진적이고 체계적인 분수 덧셈 교육이 이루어지기를 기대한다.

Ⅰ. 서론

이분모 분수의 덧셈은 초등학교 수학에서 세 가지 수준의 단위 구조를 경험할 수 있는 중요한 주제이다(Izsák, Tillema, & Tunç-Pekkan, 2008). 예를 들어 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$에서 학생들은 첫 번째 수준의 단위인 1을 등분할하여 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$을 만들고 이를 이용하여 각각의 분수를 표현한다. 또한 두 번째 수준의 단위만 가지고 덧셈한 결과를 하나의 분수로 표현할 수 없으므로 세 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{12}$을 찾고 $\frac{1}{12}$을 공통의 측정 단위로 하여 덧셈 결과를 하나의 분수로 표현한다. 이러한 과정에서 학생들은 이제까지 암묵적으로 다루어왔던 중요한 아이디어들을 직접적으로 접하게 된다. 이지영과 방정숙(2016a)은 이분모 분수 덧셈에서 세 가지 수준의 단위 구조와 관련하여 핵심이 되는 아이디어를 크게 세 가지(전체 단위의 고정성, 공통 측정 단위의 필요성, 재귀적 분할과 이분모 분수 덧셈 알고리즘의 연결)로 제시하였고 교수·학습 과정에서 명시적으로 지도할 것을 제안하였다.

* 팔달초등학교, ez038@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr (교신저자)
*** 한국교원대학교 대학원, edmos83@gmail.com
**** 한국교원대학교 대학원, strongapple@hanmail.net

1) 본 논문의 일부 내용은 41st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education(PME 41, 2017. 07. 22.)에서 발표되었음.

이러한 아이디어는 이분모 분수의 덧셈에서 새롭게 제시된 것이 아니라 동치분수, 통분, 분수의 크기 비교, 동분모 분수의 덧셈 등과 같은 주제에서도 중요한 부분을 차지하며 점차적으로 심화·확장된다. 따라서 이분모 분수의 덧셈뿐만 아니라 동치분수, 분수의 크기 비교, 분수의 덧셈 전반에 걸쳐서 체계적으로 지도해야 한다.

하지만 실제 교과서나 교수·학습 과정에서 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어를 체계적이고 명시적으로 지도하는지는 의문이다. 분수의 덧셈과 관련된 많은 연구들은 교과서나 교수·학습 과정이 수치적인 계산 알고리즘만 지나치게 강조하면서 중요한 아이디어에 대해 탐구할 기회를 충분히 제공하지 않고 있다는 점을 지적한다(김미영, 백석윤, 2010; 이지영, 방정숙, 2016a, 2016b). 이에 이지영과 방정숙(2016a)은 우리나라의 제4차 교육과정에서 2009 개정 수학과 교육과정에 의한 교과용 도서를 분석하고 이분모 분수 덧셈의 세 가지 핵심 아이디어와 관련하여 재고할 사항을 구체적으로 제시하였다. 특히 모델을 통해 다양한 수준의 단위 구조를 제시하여 이분모 분수의 덧셈의 의미, 통분의 필요성, 이분모 분수의 덧셈 알고리즘을 도출할 것을 강조하였다.

본 연구는 이에 대한 후속 연구로서 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어를 모델을 통해 교과서에 어떻게 제시할 수 있는지에 집중한다. 특히 교육과정 및 교과서에서 표현 및 모델의 사용을 강조하고 있는 한국과 싱가포르의 교과서를 비교·분석하여 구체적이고 실질적인 시사점을 도출한다. 먼저 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어를 어떻게 체계적으로 지도할 수 있을지에 대한 구체적인 시사점을 살펴보기 위해 한국과 싱가포르에서 이분모 분수의 덧셈과 관련된 내용(동치분수, 분수의 크기 비교, 분수의 덧셈 등)들을 언제, 어떤 순서로 제시하는지를 살펴본다. 다음으로 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어를 모델을 통해 어떻게 제시하고 지도할 수 있을지를 탐색하기 위해 각각의 아이디어들이 어떠한 시각적 표현을 사용하여 어떻게 제시되어 있는지를 구체적으로 살펴본다. 이를 통해 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어의 지도 방향 및 지도 가능성에 대한 구체적인 시사점을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

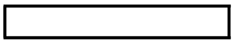
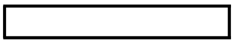
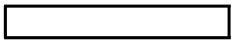
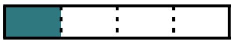
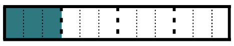
1. 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어

<표 II-1>은 이지영과 방정숙(2016b)이 제시한 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어이다. 이분모 분수의 덧셈에서는 단위 수준이 더욱 세분화되어 학생들이 인지적 혼란을 겪기도 한다. 이에 대처하기 위해서는 이분모 분수의 덧셈을 도입할 때 학생들이 이분모 분수의 의미와 상황에 대해 충분히 생각할 수 있는 기회를 제공해야 하며, 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대해 충분히 탐색하도록 해야 한다.

이분모 분수 덧셈의 첫 번째 핵심 아이디어는 각각의 분수에서 전체 단위(첫 번째 수준의 단위, 1)가 서로 같다는 것이다. <표 II-1>의 (a)에서 볼 수 있는 것처럼, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ 각각의 전체 단위는 1로 같다. 학생들은 피가수와 가수의 전체 단위가 다르면 분수의 덧셈을 하는 상황이 아니라는 것을 알 수 있어야 한다. 그러나 학생들이 이분모 분수의 덧셈에서 전체 단위의 고정성을 간과하여 겪는 어려움은 여러 다른 선행 연구에서도 보고된 바 있다(예, Cramer, Wyberg, & Leavitt, 2008; Izsák, Tillema, & Tunç-Pekkan, 2008).

이분모 덧셈의 두 번째 핵심 아이디어는 공통 측정 단위의 필요성을 인식하는 것이다. <표

<표 II-1> $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$을 하는 과정에서 복잡해지는 단위의 구조와 의미(이지영, 방정숙, 2016b, p. 795)

	단위의 구조			의미
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$	
(a)	 1	 1	 1	**핵심 아이디어1.** 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 연산에 관여하는 세 가지 양이 가리키는 대상의 단위는 모두 같다.
(b)	 $\frac{1}{3}$이 2개	 $\frac{1}{4}$이 1개	 $\frac{1}{3}$이 2개와 $\frac{1}{4}$이 1개	**핵심 아이디어2.** 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 결과를 하나의 양으로 표현하기 위해서는 공통 측정 단위가 필요하다.
(c)	 $\frac{1}{12}$이 4개인 $\frac{1}{3}$이 2개	 $\frac{1}{12}$이 3개인 $\frac{1}{4}$이 1개	 $\frac{1}{12}$이 8개와 3개이므로 $\frac{11}{12}$	**핵심 아이디어3.** 재귀적 분할을 통해 세 번째 수준의 단위를 찾을 수 있고 이러한 과정은 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 알고리즘과 연결된다.

II-1>의 (b)처럼 $\frac{2}{3}$는 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$로 측정할 수 있고, $\frac{1}{4}$은 또 다른 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{4}$로 측정할 수 있지만 두 분수의 합은 $\frac{1}{3}$이나 $\frac{1}{4}$의 단위로 나타낼 수 없다. 두 분수의 합을 하나의 분수로 나타내기 위해서는 이를 측정할 수 있는 공통의 측정 단위가 필요하다. 이 공통 측정 단위는 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$이나 $\frac{1}{4}$을 다시 분할하여 만들 수 있다.

이분모 분수 덧셈의 세 번째 핵심 아이디어는 재귀적 분할과 알고리즘의 연결이다. <표 II-1>의 (c)를 보면 이분모 분수의 덧셈에서 재귀적 분할을 통해 세 번째 수준의 단위를 찾는 과정이 잘 나타난다. 전체 1은 각각의 $\frac{1}{3}$단위가 다시 4등분되면서 $\frac{1}{12}$이 4개인 $\frac{1}{3}$이 3개인 양으로 재구조화된다. $\frac{1}{4}$도 이와 같은 방법으로 공통 측정 단위로 표현할 수 있다. 각각의 단위가 재분할된 과정을 알고리즘과 연결하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$$

이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어는 이분모 분수 덧셈의 의미, 통분의 필요성과 이유, 이분모 분수의 덧셈 알고리즘 등을 이해하는 데 반드시 필요하다. 따라서 교과서나 교수·학습 과정에서 이를 체계적이고 명시적으로 지도할 필요가 있다.

2. 시각적 표현

많은 연구자들은 분수의 연산에서 형식적인 절차에 초점을 두어 지도하는 것이 적절하지 않다는 것을 지적하면서 이에 대한 대안으로, 분수 연산을 학습하는 과정에서 학생들이 제시된 분

수와 상황을 이해할 수 있도록 다양한 시각적 표현(예, 막대, 원, 직사각형, 다각형, 수직선 모델 등)을 사용하도록 권장하고 있다.(예, 강흥규, 2013; 방정숙, 이지영, 2009; Lamon, 2012; NCTM, 2007). 이러한 시각적 표현을 사용하는 것은 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 학생들의 이해를 높일 뿐만 아니라 형식적 알고리즘을 발견할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

이렇듯 분수 학습에서 시각적 표현의 역할에 대해 강조해오고 있지만, 몇몇 연구를 살펴보면 문제에 제시된 표현에 따라 학생들의 이해도가 다름을 확인할 수 있다. Tunç-Pekkan(2015)은 주의 표준화 검사에서 높은 성취를 보인 656명의 미국 4, 5학년 학생들에게 서로 다른 시각적 표현(원, 직사각형, 수직선)을 사용한 여섯 항목의 분수 지식을 다룬 문제를 제시하였다. 연구 결과 분수 지식 항목에 따라 다른 시각적 표현에 비해 정답률이 높거나 낮은 표현이 있음을 확인하였다. 또한 같은 시각적 표현이더라도 어떻게 활용하는지에 따라 학생들의 수행 정도가 달라질 수 있음을 보고하였다.

Cramer와 동료들(2008)은 6학년 학생들을 대상으로 한 교수 실험에서 원 모델을 활용하여 분수의 덧셈 및 뺄셈과 관련된 내용을 학습하는 연구를 진행하였다. 연구 결과 학생들은 원 모델을 활용하여 분수의 덧셈과 뺄셈을 원활하게 수행하였다. 그러나 분수의 덧셈과 뺄셈을 위해 공통분모를 찾는 과정에서 패턴블럭, 칩, 도트 페이퍼를 활용한 결과, 학생들은 원 모델을 사용하였을 때에 비해 분수의 덧셈을 잘 수행하지 못하였다. 이를 통해 같은 분수 지식을 묻는 문제더라도 사용된 시각적 표현에 따라 학생들의 이해도와 수행 결과가 다를 수 있음을 확인하였다.

또한 앞에서 언급한 것처럼 이분모 분수의 덧셈에서는 전체 단위의 고정성을 인식하고, 두 번째 수준의 단위로 두 분수의 합을 표현할 수 없으므로 공통 측정 단위의 필요성을 느끼고, 공통 측정 단위, 즉 공통분모를 찾아 형식적 알고리즘과 연결하는 것이 중요하다. 공통분모를 찾는 과정에서 재분할 또는 재귀적 분할의 과정을 거치는데 이때 <표 II-1>의 (c)와 같이 시각적 표현에 점선의 굵기를 다르게 제시한다면 학생들이 다양한 수준의 단위를 이해하는 데 도움이 될 것이다. 이에 본 연구에서는 교과서에 제시된 시각적 표현을 분석하여 이분모 분수의 핵심 아이디어 지도 방향과 가능성을 탐색한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 분석 대상

본 논문의 목적은 한국과 싱가포르 초등학교 수학 교과서에서 이분모 분수의 덧셈에 대한 핵심 아이디어가 어떻게 제시되어 있는지를 시각적 표현을 중심으로 살펴보고, 어떠한 시각적 표현을 어떻게 제시하여 지도할 수 있을지에 대한 구체적인 방안을 탐색하는 것이다. 특히, 싱가포르는 교육과정 상에 수학적 모델을 강조하고 (Curriculum Planning and Development Division, 2012), 교과서에도 다양한 모델이 제시되어 있으므로 한국과 싱가포르 교과서를 비교·분석하여 시각적 표현과 관련된 실질적인 시사점을 도출하고자 한다.

분수의 덧셈에 대한 핵심 아이디어는 동치분수, 분수의 크기 비교, 동분모 분수의 덧셈, 이분모 분수의 덧셈에서 지속적으로 확장되어야 하므로 이러한 주제를 다루는 부분을 모두 분석하였다. 구체적으로 한국은 2009 개정 수학과 교육과정에 해당하는 3학년 1, 2학기, 4학년 1학기, 5학년 1학기 총 4개 학기의 교과서를 분석하였고 (교육부, 2017a, 2017b, 2017c, 2017d), 싱가포르는

2012 수학과 교육과정에 해당하는 2B[2]), 3B, 4B 교과서, 이전 교육과정에 해당하는 5A 교과서[3]) 총 4개 학기의 교과서를 분석하였다(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2015, 2016; Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2015, 2016).

2. 분석의 초점

분수의 덧셈과 관련된 내용에 대한 교과서 분석의 초점은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 분수의 덧셈과 관련된 내용에 대한 교과서 분석의 초점

분석 요소	분석의 초점
지도 계열 및 지도 시기	· 분수의 덧셈에 대한 핵심 아이디어와 관련된 주제들은 각 나라의 교과서에 어떤 순서로 제시되며 언제 지도하는가?
분수의 덧셈에 관한 핵심 아이디어	· 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어는 각 나라의 교과서에 어떠한 시각적 표현을 활용하여 어떻게 제시되어 있는가? - 전체 단위의 고정성 - 공통 측정 단위의 필요성 - 재귀적 분할과 이분모 분수의 덧셈 알고리즘의 연결

이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어인 전체 단위의 고정성, 공통 측정 단위의 필요성, 재귀적 분할 및 이분모 분수의 덧셈 알고리즘 연결은 이분모 분수의 덧셈에서만 단독적으로 다루어지는 것이 아니라 동치분수, 분수의 크기 비교, 분수의 덧셈 등에서 기본적으로 나타난다. 즉 분수의 덧셈과 관련된 분수 학습 과정 전반에 걸쳐 이를 지도할 필요가 있다. 따라서 분수의 덧셈에 대한 핵심 아이디어와 관련된 주제들이 각 나라의 교과서에 어떤 순서로 제시되며 언제 지도하는지를 첫 번째 분석의 초점으로 두었다.

다음으로 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어를 교과서나 교수·학습 과정에서 어떻게 제시하여 지도할 수 있을지를 살펴보기 위해서 두 나라의 교과서에서는 어떠한 시각적 표현을 어떻게 제시하고 있는지를 구체적으로 살펴보았다.

IV. 연구 결과

1. 분수의 덧셈과 관련된 내용의 지도 계열 및 지도 시기 비교·분석

본 절에서는 한국과 싱가포르에서 분수의 덧셈과 관련된 내용을 지도하는 계열과 시기의 차이점을 분석하고 그 차이가 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어와 관련하여 어떤 의미를 갖는지 살펴본다. <표 IV-1>은 한국과 싱가포르 교과서에서 분수의 덧셈과 관련된 내용을 지도하는 계열과 시기를 정리한 것이다. 한국과 싱가포르의 지도 계열 및 지도 시기에서 나타나는 차이점은 다음과 같다.

첫째, 두 분수의 분모 사이의 관계와 관련하여 한국은 3, 4학년에서 주로 동분모 분수를 다루고 5학년에서 이분모 분수를 다루는 반면에 싱가포르는 2학년에서 주로 동분모 분수, 3학년에서 주로 분모가 서로 약수와 배수 관계에 있는 분수, 4, 5학년에서 주로 이분모 분수를 다룬다. 특히 싱가포르의 3학년 교육과정과 교과서는 $\frac{4}{5}$와 $\frac{7}{10}$과 같이 분모가 서로 약수와 배수 관계에 있는 분수를 “related fractions(이하 ‘관련된 분수’,

2) 한국은 각 학년의 교과서를 1학기, 2학기로 구분하고 싱가포르는 A와 B로 구분한다.
3) 싱가포르는 2012년에 새로운 교육과정을 개발하였으며 2013년에 1학년부터 순차적으로 교육과정을 적용하고 있다. 본 연구에서는 ‘My pals are here! Maths’ 시리즈를 분석하였다.

<표 IV-1> 한국과 싱가포르의 분수 덧셈 관련 내용의 지도 계열 및 지도 시기

	한국	싱가포르
2학년	-	**2B chap. 14. 분수**
		‣ 분수 개념: 전체-부분, 읽고 쓰기, 전체와 단위분수, 진분수와 단위분수의 관계 ‣ 분수의 크기 비교(단위분수, 동분모) ‣ 분수의 덧셈과 뺄셈(동분모)
3학년	**3학년 1학기 6단원 분수와 소수**	**3B chap. 12. 분수**
	‣ 분수 개념: 등분할, 전체-부분(연속량), 읽고 쓰기 ‣ 진분수와 단위분수의 관계 ‣ 분수의 크기 비교(동분모, 단위분수)	‣ 분수 개념: 동치분수와 동치분수 만들기(simplest form) ‣ ‘관련된 분수’의 크기 비교(related fraction) ‣ ‘관련된 분수’의 덧셈과 뺄셈(related fraction)
	3학년 2학기 4단원 분수	
	‣ 분수 개념: 이산량의 분수, 자연수의 분수만큼의 분수를 수직선에 나타내기, 진분수, 가분수, 대분수 ‣ 분수의 덧셈과 뺄셈(동분모) ‣ 분수의 크기 비교(동분모 가분수와 대분수)	
4학년	**4학년 1학기 4단원 분수의 덧셈과 뺄셈**	**4B chap. 8. 분수**
	‣ 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈 - 진분수→대분수, 받아올림과 받아내림	‣ 분수 개념: 대분수·가분수 개념 및 관계 ‣ 분수의 크기 비교(‘관련된 분수’, 이분모 대분수, 가분수) ‣ 분수 개념: 이산량의 분수, 자연수의 분수 만큼
		4B chap. 9. 분수의 덧셈과 뺄셈
		‣ 이분모 진분수의 덧셈 - ‘관련된 분수’→이분모, 받아올림 ‣ 이분모 진분수의 뺄셈 ‣ 자연수와 진분수의 뺄셈 ‣ 문장제 문제 해결하기
5학년	**5학년 1학기 3단원 약분과 통분**	**5A chap. 3. 분수(1)**
	‣ 분수 개념: 동치분수와 만드는 방법, 약분과 기약분수, 통분과 공통분모 ‣ 분수의 크기 비교(이분모)	‣ 이분모 진분수의 덧셈과 뺄셈 - 진분수, 받아올림과 받아내림 없음 ‣ 이분모 대분수의 덧셈과 뺄셈 - ‘관련된 분수’, 이분모 분수 ‣ 문장제 문제 해결하기
	5학년 1학기 4단원 분수의 덧셈과 뺄셈	
	‣ 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 - 진분수→대분수, 받아올림과 받아내림	

Curriculum Planning and Development Division, 2012, p. 44)”라고 제시하고 이분모 분수로 나아가기 전에 ‘관련된 분수’의 크기 비교, ‘관련된 분수’의 덧셈과 뺄셈에 대해 충분히 다룬다.

이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어를 지도하기 위해 싱가포르에서 제시한 ‘관련된 분수’에 주목할 필요가 있다. ‘관련된 분수’는 두 분수(예, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$)의 두 번째 수준의 단위(예, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$) 사이의 관계가 시각적으로 잘 나타난다. 크기가 더 큰 단위로 구성된 분수(예, $\frac{4}{5}$)는 각각의 단위(예, $\frac{1}{5}$)를 재분할하여 크기가 더 작은 단위(예, $\frac{1}{10}$)로 다시 재구성(예, $\frac{8}{10}$)할 수 있다. 이는 이분모 분수의 덧셈에서 세 번째 수준의 단위를 새로운 분수로 구성하기 이전에 두 번째 수준의 단위 중에서 더 작은 단위를 세 번째 수준의 단위로 하여 두 분수를 공통의 측정 단위로 측정해보는 경험을 제공한다는 점에서 의미가 있다.

물론 한국에서도 5학년 1학기에 동치분수를 이해하고 만드는 과정에서 두 분수의 분모가 서로 약수와 배수 관계에 있는 분수가 제시되지만 두 이분모 분수의 크기를 비교하거나 이분모 분수의 덧셈을 하는 과정에서 구체적으로 다루어지지는 않기 때문에 싱가포르에서 '관련된 분수'를 다루는 목적과는 차이가 있다.

둘째, 분수의 종류와 관련하여 한국은 분수를 처음 도입하는 3학년에서 진분수, 가분수, 대분수를 모두 학습하는 반면에 싱가포르는 2, 3학년에서 진분수만 학습하고 4학년에서 이르러서야 대분수, 가분수를 학습한다. 따라서 한국은 3, 4학년에서 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 하고 5학년에서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 때 받아올림·내림이 없는 상황과 받아올림·내림이 있는 상황을 모두 다루지만 싱가포르는 2, 3학년에서 동분모 분수, '관련된 분수'의 덧셈과 뺄셈을 할 때에는 모두 받아올림·내림이 없는 진분수 상황만을 다루고 4, 5학년에서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 할 때에는 받아올림·내림이 있는 다양한 상황을 함께 다룬다.

한국은 학년이 올라갈수록 분모 사이의 관계가 달라지면서 각각의 아이디어가 심화된다면 싱가포르는 분모 사이의 관계와 함께 분수의 종류도 달라지면서 각각의 아이디어가 심화된다고 볼 수 있다. 특히 싱가포르와 같이 3학년에서 분모가 서로 다른 분수가 처음 제시되는, '관련된 분수'의 덧셈(예, $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$)에서 합이 1을 넘지 않는 경우만 다루는 경우에는 서로 다른 두 번째 수준의 단위(예, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$)를 이용하여 한꺼번에 그 합을 시각적으로 표현할 수 있다. 이는 서로 다른 두 번째 수준의 단위로는 그 합을 하나의 분수로 표현할 수 없다는 것을 쉽게 보여줄 수 있다는 점에서 의미가 있다.

셋째, 한국은 대부분 분수의 개념과 분수의 덧셈 및 뺄셈에 대한 내용을 단원으로 구분하거나 학년으로 구분하여 제시하는 반면에 싱가포르는 대부분 각 단원에서 분수의 개념과 분수의 덧셈 및 뺄셈에 대한 내용을 함께 제시한다. 구체적으로 한국은 3학년에서 진분수, 가분수, 대분수를 다루고 동분모 분수, 단위 분수의 크기를 비교한 후에 4학년에서 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 제시한다. 또한 5학년 1학기 3단원에서 동치분수, 약분, 통분, 이분모 분수의 크기 비교를 다룬 후에 4단원에서 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 한다. 이에 비해 싱가포르는 2학년에서 동분모 분수의 크기 비교, 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 다루고 3학년에서 동치분수, '관련된 분수'의 크기 비교, '관련된 분수'의 덧셈과 뺄셈을 다루고 4학년에서 이분모 분수의 크기 비교, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 다룬다. 한국은 비슷한 내용을 같이 제시하여 학습 내용을 경감할 수 있다는 점에서 의미가 있지만 싱가포르는 주로 다루는 분수의 크기 비교와 덧셈 및 뺄셈을 서로 연결할 수 있다는 점에서 의미가 있다. 특히 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어는 분수의 크기 비교를 하는 과정에서도 중요한 부분을 차지하는 것으로 분수의 크기 비교에서 강조한 아이디어를 유사한 분수 상황에서 바로 덧셈과 뺄셈에 적용할 수 있다는 것에 주목할 만하다.

2. 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어에 관한 지도 내용 비교·분석

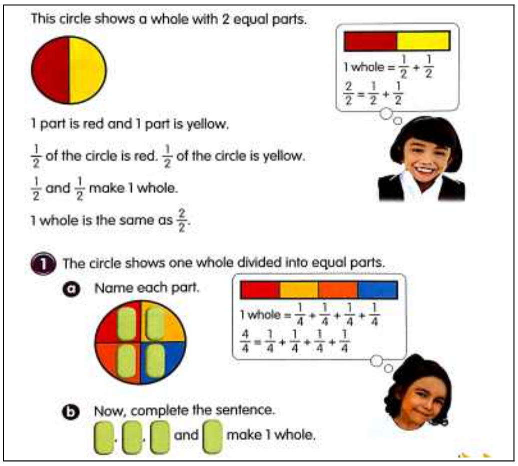
가. 전체 단위의 고정성

분수에서 전체 단위의 고정성이 필요한 상황은 두 개 이상의 양의 절대적인 크기를 비교하거나 두 개 이상의 양을 서로 더하거나 뺄 때이다. 한국과 싱가포르 교과서에서 이러한 주제를 다룰 때 전체 단위의 고정성을 어떻게 제시하고

있는지 분석한 결과 공통점과 차이점이 모두 나타났다. 먼저 두 나라에서 공통적으로 전체 단위의 고정성을 제시한 방법을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 문제 상황에서 전체의 크기가 같다는 것을 알 수 있도록 나타내는 것이다. 구체적으로 같은 전체의 두 부분을 분수로 표현하거나 측정으로서의 분수를 사용하여 전체 단위가 같다는 것을 전제하거나 다른 대상일 경우에는 두 분수의 전체의 크기가 같다는 문구를 직접적으로 제시하는 것이다. 특히 저학년에서 전체-부분으로서의 분수를 다룰 때에는 전체의 크기가 같다는 것을 상황에 직접적으로 제시하는 경우가 많다. 예를 들어 한국은 “길이가 같은 색테이프(교육부, 2017a, p. 208)”, 싱가포르는 “같은 크기의 종이 띠 세 장(three paper strips of the same size)” 등으로 제시되어 있다(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2015, p. 85). 학년이 올라가면서 점차적으로 분수의 크기를 비교하거나 분수의 덧셈과 뺄셈을 하는 상황에서 측정으로서의 분수를 제시하기도 한다.

특히 싱가포르는 앞에서 설명한 바와 같이 2학년과 3학년에서 받아올림과 받아내림이 없는 진분수 상황만을 다루고, 주로 두 분수를 하나의 같은 전체의 두 부분으로 제시하고 있다. 예를 들어, 동분모 분수의 덧셈식이 처음으로 제시되는 2B에서 [그림 IV-1]과 같이 하나의 전체를 이루는 단위 분수들을 덧셈으로 표현하거나(예, 1 whole(전체)=$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$), 하나의 전체를 이루는 두 부분을 덧셈으로 표현하여(예, $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{3}$은 전체 1을 만듦), 분수와 전체와의 관계를 강조한다. 또한 본격적으로 분수의 덧셈을 다룰 때에도 합이 1을 넘지 않는 상황에서 하나의 전체(예, a waffle)의 두 부분을 서로 더하는 상황으로 제시한다. 이를 통해 문제 상황만으로 피가수, 가수, 합이 모두 같은 전체 단위라는 것을 쉽게 알 수 있다.

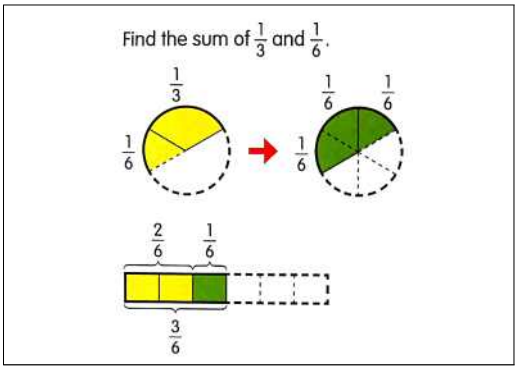


[그림 IV-1] 싱가포르에서 하나의 전체를 이루는 부분들의 덧셈을 표현한 예(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2015, p. 81)

둘째, 전체의 크기가 같은 시각적 표현을 이용하여 두 분수의 전체 단위가 같다는 것을 시각적으로 보여주는 것이다. 한국과 싱가포르 모두 문제 상황에서 전체의 크기가 같다는 것을 명시하지 않은 경우도 간혹 있는데 이 경우에는 대부분 크기가 같은 시각적 표현을 이용하여 두 분수의 전체 단위가 같음을 제시한다. 특히 두 나라는 <표 IV-2>와 같이 모두 다양한 시각적 표현을 활용하고 있다. 그러나 한국에 비해 싱가포르에서 시각적 표현을 더 많이 제시하며 원과 막대 모델의 빈도수가 높은 것을 알 수 있다. 이는 대부분의 상황에서 [그림 IV-2]와 같이 원과 막대 모델을 함께 사용하여 표현하기 때문이다.

<표 IV-2> 동치분수, 분수의 크기 비교, 분수의 덧셈과 관련하여 교과서에 제시된 시각적 표현의 빈도수

종류	넓이 모델			길이 모델	
	원	직사각형	다각형	막대	수직선
한국	6	8	2	21	3
싱가포르	40	17	0	72	4



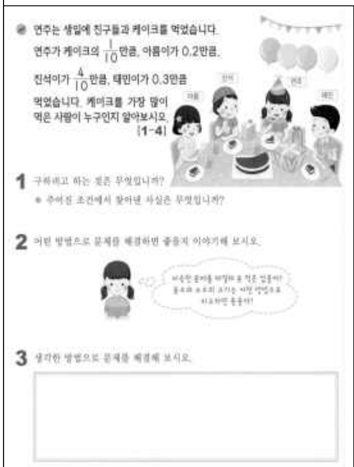
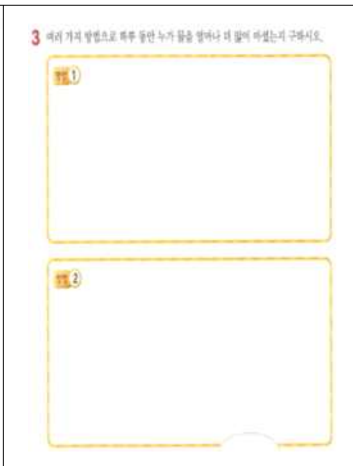
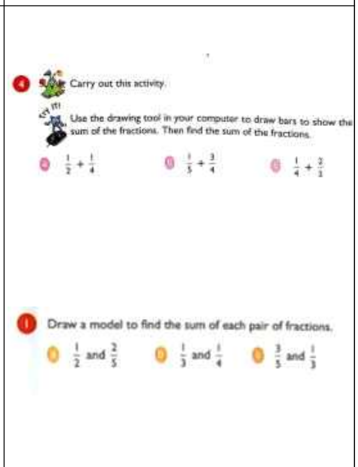
[그림 IV-2] 싱가포르에서 하나의 상황을 두 가지 표현으로 제시한 예(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2016, p. 75)

한편, 전체 단위의 고정성과 관련하여 한국과 싱가포르 교과서에서 나타나는 차이점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 한국은 대부분의 경우에 이미 크기가 같은 모델이 제시되어 있는 반면에 싱가포르는 학생들에게 주어진 상황을 알맞은 그림이나 모델로 표현해볼 기회를 더 많이 제공한다는 것이다. 학생들에게 주어진 상황에 알맞은 그림이나 모델을 직접 그려보도록 하는 활동은 그 과정에서 전체 단위를 같게 해야 하는 이유에 대해 탐구할 기회를 제공할 수 있으므로 매우 중요하다.

물론 한국에서도 [그림 IV-3]의 (a), (b)와 같이 동치분수, 분수의 크기 비교, 분수의 덧셈과 관련하여 3학년 1학기, 5학년 1학기에 각각 그림을 이용하여 전체 단위 고정성을 탐구할 기회가 있다. 하지만 한국은 모든 내용을 학습하고 난 이후에 문제 해결 차시에서 다양한 방법을 이용하여 해결해 보도록 하고 있으며 이 경우에 학생이 그림이나 모델을 사용하지 않고 식이나 그 외의 다른 방법으로 문제를 해결한다면 전체 단위의 고정성에 대해 탐구해 볼 수 있는 기회는 줄어든다.

이에 비해 싱가포르는 [그림 IV-3]의 (c)와 같이 교과서에 “모델을 그리시오(draw a model)”라고 직접적으로 제시하여 학생들이 직접 그린 시각적 표현을 이용하여 문제를 해결하도록 하고 있다. 특히 싱가포르는 학생 스스로 교구나 모델을 사용하여 문제를 해결하는 경험을 저학년에

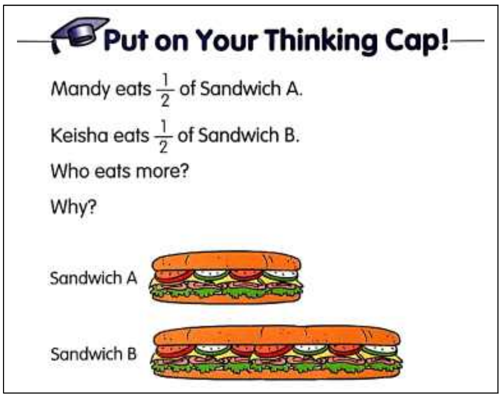
한국		싱가포르
		
(a) 3학년 1학기 6단원 분수와 소수의 문제 해결 차시(교육부, 2017a, p. 222)	(b) 5학년 1학기 4단원 분수의 덧셈과 뺄셈 문제 해결 차시(교육부, 2017d, p. 117)	(c) 5A 3단원 이분모 분수의 덧셈 차시(Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2015, pp. 72-73)

[그림 IV-3] 한국과 싱가포르에서 그림이나 다양한 방법을 이용하여 문제를 해결하도록 제시한 예

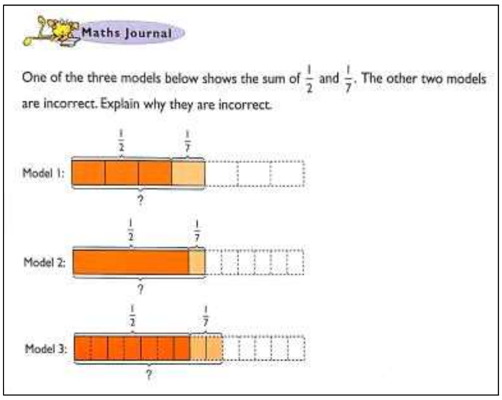
서부터 체계적으로 제시하고 있다. 구체적으로 2B에서 문제 상황을 “분수 원판(fraction disc)”이라는 교구를 이용하여 나타낸 후 문제를 해결해보도록 하고, 3B에서 분수 원판뿐만 아니라, 수직선, 막대를 이용하여 나타내도록 한다. 4B에서 역시 분수 원판을 사용하여 문제를 스스로 해결해보도록 한다. 5A 단계에 이르러서는 컴퓨터의 “그리기 도구(drawing tool)”, 학생이 직접 그린 모델 등을 이용하여 문제를 해결하도록 한다. 학생들은 4B까지는 특정한 교구를 활용하거나 전체 단위가 이미 고정되어 있는 표현을 활용하여 문제를 해결하다가 5A에서는 본인이 직접 모델을 그려 문제를 해결한다. 이는 학생들이 각각의 이분모 분수를 직접 그림으로 나타내면서 전체 단위 고정성과 관련된 어려움에 직면했을 때 이에 대해 탐구할 기회를 제공할 수 있다는 점에서 의미가 있다.

둘째, 싱가포르는 전체 단위의 고정성에 대해 학생들이 스스로 생각해볼 기회를 명시적으로 제시한다는 것이다. 구체적으로 싱가포르는 [그림 IV-4]와 같이 전체 단위가 다를 경우에 두 분수의 크기를 비교하는 것이 어떤 의미를 갖는지 학생들에게 스스로 생각해볼 수 있는 기회를 제공한다. 특히 싱가포르는 교육과정에서도 2학년 분수와 관련하여 “전체가 같다는 것을 언급하면서 분수의 크기를 비교(to compare the sizes of fractions referring to the same whole)” 한다는 점에 주목할 필요가 있다(Curriculum Planning and Development Division, 2012, p. 38).

또한 이분모 분수의 덧셈과 관련하여 5A에서도 [그림 IV-5]와 같이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$을 올바르게 표현한 모델을 찾는 과정에서 전체 단위의 고정성을 탐구해볼 기회가 있다. 모델 1은 $\frac{1}{2}$의 전체 단위가 $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$의 전체 단위와 서로 다르고, 모델 2에서는 $\frac{1}{7}$의 전체 단위가 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$의 전체 단위와 서로 다른 것을 알 수 있다. 이는 이분모 분수의 덧셈을 나타낸 표현으로 어떤 것이 타당한지를 판단하는 과정에서 학생들로 하여금 이분모 분수의 덧셈의 의미에 대해 다시 생각해보도록 할 수 있으며 더 나아가 전체 단위를 같게 해야 이분모 분수의 덧셈의 의미가 있다는 것을 알게 할 수 있다는 점에서 주목할 만하다.



[그림 IV-4] 싱가포르에서 제시한 전체 단위가 서로 다른 문제 상황(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2015, p. 96)

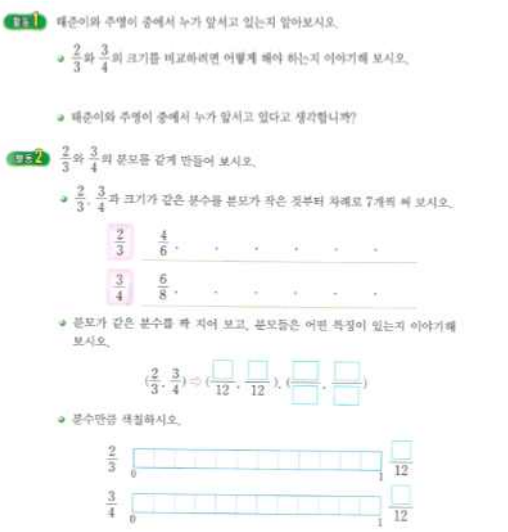
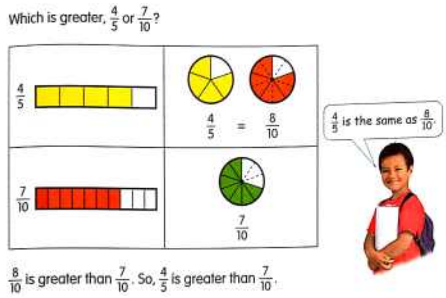


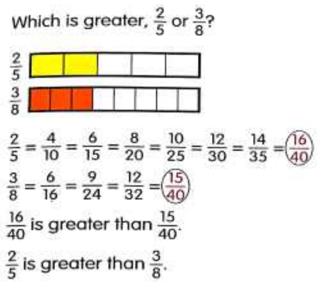
[그림 IV-5] 싱가포르에서 제시한 전체 단위의 고정성을 탐구할 수 있는 모델(Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2015, p. 73)

나. 공통 측정 단위의 필요성

분수에서 공통 측정 단위의 필요성은 시각적으로 또는 직관적으로 비교할 수 없는 이분모 분수의 크기를 비교하거나 이분모 분수의 덧셈에서 다룰 수 있다.

한국과 싱가포르에서는 모두 분수를 도입하는 학년에서 이분모 단위 분수의 크기를 비교하는 내용이 제시되어 있다. 한국은 3학년 1학기에 단위 분수의 크기를 비교하고, 싱가포르는 2B에서 단위 분수의 크기를 비교하는데 이때에는 공통의 더 작은 단위로 정확하게 측정하여 비교하는 것이 아니라 시각적으로 비교하고 있으므로 공통 측정 단위를 구성할 필요가 없다. 한국은 3~4학년군에서 공통 측정 단위를 구성해야 하는 상황이 특별히 주어지지 않으며 5학년 1학기에 이르러서 [그림 IV-6]의 (a)와 같이 이분모 분수의 크기를 비교하고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 크기를 비교하면서 공통의 측정 단위가 필요한 주제가 등장한다. 싱가포르는 3B에서 [그림 IV-6]의 (b), (c)와 같이 분모가 약수와 배수 관계인 분수의 크기 비교(예, $\frac{4}{5}$와 $\frac{7}{10}$), $\frac{1}{2}$보다 작은 분수들의 크기 비교(예, $\frac{2}{5}$와 $\frac{3}{8}$), $\frac{1}{2}$보다 큰 분수의 크기 비교(예, $\frac{6}{7}$과 $\frac{3}{4}$)를 할 때 공통 측정 단위가 등장한다. 한국과 싱가포르 교과서에서 이러한 주제를 다룰 때 공통 측정 단위의 필요성을 어떻게 제시하고 있는지 분석한 결과 공통점과 약간의 차이점이 나타났다.

<table>
<tr><th>한국</th><th>싱가포르</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
(a) 이분모 분수의 크기 비교 도입 (교육부, 2017d, pp. 78-79)</td><td>

(b) ‘관련된 분수’의 크기 비교(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2016, p. 65)</td></tr>
<tr><td>

(c) 참조 단위를 사용할 수 없는 경우의 이분모 분수 크기 비교(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2016, p. 67)</td></tr>
</table>

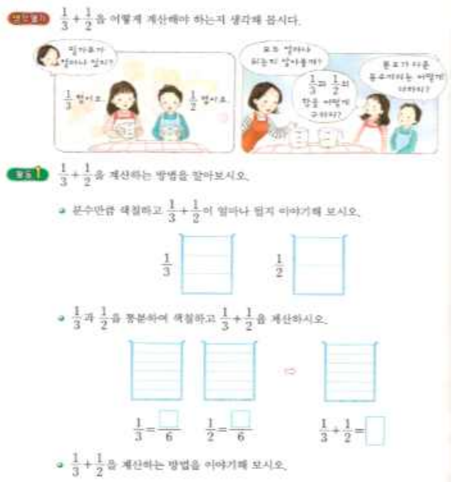
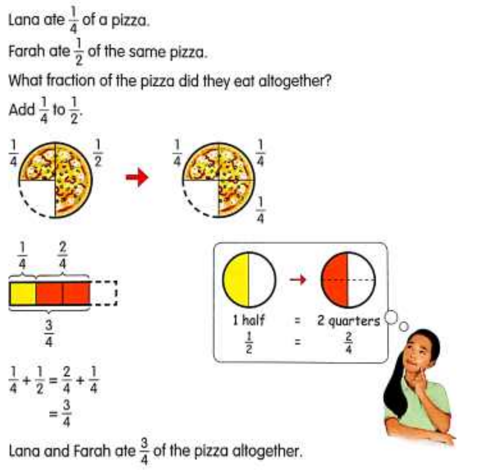
[그림 IV-6] 한국과 싱가포르에서 이분모 분수의 크기를 비교할 때 제시한 모델

먼저 한국과 싱가포르에서 나타난 공통점은 분수의 크기를 비교할 때 주로 수치적으로 통분을 하고 시각적 표현은 양을 확인하는 정도로 활용하고 있다는 것이다. 구체적으로 한국은 [그림 IV-6]의 (a)와 같이 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 크기를 비교하기 위해 먼저 무엇을 해야 할지 생각해볼 기회를 제공한다. 그리고 다음 활동에서 바로 "$\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 분모를 같게 만들어 보시오"라고 제시하고 동치 분수를 순서대로 만들어서 동분모 분수를 찾도록 한다. 시각적 표현 역시 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 크기를 비교하여 두 번째 수준의 단위로는 크기를 정확하게 비교할 수 없으므로 세 번째 수준의 단위가 필요하다는 것으로 이끌기 보다는 두 분수를 수치적으로 통분하고 난 이후에 $\frac{8}{12}$과 $\frac{9}{12}$를 막대 모델에 나타내고 그 크기를 비교한다. 이때 막대 모델은 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 크기를 비교하기 위한 것이라기보다는 $\frac{8}{12}$과 $\frac{9}{12}$를 비교하기 위한 것이다. 싱가포르에서도 [그림 IV-6]의 (c)와 같이 $\frac{1}{2}$보다 작은 분수들의 크기 비교, $\frac{1}{2}$보다 큰 분수의 크기 비교는 $\frac{1}{2}$을 사용하여 비교할 수 없는 상황이므로 분모가 같아질 때까지 동치 분수를 만들고 동분모 분수를 찾은 후에 동분모 분수의 크기를 비교하고 있다. 이 때 제시된 시각적 표현에는 공통의 측정 단위가 제시되어 있지 않다. 두 나라에서 모두 수치적으로 분모의 크기를 같게 만들도록 하지만 왜 분모의 크기를 같게 만드는지에 대해 생각해볼 기회는 구체적으로 제시하지 않고 있다.

하지만 여기에서 주목할 만한 점은 싱가포르는 '관련된 분수'의 크기를 비교하는 과정에서 [그림 IV-6]의 (b)와 같이 공통의 측정 단위를 사용할 수 있다는 점이다. 이 경우에는 시각적으로도 비교가 가능하지만 두 개의 두 번째 수준의 단위 중에서 더 작은 크기를 갖는 단위를 공통의 측정 단위로 하여 비교할 수도 있다. 교과서에서 공통 측정 단위의 필요성을 직접적으로 제시하고 있지 않지만 같은 측정 단위를 이용하여 측정하는 과정이 직관적으로 잘 드러나는 부분이라고 볼 수 있다.

다음으로 한국과 싱가포르에서 나타난 차이점은 [그림 IV-7]과 같이 받아올림과 받아내림이 없는 이분모 진분수의 덧셈과 뺄셈에서 한국은 거의 모든 경우에 두 분수의 전체를 구분하고 두 분수를 각각의 다른 전체에 제시하는 반면 싱가포르는 하나의 같은 전체에 한꺼번에 제시한다는 것이다.

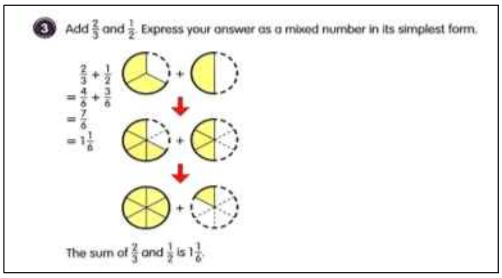
구체적으로 한국은 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$을 더하는 상황으로 이분모 분수의 덧셈을 도입할 때, 가장 먼저 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$을 각각의 전체에 표현해보게 하고 "$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$이 얼마나 될지 이야기"하도록 한다. 이는 현재 상태로는 합을 하나의 분수로 나타낼 수 없다는 것에 대해 생각해볼 기회를 제공할 수 있다는 점에서 좋은 발문이라고 볼 수 있다. 그러나 교과서에는 말풍선으로 "분모가 다른 분수끼리는 어떻게 더하지?(교육부, 2017d, p. 102)"라고 제시할 뿐이지 왜 분모가 다른 분수끼리 더하지 못하는지에 대한 구체적인 발문은 제시되어 있지 않다. 또한 덧셈 결과인 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$이 하나의 양으로 제시되지 않았기 때문에 학생들이 이에 대해 직접적으로 불편함을 느끼기에는 어려움이 있을 수 있다. 또한 다음 활동에서 바로 통분을 하도록 제시하고 수치적으로 통분을 한 후에 각각을 다시 그림에 색칠하여 나타내도록 하지만 통분을 하는 이유를 구체적으로 제시하지 않고 있다.

<table>
<tr><th>한국</th><th>싱가포르</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>(a) 이분모 분수의 덧셈 도입(교육부, 2017d, p. 102)</td><td>(b) 받아올림이 없는 관련된 진분수의 덧셈 도입(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2016, p. 67)</td></tr>
</table>

[그림 IV-7] 한국과 싱가포르에서 이분모 분수의 덧셈을 할 때 제시한 모델

싱가포르에서도 3B에서 '관련된 분수'의 덧셈을 다룰 때 통분을 하는 이유와 필요성에 대해 탐구해볼 수 있는 발문이 직접적으로 제시되어 있지 않다. 하지만 [그림 IV-7]의 (b)와 같이 받아올림이 없는 이분모 진분수의 덧셈 상황에서 $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{4}$을 하나의 전체에 같이 표현하면서 시각적으로 두 번째 수준의 단위만으로 그 합을 나타내기 어렵다는 것을 쉽게 보여준다. 이는 공통 측정 단위의 필요성과 직접적으로 연결할 수 있으므로 매우 중요한 과정이라고 볼 수 있다.

한국과 싱가포르는 위와 같이 두 분수의 양을 표현하는 데 약간의 차이점이 있었지만 전반적으로 두 나라 모두 공통 측정 단위의 필요성과 관련하여서는 시각적 표현을 활용하여 학생들에게 스스로 탐구해볼 기회를 제공하지 않는다. 싱가포르에서도 4B에서 이분모 분수의 덧셈을 다룰 때에는 [그림 IV-8]과 같이 받아올림이 있는 덧셈 상황을 다루므로 두 번째 수준의 단위끼리 서로 합한 상태를 나타내기 어렵다. 또한 5A에서는 [그림 IV-9]와 같이 이분모 분수 덧셈의 알고리즘을 더욱 자세하게 설명하지만 두 분수의 공통분모를 만드는 이유에 대해 구체적으로 다루고 있지 않으며 모델은 이미 통분이 되어 있는 합을 제시하기 위해 사용하고 있다.

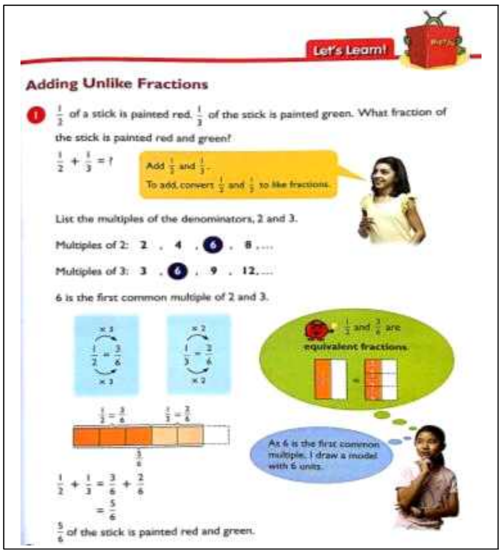


[그림 IV-8] 싱가포르 4B에서 제시한 받아올림이 있는 이분모 진분수의 덧셈 모델 (Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2016, p. 39)

다. 재귀적 분할과 알고리즘 연결

이분모 분수의 덧셈 알고리즘은 두 분수를 통분하여 동치분수를 만들기 위해 재귀적 분할을 하는 과정에서부터 다루어진다. 한국과 싱가포르

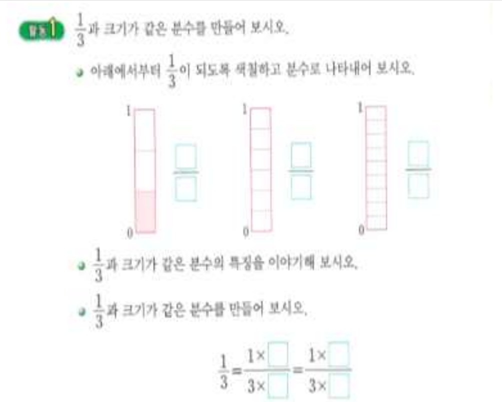
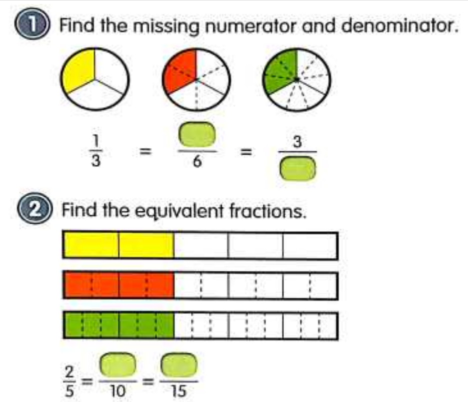
에서 분할과 알고리즘을 어떻게 연결하고 있는지를 살펴본 결과, 큰 차이점이 나타났다.



[그림 IV-9] 싱가포르 5A에서 제시한 받아올림이 있는 이분모 진분수의 덧셈 모델 (Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2015, p. 71)

한국은 [그림 IV-10]과 같이 모든 분수를 등분할하여 제시한 반면에 싱가포르는 동치분수를 나타내기 위해 등분할한 양을 재분할하는 과정이 드러난다. 이 경우에 한국은 모델에 등분할 과정을 모두 점선으로 표현하고 싱가포르는 처음에 등분할된 양을 나타낼 때에는 실선으로, 재분할 과정을 나타낼 때에는 점선으로 표시한다.

구체적으로 한국은 [그림 IV-10]의 (a)와 같이 5학년 1학기에서 $\frac{1}{3}$과 크기가 같은 분수를 각각의 전체 단위에 색칠해보도록 한다. 이때 각각의 모델은 모두 점선으로 등분할되어 있다. 모델에 색칠하는 활동을 통해 $\frac{1}{3}$과 크기가 같은 분수의 특징을 이야기하도록 하고 수치적으로 분모와 분자에 같은 수를 곱하는 활동으로 연결한다. 이 과정에서 $\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{1\times3}{3\times3}$이라는 것을 수치적으로 확인하지만 시각적 표현 상에 위의 과정이 명확하게 드러나지는 않는다. $\frac{2}{6}$는 전체를 6등분하고 2개를 색칠한 것으로, $\frac{3}{9}$도 전체를 9등분하고 3개를 색칠한 것으로만 제시하고 있기 때문에 원래의 $\frac{1}{3}$의 분모와 분자에 같은 수를 곱하

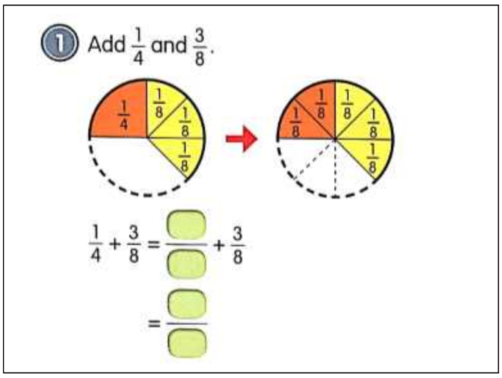
한국	싱가포르
 (a) 점선을 이용하여 동치분수를 나타낸 모델(교육부, 2017d, p. 74)	 (b) 실선과 점선을 이용하여 동치분수를 나타낸 모델(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2016, p. 58)

[그림 IV-10] 한국과 싱가포르에서 제시한 동치분수에 관한 시각적 표현

는 과정이 나타나지 않는다. 이때 시각적 표현은 양을 확인하는 정도로 활용된다. 통분을 할 때에도 예를 들어, $\frac{3}{4}$과 $\frac{7}{9}$을 분모의 크기를 같게 하기 위해 분모의 곱을 공통분모로 하여 통분을 하도록 제시하고 시각적 표현을 활용하기 보다는 수치적으로 분모의 곱을 통해 통분을 하도록 한다. 이분모 분수의 덧셈에서도 마찬가지로 [그림 IV-7]의 (a)를 보면 알 수 있듯이 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$을 모두 점선으로 등분할하여 표현한 후에 두 분수를 통분한 $\frac{2}{6}$와 $\frac{3}{6}$도 각각 전체 단위를 점선으로 등분할하여 표현한다. 이러한 과정을 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$와 연결하는데 이때의 시각적 표현은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$이라기 보다는 $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$에 대한 표현이라고 볼 수 있다.

이에 비해 싱가포르는 [그림 IV-10]의 (b)와 같이 3B에서 동치분수를 나타내기 위해서 각각의 분수를 서로 다른 대상에 제시하고 등분할을 실선으로, 재분할을 점선으로 제시하여 양이 같다는 것을 매우 쉽게 확인할 수 있다. 예를 들어 $\frac{2}{6}$는 전체를 실선으로 3등분하고 각각의 $\frac{1}{3}$단위를 다시 점선으로 2등분하여 $\frac{1}{3}$이기도 하면서 $\frac{2}{6}$이기도 한 양을 잘 나타내고 있다. 이는 $\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{1\times3}{3\times3}$을 시각적 표현과 연결하여 설명하기에 매우 좋은 방법이라고 볼 수 있다. 각각의 $\frac{1}{3}$을 재분할하여 시각적으로 나타내고 이를 $\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}=\frac{2}{6}$이라는 식으로 연결할 수 있다. 여기에는 $\frac{1}{3}$의 분모와 분자에 2를 곱하는 과정이 잘 나타나고, 분모와 분자에 똑같이 2를 곱하는 것이 분모, 분자의 양이 2배로 늘어나는 것이 아니라 $\frac{1}{3}$보다 작은 측정 단위로 나타내기 위해 같은 양을 분할하여 나타낸 것이라는 것 또한 설명이 가능하다. 그러나 싱가포르 교과서에서 재분할 과정을 이분모 분수의 덧셈 알고리즘과 연결하고자 하는 구체적인 시도는 찾기 힘들다.

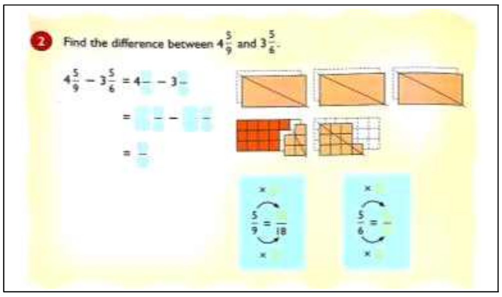
싱가포르에서 실선과 점선으로 등분할 및 재분할 과정을 구분하여 표현하고 있지만 실선과 점선의 사용이 일관적이지는 않다. [그림 IV-11]과 같이 $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$을 할 때에는 실선은 제시된 분수양을 분할한 것으로, 점선은 남은 양(전체 단위에서 제시된 양이 아닌 부분)을 분할한 것을 나타내기 위해 사용하기도 한다. 이 경우는 공통 측정 단위가 전체의 얼마인지를 알아보기 위해서 전체에서 남은 부분도 분할할 필요가 있다는 것을 나타낸다는 점에서 의미가 있지만 각각의 양을 다양한 수준의 단위로 복합적으로 나타내기에는 어려움이 있다.



[그림 IV-11] 싱가포르 3B에서 점선과 실선을 다른 방법으로 사용한 예(Kheong, Ramakrishnan, & Choo, 2016, p. 78)

또한 두 번째 수준의 단위 중에서 더 작은 수준의 단위를 측정단위로 하여 측정할 수 있는 상황이 아닌 새로운 측정 단위를 구해야 하는 4B, 5A에서는 재분할 과정이 명확하게 드러나지

않는다. 예를 들어 [그림 IV-12]와 같이 이분모 대분수의 뺄셈에서 시각적 표현은 계산한 결과를 양적으로 확인하기 위해 사용된다. 특히 이때 모델은 $4\frac{5}{9}$라기 보다는 $4\frac{10}{18}$을 나타낸 것이다.



[그림 IV-12] 싱가포르 5A에서 점선과 실선을 다른 방법으로 사용한 예(Kheong, Soon, & Ramakrishnan, 2015, p. 92)

V. 결론 및 논의

본 논문은 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대한 구체적인 지도 방향과 지도 가능성을 탐색하기 위하여 한국과 싱가포르의 교과서를 분석하였다. 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어를 지도하기 위한 시사점을 중심으로, 싱가포르 교과서의 장점에 초점을 두어 한국 교과서에 반영할 수 있는 방안을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 지도 계열 및 지도 시기와 관련하여 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어인 전체 단위의 고정성, 공통 측정 단위의 필요성, 재귀적 분할 및 알고리즘 연결은 분수의 크기 비교, 동치분수, 분수의 덧셈 전반에 걸쳐서 지도해야 하며 보다 체계적으로 지도해야 한다. 싱가포르는 주로 한 단원에서 분수의 개념과 연산을 같이 다루고 분수를 도입하는 2학년에서부터 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 다룬다. 특히 3학년에서 분모가 서로 약수와 배수 관계에 있는 '관련된 분수'의 덧셈과 뺄셈을 통해 보다 간단한 상황에서 측정 단위를 통일하여 합을 하나의 분수로 만드는 경험을 충분히 제공한다. 또한 2, 3학년에서는 받아올림이나 받아내림이 없는 덧셈과 뺄셈만 다루고 학년이 올라갈수록 점차 심화시킨다. 정영옥 외(2016)는 수학 교육과정 국제 비교 분석을 통해 대부분의 국외 교과서가 나선형 교육과정을 적용하여 같은 내용을 여러 학년에 걸쳐 반복하고 확장하고 있으므로 이러한 방법의 긍정적인 측면에 대해 논의할 필요가 있다고 하였다. 이분모 분수 덧셈의 핵심 아이디어 역시 이분모 분수의 덧셈에서 새롭게 다루어지는 것들이 아니므로 여러 학년에서 지속적으로, 체계적으로 다루어질 필요가 있다.

둘째, 전체 단위의 고정성과 관련하여 학생들에게 직접 모델을 그려서 문제를 해결할 기회를 제공해야 한다. 또한 전체 단위가 같지 않은 상황에서 절대적인 양을 비교하거나 이분모 분수의 덧셈을 하는 것이 적절한지에 대해 직접 판단해보는 경험을 제공해야 한다. 한국과 싱가포르에서 공통적으로 제시하고 있는 방법은 문제 상황이나 시각적 표현을 이용하여 전체 단위가 같다는 것을 확인할 수 있지만 전체 단위가 왜 같아야 하는지 그 이유나 필요성에 초점을 두어 직접적으로 다루기에는 부족함이 있다. 하지만 싱가포르와 같이 시각적 표현을 그려보게 하거나, 전체 단위가 다른 상황을 제시하여 이에 대해 직접 판단해보도록 한다면 학생들은 해당 주제를 학습하면서 전체 단위의 고정성에 집중할 수 있을 것이다. 특히 이분모 분수의 덧셈에서 학생들은 분모를 전체 단위의 크기라고 생각하고 분모가 서로 다를 경우에는 전체 단위의 크기도 다르다고 생각하는 경향이 있으므로(김미영, 백석윤, 2010; 이지영, 방정숙, 2016b; Izsák, Tillema, & Tunç-Pekkan, 2008), 이를 보다 적극적으로 지도할 필요가 있다.

셋째, 공통 측정 단위의 필요성과 관련하여 두 번째 수준의 단위끼리 서로 합해진 상황을 모델로 제시하여 현재의 단위로는 합을 하나의 분수로 나타낼 수 없음을 직관적으로 인식할 수 있도록 도와야 한다. 또한 모델과 함께 두 번째 수준의 단위만 가지고는 합을 하나의 분수로 나타낼 수 없는 이유를 묻는 직접적인 발문을 제시하여 공통의 측정 단위가 필요하다는 것을 학생들이 찾을 수 있도록 해야 한다. 이분모 분수의 덧셈에서 공통 측정 단위가 왜 필요한지는 통분을 하는 이유와 직접적으로 연결되기 때문에 매우 중요한 아이디어이다. 하지만 두 나라에서는 교과서에 통분을 하는 이유와 필요성에 대해 생각해 볼 기회를 직접적으로 제공하지 않는다. 다만 싱가포르에서는 두 번째 수준의 단위로만 표현된 합을 그림으로 제시하여 그 양이 얼마인지를 생각해볼 기회를 제공하고 있다. 학생들은 이러한 표현을 통해 새로운 단위를 이용하여 합을 측정해야 한다는 것을 인식할 수 있을 것이다. 이러한 시각적 표현과 함께 그에 대해 판단해볼 기회를 명시적으로 제공한다면 이분모 분수의 크기 비교 및 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈을 개념적으로 이해하는 데 도움이 될 것이다.

넷째, 재귀적 분할 및 알고리즘 연결과 관련하여 시각적 표현에 실선과 점선으로 구분하여 등분할과 재분할 과정을 각각 나타낼 필요가 있다. 또한 이러한 재분할 과정을 이분모 분수의 덧셈 알고리즘과 연결하여 각각의 분수의 분모와 분자에 같은 수를 곱하는 것이 무엇을 의미하는지를 이해할 수 있도록 도와야 한다. 등분할된 양을 재분할하는 것은 이분모 분수 덧셈의 알고리즘과 관련하여 매우 중요한 의미를 갖는다. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$을 예로 들어 설명하면 전체를 3등분한 후에 각각의 $\frac{1}{3}$단위를 재분할하면 이제 그 양은 $\frac{1}{3}$이면서 $\frac{2}{6}$인 양이 된다. 또한 이 과정에서 동치분수를 만들 때 분수의 분모와 분자에 같은 수를 곱하는 것이 사실은 재분할 과정이라는 것을 인식하고 $\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}$에서 절대적인 양은 변하지 않는다는 것을 모델을 통해 확인할 수 있다. 이는 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{3\times2}+\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$로 이분모 분수의 덧셈 알고리즘과 직접적으로 연결된다. 이지영과 방정숙(2016b)의 연구에서 많은 학생들은 이분모 분수의 덧셈에서 $\frac{1}{3}=\frac{1\times2}{3\times2}$에서 분모 3에 2를 곱하는 과정이 전체 단위가 2배로 늘어나는 것이고 분자 1에 2를 곱하는 과정도 실제 양이 2배로 늘어나는 것이라고 생각하였다. 이를 통해 이분모 분수의 덧셈에서 동치분수를 만들 때 분모와 분자에 같은 수를 곱하는 과정이 분수의 양 자체를 늘리는 것이 아니라 재분할 과정임을 명시적으로 지도해야 한다는 것을 알 수 있다. 따라서 싱가포르에서 제시한 것과 같이 등분할을 실선으로, 재분할을 점선으로 구분하여 이러한 재분할 과정을 이분모 분수의 덧셈 알고리즘과 연결하여야 한다. 또한 재분할에 그치지 않고 세 가지 수준의 단위 사이의 관계를 이해하고 각각의 단위를 유연하게 활용할 수 있는 재귀적 분할로 나아갈 수 있도록 도울 필요가 있다.

본 연구의 결과는 이분모 분수의 핵심 아이디어를 교과서 및 교수·학습 과정에서 구체적으로 어떻게 다룰 수 있는지에 대한 시사점을 제공한다. 이를 통해 초등학교 수학 학습에서 이분모 분수의 덧셈과 관련된 내용이 보다 체계적이고 명시적으로 지도되기를 기대한다.

참고문헌

강홍규(2013). 한국의 초등수학 교과서에 나타나는 분수의 개념과 모델의 양상 분석. **한국초등수학교육학회지, 17**(3), 431-455.

교육부 (2017a). **수학 3-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (2017b). **수학 3-2**. 서울: 천재교육.

교육부 (2017c). **수학 4-1**. 서울: 천재교육.

교육부 (2017d). **수학 5-1**. 서울: 천재교육.

김미영, 백석윤(2010). 분수 덧셈, 뺄셈에서 나타나는 인지적 장애 현상 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 241-262.

방정숙, 이지영(2009). 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. **한국초등수학교육학회지, 13**(2), 285-304.

이지영, 방정숙(2016a). 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고: 단위 추론 및 재귀적 분할을 중심으로. **학교수학, 18**(3), 625-645.

이지영, 방정숙(2016b). 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대한 초등학교 5학년 학생들의 이해. **학교수학, 18**(4), 793-818.

정영옥, 장경윤, 김구연, 권나영, 김진호, 서동엽 외 5인(2016). 수학 교육과정 국제 비교 분석 연구: 미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주의 중학교와 고등학교 교육과정을 중심으로. **수학교육학연구, 26**(3), 371-402.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 490-496.

Curriculum Planning and Development Division (2012). *Primary mathematics teaching and learning syllabus*. Singapore: Ministry of Education.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(1), 33-62.

Kheong, F. H., Ramakrishnan, C., & Choo, M. (2015). *My pals are here! Maths 2B*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Kheong, F. H., Ramakrishnan, C., & Choo, M. (2016). *My pals are here! Maths 3B*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2015). *My pals are here! Maths 5A* (2nd ed.). Singapore: Marshall Cavendish Education.

Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2016). *My pals are here! Maths 4B*. Singapore: Marshall Cavendish Education.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3th ed.). New York: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 2000년 출판).

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 419-441.

A Comparative Analysis of Graphical Representations Related to Addition of Fractions in Elementary Mathematics Textbooks of Korea and Singapore

Lee, Jiyoung (Paldal Elementary School)
Pang, JeongSuk (Korea National University of Education)
Seo, Eunmi (Graduate School, Korea National University of Education)
Kim, Kyeonghun (Graduate School, Korea National University of Education)

This paper compared and contrasted Korean and Singaporean textbooks in order to explore the direction and possibility of teaching the *big ideas* related to the addition and subtraction of fractions with different denominators proposed by Lee & Pang (2016a). Firstly, we examined the teaching sequences related to the addition of fractions with different denominators in a series of elementary mathematics textbooks of Korea and Singapore. We then analyzed what types of representations are used and how the representations are presented for the big ideas related to the addition of fractions with different denominators. The results of the analysis showed that the contents related to fraction addition are addressed more gradually and systematically in Singaporean textbooks compared to Korean counterparts. The graphical representations appeared in the Singaporean textbooks provide specific implications for teaching the big ideas of the addition of fractions with different denominators. Based on such implications, we expect that the big ideas related to the addition of fractions with different denominators will be addressed explicitly and systematically in Korean textbooks.

* Key Words : The addition and subtraction of fractions(분수의 덧셈과 뺄셈), Graphical representations(시각적 표현), Fixed whole unit(고정된 전체 단위), Necessity of common measurement units(공통 측정 단위의 필요성), Recursive partitioning(재귀적 분할), Analysis of textbooks(교과서분석), Singaporean mathematics textbooks(싱가포르 수학 교과서)

논문접수 : 2017. 7. 10
논문수정 : 2017. 8. 3
심사완료 : 2017. 8. 16