대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 3, 431 ~ 449. Aug 2017

각의 크기에 따른 삼각형의 분류 지도 방안

남 지 현* · 장 혜 원**

각의 크기에 따른 삼각형의 분류를 통해 정의되는 예각삼각형과 둔각삼각형은 서로 다른 논리 문제를 지니므로 학생들의 이해에 어려움을 초래한다. 본 연구는 이와 같은 어려움을 극복하기 위해 각의 크기에 따른 삼각형의 분류를 위한 지도 방안을 모색하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 선행 연구 및 우리나라 수학 교과서의 관련 내용을 분석하여, 교수학적 시사점을 도출하였다. 이를 바탕으로 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 지도 방안을 고안하였고, 4학년 학생들에게 적용하여 학생들의 반응 및 이해 정도를 분석하였다. 수업 후, 학생들의 활동지 및 검사지를 검토·분석하여 고안한 지도 방안의 효과성을 살펴보고, 학생들이 경험하는 어려움의 핵심인 논리 문제에 대한 해결 방안을 논의한다.

Ⅰ. 서론

초등학교 수학에서 도형 영역은 수와 연산 영역과 더불어 가장 기본적이며 필수적이다. 자연, 예술, 건축, 공간 탐험, 지도 읽기 등의 실생활 문제를 해결하는 데 중요할 뿐만 아니라 수학의 다른 영역의 문제 해결에 유용한 역할을 하는 등 수학적 연결성을 경험할 수 있다. 이와 더불어 기본 도형의 개념 및 성질에 대한 학습은 수학 지식의 추상성, 이상성, 논리성 등을 경험하고, 귀납적, 연역적, 유추적 사고의 신장을 뒷받침한다.

학교수학에서 다루고 있는 도형은 크게 입체도형과 평면도형이 있다. 그 중 평면도형은 초등학교 도형 내용 중 많은 부분을 차지하며, 학생들이 도형의 기본 개념 및 성질을 이해하고 공간감각을 발달시키는 데 있어 중요한 역할을 한다. 평면도형의 지도는 일반적으로 탐구하기, 정의하기, 성질 찾기, 관계 찾기 및 적용하기의 순서로 이루어진다(방정숙, 2010). 즉 활동을 통해 도형을 충분히 탐구하고, 속성을 찾아 개념 및 성질을 파악하며, 이를 토대로 도형의 관계를 추론하도록 하는 것이다. 그 중 도형의 탐구를 통한 분류하기 활동은 개념 형성과 직결되는 중요한 활동이며(노은환, 강정기, 2015; 신희경, 백석윤, 2004), 초등학교 수학 교과서에서도 다양하게 구현된다. 예를 들어, 2009 개정 교육과정에 따른 교과서(이하 2009 개정 교과서라 칭함. 다른 교과서도 동일한 방식으로 칭할 것임.)에서, 1학년 1학기에는 입체도형의 모양을, 2학기에는 평면도형의 모양을 분류하는 활동이 있고, 2학년 1학기에는 평면도형을 삼각형, 사각형, 원으로 분류하여 각 도형을 정의한다. 또한 3학년 1학기에는 직각이 있는 삼각형과 직각이 없는 삼각형을 구분하는 활동을 통해 직각삼각형을 도입한다.

* 서울신내초등학교, todanji@hanmail.net (제1 저자)
** 서울교육대학교, hwchang@snue.ac.kr (교신저자)

우리나라뿐만 아니라 싱가포르 교과서도 도형의 개념 및 도형 사이의 관계의 구조화를 위해 도형의 분류 활동을 강조하고 있다(최병훈, 방정숙, 송근영 외, 2006). 따라서 다양한 분류 활동은 학생들이 수학의 개념적 구조를 더 깊게 이해하고 나아가 문제 해결 능력을 포함한 수학적 힘을 키울 수 있도록 해준다는 점에서 그 중요성을 지닌다(Bassarear, 2001).

본 연구에서 다루는 분류 대상은 삼각형이고 분류 기준은 각의 크기이다. 2009 개정 교과서에서는 각의 크기에 따라 삼각형을 분류하고 분류한 삼각형의 이름을 지어본 후, 각 삼각형의 정의를 제시하고 있다. 즉 분류 활동에 기초한 예각삼각형과 둔각삼각형의 개념 학습에 관한 것이다. 그러나 예각삼각형 및 둔각삼각형의 개념에 관한 초등학생들의 이해를 조사한 다수의 연구(노영아, 안병곤, 2007; 김경미, 김현은, 2010; 최수임, 김성준, 2012; 임지현, 최창우, 2016 등) 결과는 4학년 일부 학생들에게서 두 도형의 이해가 부족함을 드러낸다. 특히 예각삼각형 및 둔각삼각형에 대한 학생들의 오답률이 높으며, 여러 가지 오개념을 드러내는 것으로 논의됨에 따라 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 및 예각삼각형, 둔각삼각형의 개념 지도의 적절성에 대한 검토가 요구된다.

이에 본 연구는 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 지도를 위한 대안적 방안을 고안하여 추후 교과서 개발 및 지도 실제에 유의미한 시사점을 제공하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 구체적인 연구 문제로 다음의 두 가지를 설정하였다.

1. 예각삼각형과 둔각삼각형 지도 시 각의 크기에 따른 삼각형의 분류를 위한 바람직한 지도 방안은 무엇인가?
2. 고안한 방안을 적용한 학생들의 이해 및 반응은 어떠한가?

선행 연구를 중심으로 예각삼각형과 둔각삼각형에 대한 학생들의 이해 및 오류를 파악하고 역대 교육과정과 교과서에서 예각삼각형, 둔각삼각형의 지도 시기 및 방법을 비교하여 분석한 후, 그 결과를 토대로 새로운 지도 방안을 고안할 것이다. 지도 방안의 적절성을 검토하기 위해 이를 현재 관련 내용의 지도시기에 해당하는 초등학교 4학년 학생에게 적용하고, 그 결과를 토대로 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 활동과 관련한 교과서 집필 및 실제 지도 시 고려할 몇 가지 시사점을 제공할 것이다.

II. 이론적 배경

1. 삼각형의 분류에 대한 선행 연구 고찰

평면도형은 학교수학의 중요한 영역이기 때문에 이와 관련한 많은 연구가 있어 왔으나, 삼각형을 주제로 국한하여 이루어진 연구는 많지 않다. 본 연구에서는 평면도형에 대한 연구의 일부로 이루어진 학생들의 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형의 이해에 관한 연구 및 삼각형의 분류의 지도 방법을 다룬 연구를 검토하여 본 연구에의 시사점을 찾아보고자 한다.

여러 가지 삼각형에 대한 학생들의 이해 정도를 조사·분석한 선행 연구로 노영아, 안병곤(2007), 김경미, 김현은(2010), 최수임, 김성준(2012), 임지현, 최창우(2016) 등이 있다. 노영아, 안병곤(2007)은 4학년 학생 205명을 대상으로 도형 영역에서의 이해도를 조사하여, 학생들이 보이는 오류의 유형 및 오류 원인을 알아보았다. 그 중 본 연구와 직접 관련이 있는 예각삼각형과 둔각삼각형의 이해도가 낮게 나타났다. 주어진 삼각형을 보고 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형으로 분류하는 문항에서 연구 대상의 41%

가 오답을 했으며, 예각삼각형과 둔각삼각형을 그리는 문항에서도 20%의 오답률을 보였다. 삼각형을 분류하는 문항에서는 예각삼각형과 직각삼각형을 혼동하는 오류가 가장 많았고(75%), 예각삼각형과 둔각삼각형을 그리는 문항에서는 예각삼각형을 예각으로 그리는 오류 및 예각삼각형과 직각삼각형을 혼동하는 오류를 보였다. 연구자는 이에 대한 원인으로 정리나 정의의 부적절한 사용을 꼽았으며, 이로 인해 학생들은 도형과 관련된 개념과 성질에 대한 이해가 정확하지 않고, 분석적 탐구보다는 시각적 판단에 의존하여 도형을 인식한다고 보았다. 임지현, 최창우(2016)의 연구에서도 이와 비슷한 오류가 발견되었다. 학생들은 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형을 혼동하는 오류를 많이 보였으며, 연구자는 이를 부정확한 개념과 정의에 의한 오류로 범주화하였다.

최수인, 김성준(2012)의 연구에서는 예각삼각형, 둔각삼각형의 개념에 대한 학생들의 이해를 구체적으로 볼 수 있다. 초등학교 4학년 25명의 학생에게 도형의 기본 개념을 언어적 진술로 정의할 것을 요구하였다. 그 결과 예각삼각형의 정의에서는 68%, 둔각삼각형에서는 60%의 오답률을 보여 두 삼각형에 대한 이해도가 매우 낮음을 확인하였다. 예각삼각형의 오답으로는 삼각형의 세 각 중 한 각 또는 두 각이 예각이면 예각삼각형이라고 대답한 경우가 가장 많았다. 이에 대해 연구자는 '예각삼각형'이라는 용어에서 '예각'과 '삼각형'을 따로 분리한 상태로 예각삼각형을 받아들인 결과로 해석하였다. 둔각삼각형의 경우 예각과 달리 각의 존재성이 결정적 속성인 덕분에 각의 개수로 인한 오류는 발견되지 않았으나, 둔각을 '90도 이상인 각'으로 보아 둔각에 대한 정확한 개념 부족이 오류의 원인으로 나타났다.

이 밖에 김경미, 김현은(2010)의 연구에서는 몇몇 학생이 비직관적 삼각형인 뾰족한 삼각형 또는 둔각삼각형을 삼각형이 아닌 것으로 판단하는 오류를 보였다. 이러한 모양이 삼각형이 아니라고 판단한 근거는 '삼각형이 길기 때문에'와 같이 전체적인 모양, 도형의 크기, 방향 등의 시각적 식별이 도형의 본질적 속성에 우선되었기 때문이다.

위의 연구를 종합하여 보면 학생들은 예각삼각형과 둔각삼각형의 정확한 개념 및 개념이미지를 갖고 있지 못한 것으로 보이며, 이와 관련한 여러 오류 및 오개념을 나타내었다. 오류의 원인으로 개념의 정확한 이해 부족으로 발생한 오류가 가장 많았는데, 특히 예각삼각형과 둔각삼각형의 선수학습 요소가 되는 예각 및 둔각 개념에 대한 이해가 부족한 것으로 보인다. 더불어 예각삼각형은 세 각이 모두 예각이어야 함에도 불구하고 한 각 또는 두 각만을 보고 예각삼각형이라고 식별하는 등의 오류는 각의 크기에 따라 삼각형을 판별할 때 세 각을 모두 살펴보지 않는 잘못된 인식 과정을 보여준다. 둔각삼각형을 삼각형의 일반적인 형태로 생각하지 않거나, 예각삼각형과 직각삼각형을 구분하지 못하는 것은 학생들이 분석적 판단보다는 시각적 식별에 더 큰 영향을 받음을 알 수 있다.

선행 연구에서 제안된 지도 방안은 그 동안 도형 영역 안에서 이루어진 바와 크게 다르지 않다. '하나의 개념이미지에 고착화되지 않도록, 다양한 예를 제시한다.', '구체적 활동의 비중을 늘려야 한다.', '도형의 정확한 개념을 갖도록 정확한 용어를 사용하여 지도되어야 한다.' 등의 지도 방안이 논의되어 왔다.

이에 비해 다음의 두 연구에서는 각의 크기에 따른 삼각형의 분류를 지도하는 데 있어 새로운 관점을 보여준다. 먼저 노은환, 강정기(2015)는 구성주의 관점에서 삼각형의 분류에 관한 교과서 및 교사용지도서를 분석하였다. 분석 결과,

교과서의 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 활동이 구성주의 관점을 취하나 활동의 급진적 전개로 인해 학생의 관점을 충분히 반영하지 못하고 있다고 하였다. 또한 교사용지도서에서 안내하고 있는 '각의 크기에 따라 삼각형을 분류하려고 해요. 어떻게 분류할 수 있는지 모둠별로 이야기를 나누어 보세요.'와 같은 교사의 발문이 삼각형에서 특정 한 각을 보고 삼각형을 분류하는 상황을 초래할 가능성이 크다고 지적하였다. 이를 개선하기 위해 분류 활동 과정에서 충분한 토의의 기회를 제공해야 할 필요성을 주장하였다. 홍갑주, 박지환(2015)은 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형의 내용을 중심으로 우리나라의 교육과정 별 교과서, 중등 교과과정 및 유클리드 원론, 외국 교과서를 분석하였다. 그 결과, 예각삼각형과 둔각삼각형이 4학년에 처음 등장한 이후에 5학년의 삼각형의 넓이 및 중등 교과과정의 삼각형 명제의 증명에 등장하나, 내용 전개상 필수적이기보다는 약속해 두면 내용의 설명이 간단해지는 편리한 이름으로서 의미만 가진다는 점에서 수학적, 지각적 필연성을 가지는 것은 아니라는 결론을 내었다. 더불어 이 내용을 초등학교에서 다루기 위해서는 추론과 탐구의 주제로서 다루는 것이 바람직하다고 하였다.

이상의 선행 연구 결과에 기초할 때, 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 활동 과정에서 충분한 논의와 토의가 필요하며, 삼각형의 세 각 모두에 주목할 수 있도록 활동을 구성할 필요가 있음을 시사한다. 또한 해당 주제를 탐구의 대상으로 다룸으로써 학생들의 명확한 개념 이해 및 분석적 추론 능력을 발달시키는 데 도움이 될 것으로 기대된다.

2. 우리나라 교육과정 및 교과서의 예각삼각형과 둔각삼각형 지도

우리나라 1차부터 5차까지의 교육과정에서는 이등변삼각형, 정삼각형과 같이 변의 길이에 따른 삼각형의 분류를 지도하였고, 각에 대해서는 직각삼각형만 나타나있다. 예각삼각형과 둔각삼각형이 처음 도입된 시기는 6차 교육과정이었으며, 최근의 2015 개정 교육과정까지 큰 변화 없이 유지되어 왔다.

먼저 각 교육과정기의 교과서에서 예각삼각형, 둔각삼각형의 지도시기를 살펴보면 <표 II-1>과 같다. 6차에서만 4학년 2학기에 지도되었고, 그 이후에는 모두 4학년 1학기에 지도되었다. 4학년이라는 지도 시기의 선정은 예각삼각형과 둔각삼각형의 이해를 위해서는 도형의 각 속성에 대한 탐구가 필요하므로 기하학적 사고의 제 2수준이 가능한 시기여야 하며, 예각과 둔각 등 관련 내용 요소의 지도 계열성을 고려한 결과로 해석된다.

각각의 교육과정에 따른 교과서의 내용을 살펴보면 아래와 같다.

6차 교과서(교육부, 1996)에서는 3개의 삼각형을 제시한 후, 삼각형의 세 내각의 합을 이용하여 나머지 한 각의 크기를 구하고 이를 예각, 직각, 둔각으로 구분하는 활동을 제시하였다. 그 후 각각의 정의에 해당하는 삼각형(세 각이 모두 예각인 삼각형, 한 각이 둔각인 삼각형)을 찾은 후, 이를 언어적으로 정의하였다.

7차 교과서(교육부, 2001)에서는 5개의 삼각형을 제시하였고, 삼각형에서 예각, 직각, 둔각을 알아보라고 하였다. 그 후, 이미 학습한 직각삼

<표 II-1> 예각삼각형과 둔각삼각형의 지도 시기

교육과정	6차	7차	2007 개정	2009 개정
지도 시기	4학년 2학기	4학년 1학기	4학년 1학기	4학년 1학기

각형을 먼저 구분한 후, 6차와 마찬가지로 각각의 정의에 해당하는 삼각형을 찾고, 이를 언어적으로 정의하였다.

2007 개정 교과서(교육과학기술부, 2010)에서는 이전 교과서와는 다르게 예각삼각형과 둔각삼각형을 각각 다른 차시에서 제시하고 있다. 예각삼각형의 경우 8개의 삼각형에서 세 각이 모두 예각인 삼각형을 찾고 이름을 지어 본 후, 이를 정의하고 있다. 둔각삼각형도 이와 비슷한 흐름으로 진행된다. 둔각이 있는 삼각형을 찾아보고, 이름 짓기 활동 후, 언어적 정의로 이어진다. 다만 둔각이 있는 삼각형을 찾은 후, 해당 삼각형에 둔각이 몇 개 있는지 찾아봄으로써 둔각삼각형에 둔각이 1개만 있음을 강조하였다.

2009 개정 교과서(교육부, 2014)에서는 8개의 삼각형이 제시되고, 학생들은 이를 각의 크기에 따라 분류해본다. 분류한 삼각형의 이름을 지어보고 이를 언어적으로 정의한다. 언어적 정의 바로 아래 '예각이 있는 삼각형이라고 모두 예각삼각형은 아니에요.', '둔각삼각형에는 둔각이 한 개만 있어요.'등의 말을 삽화로 제시하여, 각 삼각형의 세 각의 구성에 대해 생각해 볼 수 있는 기회를 제공한다.

이를 종합하면, 6차, 7차, 2007 개정 교과서에서는 분류 기준이 주어진 상황으로, 학생 스스로 분류 방법을 생각하도록 하지 않는다는 점에서 진정한 의미의 분류 활동이 이루어지지 않았다. 분류 활동이라기보다는 개념을 발문으로 제시하고 이에 해당하는 도형을 찾는 단순한 활동으로 이루어졌다는 지적이 있었다(김수미, 정은숙, 2005). 방정숙(2010)에 따르면 이와 같은 개념의 직접적 제시는 학생들이 해당 개념을 익히는 데 효율적일 수 있으나, 수학적 사고를 통해 도형의 개념을 유추하고 다른 도형과의 관계를 파악하는 데 어려움이 있다. 2009 개정 교과서는 이전의 교과서와는 달리 분류 활동을 강조하였다. 각의 크기라는 분류 기준을 주었지만 학생들이 8개의 삼각형을 분류함으로써 각의 크기에 따른 삼각형의 분류는 분할적으로 이루어진다는 관계 및 각 도형의 정의를 이해하는 데 도움을 줄 것이다.

3. 삼각형의 분류에 있어 분류 방법과 논리 문제

Villiers(1994)는 다각형을 분류하는 방법을 두 가지로 제시하였다. 계층적 분류와 분할적 분류이다. 계층적 분류는 보다 특별한 개념이 보다 일반적 개념의 부분 집합이 되게 하는 것으로, 정사각형을 특별한 형태의 직사각형으로, 직사각형을 특별한 형태의 평행사변형으로 정의하는 방식이다. 분할적 분류는 개념의 다양한 하위 요소가 공유하는 부분이 전혀 없도록 하는 것으로, 이 분류에 따르면 정사각형은 직사각형이 아니고 직사각형 또한 평행사변형이 아니게 된다.

삼각형을 분류하는 방법 중 변의 길이에 따른 분류는 계층적 분류의 방법을, 각의 크기에 따른 분류는 분할적 분류를 따르게 된다. 이등변삼각형은 '두 변의 길이가 같은 삼각형', 정삼각형은 '세 변의 길이가 같은 삼각형'으로 정의하여 정삼각형을 이등변삼각형의 특별한 형태로 보는 것이다. 반면에 각의 크기에 따라 분류한 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형은 각각을 정의 짓는 속성이 어느 것도 포함관계를 갖지 않아 분할적 분류를 통해 정의하게 된다.

각의 크기에 따른 삼각형의 분류 시 분할적 분류가 이루어져야 하는 문제 이외에 학생들이 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형을 정의하는 과정 중 논리적 문제가 발생한다. 직각삼각형과 둔각삼각형은 그 정의를 특징짓는 직각과 둔각의 존재성을 충족시키면 되지만, 예각삼각형은 모두 예각이어야 하는 임의성을 지니고 있기 때

문이다. 이러한 논리적 문제로 인해 학생들이 개념 이해에 어려움을 겪을 것이라 예상되지만, 구체적 조작기 시기에 기초적인 논리적 사고가 가능하다는 연구가 있다. Kuhn(1977)은 조건적 추론에 관한 실험을 통해 구체적 조작기의 아동도 전통적인 삼단논법의 해결에 요구되는 논리적 조작 능력이 있음을 밝혔다. Fischbein(1987)은 7-8세 아동들이 일부 삼단논법에 관한 자연스러운 적성이 있다는 결론을 통해, 구체적 조작기 아동의 논리적(추리적) 직관을 설명하였다. 아동들은 이를 함의의 진리표를 통해 받아들이는 것이 아닌 아동이 갖고 있는 논리적(추리적) 직관에 의해 가능하다는 것이다. 이러한 논리적(추리적) 직관은 과학 교육과 수학 교육에서 근본적 역할을 한다고 하였다. 이는 본 연구에서의 주요 관심인 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형의 정의에 있는 논리적 문제가 논리적(추리적) 직관을 통해 극복 가능함을 함의한다.

III. 연구 방법

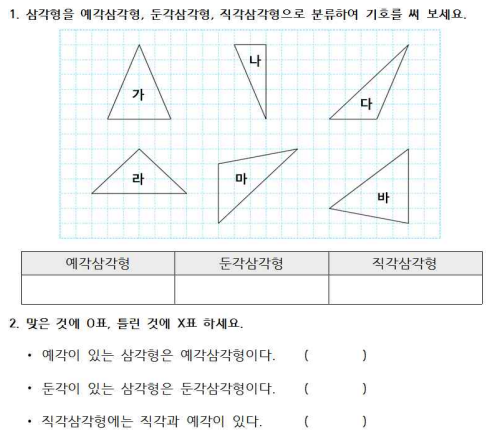
1. 연구 대상

본 연구는 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 시 논리적 문제로 인한 인식의 어려움을 극복할 수 있는 지도 방안을 고안 및 적용 후 학생들의 반응을 분석하는 것을 주요 내용으로 한다. 따라서 현재 적용중인 2009 개정 교과서에서 각의 크기에 따른 삼각형의 분류가 다루어지는 4학년을 연구 대상으로 하였으며, 이들은 4학년 1학기 4단원의 '각도와 삼각형'의 각도 및 예각과 둔각에 대한 학습을 마친 상태이다. 서울시 D교육지원청 관내에 소재한 1개교의 4개 반 학생들을 대상으로 하였으며, 지도 방안의 차이에 따른 학생들의 반응을 비교, 분석하기 위해 2개의 실험반, 2개의 비교반으로 구성하였다. 실험반은 59명, 비교반은 57명의 학생으로 구성되어 있다.

본 연구에서 고안한 지도 방안의 효과를 알아보기 위해서는 각의 크기에 따른 삼각형의 분류의 선행학습을 하지 않은 학생들을 대상으로 하는 것이 타당하나, 현실 여건 상 선행학습의 요인을 완벽히 통제할 수 없었다는 한계가 있다.

2. 각의 크기에 따른 삼각형의 이해도 검사지

검사지는 [그림 III-1]과 같이 구성하였다. 학생들의 각에 따른 삼각형 분류의 이해 양상을 알아보기 위해서는, 학생들이 각 삼각형을 어떻게 설명하는지 알아보는 것이 가장 좋은 방법이다. 그러나 4학년의 인지 발달 단계 상, 자신의 생각을 모두 글, 말 등의 언어적 표현으로 나타는 데 한계를 보이기 때문에 그림으로 주어진 삼각형을 구별하는 문항으로 구성하였다. 또한, 본 연구에서 중점을 두고 있는 논리성에 대한 인식을 살펴보고자, '예각이 있는 삼각형은 예각삼각형이다.', '둔각이 있는 삼각형은 둔각삼각형이다.', '직각삼각형에는 직각과 예각이 있다.' 등 명제의 진위를 판단하는 문항을 포함하였다.


1. 삼각형을 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형으로 분류하여 기호를 써 보세요.

가 나 다 라 마 바

예각삼각형	둔각삼각형	직각삼각형

2. 맞은 것에 O표, 틀린 것에 X표 하세요.

- 예각이 있는 삼각형은 예각삼각형이다. ( )
- 둔각이 있는 삼각형은 둔각삼각형이다. ( )
- 직각삼각형에는 직각과 예각이 있다. ( )

[그림 III-1] 검사지

3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구는 이론적 고찰로부터 얻은 시사점을 통해 교수·학습 활동을 고안하였고, 교실 수업에 이를 적용하였다. 이때, 수업 과정 및 학생들의 활동을 관찰함으로써 고안한 활동의 적절성을 검토하고, 차후 교과서 개발 및 수업 실제에의 시사점을 도출하고자 하는 것이다. 이를 위해 본 연구에서 고안한 수업안 및 2009 개정 교과서를 바탕으로 구성한 수업안으로 연구자 중 1인이 직접 수업을 실시하였다. 수업에서 활용한 활동지는, 실험반의 경우 고안한 수업안을 바탕으로 구성된 활동으로 이루어졌으며, 비교반의 경우 삼각형 범례에 있어서만 차이가 있고 발문 및 약속하기 제시 방법 등은 교과서와 동일하게 구성되었다. 비교반의 경우에도 교과서를 사용하지 않고 활동지를 제작하여 수업하였는데, 이는 실험반과 삼각형의 범례를 동일하게 제시하여 두 반이 동일한 범례를 다루도록 하려는 의도이다. 2017년 3월 27일(월) 2, 3교시에 2개의 실험반 수업을, 3월 28일(화) 2, 3교시에 2개의 비교반 수업을 각 40분간 실시하였으며, 수업 직후 10분 간 검사지를 활용한 삼각형의 이해도 검사를 실시하였다.

연구자가 녹음한 총 4차시분의 수업 상황 녹음 자료와 수합한 학생들의 활동지, 검사지를 근거로 하여 학생들의 반응을 분석하였다. 먼저 각에 대한 탐구가 학생들의 분류 방법에 영향을 미치는 지 여부를 알아보기 위해 활동지를 분석하였다. 구체적으로 활동지에 나타난 분류 결과를 범주화하여 빈도 분석하였고, 일부는 사례 분석을 실시하여 양적, 질적으로 살펴보았다. 또한, 본 연구에서 고안한 지도 원리가 학생들의 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형의 이해에 영향을 미치는 지 알아보기 위해 검사지를 분석하였다. 학생들의 응답 결과 중 정답을 1, 오답을 0으로 코딩하여 정답률을 파악하였다. 그리고 실험반과 비교반의 검사 결과가 통계적으로 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위해, 두 집단의 평균에 대한 t-검정을 실시하였다. 분석 결과에 기초하여 각에 대한 탐구 활동의 의의 및 교수학적 시사점에 대한 논의를 전개하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 수업안 고안을 위한 지도 원리

Ⅱ장의 교과서 분석 결과에서 보듯이 예각삼각형과 둔각삼각형의 지도는 개념의 직접적 제시에서 도형의 분류를 강조한 방식으로 변화되었으며, 본 연구는 후자인 학생 스스로의 분류 활동에 기초한 개념 형성에 주목하였다. 또한, 선행연구 결과에서 나타난 학생들의 오류가 예각삼각형은 세 각이 모두 예각이어야 하는 것에 반해, 직각삼각형이나 둔각삼각형은 직각이나 둔각이 있으면 된다는 성질에 대한 이해 부족에서 비롯된다는 점에 착안하였다. ‘모든’과 ‘어떤’, 또는 ‘임의’와 ‘존재’의 논리적 문제에 대한 인식의 어려움을 극복할 수 있는 지도 방안을 고안하고자 본 연구에서는 다음과 같은 몇 가지 원리를 근거로 한다.

첫째, 분류의 위계상 변의 길이에 따른 삼각형의 분류에 이어 각의 크기에 따른 분류를 다룬다. 예각삼각형과 둔각삼각형이 다루어진 6차 이후 변과 각에 따른 삼각형의 분류 활동은 변에 따른 분류 다음에 각에 따른 분류가 다루어져왔다. 다만 2009 개정 교과서에서만 순서가 뒤바뀌었던 것으로 나타난다. 그 이유를 각과 삼각형이 동일 단원에서 다루어진 데서 찾을 수 있다. 해당 단원은 지도 내용의 연계성 측면에서 각의 학습 후 각을 기준으로 삼은 분류 활동이 선행

되고 이어 변을 기준으로 하게 된 것이다. 그러나 일반적으로 기본 도형의 관계에서 선분이 각에 우선하며, 측정 측면에서도 길이가 각도에 우선하므로 본 연구에서의 접근 역시 변의 길이에 따른 삼각형의 분류에 이어 각의 크기에 따른 분류 과정에서의 한 차시를 고려한다.

둘째, '모든' 각이 예각이어야 한다는 임의성과 둔각이 '있다'는 존재성을 스스로 발견할 수 있도록, 모든 삼각형의 두 각은 예각이고 나머지 한 각에 의해 삼각형이 분류된다는 안내된 발견식 접근을 취한다. 학생들의 오류 중 삼각형의 세 각 중 한 각 또는 두 각이 예각이면 예각삼각형이라고 생각하는 경향이 있으며(최수임, 김성준, 2012), 학생들이 자연스럽게 모든 각을 고려의 대상으로 삼는 것은 어렵다(노은환, 강정기, 2015). 따라서 세 개의 각에 대해 한 각씩 주목하게 하여 모든 삼각형의 두 각은 예각임을 경험하도록 하는 것이다. 실제로 둔각삼각형이나 직각삼각형은 둔각이나 직각을 한 개밖에 가질 수 없고, 따라서 모든 삼각형에는 예각이 존재한다는 사실은 학생들이 추론할 수 있는 내용이다. 그러나 이와 같은 성질은 예각의 임의성과 둔각 및 직각의 존재성이라는 점에서 일관되지 못한 특성이기 때문에 오류의 가능성이 커지고 적절한 안내가 필요한 것이다.

셋째, 각에 따른 분류 활동의 다양성을 위해 범주의 개수 등을 제약하지 않도록 분류 칸을 구분하지 않고 하나로 제시한다. 도형의 분류 활동에서 학생 스스로 다양한 기준을 세우고 분류하는 활동이 개념 이해나 관계 구조화, 문제해결에 유용하다(최병훈 외, 2006)는 관점에 따라 학생들이 범주를 정할 수 있도록 한다.

넷째, 선수학습 요소인 직각삼각형을 포함시켜 분류 활동을 한다. 각의 크기를 분류 기준으로 삼을 때 예각과 둔각에 대한 인식이 필수이며, 이는 직각과의 비교에 의해 가능하므로 예각삼각형, 둔각삼각형 학습 시 직각삼각형을 하나의 범주로 함께 다루는 것이 타당하다는 관점을 취한다. 이는 둔각을 90° 이상인 각으로 생각하여 오류를 보였던 연구 결과에 기초하여 직각삼각형과의 관계를 동시에 다루어 각각의 차이점을 확인할 수 있는 기회 제공을 제안한 최수임, 김성준(2012)에도 부합된다.

마지막으로, 단지 각에 따른 분류에만 해당하는 것은 아닌 일반적인 개념 학습 원리로 수학적 다양성의 원리(Dienes, 1960)에 따라 수학적 변인을 고려한 다양한 예를 제시한다. 이는 긴 변이 아래에 평행한 형태로 위치한 경우만을 둔각삼각형으로 간주한 학생들의 오류(노영아, 안병곤, 2007)를 극복할 수 있는 교수학적 처방이 될 것이다.

2. 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 지도를 위한 수업안 및 학생 활동지

앞서 제시한 지도 원리에 따라 [그림 IV-1]과 같이 실험반의 수업안을 고안하였다.

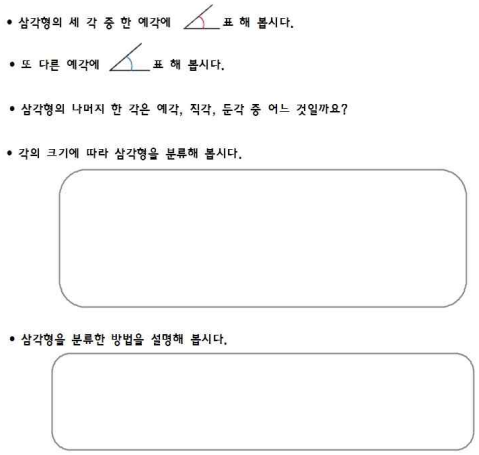
본 수업안의 가장 큰 특징은 전개 단계의 두 번째 활동인 '삼각형의 세 각 살펴보기'이다. 학생들의 분류 활동 및 예각삼각형, 둔각삼각형의 이해를 위해 삼각형의 세 각에 대한 탐구를 먼저 제시하였다. 또한, 어떤 삼각형에도 최소 2개씩 포함되어 있는 예각의 존재성에 대한 인식을 유도하기 위해 세 각의 탐구 활동에 '모든 삼각형에는 예각이 있나요?'와 같은 발문을 포함시켰으며, 두 예각을 순차적으로 표시해보도록 의도하였다.

단원	4-1-3. 각도와 삼각형	차시	11/16
학습 목표	각의 크기에 따라 삼각형을 분류할 수 있다.	준비물	각도기
단계	교수 · 학습 활동	시간	자료(㉮) 및 유의점(㉯)
도입	◎ 선수학습 상기 및 동기유발 ▶ 직각보다 작은 각은 무엇입니까? - 예각입니다. ▶ 직각보다 큰 각은 무엇입니까? - 둔각입니다. ▶ 학습지의 삼각형을 살펴봅시다. 모두 같습니까? - 모양이 다릅니다. ◎ 학습문제 확인하기 각의 크기에 따라 삼각형을 분류해 봅시다.	3’	㉮PPT, 학습지
전개	◎ 삼각형의 분류 방법 생각해보기 ▶ 삼각형을 분류하려고 합니다. 어떻게 분류할 수 있습니까? - 모양에 따라 분류할 수 있습니다. 변의 길이 또는 각의 크기에 따라 분류할 수 있습니다. ◎ 삼각형의 세 각 살펴보기 ▶ 삼각형을 각의 크기에 따라 분류하려고 합니다. 삼각형의 세 각을 살펴봅시다. ▶ 모든 삼각형에 예각이 있나요? - 모든 삼각형에 예각이 있습니다. ▶ 각 삼각형의 한 예각에 (빨강)표 해 봅시다. - (각 삼각형에서 예각을 찾아 표시한다.) ▶ 삼각형의 또 다른 예각에 (파랑)표 해 봅시다. - (각 삼각형에서 또 다른 예각을 찾아 표시한다.) ▶ 삼각형의 나머지 한 각을 살펴봅시다. - 나머지 한 각이 예각인 삼각형도 있고, 직각인 삼각형도 있고, 둔각인 삼각형도 있습니다. ▶ 삼각형의 나머지 한 각은 예각, 둔각, 직각 중 어느 것입니까? - 나, 마, 바의 나머지 한 각은 예각입니다. - 가, 라의 나머지 한 각은 직각입니다. - 다, 사의 나머지 한 각은 예각입니다. ◎ 각의 크기에 따라 삼각형 분류하기 ▶ 삼각형을 각의 크기에 따라 분류해 봅시다. - (삼각형을 분류한다.) ▶ 친구들에게 자신의 분류 방법을 설명해 봅시다. - 직각삼각형과 직각삼각형이 아닌 삼각형으로 분류하였습니다. - 모두 예각인 삼각형, 직각이 있는 삼각형, 둔각이 있는 삼각형으로 분류하였습니다. ◎ 각의 크기에 따라 삼각형 분류 방법 정리하기 ▶ 삼각형은 각의 크기에 따라 세 각이 모두 예각인 삼각형, 한 직각과 두 예각이 있는 삼각형, 한 둔각과 두 예각이 있는 삼각형으로 분류할 수 있습니다. ◎ 예각삼각형, 둔각삼각형 약속하기 ▶ 이 중 직각이 있는 삼각형은 무엇입니까? - 직각삼각형입니다. ▶ 세 각이 모두 예각인 삼각형을 예각삼각형, 한 각이 둔각인 삼각형을 둔각삼각형이라고 합니다.	35’	㉮ PPT, 학습지, 각도기
정리	◎ 예각삼각형, 둔각삼각형 익히기 ▶ 예각삼각형에 ‘예’, 둔각삼각형에 ‘둔’, 직각삼각형에 ‘직’이라고 써 봅시다.	2’	

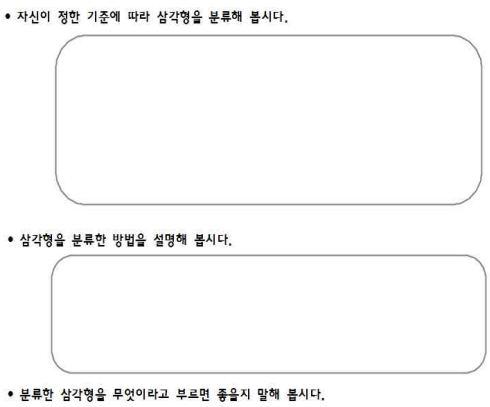
[그림 IV-1] 실험반 수업안

실험반과 비교반의 수업 진행에 필요한 학생 활동지를 각각 제작하였다. 실험반과 비교반의 활동지는 동일한 삼각형 범례를 포함하며, 다음과 같은 차이점이 존재한다. 먼저, 실험반의 예각 2개를 먼저 표시하는 활동([그림 IV-2])은 모든 삼각형에 예각이 2개씩은 포함되어 있다는 사실에 대한 추론을 돕기 위한 것이다. 이를 통해 본 연구에서 의도하고 있는 논리적 문제 인식의 어려움을 극복할 수 있도록 도울 뿐만 아니라, 각의 크기에 따른 삼각형의 분류에 도움을 줄 것이라 기대된다. 또한, 예각삼각형, 둔각삼각형의 정의에 대한 이해를 돕기 위해 [그림 IV-4]와 같이 삼각형의 세 각을 표시한 시각적 표현을 제시하였다. 초등학생들의 기하 사고 수준을 고려할 때, 시각적 이미지의 역할은 중요하기 때문에(윤여주, 김성준, 2010), 각 삼각형의 정의를 담은 시각적 표현을 제시하는 것은 두 삼각형의 정의 학습에 도움을 줄 것으로 기대된다. 반면에 비교반 활동지의 약속하기는 [그림 IV-5]에서와 같이 교과서의 방식을 그대로 따랐다.

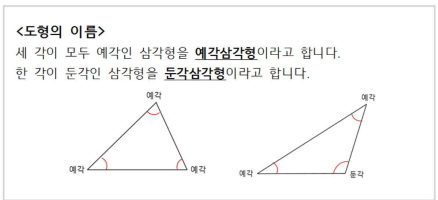
실험반 뿐만 아니라 비교반의 수업안 및 학생 활동지에도 예각의 임의성 및 둔각, 직각의 존재성에 대한 이해 활동을 포함하고 있다. 2009 개정 교과서에는 [그림 IV-6]에서와 같이 '예각이 있는 삼각형이라고 모두 예각삼각형은 아니에요.', '직각삼각형에는 직각이 한 개만 있어요.', '둔각삼각형에는 둔각이 한 개만 있어요.'라는 삽화를 통해 학생들의 반성적 사고를 유발하고 있기 때문이다.



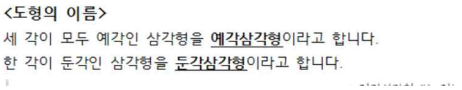
[그림 IV-2] 실험반 활동지의
삼각형의 분류 활동



[그림 IV-3] 비교반 활동지의
삼각형의 분류 활동



[그림 IV-4] 실험반 활동지의 약속하기



[그림 IV-5] 비교반 활동지의 약속하기

<표 IV-1> 실험반과 비교반의 수업 과정

	실험반	비교반
도입	- 예각과 둔각의 개념 상기 - 학습문제 제시	- 예각과 둔각의 개념 상기 - 학습문제 제시
전개	- 삼각형의 분류 방법 생각해 보기 **- 삼각형의 세 각 탐구하기(예각에 대한 발문 및 삼각형의 두 예각을 표시해보기)** - 각의 크기에 따라 삼각형을 분류하기 **- 도형의 이름 약속하기(그림 제시)**	- 삼각형의 분류 방법 생각해 보기 - 각의 크기에 따라 삼각형을 분류하기 **- 도형의 이름 약속하기(예각의 임의성과 둔각, 직각의 존재성에 대한 삽화 및 교사 발문)**
정리	- 그림 보고 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형 구별하기	- 그림 보고 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형 구별하기

[그림 IV-6] 예각삼각형 및 둔각삼각형의 정의에 대한 반성적 사고를 의도한 삽화(교육부, 2015)

즉, 두 수업 모두 예각의 임의성 및, 둔각, 직각의 존재성 인식을 위한 장치가 있다. 다만 비교반에서는 예각삼각형과 둔각삼각형을 정의한 후 직접적인 발문을 통해 지도한 것에 비해, 실험반에서는 세 각의 탐구 활동을 통해 이를 학습하도록 유도한 것이 차이이다.

요컨대, 실험반과 비교반의 수업 과정을 비교해보면(<표 IV-1>), 수업 전개 활동의 차이를 확인할 수 있다. 특히, 음영으로 나타낸 부분은 수업 중 예각삼각형, 둔각삼각형 및 직각삼각형의 정의에 포함된 논리적 이해를 돕기 위한 교수학적 의도가 구현된 부분이다.

3. 수업안의 적용 결과 분석

가. 각의 크기에 따른 삼각형의 분류

수업을 실시한 후 학생들이 작성한 활동지에서 분류 양상을 조사하였다. 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 결과는 <표 IV-2>와 같다. 수업 중 작성한 활동지를 살펴, 분류를 바르게 한 것을 이원적 분류, 삼원적 분류로 범주화하였고, 오답 및 빈 칸으로 둔 경우를 오답 및 무응답으로 제시하였다.

학생들의 분류 결과는 크게 이원적 분류와 삼원적 분류로 나타났다. 실험반의 22.03%, 비교반의 24.56%가 '~인 것과 ~이 아닌 것'으로 분류하는 이원적 분류를 하였다. 실험반에서 가장 많이 나타난 유형은 '모두 예각인 삼각형과 그렇지

<표 IV-2> 실험반과 비교반의 삼각형의 분류 결과

분류 기준	실험반(N=59)	비교반(N=57)
이원적 분류	13 (22.03)	14 (24.56)
삼원적 분류	39 (66.10)	30 (52.63)
오답 및 무응답	7 (11.86)	13 (22.81)

않은 삼각형'으로, 총 9명의 학생이 이와 같이 분류하였다. 비교반에서 가장 빈번히 나타난 분류는 '직각이 있는 삼각형과 직각이 없는 삼각형'으로 분류한 경우이다. 비교반의 13명이 이와 같은 방법으로 분류하였다. 이는 학생들이 3학년 때 배운 직각삼각형을 구분하는 방법을 그대로 적용한 것으로 보인다. 반면에 실험반 중 4명만이 직각의 유무에 따른 분류를 하였다. 같은 이원적 분류라 하더라도 두 집단에서 빈번하게 나타난 분류 기준에 차이를 보였다. 비교반의 1명은 둔각의 유무에 따라 분류하였다. 삼각형을 각의 크기에 따라 이원 분류할 경우 학습 목표를 위해서는 재분류가 요구되므로, 본 차시의 수업 목표를 충족시키지는 못한 것으로 판단된다.

실험반의 66.10%, 비교반의 52.63%의 학생이 삼원적 분류를 한 것으로 나타났다. 삼원적 분류는 3학년 및 이전 차시에서 학습한 내용인 예각, 둔각, 직각을 사용하여 분류한 경우이다. 실험반에서 삼원적 분류가 약 14%p 높게 나타났는데, 이는 각에 대한 탐구를 통해 자연스럽게 삼각형에서 예각, 둔각, 직각을 모두 확인하였기 때문인 것으로 해석된다. 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 수업에서는 분할적 분류 및 삼원적 분류가 이루어져야 자연스럽게 예각삼각형 및 둔각삼각형에 대한 이름 짓기 활동과 정의하기로 이어질 수 있다. 특히, 실험반의 경우 두 예각을 찾은 후 셋째 각이 예각, 둔각, 직각 중 하나임을 인식하는 활동은 학습 목표에 근접한 삼원적 분류가 나타나는데 영향을 주는 것으로 판단된다.

오답은 대부분 분류 기준을 잘못 설정한 경우와 분류를 잘못한 경우를 포함한다. 실험반의 오답 및 무응답의 비율은 11.86%로 나타났다. 오답의 대부분이 분류 기준은 바르게 설정하였으나 분류를 바르게 하지 못한 경우이고, 답을 하지 않고 빈 칸으로 남겨둔 학생은 1명이었다. 비교반은 오답 및 무응답이 22.81%로 실험반에 비해 두 배 정도 높게 나타났다. 비교반의 경우 분류 기준을 처음부터 잘못 설정하거나(모양에 따라, 변의 길이에 따라 등), 무응답인 경우가 많아, 분류의 첫 단계인 분류 기준 설정에 어려움을 겪었음을 알 수 있다.

삼원적 분류의 구체적 분류 결과는 <표 IV-3>과 같다. 예각/둔각/직각으로 분류한 학생들은 범례로 제시된 삼각형의 탐구를 바탕으로 하여 예각, 둔각, 직각을 분류 기준으로 삼아 분류한 경우이다. 모든 각이 예각인 것/직각이 있는 것/둔각이 있는 것으로 분류한 학생들은 삼각형의 세 각의 구성을 고려하여 분류한 경우이다. 마지막으로 예각삼각형/둔각삼각형/직각삼각형으로 분류한 학생들은 선행학습을 통해 세 삼각형의 정의 및 용어를 이미 알고 있는 경우로, 세 삼각형의 정의에 따라 범례의 삼각형을 구분한 것이다.

<표 IV-3> 삼원적 분류의 구체적인 분류 결과

분류 기준	실험반(N=39)	비교반(N=30)
예각/둔각/직각	17 (43.59%)	23 (76.67%)
모든 각이 예각인 것(예각 3)/ 직각이 있는 것(예각 2과 직각 1)/ 둔각이 있는 것(예각 2과 둔각 1)	18 (46.15%)	4 (13.33%)
예각삼각형/둔각삼각형/직각삼각형	4 (10.26%)	3 (10%)

예각, 둔각, 직각에 의한 분류 비율이 실험반 43.59%, 비교반 76.67%로, 비교반에서 높게 나타났다. 학생들은 선수 학습 요소인 예각, 둔각, 직각을 분류 기준이라 말하고 범례를 적절하게 분류하였지만, 이는 아직도 학생들이 삼각형의 세 각 보다는 한 각에 근거하여 판단한 것으로 해석된다. 즉 모든 삼각형의 세 각 중 두 각이 예각임에 대한 고려 없이, 각 삼각형에서 시각적

판단이 우세한 직각과 둔각의 존재 여부만을 생각하여 삼각형을 분류한 것으로 보인다. 이러한 경우 학습 후 시간이 경과하면, 세 각 중 한 각의 판단에 의한 삼각형 인식이 일어날 가능성이 있다.

한편, 모든 각이 예각인 삼각형, 직각이 있는 삼각형(예각이 2개, 직각이 1개인 삼각형), 둔각이 있는 삼각형(예각이 2개, 둔각이 1개인 삼각형)으로 분류한 비율은 실험반에서 46.15%, 비교반에서 13.33%로 나타났다. 이러한 분류는 실험반의 삼원적 분류 중 가장 많이 나타난 형태이며, 세 각의 구성을 모두 반영한 것으로 볼 때 학습 목표에 근접한 분류 형태로 볼 수 있다.

수업 활동 중 주목할 만한 장면은 예각/둔각/직각에 의한 분류의 문제점이 한 학생의 문제 제기에 의해 이루어진 부분이다. 실험반 수업 중 학생들이 분류 활동을 마친 후, 자신이 분류한 방법을 발표하였다. 한 학생이 예각, 둔각, 직각으로 분류하였다고 발표하자, 다른 학생이 질문이 있다고 하여 다음과 같은 교사와의 담화가 이어졌다.

학생: 선생님, 모든 삼각형에 예각이 있으니까 모두 예각이 있는 삼각형이 되어버려요.
선생님: 다시 자세히 말해 주세요.
학생: 모두 예각이 있으니까, 세 각 중에 하나라도 직각이 있는 것, 둔각이 하나라도 있는 것, 그리고 예각밖에 없는 것으로 해야 한다고 생각해요.

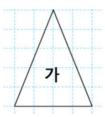
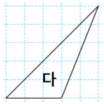
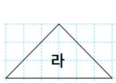
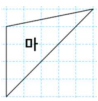
위의 담화에서 학생은 다른 친구가 발표한 예각, 둔각, 직각으로 분류했을 경우 모든 삼각형이 예각을 갖고 있다는 사실 때문에 적절한 분류가 이루어질 수 없다고 지적하였다. 이 학생은 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형에서 예각의 임의성과 직각, 둔각의 존재성을 잘 이해하고 있다. 이는 각의 탐구를 통해 삼각형의 세 각 중 두 각이 예각이라는 사실을 발견할 수 있으며, 이는 예각의 임의성, 직각과 둔각의 존재성을 고려한 정교한 분류가 이루어질 가능성을 보여준다.

나. 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형의 이해 분석

본 수업의 학습 목표인 예각삼각형, 둔각삼각형의 개념에 대한 학생들의 이해 정도를 알아보기 위해 검사지를 적용하였다. 먼저, 그림으로 주어진 6개의 삼각형을 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형으로 분류해보도록 하였다.

검사지 문항1의 정답률은 <표 IV-4>와 같다. 문항별로 살펴보면, 가 삼각형을 예각삼각형, 나 삼각형을 직각삼각형, 마 삼각형을 둔각삼각형으로 인식한 비율이 다른 문항에 비해 높게 나타났다. 그러나 라 삼각형을 직각삼각형으로, 바 삼각형을 예각삼각형으로 인식한 비율은 다른 문항에 비해 낮게 나타났다. 이는 학생들이 예각, 직각, 둔각을 판단하기 위한 각도기를 갖고 있었으나, 이를 사용하기보다 시각적 판단으로

<표 IV-4> 검사지 문항1의 정답률

						
실험반 (N=59)	55 (93.22%)	48 (81.36%)	45 (76.27%)	39 (66.10%)	53 (89.83%)	40 (67.80%)
비교반 (N=57)	51 (89.47%)	47 (82.46%)	41 (71.93%)	34 (59.65%)	48 (84.20%)	44 (77.19%)

삼각형을 분류하는 경향에서 비롯된 것으로 판단된다. 결과적으로, 라 삼각형을 예각삼각형으로, 바 삼각형을 둔각삼각형으로 판단하는 오류를 다수 보였다.

<표 IV-5>는 두 집단 각각의 평균에 대한 t-검정 결과이다. 그 결과, 두 집단의 평균이 통계적으로 유의미한 차이를 보이지 않기 때문에 지도 방법의 차이가 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형의 이해에 미치는 영향은 미비한 것으로 나타났다.

<표 IV-5> 검사지 문항1의 t-검정 결과

집단	평균	표준편차	사례수	t	p
실험반	4.746	1.560	59	0.331	0.741
비교반	4.649	1.587	57		

검사지의 둘째 문항은 세 삼각형의 정의에 담겨 있는 논리에 대한 이해도를 알아보기 위한 것으로, 정답률은 <표 IV-6>과 같다.

예각의 임의성과 관련된 문항에서 두 반 모두 정답률이 가장 낮게 나타났고, 둔각의 존재성을 묻는 문항에서 가장 높게 나타났다. 특히 '예각이 있는 삼각형은 예각삼각형이다.'의 진위를 묻는 문항에서 실험반 25.42%, 비교반 45.61%로 두 집 단 사이에 큰 차이를 보였다. 실험반에서 각의 탐구 활동을 통해 논리성 이해를 의도하였으나 이에 대한 효과는 미비한 반면에, 비교반에서 '예각이 있는 삼각형이라고 모두 예각삼각형은 아니에요.'라는 교과서 삽화, 교사의 발문이 학생들의 이해에 더 큰 영향을 미친 것으로 판단된다. 둔각삼각형에서 둔각의 존재성을 묻는 문항에서 실험반 89.83%, 비교반 87.72%로 정답률이 높게 나타난 것으로 볼 때, 학생들이 이를 이해하는 데 어려움을 겪지 않는 것으로 보인다. 그러나 직각삼각형에 직각과 예각이 모두 존재함을 묻는 문항에서 실험반 64.41%, 비교반 61.40%로 정답률이 낮게 나타났다. 이를 통해 학생들이 모든 삼각형에 예각이 있다는 개념을 완전히 이해하는 데 어려움을 겪고 있다는 것을 알 수 있다.

삼각형의 정의에 포함되어 있는 논리성의 이해에 대한 차이를 알아보기 위해 두 집단 각각의 평균에 대한 t-검정을 실시하였으나, <표 IV-7>에서 나타난 바와 같이 유의미한 차이가 나타나지 않았다.

그러나 하위 문항에 대한 집단별 차이를 알아보는 t-검정을 실시한 결과, <표 IV-8>과 같이 나타났다. 예각삼각형의 예각의 임의성을 묻는 문항에서 t=-2.306, p=0.011로 p<0.05 수준에서 유

<표 IV-6> 검사지 문항 2의 정답률

	예각이 있는 삼각형은 예각삼각형이다.	둔각이 있는 삼각형은 둔각삼각형이다.	직각삼각형에는 직각과 예각이 있다.
실험반 (N=59)	15 (25.42%)	53 (89.83%)	38 (64.41%)
비교반 (N=57)	26 (45.61%)	50 (87.72%)	35 (61.40%)

<표 IV-7> 검사지 문항 2의 t-검정 결과

집단	평균	표준편차	사례수	t	p
실험반	1.797	0.761	59	-1.019	0.311
비교반	1.947	0.833	57		

<표 IV-8> 검사지 문항 2의 하위 문항의 t-검정 결과

	집단	평균	표준편차	사례수	t	p
예각이 있는 삼각형은 예각삼각형이다.	실험반	0.254	0.439	59	-2.306*	0.011
	비교반	0.456	0.503	57		
둔각이 있는 삼각형은 둔각삼각형이다.	실험반	0.898	0.305	59	0.357	0.361
	비교반	0.877	0.331	57		
직각삼각형에는 직각과 예각이 있다.	실험반	0.644	0.483	59	0.332	0.370
	비교반	0.614	0.491	57		

* $p < 0.05$

의미한 차이가 나타났다. 이는 두 집단의 지도 방안의 차이가 예각의 임의성의 이해에 영향을 미칠 수 있다는 가능성을 함의한다.

Ⅴ. 결론 및 시사점

노은환, 강정기(2015)는 분할적 분류가 아닌 계층적 분류를 통해 모든 삼각형이 예각삼각형이고 그 부분집합으로 직각삼각형과 둔각삼각형을 다루는 것을 제안한다. 그러나 이와 같은 분류는 변의 길이에 따른 분류와 달리, 결과적으로 분할적 분류를 요구하는 각의 크기에 따른 분류와 상치되며 특히 학생들이 모든 삼각형을 예각삼각형이라고 생각하는 오류를 강화하게 되므로, 학교수학에서의 도형에 대한 재정의가 있지 않는 한 허용되기 어렵다는 한계가 있다. 따라서 본 연구에서의 접근은 분할적 분류이지만 삼각형의 세 각을 각각 한 개씩 순차적으로 접근하여 모든 삼각형의 두 각은 예각이라는 특성을 파악하고 나머지 한 각에 의한 범주화를 경험하게 한다는 접근의 효과와 그 교육 가능성에 초점이 있다.

본 연구에서는 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 및 예각삼각형, 둔각삼각형의 개념의 이해를 돕고자, 삼각형의 세 각의 탐구를 통한 안내된 발견식 접근을 고안하여 수업에 적용해 보았다. 삼각형을 각의 크기에 따라 분류하기로 결정한 후, 삼각형의 세 각 중 두 예각을 찾아 먼저 표시하도록 하였고, 나머지 한 각이 예각, 직각, 둔각 중 어느 각인지 찾아보도록 하였다. 탐구 활동 후, 삼각형을 분류하고 예각삼각형과 둔각삼각형을 정의를 그림과 함께 제시하였다. 이를 통해 학생들이 삼원적 분류를 함과 동시에 예각삼각형과 둔각삼각형의 정의에 포함되는 논리성을 이해하도록 하는 것이 본 연구의 목표였다. 본 연구에서 고안한 수업안으로 수업한 실험반과 2009 개정 교과서에 따른 수업안으로 수업한 비교반의 결과를 비교, 분석하여 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 각의 탐구를 통한 안내된 발견식 접근은 삼각형의 분류에 영향을 미친다. 학생들이 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 결과를 살펴보았을 때, 수업에서 의도하는 삼원적 분류의 비율이 더 높게 나타났다. 또한 비교반에서 오답 및 무응답의 결과가 20%이상 나온 것으로 보아, 각의 탐구 없이 분류 활동을 바로 실시하는 것은 어려움을 야기한다. 학생들의 분류 활동이 도형 개념 학습의 핵심적 역할을 수행하기 때문에, 학생들의 분류 활동을 돕는 안내된 발견식 접근은 학

생들의 활동에 도움을 줄 수 있다. 따라서 분류 기준이 되는 각의 크기, 변의 길이 등의 속성에 대한 다양한 탐구 활동이 분류 활동 이전에 제시될 필요가 있다.

둘째, 두 지도 방안의 차이가 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형을 인식하는 데 미치는 영향은 미비하다. 본 연구에서 제시한 각의 탐구를 통한 안내된 발견식 접근이 학생들의 분류 활동에는 긍정적 영향을 미치나, 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형을 인식하는 데는 큰 역할을 하지 않는 것으로 나타났다. 대부분의 문항에서 정답률이 70% 이상으로 나타나 두 집단의 학생들이 예각삼각형, 둔각삼각형, 직각삼각형을 잘 구분하고 있는 것으로 나타났다. 그러나 일부 문항의 경우 낮은 정답률을 나타냈는데, 특히 직각을 바로 찾을 수 없는 직각삼각형과 한 변이 아래에 평행하지 않은 예각삼각형의 정답률이 낮게 나타나 이에 대한 지도가 필요하다. 학생들은 각의 크기를 잴 수 있는 각도기를 갖고 있음에도 불구하고 시각적 구별에 의해 삼각형을 판단하는 낮은 기하 수준의 모습을 보여, 이에 대한 교사의 관심과 지도가 필요할 것이다.

셋째, 각의 탐구를 통한 안내된 발견식 접근만으로 예각의 임의성에 대한 사실을 추론하는 것은 어렵다. 본 연구에서는 선행 연구에 나타난 예각삼각형에 대한 학생들의 이해 부족이 예각삼각형의 정의에 포함되어 있는 예각의 임의성 때문임을 밝혔다. 이러한 논리적 문제를 극복하고자 각의 탐구 활동을 고안하여 적용하였으나 그것이 예각의 임의성에 대한 이해로 직결된다고 할 수 없기 때문에 학생들이 어려움을 경험하는 논리에 대한 이해를 강화하기 위한 연구가 필요하다.

이와 같은 결론에 근거하여 삼각형의 분류 및 정의 지도에 대한 교수학적 시사점을 다음과 같이 도출할 수 있다.

첫째, 삼각형의 분류 활동 전에 분류 기준이 되는 속성에 대한 탐구 활동이 필요하다. 도형의 개념 학습에서 분류 활동은 필수적이다. 그러나 학생들이 저학년 시기에 경험했던 색, 모양 등 눈으로 식별되는 속성에 대한 분류는 쉽게 이루어지지만, 삼각형의 분류는 이보다 한 차원 높은 단계의 분류이다. 삼각형의 분류는 세 변, 세 각을 모두 고려해야 때문에, 분류 경험이 많지 않은 학생들의 활동이 수업에서 목표하는 방향으로 이루어지기 어렵다. 본 연구 결과에서도 이원적 분류 및 오답의 비율이 높았다. 특히, 각의 탐구를 하지 않은 비교반에서 더 어려움을 겪는 것으로 나타나, 속성에 대한 탐구 활동의 필요성을 뒷받침한다.

둘째, 예각삼각형과 둔각삼각형의 정의 후, 예각의 임의성, 둔각의 존재성에 대한 반성적 사고를 할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 예각삼각형과 둔각삼각형이 갖고 있는 논리적 문제를 극복하고자 본 연구에서는 학생들에게 세 각의 탐구를 통해 모든 삼각형이 반드시 두 예각을 갖고 있음을 알도록 하였고, 세 각을 표시한 이미지를 정의와 함께 제공하였다. 그러나 예각의 임의성에 대한 이해가 실험반에서 정답률 25.42%로 저조하였다. 오히려 비교반이 45.61%로 실험반의 결과보다 더 높게 나타났다. 비교반의 높은 정답률은 예각의 임의성에 대한 직접적 진술이 나타난 삽화 및 교사의 설명에서 기인한 것으로 보인다. 즉 '예각이 있는 삼각형이라고 모두 예각삼각형은 아니에요.'라는 설명 및 교사의 직접적 지도가 예각의 임의성에 대한 이해를 돕는다. 따라서 예각삼각형과 둔각삼각형의 정의 후, 이에 대한 학생의 반성적 사고가 일어날 수 있도록 교과서 활동 및 교사의 안내가 필요하다.

셋째, 학생들이 도형을 식별하는 데 있어 개념 정의에 기초한 분석적 시각을 갖도록 할 필요가 있다. 연구 결과, 직각이 직관적으로 드러나는

직각삼각형 및 한 변이 아래에 수평으로 놓인 예각삼각형을 식별하는 문항에서 80% 이상의 높은 정답률을 보인 반면, 그렇지 않은 시각적 표현에 대한 정답률은 저조하였다. 이는 학생들이 예각삼각형 및 직각삼각형의 개념을 알고 있음에도 불구하고, 비스듬한 삼각형 및 옆을 향한 삼각형을 삼각형으로 인식하지 못하는 경우(김경미, 김현은, 2010)나 시각적 판단에 의해 도형을 인식하여 오류를 보이는 경우(노영아, 안병곤, 2007)와 같이 학생들의 삼각형에 대한 개념이미지가 한정되어 있어 시각적 식별에만 의존하는 것이 오류를 야기할 가능성을 함의한다.

넷째, 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 학습에서 완전하고 의미 충실한 이해를 위해 논리 학습이 필요하다. 그러나 논리는 현행 학교 수학의 학습 요소가 아니다. 따라서 각의 크기에 따른 삼각형의 분류 및 정의를 이해하기 위해서 학생들에게 Fischbein(1987)이 제시한 추리적 직관이 요구된다. 학생들은 임의성 및 존재성에 대한 학습 경험이 없기 때문에, 예각삼각형 및 둔각삼각형의 정의에 포함되어 있는 논리를 이해하기 위해서는 추리적 직관이 필요할 것이다. Kuhn(1977)은 연구를 통해 초등학생의 논리 학습에 대한 가능성을 제시하였다. 따라서 수학교육에서 중요한 역할을 하는 논리·추론적 직관의 획득 가능한 시기 및 지도 방법에 대한 연구가 필요하다.

다섯째, 각의 크기에 따른 삼각형 분류를 위한 다양한 활동이 필요하다. Frank & Joanna(1998)는 직각삼각형, 예각삼각형, 둔각삼각형에 대한 예와 비례를 구별하여 보여주고 학생 스스로 각각을 정의하도록 하였다. 또한, 시각적 구별이 아니라 각도를 제시하여 측정의 맥락을 강조하는 활동을 제안하였다. 이는 눈으로 보이는 시각적 구별이 아닌 세 각의 측정값을 통해 삼각형을 구별하도록 하여, 한 단계 높은 기하 수준으로서 학생들을 이끌 수 있다. 이와 더불어 학생들이 변의 길이와 각의 크기의 2가지 기준을 동시에 고려할 수 있도록 하는 복합적 접근을 탐구 활동으로 제안한다. 각과 변에 대한 동시적 고려의 필요성은 노영아, 안병곤(2007)에서 직각이등변삼각형을 이등변삼각형으로 생각하지 않는다는 연구 결과로부터 뒷받침된다. 이 활동에는 정삼각형의 경우 모든 각이 예각이므로 직각삼각형이나 둔각삼각형이 불가능함을 파악하는 것이 포함된다. Bassarear(2001)는 변의 길이에 따른 3가지 분류와 각의 크기에 따른 3가지 분류로 가능한 9가지 조합 중 정삼각형은 직각삼각형이나 둔각삼각형이 될 수 없음을 인식하여 실제로 가능한 조합은 7가지임을 알아내는 탐구활동을 제시하였다. 이와 같은 다양한 분류 활동을 통해 학생들의 수학적 이해 및 추론 능력을 도모할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

교육과학기술부 (2010). **수학 4-1**. ㈜두산.

교육부 (1996). **수학 4-2**. 국정교과서주식회사.

교육부 (2001). **수학 4-가**. 대한교과서주식회사.

교육부 (2014). **수학 4-1**. ㈜천재교육.

김경미, 김현은 (2010). 삼각형인 예와 삼각형이 아닌 예의 식별과정에서 나타나는 초등학생의 추론 유형 분석. **한국학교수학회논문집, 13**(2), 263-287.

김수미, 정은숙 (2005). 범례 제시를 통한 도형 개념 지도 방안. **수학교육학연구, 15**(4), 401-417.

노영아, 안병곤 (2007). 도형 영역의 오류 유형과 원인 분석에 관한 연구; 초등학교 4학년을 중심으로. **한국초등수학교육학회지, 11**(2), 199-216.

노은환, 강정기 (2015). 구성주의 관점에서 각과

삼각형의 분류에 관한 초등 교과서 및 교사 용지도서 분석. **한국수학교육학회지<수학교육 논문집>, 29**(3), 313-330.

방정숙 (2010). 평면도형에 관한 초등학교 수학과 교과용 도서 분석. **한국학교수학회논문집, 13**(1), 1-21.

신희경, 백석윤 (2004). 제 7차 초등학교 수학 교과서에 제시된 활동유형 분석. **한국초등학교육학회지, 8**(1), 45-61.

윤여주, 김성준 (2010). 초등수학 기하문제해결에서의 시각화 과정 분석. *East Asian Mathemarical Journal, 26*(4), 553-579.

임지현, 최창우 (2016). 도형 학습에서 오류 찾기 활동의 적용 효과. **한국수학교육학회지 시리즈C<초등수학교육>, 19**(1), 31-45.

최수임, 김성준 (2012). 정의하기와 이름짓기를 통한 도형의 이해 고찰; 초등학교 4학년 도형 영역을 중심으로. **한국학교수학회논문집 12**(4), 719-745

최병훈, 방정숙, 송근영, 황현미, 구미진, 이성미 (2006). 한국과 싱가포르의 초등 수학 교과서 비교 분석: 도형과 측정 영역을 중심으로. **대한수학교육학회지<학교수학>, 8**(1), 45-68.

홍갑주, 박지환 (2015). 초등학교 교과서의 각의 크기에 따른 삼각형 분류에 관한 고찰. **초등수학교육, 18**(1), 45-59.

Bassarear(2001). *Mathematics for Elementary School Teachers*. MA: Houghton Miffim.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*. London: Hutchinson Educational.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. 우정호 외 역(2010). **수학 과학 학습과 직관**. 서울: 경문사.

Frank & Joanna(1998). *Mathematics for Elementary School Teachers via Problem Solving*. NJ: Prentice hall

Kuhn, D. (1977). Conditional reasoning in children. *Developmental Psychology, 13*, 342-353.

Villier, M. D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 11-18.

On Teaching Methods for the Classification of Triangles by Angles

Nam, Jihyun (Seoul Sinne Elementary School)
Chang, Hyewon (Seoul National University of Education)

Acute triangles and obtuse triangles are defined according to the classification of triangles by angles. The definitions of acute triangles and obtuse triangles are difficult for students because they are related to different logical elements. The purpose of this study is to seek desirable methods for teaching the classification of triangles by angles related to logic. To do this, based on the theoretical consideration and the longitudinal analysis of the elementary mathematics textbooks, some implications are found for teaching. And then the lesson was planned and applied to 4^{th} graders. After the lesson, we reviewed and analyzed their worksheets and test results for examining the effects by teaching methods. Based on the result, we discussed and made some didactical suggestions for teaching the classification of triangles by angles.

* Key Words : classification of triangles by angles(각의 크기에 따른 삼각형 분류), acute triangles(예각삼각형), obtuse triangles(둔각삼각형), logical problem(논리적 문제), partitional classification(분할적 분류)

논문접수 : 2017. 7. 8
논문수정 : 2017. 8. 10
심사완료 : 2017. 8. 13