대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 3, 411 ~ 430. Aug 2017

지수함수 그래프의 구성 맥락에 대한 예비교사들의 이해

허 남 구* · 강 향 임** · 최 은 아***

본 연구에서는 예비수학교사 24명을 대상으로 지수함수 맥락에서 지수함수의 그래프를 어떻게 구성하는지와 각 맥락의 교수학적 적절성에 대해서 어떻게 판단하는지를 살펴보았다. 제시된 지수함수 맥락은 무수히 많은 점을 이용하는 맥락과 무수히 많은 직선을 이용하는 맥락, 무한히 지급되는 이자 맥락이었다. 연구 결과, 예비교사들은 단계별로 그래프의 개형을 제시하는 과제에서 유한개의 점에 대한 그래프의 극한이라는 아이디어 A에서 가장 높은 이해도를 나타낸 반면에 한 점에서의 변화율과 함숫값이 비례한다는 아이디어 B와 연속 복리 개념이 내포된 아이디어 C를 사용한 그래프 구성에는 어려움을 나타내었다. 지수함수 그래프 구성 맥락이 적절한가에 대한 판단은 예비교사들의 내용교수지식에, 부적절하다는 판단은 수학의 내용지식 측면에 의존하는 경향이 나타났다. 예비교사들은 각 맥락에 따른 그래프를 구성하는 과정에서 나타나는 교수학적 조건과 상황을 언급하며 그래프 구성 맥락의 적절성을 주장한 반면에, 부적절성에 대해서는 각 맥락에 내포된 수학 개념의 본질과 논리적 관계들을 언급하였다.

Ⅰ. 서론

2015 개정 수학과 교육과정의 목표 중 하나는 사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학적 개념, 원리, 법칙과 그들 사이의 관계를 이해하고 기능을 습득하는 것이다(교육부, 2015a). 교육과정 목표에 부합되는 수학교육의 구현을 위해서는 다양한 측면에서의 인적, 물적 자원이 요구되겠지만, 수학교실에서 활용도와 의존도가 가장 높은 것은 교과서일 것이다. 사실 교육부(2015b)에서는 문제풀이 위주의 교과서가 아닌, 실생활 속에서 수학의 유용성을 체감할 수 있는 내용 중심의 수학 교과서가 개발되어야 한다고 강조한 바 있다.

수학 개념, 구조, 아이디어들은 물리적, 사회적, 정신적 세계를 조직하기 위한 도구로서 발명되어 왔다(Freudenthal, 1983). Freudenthal(2008)에 의하면, 수학은 광범위한 상식과 상식적인 현실에서 발생해 왔기 때문에 발명했던 곳에서 다시 재발명되어야 한다(p. 102). 즉 구체적인 학습 과정에서 수학화가 일어나기 위해서는 학습자에게 현실의 영역으로서 맥락이 제시되어야 한다는 것이다. 학생들은 현실에서 일어나는 풍부한 상황들의 맥락 속에서 수학 지식을 접하고 수학적 본질을 탐구해가는 과정을 통해서 자신들의 경험을 수학 개념과 연결시키는 학습에 이를 수 있다(김민경, 박은정, 허지연, 2012). 맥락의 활용은 학생들의 문제해결력 향상과 수학 개념의 확립과 함께 학습동기 유발에 도움을 준다(Treffers,

* 대전송촌고등학교, mimirul@nate.com (제1 저자)
** 한국교원대학교 강사, hikang2002@hanmail.net (교신저자)
*** 우석대학교, eunachoi@woosuk.ac.kr

1987; de Lange, 1996; Petraglia, 1998). 권오남, 박규홍, 이상구, 박제남, 주미경, 신준국, 김영록, 이재성, 장훈, 김지선, 박지현, 박정숙, 오혜미, 김영혜, 박윤근, 박상의, 전철(2013)은 수학 학습에서 사용가능한 맥락으로 수학사적 맥락, 의사결정 및 다문화 사회의 이해에 관한 맥락, 실생활 맥락, 공학 도구를 활용한 맥락을 제시한 바 있다.

한편 함수는 우리 주변에서 일어나는 다양한 변화 현상을 기술하고 이를 해석하여 실생활에 적용하는 수학적 도구로서 도입되었으며, 함수의 그래프는 함수를 시각적으로 표현하는 도구로서 학교수학에서 강조되고 있다(김연식, 박교식, 1992; 우정호, 1998; 교육부, 2015a; Freudenthal, 1983; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002). 다른 나라의 교육과정에서도 강조되는 수학적 개념이다(Finnish National Board of Education, 2004; Australian Ministerial Council on Education, Employment, Training, and Youth Affairs, 2006; Singapore Ministry of Education, 2006). 그러나 Weber(2002), Alagic & Palenz(2006), Strom(2008), Davis(2009)를 비롯한 다수의 연구들은 지수함수 개념의 중요성에도 불구하고 학생들과 교사들이 지수함수의 그래프를 이해하는 데 많은 어려움을 겪고 있음을 지적한다.

이와 관련하여 함수의 그래프 구성에 대한 기존의 접근 방법을 검토해볼 필요가 있다. 두 변수 사이의 관계를 순서쌍으로 조직하여 좌표평면위에 점을 찍어 기하학적으로 나타낸 함수의 그래프를 생성하기 위해서는 규칙성의 발견이 필수적이며, 이를 용이하게 하기 위해 대응표가 사용된다. 일반적으로 함수식에 몇 개의 값을 대입하여 함숫값을 계산하여 순서쌍을 찾고, 이 순서쌍을 몇 개의 주요 거점으로 하여 좌표평면 위에 나타낸 다음, 이 점들을 선으로 연결하는 전통적인 방식은 함수의 그래프에 대한 진정한 이해를 바탕으로 한다기보다는 절차 위주의 기계적인 방식이라는 측면에서 비판되어 왔다(이화영, 류현아, 장경윤, 2009). 이와 같은 방식으로 학습한 학생들은 주요 거점으로부터 연속된 직선 또는 곡선과의 관계를 설명하지 못하며, 함수의 그래프의 점별 접근에만 상대적으로 익숙할 뿐 그래프의 기울기나 증가, 감소, 극대, 극소, 주기 등의 국소적, 전반적 접근에 취약할 수 있다. Leinhardt, Zaslavsky & Stein(1990)은 점별 접근에 치우친 그래프 지도방식이 학생들로 하여금 그래프의 기울기와 높이, 구간과 점을 혼동하게 하는 원인이라는 것을 지적한 바 있다. 따라서 지수함수 그래프는 Freudenthal(1983)의 교수학적 현상학에 따른 함수 지도 방법에 따라, 빠르게 증가 또는 감소하는 다양한 현상에 대한 직관적인 경험을 제공하여 지수적인 변화라는 종속성과 대응 관계를 인식하게 하고, 이를 그래프로 표현하여 그 특징을 탐색하게 한 후 지수함수로 정의하여 그 구체적인 성질을 탐색하는 과정으로 이루어질 필요가 있다. 송정화와 권오남(2002)은 실생활 현상을 표현하는 그래프가 선형 그래프보다는 복잡하고 다양한 형태의 그래프이기 때문에, 학습과정에서 규칙적이고 연속적인 그래프만을 다룰 것이 아니라 불규칙하고 이산적인 것, 단일한 대수식으로 표현되지 않는 그래프를 다룰 필요가 있음을 주장하였다. 이러한 비정형적인 형태의 그래프 구성과 해석 경험은 다양한 함수 관계의 이해와 함수와 그 그래프에 대한 깊이 있는 이해에도 기여할 것으로 보인다.

지수함수는 발생적 측면에서 수학사적 맥락과 실생활 맥락을 풍부하게 가지고 있다(Boyer, 1968; Toeplitz, 2006; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams & Amidonet, 2015; Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan & Amidon, 2016). 이러한 맥락을 활용하는 것은 학생들의 지수함수에 대한 이해를 돕기 위한 방안으로 의미가 있다. 실제로 Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan & Amidon(2015)은 식물의 성장 맥락을 활용하여 지수함수 그래프 구성을 위한 교수실험을 실시하였다. 그 결과, 연구자들은 학생들이 실생활 맥락 속에서 함수에 관한 보다 유연한 사고를 하고 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 이 연구 또한 단일 맥락을 제시한 것으로, 지금까지 수행된 연구 중에서 지수함수의 다양한 맥락들을 비교하여 그래프 구성을 살펴본 연구는 찾아보기 힘들다.

대부분의 교사들이 교과서를 가장 중요한 교수·학습 자료로 인식하고 의존하는 현실에서는 교과서에 어떠한 맥락이 제시되고 있는지 여부가 교수·학습에 미치는 영향이 크다. 만약 제시된 대부분의 문제가 대수적인 조작으로 해결되거나 함수의 그래프가 대수로 진행하기 위한 하나의 수단으로 다루어지고 있다면, 이는 재고의 여지가 있다(Demana, Schoen, & Wait, 1993; Yerushalmy & Schwartz, 1993). 또한 Coulombe & Berenson (2001)은 대수적 조작에 의존하는 전통적인 방식의 그래프 구성은 학생들에게 단지 표현을 연습하는 것에 불과하다는 것을 지적한다. 그들은 맥락을 활용한 문제기반 접근 방식을 통해 그래프를 구성함으로써 표현의 사용이 학생들의 이해를 돕기 위한 지적 도구로 활용될 수 있도록 해야 한다고 주장한다.

이에 본 연구에서는 장차 중등학교에서 지수함수를 포함한 학교수학을 지도할 예비교사들을 대상으로 지수함수의 그래프를 구성할 수 있는 문제 맥락에 대한 이해를 조사하고자 한다. 문제 맥락에 기반한 그래프 구성을 위한 효과적인 학습이 이루어지기 위해서는 문제를 선정, 조직하고 해석할 수 있는 교사지식이 필수적이다. 수업 중 교사의 모든 행위는 기본적으로 교사의 지식에 의존하며, 교사의 지식은 학생들이 무엇을 학습해야 하는가를 결정하고 학생들을 어떻게 가르칠 것인가를 결정하기 때문이다(Shulman, 1986; Ma, 1999). 따라서 예비교사들이 제시된 맥락을 어떻게 해석하여 지수함수의 그래프를 단계적으로 구성하는지와 각 맥락의 교수학적 적절성에 대해서 어떻게 판단하는지를 살펴보는 본 연구는 지수함수 지도에 필요한 교사지식에 대한 기초 지료를 제공할 뿐 아니라 지수함수의 의미와 그 그래프에 대한 학생들의 깊이 있는 이해를 위한 수학수업을 도모하는데 기여할 것으로 본다.

II. 이론적 배경

1. 수학사 맥락과 실생활 맥락의 지수함수

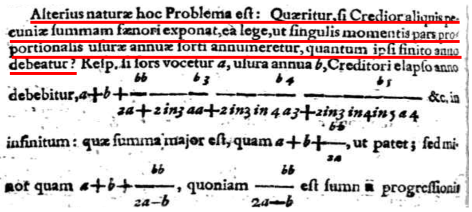
가. 연속 복리 맥락과 지수함수

복리란 일정기간 동안에 발생한 이자를 처음 원금에 합산한 원리합계가 다음 기간의 원금으로 간주되어 이자가 발생하는 것을 말한다. 예를 들어, 원금 A원을 연이율 r로 t년 동안 복리로 저축하였을 때 t년 후의 원리합계는 $A(1+r)^t$이 된다. 만약 연이율 r을 1년 동안 n등분하여 각 기간마다 복리계산을 한다고 한다면, 1년 후의 원리합계는 $A(1+\frac{r}{n})^n$이 될 것이다. 더 나아가 n의 값이 무한히 커진다고 가정하면, 1년 후의 원리합계는 $\lim_{n\to\infty} A(1+\frac{r}{n})^n$이 될 것이다. 이와 같은 방식으로 이자가 연속적으로 발생하는 것을 연속 복리라 하며, 원리합계는 Ae^r에 수렴한다.

연속 복리는 회계, 금융수학, 경제수학에서 사용하는 개념으로서 실생활의 경제현상과 밀접한 관계가 있다(전홍기, 2010). 이제 학교수학에서도 연속 복리 개념이 지도될 것으로 보인다. 2015 개정 교육과정의 경제수학 과목에서 연속 복리

의 의미와 연속 복리로 계산하였을 때의 이자, 원리합계, 미래의 돈에 대한 현재 가치의 계산을 성취기준으로 제시하고 있기 때문이다(교육부, 2015a). 이와 같이 연속 복리는 실생활 맥락에서 유용하고 의미 있는 개념이라고 할 수 있다.

한편 수학의 역사에서 연속 복리 개념은 야곱 베르누이가 복리법 계산에 있어 매 순간 이자가 발생하는 경우를 가정한 것으로부터 출발하였다 (Bernoulli, 1690; Boyer, 1968; Toeplitz, 2006). 그는 1685년에 학회지 journal des Savants에 제시되었던 이자에 관한 문제들을 바탕으로, 1690년 [그림 II-1]과 같은 연속 복리 문제를 독일 최초의 과학 학술지였던 Acta eruditorum(1690, May)에 제기하였다.


Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Creditor aliquis pecuniæ ſummam fænori exponat, eà lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur, $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2 \text{ in } 3\, aa}+\frac{b^4}{2 \text{ in } 3 \text{ in } 4\, a^3}+\frac{b^5}{2 \text{ in } 3 \text{ in } 4 \text{ in } 5\, a^4}$ &c. in infinitum: quæ ſumma major eſt, quam $a+b+\frac{bb}{2a}$, ut patet; ſed minor quam $a+b+\frac{bb}{2a-b}$, quoniam $\frac{bb}{2a-b}$ eſt ſumma progreſſionis

[그림 II-1] Bernoulli(1690)가 제기한 문제

밑줄 친 부분은 '이것은 다른 종류의 문제이다. 어떤 은행에서 연초에 투자한 돈에 대하여 매 순간마다 연이율에 비례하여 이자를 계산하여 이자와 원금을 합한 금액을 계속 누적하여 투자할 때, 연말의 원리합계는 얼마인가?'로 해석된다. 베르누이는 연속 복리 문제를 해결하는 과정에서 이항정리를 사용하여 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$의 값이 2.5와 3 사이의 실수라는 것을 알아내었다. 비록 자연상수 e에 대해서는 알지 못했지만 극한의 개념으로서 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$의 존재를 알아냈다는 점에서 의미가 있다(O'Connor & Robertson, 2001).

이와 같은 연속 복리 개념은 지수함수의 구성의 역사적 맥락을 제공한다. 즉 원금 A원에 대해 매 순간마다 연이율 r에 대한 비의 값으로 원리합계 y를 계산한다면, 1년 후의 원리합계는 Ae^r이므로 x년 후의 원리합계는 $y=Ae^{rx}$가 성립한다. 만약 n번에 걸쳐 이자가 지급된 경우의 각 분기의 원리합계 y의 그래프라면, 그래프의 개형이 불연속인 계단식으로 나타내질 것이다. 또한 n이 한없이 커진다고 가정한다면, 원리합계를 연속 복리로 계산한 그래프의 개형은 매끄러운 지수함수로 표현된다.

나. 지수적 성장 맥락과 지수함수

사회 현상이나 자연 현상에서 급격하게 증가하는(또는 감소하는) 상황에 대해 기하급수적으로 증가(또는 감소)한다고 표현한다. 이러한 현상은 세균의 분열, 방사능 물질의 소멸(반감기), 소리의 세기 측정, 지진의 세기 측정, 뉴턴의 냉각 법칙 등에서 쉽게 살펴볼 수 있다. 이와 같은 지수적 성장은 호주, 핀란드, 싱가포르 등 다수의 국가에서 지수함수의 맥락으로 강조하고 있는 개념이며, 지수함수에 대한 이해는 학생들이 미적분학과 이후 대학수준의 미분방정식, 복소해석학을 학습하는데 결정적인 역할을 한다(Weber, 2002). 이와 관련하여 다수의 연구들이 학교수업에서 지수적 성장 모델을 통해 지수함수를 학습하는 것의 중요성을 강조하고 있다(Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips, 2006; Haese, Haese, & Humphries, 2013).

지수적 성장 모델을 활용한 지수함수의 그래프의 도입 방법은 두 가지로 생각할 수 있다. 첫 번째 방법은 지수적 성장 상황이 포함된 과제를 학생들에게 제공하고 이를 탐구하는 과정에서 지수함수의 그래프를 학습하도록 하는 방법이다. 이러한 방법은 Ellis, et al. (2015)이 식물의 성장

맥락을 이용하여 지수함수의 그래프를 지도한 방법과 유사하다. 두 번째 방법은 지수적 성장 모델의 변화율에 대한 성질을 이용하여 지수함수의 그래프를 도입하는 방법이다. 지수적 성장 모델은 한 지점에서의 순간변화율이 그 지점에서의 함숫값에 비례한다는 성질을 가지고 있다. 즉 적당한 상수 k가 존재하여 $x=t$에서의 순간변화율 $y'(t)$가 $y(t)$와 비례한 값인 $k\times y(t)$과 같다는 성질을 이용하여 지수함수의 그래프를 구성하도록 하는 방법이 가능하다. 이때의 그래프는 주어진 구간을 n개의 하위 구간으로 등분하고 각 하위 구간의 직선의 그래프를 연결한 그래프가 결국 n이 한없이 커질 때 곡선에 수렴한다는 아이디어에 기반한다.

2. 지수함수의 그래프 구성 방법

가. 교육과정에서의 지수함수

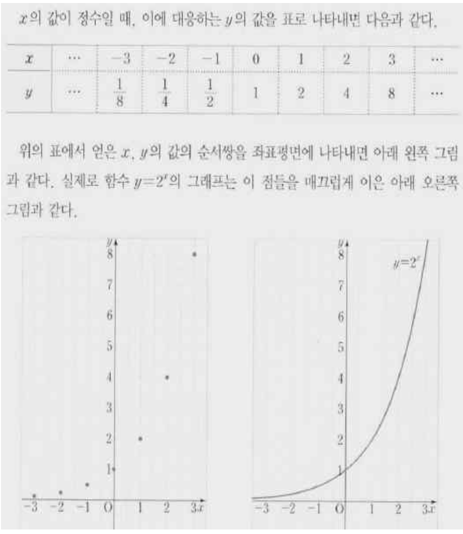
지수함수는 빠르게 증가하거나 감소하는 수량이나 현상을 다루는 데 유용한 함수이고, 자연현상이나 사회 현상을 설명하고 분석하기 위한 수학적 모델이다(교육부, 2015a). 2015 개정 교육과정에서는 수학1에서 지수함수의 뜻에 대한 이해, 지수함수의 그래프 그리기와 그 성질 이해, 지수함수를 활용한 문제 해결을 성취기준으로 제시하고 있으며, 이후 미적분 과목에서 지수함수의 극한과 미분, 적분을 다루게 된다. 이와 같은 편제는 지수함수와 그 미분을 미적분2에서 다루었던 2009 개정 교육과정과 큰 차이를 보이지만, 성취기준에 있어서는 크게 달라지지 않았다고 할 수 있다. 다만 함수의 도입에서 다양한 상황에 제시된 두 양 사이의 관계를 그래프로 표현하고 해석하는 과정을 강조하고 있으므로 지수함수 또한 실제적 맥락에서 그래프로 표현하는 활동을 강조할 것으로 보인다.

한편 대학수학 수준에서 지수함수는 로그함수, 삼각함수와 더불어 대표적인 초월함수로서 미적분학의 전개에서 필수적인 함수로 다루어지고 있다. 지수함수 $y=a^x$의 도함수는 함수 자신에 비례하며, 특히, $y=e^x$는 자신의 도함수와 같은 함수이다. 이에 대해 1941년 Courant과 Robbins는 '(자연)지수함수는 자신의 도함수와 같다. 이것은 지수함수의 모든 성질을 설명하는 원천이며 응용 분야에서 이 함수를 중요하게 만든 본질적인 이유이다'라고 주장한 바 있다(Maor, 2000, 재인용). 이와 같은 좋은 성질을 가진 지수함수는 어떤 양의 변화율이 그 양 자체에 비례하는 다양한 현상을 조직하는 수단으로 작용한다. 거리에 따른 음파의 강도, 시간에 따른 물체의 냉각 현상, 방사성 물질의 붕괴율, 인구의 증가 현상 등이 모두 지수함수를 사용한 미분방정식으로 해결 가능하다. 특히, $y=e^x$는 함수에 근사하는 다함함수를 도함수를 이용하여 나타내주는 Taylor정리를 이용하면, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$라는 가장 단순하고 아름다운 수렴하는 급수형태를 가진다. e^x의 Taylor 급수를 복소수 z로 확장하여 적용하면, 복소해석학을 전개 가능하게 하는 복소지수함수 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$를 얻을 수 있다. 이와 같이 학교수학의 교육과정과 대학수학의 교육과정에서 지수함수는 중요도가 높은 함수이며, 특히 미적분학과 해석학 분야에서 필수적인 기초 개념이라고 볼 수 있다.

나. 우리나라 수학 교과서의 사례

현재 고등학교에서 사용되고 있는 2009 개정 교육과정에 따른 9종의 미적분2 교과서에서 지수함수의 그래프를 구성하는 방법은 다음과 같이 3가지 유형으로 나누어 볼 수 있다. 첫 번째 유형은 두 변수에 대한 대응표를 작성하고 이를 좌표평면

에 표현한 후 매끄러운 곡선으로 연결함으로써 지수함수의 그래프를 도입하는 방식이다. [그림 II-2]는 $y=2^x$의 그래프를 그리는 과정을 나타낸 교과서의 일부이다. 먼저 x의 값이 정수인 경우에 한하여 대응되는 y의 값을 구한 다음, 순서쌍 (x,y)를 좌표평면에 점으로 표현하고 나머지 부분에 대해서는 별다른 설명 없이 이산적으로 나타내진 점들을 매끄러운 곡선으로 이으면 함수의 그래프를 얻을 수 있다는 식으로 기술되고 있다.

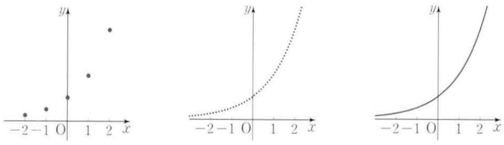

x의 값이 정수일 때, 이에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$

위의 표에서 얻은 x, y의 값의 순서쌍을 좌표평면에 나타내면 아래 왼쪽 그림과 같다. 실제로 함수 $y=2^x$의 그래프는 이 점들을 매끄럽게 이은 아래 오른쪽 그림과 같다.

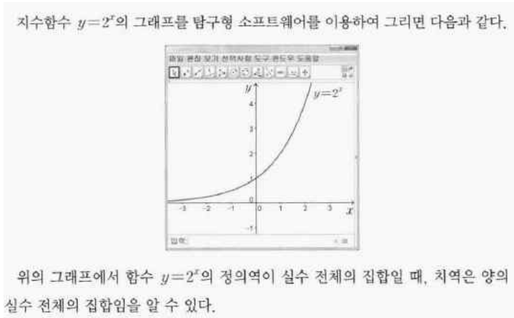
[그림 II-2] 정상권 외(2014)의 구성 방법

두 번째 유형은 두 변수의 대응표를 작성하여 좌표평면에 나타내되, 이후 x의 값의 간격을 점점 더 작게 함으로써 연속된 지수함수의 그래프를 구성하는 방식이다. [그림 II-3]은 $y=2^x$의 그래프를 그리는 과정을 나타낸 교과서의 일부이다. 먼저 x의 값이 정수인 경우의 순서쌍 (x,y)를 좌표평면에 나타낸 다음, x의 값의 간격을 점점 더 작게 하여 무수히 많은 점들이 나타내는 모양을 시각적으로 보여줌으로써 지수함수의 그래프를 구성하고 있다.



[그림 II-3] 신항균 외(2014)의 구성 방법

세 번째 유형은 공학적 도구를 활용하여 지수함수의 그래프를 제시하는 방식이다. [그림 II-4]와 같이, 탐구형 소프트웨어인 GeoGebra를 이용하여 $y=2^x$의 그래프를 그린 후, 그래프를 통해 정의역과 치역을 확인하는 방식으로 지수함수의 그래프를 도입한다. 이 방식에서는 그래프가 구성되는 일련의 단계를 드러내지 않은 채, 완성된 형태의 지수함수의 그래프를 제시하는 방식이다.

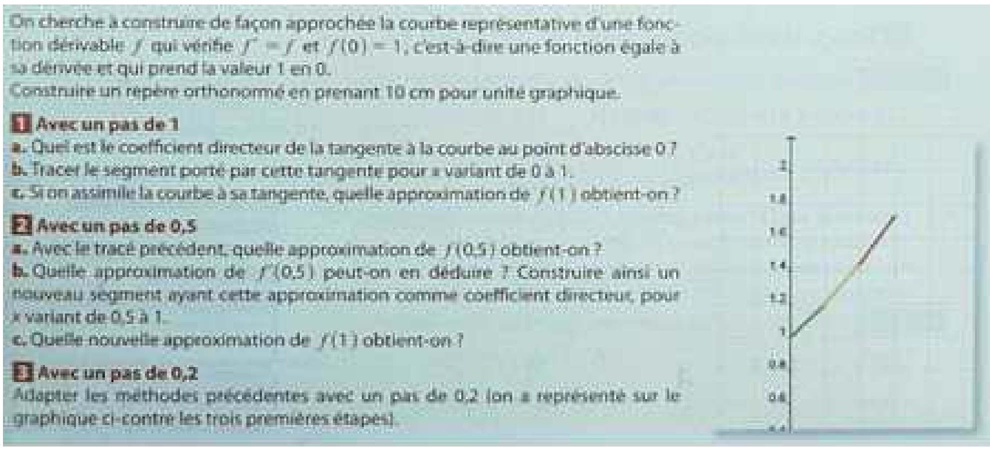

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 탐구형 소프트웨어를 이용하여 그리면 다음과 같다.

위의 그래프에서 함수 $y=2^x$의 정의역이 실수 전체의 집합일 때, 치역은 양의 실수 전체의 집합임을 알 수 있다.

[그림 II-4] 김원경 외(2014)의 제시 방법

나. 프랑스 수학 교과서의 사례

프랑스의 수학 교과서 Déclic Mathématiques TS(Beltramone et al., 2012)에서는 지수함수의 그래프를 지수적 성장 모델에 맞추어 도입하고 있다. 프랑스의 Classe de terminale는 우리나라 고등학교 3학년에 해당하고 S는 과학과정을 의미하므로, 이 교과서는 고3 이공계열에서 사용하는 교과서라고 할 수 있다. [그림 II-5]는 구간 $[0,1]$에서 $f'=f$이고 $f(0)=1$인 그래프를 나타내도록 하는 교과서의 일부이다. 주어진 조건을 만족하는 그래프를 그릴 수 있도록 단계적으로 그



On cherche à construire de façon approchée la courbe représentative d'une fonction dérivable f qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$, c'est-à-dire une fonction égale à sa dérivée et qui prend la valeur 1 en 0.
Construire un repère orthonormé en prenant 10 cm pour unité graphique.

1 Avec un pas de 1
a. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 ?
b. Tracer le segment porté par cette tangente pour x variant de 0 à 1.
c. Si on assimile la courbe à sa tangente, quelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?

2 Avec un pas de 0,5
a. Avec le tracé précédent, quelle approximation de $f(0,5)$ obtient-on ?
b. Quelle approximation de $f'(0,5)$ peut-on en déduire ? Construire ainsi un nouveau segment ayant cette approximation comme coefficient directeur, pour x variant de 0,5 à 1.
c. Quelle nouvelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?

3 Avec un pas de 0,2
Adapter les méthodes précédentes avec un pas de 0,2 (on a représenté sur le graphique ci-contre les trois premières étapes).

[그림 II-5] Beltramone et al.(2012)의 구성 방법

방법을 제시하고 있다. 1단계에서는 구간의 단위가 1일 때를 나타내는 것으로, $x=0$에서의 함숫값인 1이 구간 $[0,1]$에서의 선분의 기울기가 되도록 하는 함수의 그래프를 그릴 수 있다. 2단계에서는 구간의 단위가 0.5일 때를 나타낸 것으로, 구간 $[0,0.5]$에서는 $x=0$에서의 함숫값인 1이 선분의 기울기가 되고, 구간 $[0.5,1]$에서는 $x=0.5$에서의 함숫값인 $\frac{1}{2}$이 선분의 기울기가 되는 함수의 그래프를 그릴 수 있다. 3단계에서는 구간의 단위가 0.2인 경우로, 위와 같은 과정을 반복함으로서 그래프를 나타내도록 하고 있다.

Beltramone et al. (2012)의 방식은 일단 단계별로 그래프를 그린 다음 그 극한으로서 지수함수의 그래프를 구성한다는 측면에서 신항균 외(2014)와 공통점이 있지만, 신항균 외(2014)가 각 단계에서 점의 집합으로서 함수의 그래프를 나타낸 반면에 Beltramone et al. (2012)은 구간별로 함수의 그래프를 직선으로 표현했다는 점에서 차이점이 있다.

III. 연구방법

본 연구에서는 예비교사들이 지수함수의 맥락을 어떻게 해석하고 지수함수의 그래프를 단계적으로 어떻게 구성하는지를 분석하고, 또한 각 맥락의 교수학적 적절성에 대해서 어떻게 판단하는지를 살펴보고자 하였다. 본 연구에서 활용한 과제는 지수함수의 그래프 구성과 관련된 세 가지 맥락으로 국내외 교과서와 교육과정에서 언급하고 있는 내용을 바탕으로 구성하였다

<표 III-1> 지수함수 그래프 구성 맥락의 아이디어와 n단계 그래프의 성질

	아이디어	n단계 그래프의 성질	출처
A	유한개의 점에 대한 그래프의 극한	유한개의 점으로 구성	신항균 외(2014)
B	한 점에서의 변화율과 함숫값의 비례	연속 함수	Beltramone et al.(2012)
C	연속 복리	불연속 함수	전홍기(2010)

(<표 III-1> 참조). 과제의 첫 번째는 특별한 실생활 맥락 없이, 먼저 정수 값 위주의 유한개의 점을 좌표평면에 나타낸 다음 보다 많은 수의 유한개의 점을 좌표평면에 나타내는 과정을 단계적으로 사용하는 방법이다(이하 아이디어 A). 아이디어 A의 n단계 함수의 그래프는 유한개의 점으로 구성되어 있으며, 지수함수의 그래프는 n단계 그래프의 극한에 해당한다. 이러한 방식은 현행 교과서가 일차함수, 이차함수 등 일반적인 함수의 그래프를 도입하는 경우에 사용하는 방식으로, [그림 III-1]은 아이디어 A와 유사한 방법으로 중학교 3학년의 이차함수의 그래프를 도입하고 있는 그림이다(신항균 외, 2013).

[그림 III-1] 이차함수의 그래프 도입

두 번째 맥락은 프랑스 수학교과서 Déclic Mathématiques TS(Beltramone et al., 2012)에 제시된 내용을 일부 수정한 맥락이다(이하 아이디어 B). 이러한 방법은 세균의 분열, 반감기 등 지수적 성장 모델의 극한함수가 $y' = ky$(k는 상수)를 만족하는 미분방정식의 해임을 이용한 것이다. 아이디어 B를 활용한 그래프 구성 방법은 학생들이 $y' = ky$의 해를 직교좌표계에 나타낼 수 있도록 정의역을 등분하여 구간별로 그래프를 나타내는 활동을 단계적으로 제시하고 있다. 아이디어 B의 n단계 함수의 그래프와 다른 맥락의 그래프의 차이점은 연속 함수로 나타내진다는 점이다.

세 번째 맥락은 Toeplitz(2006)가 그의 저서 『Calculus: Genetic Approach』에서 야곱 베르누이의 문제(p. 40)로 소개한 것을 수정한 것이다. 이 맥락은 매 순간 이자를 계산하는 연속 복리 개념을 포함하고 있다(이하 아이디어 C). 아이디어 C는 수학사적으로 의미가 있을 뿐만 아니라 2015 개정 교육과정의 경제수학에 새롭게 등장하는 연속 복리의 개념을 포함한다는 점에서 의미가 있다. 아이디어 C를 활용한 그래프 구성 방법은 학생들이 복리법의 계산에 있어 이자를 받는 기간을 점차적으로 줄이면서 단계적으로 그래프를 나타내는 활동을 제시하고 있다. 아이디어 C의 n단계 함수의 그래프는 불연속함수에 해당한다.

예비교사들에 투입된 검사지는 이상의 세 가지 맥락의 아이디어에 대한 제시문 부분과 지수함수의 그래프를 그려보는 문항, 각 맥락의 적절성을 판단하는 문항으로 구성되었다. 그래프 표현 문항은 유한개의 점 또는 선분으로 이루어지는 1단계, 2단계 그래프와 그 극한으로서의 그래프의 개형을 추측하는 3단계 그래프를 단계적으로 나타내도록 하였으며, 맥락의 적절성 판단 문항은 각 아이디어가 지수함수의 그래프를 구성하는 맥락으로서 적절한지를 판단하고 그 이유를 서술하도록 하였다. 유한개의 점에 대한 그래프의 극한, 한 점에서의 변화율과 함숫값의 비례관계, 연속 복리 개념이라는 세 가지 아이디어는 <표 III-2>와 같이 정리되어 제시되었다.

<표 III-2> 과제에서 제시한 세 가지 아이디어

아이디어 A
구간 $-2 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $y = 2^x$의 그래프를 나타내보자. 정수 $-2, -1, 0, 1, 2$에 대응하는 y의 값은 하나로 결정되므로 좌표평면 위에 $(-2, 2^{-2})$, $(-1, 2^{-1})$, $\cdots$, $(2, 2^2)$을 나타낼 수 있다. 또한 유리수 $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$에 대해 $2^{-\frac{3}{2}}$의 값은 두 수 2^{-2}과 2^{-1}의 기하평균으로서 하나로 결정되고, 같은 방법으로 $2^{-\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{3}{2}}$의 값도 하나

로 결정되어 좌표평면 위에 $(-\frac{3}{2}, 2^{-\frac{3}{2}})$, $(-\frac{1}{2}, 2^{-\frac{1}{2}})$, $\cdots$, $(\frac{3}{2}, 2^{\frac{3}{2}})$을 나타낼 수 있다. 마찬가지로 지수의 확장을 통해 유리수 r과 실수 x에 대응하는 y의 값은 하나로 결정되어 $(r, 2^r)$, $(x, 2^x)$을 나타낸다.
Q. 정의역이 $0 \le x \le 1$인 모든 실수일 때, $y = 2^x$의 그래프는 어떻게 될지 그 개형을 그려보아라.

아이디어 B

다음 조건을 만족하는 함수 f의 그래프를 $0 \le x \le 1$의 범위에서 나타내보자.

(가) $f(0) = 1$
(나) 닫힌 구간 [0,1]을 k개의 닫힌 구간으로 등분하였을 때, $i(1 \le i \le k)$번째 구간 $x_{i-1} \le x \le x_i$에서의 그래프는 점 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$을 지나면서 기울기가 $f(x_{i-1})$인 직선의 일부이다.

1 $k = 1$일 때, 닫힌 구간 [0,1]을 1개의 닫힌 구간으로 등분하자. 구간 $0 \le x \le 1$에서의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나면서 기울기가 1인 직선의 일부로 나타난다.
2 $k = 2$일 때, 닫힌 구간 [0,1]을 2개의 닫힌 구간으로 등분하자. 첫 번째 구간 $0 \le x \le \frac{1}{2}$에서의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 일부로 나타난다. 두 번째 구간 $\frac{1}{2} \le x \le 1$에서의 그래프는 점 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$을 지나고 기울기가 $\frac{3}{2}$인 직선의 일부로 나타난다.
3 $k = n$일 때, 닫힌 구간 [0,1]을 n개의 닫힌 구간으로 등분하여 위 과정을 반복한다.
Q. n개의 구간에 대한 함수의 그래프는 어떻게 될지 그 개형을 그려보아라. 또한 n이 한없이 커진다면, 함수 f의 그래프는 어떻게 될지 그 개형을 그려보아라.

아이디어 C

어떤 은행이 이자를 매 순간 계산하여 원금에 더하는 연속 복리로 이자를 지급한다고 하자. 이 은행의 이자 계산 방법을 더 자세히 살펴보자. 일반적으로 연초 a원을 연이율 5%에 맡기면, 연말의 원리합계는 $a\left(1 + \frac{1}{20}\right)$원이 된다. 만약 반 년에 한 번씩 이자를 지급한다면, 예금 후 1년이 된 시점의 원리합계는 $a\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20}\right)^2$원이다. 은행이 매 달마다 이자를 지급한다면 연말의 원리합계는 $a\left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{20}\right)^{12}$원이 된다. 이자가 지급되는 빈도가 많아질수록 돈을 맡긴 사람에게 유리함을 알 수 있다. 1년에 이자가 n번 지급되고 연이율이 r이라고 할 때, 연초에 맡긴 a원에 대한 연말의 원리합계는 $a\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$원이다. $n = 1$일 때와 $n = 2$일 때 각 분기의 원리합계 y의 그래프를 나타내보고, 이자가 n번 지급된 경우의 각 분기의 원리합계 y의 그래프의 개형을 나타내보자.
Q. 만약 n이 한없이 커진다면, 연속 복리로 계산한 원리합계 y의 그래프는 어떻게 될지 그 개형을 그려보아라.

개발한 과제는 2명의 현직 교사와 1명의 수학교육 전문가에게 자문을 받았으며, 일반대학원 1년차 학생 27명에게 예비조사를 실시하여 문항의 어휘 및 수식 등을 수정하여 최종 확정하였다. 본 조사에 참여한 예비교사는 지방의 국립 H대학교 수학교육과 4학년에 재학 중인 학부학생으로 총 24명이다. 연구에 참여한 24명 모두 2회 이상의 교육실습 경험을 가지고 있으며, 미분방정식 등의 교과내용학을 비롯하여 수학 교과교재연구 및 지도법 등의 다수의 수학교육학 관련 과목을 수강한 상태였다. 검사는 2016년 5월에 학생들이 교육실습을 다녀 온 직후에 실시하였으며, 24명의 검사지 모두를 분석을 위해 수집하였다.

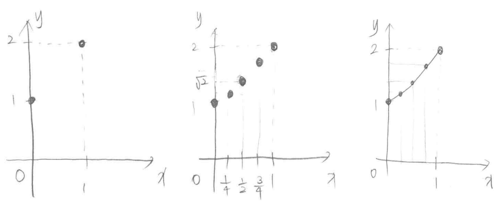
본 연구는 질적 사례 연구에 해당하며, 검사지를 자료로 수집하여 예비교사들의 반응을 귀납적으로 분석(Denzin & Lincoln, 1994)하였으며, 반응 유형에 따라 심층적인 서술을 함으로써 그 의미를 해석하고자 하였다. 수집된 자료는 먼저 지수함수의 그래프 구성에 대한 이해에 대해서는 각 맥락에 내포된 아이디어 A, B, C를 활용하여 1단계, 2단계, 3단계에 걸쳐 제시한 그래프의 개형의 수학적 적절성을 기준으로 분석하였다. 다음으로, 지수함수 그래프 구성을 위한 맥락의 적절성 여부의 판단에 대해서는 먼저 유형별 빈도수를 백분율로 제시하였으며, 구체적인

판단 기준에 대해서는 기존의 틀을 사용하지 않고 예비교사들의 반응에 포함된 핵심적인 표현과 키워드를 중심으로 범주화하여 분석하였다. 검사지 분석과 결과 기술의 효율성을 위해 본 연구에 참여한 예비교사에게 P1에서 P24까지 번호를 부여하였다.

Ⅳ. 결과분석

1. 지수함수 맥락과 그래프 구성에 대한 이해

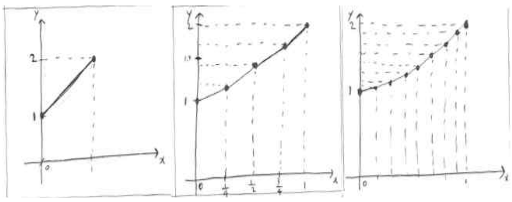
예비교사들은 유한개의 점에 대한 그래프의 극한(아이디어 A), 한 점에서의 변화율과 함숫값의 비례(아이디어 B), 연속 복리(아이디어 C) 개념이 내포된 지수함수 맥락을 해석하여 1단계, 2단계, 3단계에 걸친 그래프 개형을 제시하였다.



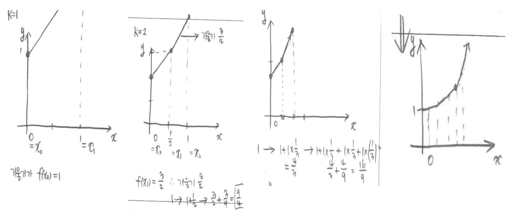
[그림 IV-1] 아이디어 A에 대한 P3의 반응

[그림 IV-1]은 아이디어 A에 대한 P3의 반응으로, x가 0과 1일 때의 두 점을 표현한 1단계로부터 출발하여 5개의 점으로 늘어난 2단계를 거쳐, x가 구간 $[0,1]$의 모든 실수로 확장된 3단계를 표현하고 있다. 3단계는 유한개의 점에 대한 그래프의 극한의 아이디어를 살려 구현한 것으로 정의역이 구간 $[0,1]$인 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 표현하고 있다.

반면에 [그림 IV-2]은 아이디어 A를 활용한 지수함수 그래프 구성에 대한 오류 사례이다. 그림에서 P1은 단계별로 제시하는 모든 그래프를 연속적인 형태로 나타내고 있다. [1단계]와 [2단계]는 이산적인 형태의 그래프로 나타내어야 하며, [3단계]에서는 극한함수로서 매끄러운 곡선으로 표현하여야 한다. 그러나 P1은 [1단계]와 [2단계]에서 좌표평면에 점으로 그래프를 나타낸 후 이를 선분으로 연결하는 오류를 범하고 있음을 알 수 있다. 이 예비교사의 경우에는 함수의 그래프는 항상 연속적으로 이어져 있어야 한다는 함수에 대한 개념이미지를 가지고 있는 것으로 해석할 수 있다.



[그림 IV-2] 아이디어 A에 대한 P1의 오류

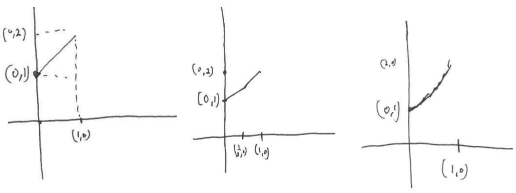


[그림 IV-3] 아이디어 B에 대한 P17의 반응

[그림 IV-3]은 한 점에서의 변화율과 함숫값이 비례하는 아이디어 B에 대한 P17의 반응이다. P17은 1단계에서 구간 [0,1]에서 점$(0,1)$을 지나면서 기울기가 1인 직선을 나타냈으며, 2단계에서는 구간 [0,1]을 2개의 하위 구간으로 분할했을 뿐 아니라 3개의 하위 구간으로 분할한 그래프까지도 추가하여 제시하였다. 마지막 3단계는 구간 [0,1]을 충분히 큰 n개의 하위 구간으로 등분한 상황을 표현하고 있는 것으로 보인다. 모든 단계의 그래프는 연속적으로 표현되고 있으며,

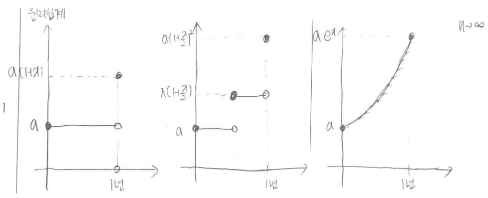
최종 그래프는 거의 곡선에 가까운 지수함수의 그래프의 개형이라고 할 수 있다. 다만 P17이 최종 그래프의 함수식이 $y=e^x$임을 이해하고 있는지의 여부는 현재 답안을 통해서는 확인이 어렵다. 주어진 함수는 등분된 구간 $[x_{i-1,}\ x_i]$에서의 그래프가 점 $(x_{i-1}\ ,\ f(x_{i-1}))$을 지나면서 기울기가 $f(x_{i-1})$인 직선의 일부라는 성질을 가진다. 이는 이 함수의 도함수가 자기 자신과 일치한다는 것을 의미한다. 즉 $f'=f$를 만족하는 유일한 함수인 $y=ke^x$에 해당하며, $f(0)=1$ 조건에 의해 최종 그래프가 나타내는 함수식은 $y=e^x$임을 알 수 있다. 그러나 예비교사 24명 중에서 함수식 $y=e^x$를 정확하게 기술한 예비교사는 S9와 S11 두 명에 불과했다.

[그림 IV-4]의 P12는 1단계의 그래프는 옳게 제시하였으나, 이후의 2단계부터 오류를 범한 사례이다. 구간 $[\frac{1}{2},1]$의 그래프의 기울기가 $f(\frac{1}{2})$, 즉 $\frac{3}{2}$이고 점 $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$과 점 $(1,\frac{9}{4})$ 을 지난다는 사실에 도달하지 못한 것으로 보인다.



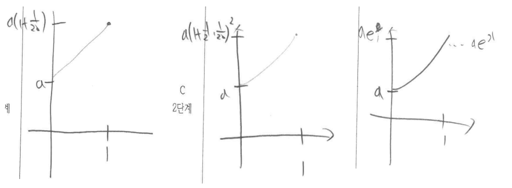
[그림 IV-4] 아이디어 B에 대한 P12의 오류

[그림 IV-5]는 아이디어 C에 대한 P3의 반응으로, 원금을 a, 연이율을 x라 하고, 1년 동안의 각 분기별 원리합계 y를 계단식 그래프의 개형으로 나타내고 있다. 이자를 원금에 포함시키는 횟수가 1번인 1단계의 그래프는 1년 말 시점이 되어서야 원리합계가 불연속적으로 증가하는 모습을 보인다. 이자를 원금에 포함시키는 횟수가 2번인 2단계의 그래프는 6개월, 12개월 총 2회에 걸쳐 불연속점이 있는 계단형 그래프이다. 3단계에서는 충분히 큰 n번에 걸쳐 이자가 지급된 경우의 각 분기의 원리합계 y의 그래프의 개형이 계단식으로 표현되고 있으며, 동시에 n이 한없이 커진다고 가정하여 원리합계를 연속 복리로 계산한 그래프의 개형이 매끄러운 곡선으로 표현되고 있음을 알 수 있다.



[그림 IV-5] 아이디어 C에 대한 P3의 반응

그러나 연속 복리 맥락에서 아이디어 C를 활용하여 지수함수의 그래프의 개형을 3단계까지 성공적으로 유도한 예비교사는 P1, P2, P3 세 명에 불과했다. 그 중에서도 P1과 P2는 충분히 큰 n에 대해서 촘촘한 계단형의 그래프 개형을 제시하는데 그쳤으며, 계단형 그래프의 극한으로서의 매끄러운 곡선은 별도로 표현하지 않았다. 대부분의 예비교사는 연속 복리 맥락에서 아이디어 C를 포착하지 못했다고 할 수 있으며, 결과적으로 지수함수 그래프를 구성하는데 실패하였다. [그림 IV-6]의 P7의 경우 또한 아이디어 C를 이해하지 못하고 있음을 알 수 있다. 이 학생은 n번에 걸쳐 이자가 지급된 경우의 각 분기별 원리합계를 구간별로 따로 나타내지 못했으며, 단지 각 경우의 원리합계 총액을 1년 후 시점에 나타내어 직선의 그래프로 표현하고 있다. [그림 IV-6]의 오른쪽 그림에는 충분히 큰 n인 경우의 지수함수가 표현되고는 있으나 이 또한 n단계의 그래프에 대해서 극한 개념으로 접근했다고 보기 어렵다.



[그림 IV-6] 아이디어 C에 대한 P7의 오류

2. 지수함수 그래프 구성 맥락의 교수학적 적절성에 대한 판단

가. 아이디어의 적절성에 대한 빈도 분석

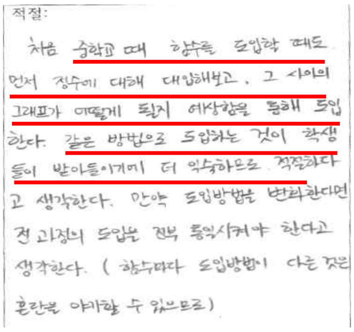
지수함수 그래프의 구성 맥락에 포함된 아이디어의 교수학적 적절성에 대한 반응을 분석한 결과, 각각의 아이디어가 적절하다고 판단한 예비교사의 수가 A의 경우 16명, B의 경우 4명, C의 경우가 3명 순으로 조사되었다. 반면에 각각의 아이디어가 부적절하다고 판단한 예비교사의 수는 B의 경우 17명, C의 경우 16명, A의 경우가 4명 순으로 조사되었다([표 IV-1] 참조). 결과적으로 현행 교과서에서 사용하는 방식인 아이디어 A가 지수함수 그래프의 구성 방식으로 가장 적절하다고 생각하는 예비교사가 아이디어 B나 C에 비해서 상대적으로 많다고 볼 수 있다.

<표 IV-1> 아이디어의 적절성에 대한 반응 빈도

	아이디어 A	아이디어 B	아이디어 C
적절	16 (66.7%)	4 (16.7%)	3 (12.5%)
중립	4 (16.7%)	3 (12.5%)	5 (20.8%)
부적절	4 (16.7%)	17 (70.8%)	16 (66.7%)

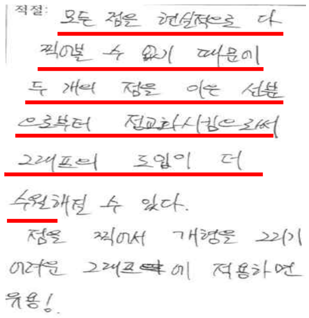
나. 맥락의 적절성에 대한 판단 기준

II장에서 살펴본 바와 같이, 아이디어 A는 2009 개정 교육과정에 따른 신항균 외(2014) 교과서에서 제시하고 있는 방법으로, 함수의 그래프를 도입하는 가장 일반적인 방법이면서 예비교사들에게 가장 익숙한 방법이라고 할 수 있다. 아이디어 A를 사용하여 지수함수의 그래프를 도입하는 것에 대해 16명(66.7%)의 예비교사들이 적절하다고 평가했다. 이들이 적절하다고 판단한 근거로는, 직관적으로 그래프를 파악할 수 있다는 점과 중학교 때부터 다항함수의 그래프를 도입한 일반적인 방법이기 때문에 지수함수의 그래프의 경우에도 학생들이 쉽게 받아들일 수 있다는 점([그림 IV-7] 참조) 등이다.



[그림 IV-7] 아이디어 A가 적절하다고 평가한 P23의 응답

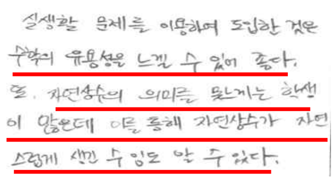
아이디어 B는 프랑스 교과서인 Beltramone et al. (2012)의 방법으로 실생활 맥락이 내포되어 있다. 아이디어 B는 각 단계의 함수가 연속함수로 표현되고, 단계가 진행될수록 아래로 볼록한 함수의 형태가 된다. 아이디어 B를 사용하여 지수함수의 그래프를 구성하는 것에 대해 4명(16.7%)의 예비교사들이 적절하다고 평가했다. 이들이 적절하다고 판단한 근거로는, 지수함수의 그래프를 구성하는 과정에서 학생들이 직관적으로 받아들이기 쉬워 효율적인 방법이라는 것과 모든 점을 찍어야 하는 아이디어 A 보다는 두 점을 찍어 정교화 하는 아이디어 B가 그래프 도입에 수월하다([그림 IV-8] 참조) 등으로 나타났다.



[그림 IV-8] 아이디어 B가 적절하다고 평가한 P10의 응답

그런데 아이디어 B에 내포된 수학 개념의 본질, 즉 자기 자신과 도함수가 같은 함수라는 수학적 의미나 지수적 성장이라는 실생활 맥락의 수학적 유용성을 근거로 하여 아이디어 B의 교수학적 적절성을 주장하는 반응은 찾아보기 힘들었다.

아이디어 C는 2015 개정 교육과정의 경제수학에 포함된 연속 복리의 개념을 활용한 방법으로 수학사 맥락과 실생활 맥락이 포함되어 있다. 아이디어 C를 사용하여 지수함수의 그래프를 구성하는 것에 대해 3명(12.5%)의 예비교사들이 적절하다고 평가하였다. 이들이 적절하다고 평가한 근거는, 연속 복리와 관련된 내용을 알고 있는 학생들에게 실생활과 연계된 여러 가지 수학적 개념을 연결하여 이해할 수 있다는 점과 실생활 문제를 이용하여 도입함으로서 학생들이 수학의 유용성을 인식할 수 있으며 자연상수 e의 의미를 이해하는데 도움이 된다는 점([그림 IV-9] 참조) 등이다.



[그림 IV-9] 아이디어 C가 적절하다고 평가한 P23의 응답

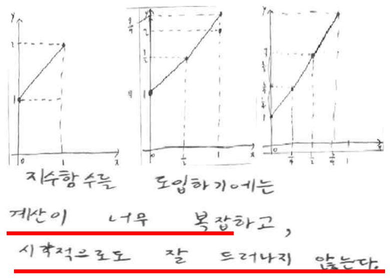
요컨대 예비교사들이 지수함수 그래프의 구성 맥락이 적절하다고 판단한 기준은 수학의 내용 지식의 측면이 아니라 내용에 대한 교수학적 지식에 의존하고 있음을 알 수 있다. 예비교사들은 각 맥락과 아이디어에 내포된 수학 개념의 본질과 의미보다는 그래프를 구성하는 과정에서 나타나는 여러 가지 교수학적 조건과 상황을 언급하며 적절성을 주장하였다. 학생들이 직관적으로 그래프를 파악할 수 있는지, 이전의 학습 경험과 유사한 방법인지, 실생활과 연계되어 학생들의 흥미를 유발할 수 있는지가 주요 기준이었다고 할 수 있다.

다. 맥락의 부적절성에 대한 판단 기준

지수함수 그래프 구성 맥락에 포함된 아이디어 A, B, C에 대하여 예비교사들은 다음과 같은 이유를 들어 부적절함을 설명하였다. 먼저 아이디어 A에 대해서는 4명(16.7%)의 예비교사들이 부적절하다고 답변한 바, 이들은 제시된 맥락을 연속 개념이나 무한 개념과 연결시킬 수 있을지에 대한 의문이 든다고 답하였으며, 무수히 많은 점을 찍는 활동에서 왜 직선이 아닌 곡선의 형태로 연결되는지에 대한 논리성이 부족하다는 점을 지적하였다. 또한 x의 값이 정수이면 대응하는 함숫값을 쉽게 구할 수 있지만, x의 값이 정수가 아니면 함숫값을 구하기 어려워 아이디어 A를 도입 맥락으로 활용하기 어렵다는 지적도 있었다.

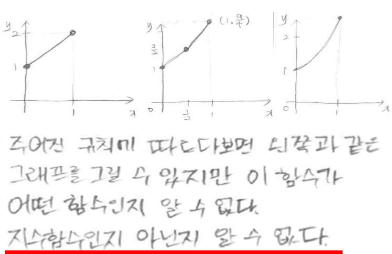
한편 17명(70.8%)의 예비교사들은 아이디어 B가 지수함수 그래프 구성 맥락으로 부적절하다고 답하였다. 이들이 제시한 판단 근거는 지수함수를 도입하기에 계산이 복잡하고 시각적으로 지수함수의 그래프로 보기 어렵다는 점과 주어진 규칙에 따라 그래프를 나타낼 때 그 극한함수의 그래프를 추측할 수 있지만 지수함수의 그래프가 될 것이라는 확신을 할 수 없다는 점이

었다. [그림 IV-10]에서 P1은 아이디어 B를 활용하여 2단계까지의 그래프 개형을 얻는데 성공하였으나, 구간 $[0, 1]$을 4등분한 3단계 그래프에서는 볼록인 그래프 개형은 찾아보기 힘들며, 전체 구간에서의 그래프가 거의 일직선으로 보이도록 표현하는 한계를 보이고 있다. 이에 대해 P1은 아이디어 B의 계산의 복잡함과 모호한 그래프 개형의 한계를 지적하고 있다.



[그림 IV-10] 아이디어 B가 부적절하다고 평가한 P1의 응답

[그림 IV-11]의 P3은 아이디어 B를 활용하여 3단계까지의 그래프 개형을 구성하는데 성공한 사례임에도 불구하고, 함수의 그래프의 개형을 대략적으로 그릴 수는 있지만, 3단계의 그래프가 나타내는 함수가 지수함수인지를 확신할 수 없다고 기술하고 있다. 이는 예비교사 P3가 도함수가 자기 자신인 함수 $y = ke^x$에 대한 내용지식을 가지고 있지 못함을 의미한다.



[그림 IV-11] 아이디어 B가 부적절하다고 평가한 P3의 응답

이외에도 아이디어 B가 지수함수 그래프 구성 맥락으로 부적절한 이유는 선행지식의 측면에서도 제기되었다. 즉 아이디어 A와 C에 비해서 아이디어 B가 높은 수준의 선행지식을 요구한다는 것이다. 실제로 아이디어 B의 경우에 각 단계별로 특정한 x의 값에 대한 함숫값이 변하기 때문에 n단계의 극한으로서 지수함수의 함숫값을 계산해내는 것은 쉽지 않은 일이다. 예를 들어, $f(1)$의 값은 1단계에서는 $f(1) = 2$이지만, 2단계에서는 $f(1) = \frac{9}{4}$로 변화한다. 이러한 사실로부터 일부 예비교사들은 학생들이 인지적 장애를 경험하거나 일차함수의 합이 지수함수가 된다는 오개념을 가질 수 있다는 것을 지적하기도 하였다.

아이디어 C가 지수함수의 그래프 구성 맥락으로서 부적절하다고 답변한 예비교사들은 16명(66.75)으로, 대부분이 연속 복리 개념 자체의 난해성을 그 판단 근거로 제시하였다. 즉 원리합계에 극한의 개념을 도입한 연속 복리를 이용하여 지수함수의 그래프를 구성하는 것은 원리합계 개념에 대한 이해만으로도 어려운 상황에 그래프 구성을 결합시킴으로써 학생들의 학습에 대한 부담을 가중시킬 것이라는 입장이었다.

예비교사들이 지수함수 그래프의 구성 맥락이 부적절하다고 판단한 기준을 적절성을 판단한 기준과 비교하여 볼 때, 수학의 내용지식의 측면에 상대적으로 많이 의존하고 있음을 알 수 있다. 예비교사들은 각 맥락과 아이디어에 내포된 수학 개념의 본질적 측면을 근거로 하여 그래프 구성 맥락으로 부적절함을 설명하였다. 예를 들어, 아이디어 A가 연속, 무한 개념과 논리적으로 연결되는지, 무수히 많은 점으로 일반화하는 과정에서 직선이 아닌 곡선의 형태로 연결되는지에 대한 논리성이 부족하다는 반응들이 확인되었다. 또한 아이디어 B는 주어진 규칙에 따라

그래프의 개형을 얻을 수는 있지만, 그 그래프가 지수함수의 그래프라는 것을 수학적으로 확신하는 것은 어렵다는 점과 아이디어 C는 연속 복리 개념 자체가 갖는 복잡성과 난해성을 이유로 하여 부적절하다고 판단하는 것으로 조사되었다.

V. 결론

본 연구에서는 예비수학교사들이 지수함수 맥락을 어떻게 해석하는지, 이에 따라 지수함수의 그래프를 단계별로 어떻게 구성하는지와 각 맥락의 교수학적 적절성에 대해서 어떻게 판단하는지를 살펴보았다. 분석 결과를 바탕으로 도출한 결론은 다음과 같다.

첫째, 예비교사들은 지수함수 맥락에 대해 단계별로 그래프의 개형을 제시하는 과제에서 세 가지 아이디어에 대한 서로 다른 이해도를 나타내었다. 예비교사들은 학교수학의 개인적 경험에 의해 가장 익숙한 아이디어인 유한개의 점에 대한 그래프의 극한 과제에서 가장 높은 이해도를 나타낸 반면에 한 점에서의 변화율과 함숫값이 비례한다는 아이디어 B와 연속 복리 개념이 내포된 아이디어 C에 대해서는 그래프 구성에 어려움을 보였으며, 일부 예비교사들은 오류를 나타내기도 하였다. 아이디어 A에 대한 오류는 유한개의 점을 찍어 매끄럽게 연결해야하는 상황에서 점과 점 사이를 직선으로 연결하는 형태로 나타났다. 이러한 반응은 실제 중학생과 고등학생들에게서 함수의 그래프 구성 과정에서 빈번하게 나타나는 오류라고 할 수 있다. 이는 예비교사들이 그래프 표현에 관한 내용지식이 부족하거나 그래프의 구성에 대한 정밀도가 떨어질 수 있음을 의미한다. 이러한 결과는 예비교사교육에서 지수함수의 그래프를 단계적으로 그려보는 경험 등 그래프 표현에 대한 충분한 이해가 필요하다는 시사점을 준다.

아이디어 C의 경우에는 많은 수의 예비교사들이 무한번 지급 이자 맥락을 이용하여 지수함수의 그래프를 나타내는데 실패하였다. 일부 예비교사들은 연속 복리 맥락 자체를 이해하지 못하는 것으로 판단되었다. 연속 복리 개념은 2015 개정 교육과정의 경제수학 과목에서 지도되는 개념이기도 하다. 따라서 예비교사들의 교사지식과 가르치기 위한 지식 사이의 단절을 방지하기 위해 예비교사들에게 연속 복리 개념 등의 익숙하지 않은 개념을 예비교사 교육과정을 통해 학습할 수 있는 기회가 제공되어야 할 것이다.

둘째, 지수함수 그래프 구성 맥락이 적절한가에 대한 판단은 예비교사들의 내용교수지식에 의존하는 경향이 있음을 확인하였다. 예비교사들은 각 맥락과 아이디어에 내포된 수학 개념의 의미나 논리적 관계보다는 그래프를 구성하는 과정에서 나타나는 교수학적 조건과 상황을 언급하며 적절성을 주장하였다. 66.7%의 예비교사들이 적절하다고 판단한 아이디어 A의 경우, 유한개의 점을 찍어 매끄럽게 연결하는 방식이 직관적으로 이해하기 쉽고 교과서에서의 다른 함수의 그래프 구성 방식에서 일관성을 유지해야 하기 때문이었다. 아이디어 B와 아이디어 C의 경우 상대적으로 소수의 예비교사가 적절하다고 선택하였는데, 아이디어 B는 직선을 이용하기 때문에 쉽게 이해할 수 있다는 점을, 아이디어 C는 실생활과의 연결성 측면에서 수학의 유용성을 느낄 수 있다는 점을 언급하였다. 반면에 아이디어 B를 예로 들면, 무한 직선 맥락에 내포된 수학 개념의 본질, 즉 자기 자신과 도함수가 같은 함수라는 수학적 의미나 지수적 성장이라는 실생활 맥락의 수학적 유용성을 근거로 제시한 경우는 찾아보기 힘들었다.

셋째, 예비교사들이 지수함수 그래프의 구성 맥락이 부적절하다고 판단하는 기준에서 수학의

내용지식 측면에 의존하는 경향을 확인하였다. 예비교사들은 각 맥락과 아이디어에 내포된 수학 개념의 본질적 측면을 언급하여 그래프 구성 맥락의 부적절함을 주장하였다. 예비교사 8명은 학생들이 유한개의 점을 좌표평면에 나타낸 후 점의 개수를 무수히 많이 증가시킬 때 매끄러운 곡선의 형태가 된다는 아이디어 A의 논리적 필연성의 모호함을 지적하였다. 학생들에게 이산적인 추론을 통해 그래프를 그리도록 한 후, 그 극한함수를 추론하는 방식의 어려움을 언급하기도 하였다. 사실 아이디어 A 맥락으로 그래프를 나타내는 과정에서 학생들은 유한 점에 대한 이산추론(discrete reasoning)으로부터 극한함수인 매끄러운 지수함수로의 연속추론(smooth reasoning)이 이루어져야 한다. 따라서 예비교사들이 제시한 아이디어 A의 부적절성 판단 기준은 학생들이 그래프를 해석함에 있어 이산추론에서 연속추론으로 발달시키는 것은 쉽지 않다는 것을 보여준 Castillo-Garsow(2012)의 의견과 일치한다.

아이디어 B에 대해서도 예비교사들은 각 구간을 연결한 함수의 극한에 해당하는 그래프가 지수함수의 그래프가 된다는 것에 대한 논리적 비약을 지적하였다. 실제로 일차함수의 합이 지수함수가 된다는 오개념을 가질 수 있다고 지적했는데, 이는 학생들의 평균변화율에 대한 개념이 순간변화율을 이해하는 데 문제를 야기할 수 있다는 de Beer, Gravemeijer 와 van Eijck(2015)의 의견과 맥을 같이한다. 아이디어 B의 경우에는 다른 아이디어에 비해서 구간, 등분 등의 다수의 선행지식을 필요로 한다는 점도 부적절성의 판단 이유로 제시되었다. 사실 단계적으로 정의역의 구간을 등분하고, 구간 $[x_i, x_{i+1}]$에서의 그래프는 $(x_i, f(x_i))$를 지나면서 $f(x_i)$를 기울기로 갖는 직선의 일부라는 조건을 만족하는 그래프를 나타내기 위해서는 구간, 등분, 기울기 등에 대한 개념 학습이 전제되어 있어야 한다.

아이디어 C의 경우는 다수의 예비교사들이 연속 복리 개념 자체의 복잡성과 난해성을 들어 부적절함을 주장하였다. 실제로 학생들은 등비수열의 활용으로 원리합계를 학습하고 있으나 원리합계를 이해하는 데 있어 많은 어려움을 느끼고 있다(표진희, 2010). 더군다나 원리합계 개념에 그래프 구성을 결합하는 것은 쉽지 않은 활동이다. 그러나 II장에서 살펴본 바와 같이, 매 순간 이자를 복리로 지급하는 연속 복리는 등비수열과 수열의 극한, 자연상수 e와 관련되는 개념일 뿐 아니라 2015 개정 교육과정에서 새로이 다루어지는 개념이기도 하므로 예비교사 교육과정을 통해 적절한 교수·학습방안에 대한 모색이 필요하다.

한편, 일부 예비교사들은 지수함수 그래프 구성 맥락의 보완을 위한 방안을 제시하기도 하였다. 이들이 공통적으로 제안한 방안은 공학적 도구의 활용이었다. 예를 들어, 아이디어 A에 대해 무수히 많은 점이나 정수가 아닌 점을 찍거나 계산하는데 직면하는 현실적인 어려움을 위해 공학적 도구의 사용이 효과적이라는 의견을 제시하였다. 예비교사 P16은 무한히 실행한다는 것을 직관적으로 이해하기 어렵기 때문에 칠판을 이용한 수업보다는 공학적 도구를 이용한 수업이 이루어져야 한다고 주장하였다. 특히 몇몇 예비교사들은 학생들이 많은 수의 유한개의 점을 나타내는 활동을 하더라도 지수함수의 그래프를 추론하는데 어려움을 느낄 것이라고 생각하였으며, 공학도구의 사용이 학생들로 하여금 지수함수의 그래프 개형을 추론하는 데 도움을 줄 수 있다고 답하였다. 이는 공학적 도구의 활용이 시각화 가능한 모델을 제공함으로써 학생들이 매끄러운 연속 추론을 할 수 있도록 도와줄 수 있다고 주장한 Castillo-Garsow(2012)의 연구 결과와 일치한다. 그는 연속 추론에 익숙하지 않은 많은 학생들이 좌표평면에 유한개의 점을 나타내고

이러한 과정을 무한히 반복한 결과로서 함수의 그래프를 이해하는 과정에서 불연속적인 이산 추론에 머무르는 경향이 있음을 지적하였으며, 이산 추론에서 연속 추론으로의 진행이 공학적 도구의 시각화에 의해 촉진될 수 있음을 강조한 바 있다.

본 사례 연구를 통해 예비교사들이 지수함수의 그래프를 나타내는 다양한 맥락을 어떻게 이해하고 있는지와 실제로 단계적으로 그래프를 나타내는 과정에서 어떤 오류와 어려움이 있는지를 살펴볼 수 있었다. 본 논문에서 제시한 맥락들은 고등학교에서 지수함수를 처음 도입하는 맥락으로서의 적절성을 살펴본 것이 아니라, 지수함수 지도를 위한 수학지식으로서 검토된 측면이 크다. 지수함수의 그래프를 생성하는 다양한 맥락에 대한 이해는 장차 지수함수와 그 그래프를 지도할 예비교사들에게 풍부한 교사지식의 원천을 제공할 것으로 판단하였다. 본 연구 결과가 일반화되기에는 한계가 있겠지만, 지수함수 지도에 필요한 교사지식에 대한 기초 자료가 되기를 바라며, 지수함수의 의미와 그 그래프에 대한 학생들의 깊이 있는 이해를 위한 수학수업을 도모하는데 기여하기를 바란다.

참고문헌

교육부(2015a). **2015개정 교육과정 총론**.

교육부(2015b). **제2차 수학교육 종합 계획**.

권오남, 박규홍, 이상구, 박제남, 주미경, 신준국, 김영록, 이재성, 장훈, 김지선, 박지현, 박정숙, 오혜미, 김영혜, 박윤근, 박상의, 전철(2013). **고등학교 스토리텔링 모델교과서 개발**. 한국과학창의재단 2013-8.

김민경, 박은정, 허지연(2012). '맥락성' 관점에서 본 수학교과서의 문제 분석. **한국학교수학회 논문집, 15**(1), 1-25.

김연식, 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수 현상학적 접근. **수학교육학연구, 2**(1), 1-15.

김원경, 조민식, 방금성, 윤종국, 조정길, 이근주, 김기탁, 박수연, 박정숙, 박진호, 윤요섭, 정상일(2014). **미적분 2**. 서울: 비상교육.

송정화, 권오남 (2002). 6차와 7차 교과서 분석을 통한 그래프 지도 방안. **학교수학, 4**(2), 161-191.

신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문환, 윤정호, 박상의, 서원호, 전제동, 이동흔(2014). **미적분 2**. 서울: 지학사.

신항균, 황혜정, 이광연, 김화영, 조준모, 최화정, 윤기원(2013). **수학 3**. 서울: 지학사.

우정호(1998). **학교 수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

이화영, 류현아, 장경윤(2009). 함수의 그래프 표현 및 그래프 해석 지도 가능성 탐색 -초등학교 5학년을 중심으로-. **학교수학, 11**(1), 131-145.

전홍기(2010). **투자와 금융수학**. 서울: 교우사.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원, 민진원, 김호경(2014). **미적분 2**. 서울: 금성출판사.

표진희(2010). **등비수열의 합에 관한 실생활 문제의 해결과정에서 나타난 오류 분석**. 동국대학교 석사학위논문.

Alagic, M., & Palenz, D. (2006). Teachers explore linear and exponential growth: Spreadsheets as cognitive tools. *Journal of Technology and Teacher Education, 14*(3), 633-649.

Australian Ministerial Council on Education, Employment, Training and Youth Affairs. (2006). *Statements of learning for mathematics*. Carlton South Vic, AU: Curriculum Corporation.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008).

Content knowledge for teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bernoulli, J. (1690). Quæstiones nonnullæ de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum, propositi in Ephem. Gall. A. 1685. *Acta eruditorum, 219-223*. Retrieved from https://books.google.co.kr/books?id=s4pw4GyHTRcC&pg=PA222&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

Beltramone, J. P., Brun, V., Labrosse, J., Merdy, C., Sidokpohou, O,, Talamoni, C., & Truchan, A. (2012). *Déclic Mathématiques TS. Hachetteéduction.*

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley & Sons Inc.

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In Mayes, R., Bonillia, R., Hatfield, L. L. & Belbase, S. (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 55-73). WISDOMe Monographs, Volume 2. Laramie: University of Wyoming Press.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-375.

Coulombe, W. N. & Berenson, S. B. (2001). Representations of Patterns and Functions Tools for Learning. In Cuoco, A. A. (Ed). *The Roles of Representation in School Mathematics* (2001 Yearbook). (pp. 166-172). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davis, J. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*, 365-389.

de Beer, H., Gravemeijer, K., & van Eijck, M. (2015). Discrete and continuous reasoning about change in primary school classrooms. *ZDM Mathematics Education, 47*, 981-996.

Denzin, N. K. & Lincoln, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

de Lange, J. (1996). Mathematics education and assessment. *Journal of the Association of Mathematics Education of South Africa, 42*, 14-20.

Demana, F., Schoen, H. L., & Waits, B. (1993). Impact of the graphing calculator, K-12. In Romberg, T.A., Fennema, E. & Carpenter, T.P. (Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function*, 11-40.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., & Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(3), 151-181.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *Journal of Mathematical Behavior, 39*, 135-155.

Finnish National Board of Education. (2004). *National core curriculum for basic education 2004*. Retrieved from http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_curricula_for_basic_ education.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D.

Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (2008). **프로이덴탈의 수학교육론**. (우정호, 정은실, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화 공역). 서울: 경문사. (원작은 1991년 출판).

Haese, M., Haese, S., & Humphries, M. (2013). *Mathematics for Australia 6: Australian curriculum*. Marleston, SA: Haese Mathematics.

Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S., & Phillips, E.D. (2006). *Connected Mathematics 2*. Hilldale, NJ: Pearson Prentice Hall.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K.(1990). Functions, graphs, and graphing : Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Maor, E. (2000). **오일러가 사랑한 수**. (허민 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1994년 출판).

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2001). *The number e. St Andrews University*. Retrieved from http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html.

Petraglia, J. (1998). *Reality by design: The rhetoric and technology of authenticity in education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Singapore Ministry of Education. (2006). *Secondary mathematics syllabuses*. Singapore: Author.

Strom, A. (2008). *A case study of a secondary mathematics teacher's understanding of exponential function: An emerging theoretical framework*. Unpublished dissertation, Arizona State University. Retrieved from http://pat-thompson.net/PDFversions/Theses/2008Strom.pdf.

Toeplitz, O. (2006). **퇴플리츠의 미분적분학**. (우정호, 임재훈, 박경미 공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1963년 출판).

Treffers, A. (1987). *Three dimension*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Weber, K. (2002). *Students' understanding of exponential and logarithmic functions. Second International Conference on the Teaching of Mathematics* (pp. 1-10). Crete, Greece: University of Crete.

Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically Interesting. In Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter, T. P. (Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function*, 41-68.

Pre-Service Teachers' Understanding of Contexts for Constructing Exponential Graph

Heo, Nam Gu (Daejeon Songchon High School)
Kang, Hyangim (Korea National University of Education)
Choi, Eunah (Woosuk University)

This study examined the understanding of 24 pre-service teachers about the three contexts for constructing the exponential graphs. The three contexts consisted of the infinite points context (2009 revision curriculum textbook method), the infinite straight lines context (French textbook method), and the continuous compounding context (2015 revision curriculum textbook method). As the result of the examination, most of the pre-service teachers selected the infinite points context as easier context for introducing the exponential graph. They noted that it was the appropriate method because they thought their students would easily understand, but they showed the most errors in the graph presentation of this method. These errors are interpreted as a lack of content knowledge. In addition, a number of pre-service teachers noted that the infinite straight lines context and continuous compounding context were not appropriate because these contexts can aggravate students' difficulty in understanding. What they pointed out was interpreted in terms of knowledge of content and students, but at the same time those things revealed a lack of content knowledge for understanding the continuous compounding context. In fact, considering the curriculum they have experienced, they were not familiar with this context, continuous compounding. These results suggest that pre-service teacher education should be improved. Finally, some of the pre-service teachers mentioned that using technology can help the students' difficulties because they considered the design of visual model.

* Key Words : pre-service teacher(예비교사), exponential graph(지수함수 그래프), context(맥락), the infinite points context(무한 점 맥락), the infinite straight lines context(무한 직선 맥락), the continuous compounding(연속복리)

논문접수 : 2017. 7. 7
논문수정 : 2017. 8. 3
심사완료 : 2017. 8. 11