대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 3, 375 ~ 389. Aug 2017

학교수학과 학문수학에서의 연속성 개념 정의의 분석

김 진 환* · 박 교 식**

본 연구에서는 연속성 개념에 대한 학교수학에서의 정의와 학문수학에서의 정의 사이의 차별성과 상호연결성을 네 가지 관점에서 분석하고 있다. 이에 따르면, '한 점에서의 연속 · 불연속'의 정의가 학교수학에서는 극한 과정에 의존하고 있고, 학문수학에서는 정의역의 위상에 의존하고 있다. 학교수학에서는 정의역이 하나의 구간이나 구간들의 합집합인 함수에 한하여 연속함수인가를 판정할 수 있으나, 학문수학에서는 어떠한 함수에 대해서도 연속함수인가를 판정할 수 있다. 본 연구에서는 이러한 결과에 근거하여, 학교수학에서의 연속성 개념 취급과 관련하여 다음 두 가지 의견을 제시한다. 첫째, 극한 과정을 기반으로 한 학교수학에서의 국소적 연속성 개념으로 볼 때, 2009 개정 교과서에서 함수의 정의역에 속하지 않는 특정한 점에서 불연속을 취급하는 것은 적절하다. 이때 불연속점으로 무한 불연속점, 제거 가능한 불연속점과 도약 불연속점의 유형이 나타난다. 둘째, 일반적인 연속함수의 정의로 "함수 $y=f(x)$에서 정의역에 불연속점이 없으면, f을 연속함수라 한다."를 제안한다. 이 정의는 정의역에 속하지 않은 점에서의 불연속성의 판정을 허용하면서, 학문수학에서의 정의와 일관되게 연결된다.

Ⅰ. 서론

연속성 개념은 근접성(nearness)을 보존시키는 개념으로 미적분을 다루기 위한 기초적인 개념인 바, 학교수학뿐만 아니라 일반적으로 대학에서 취급하는 학문수학에서도 매우 중요한 개념이다. 위상수학은 어떤 점에서의 작은 변화에 따른 함숫값의 변화를 다루는 대표적 학문수학이라 할 수 있고, 이때 위상(topology)은 근접성을 다루는 추상화된 측도이다. 실직선에서 다루는 극한과 연속의 개념에는 절댓값으로 정의되는 거리에 의해 유도되는 통상 위상(usual topology)이 작용하고 있다. 실직선에서 이 통상 위상으로 근접성을 다룰 때 열린구간이 주요 역할을 담당하므로, 실직선에서 구간이 강조된다.

연속성 개념은 크게 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 하나는 국소적 연속성 개념으로, 한 점에서의 연속 · 불연속에 관한 것이다. 다른 하나는 대역적 연속성 개념으로, 함수 자체가 연속함수인가에 관한 것이다. 연속함수의 정의에서는 함수의 3대 하위 요소인 정의역, 공역, 법칙이 중요하게 작용하는 바, 공역의 임의의 열린 집합(open set)의 역상(inverse-image, pre-image)이 정의역의 열린 집합이 되는 함수를 연속함수로 정의하고 있다(Lipschutz, 2012; Munkres, 1975). 연속함수의 개념은 정의역의 모든 점에서 연속인 함수와 동치 개념으로, 대역적 연속성 개념과 국소적 연속

* 영남대학교, kimjh@yu.ac.kr (제1 저자)
** 경인교육대학교, pkspark@gin.ac.kr (교신저자)

성 개념의 관계가 학문적으로 정립되어 있다.

학교수학에서 연속성 개념은 실직선 위에서만 논의되며, 함수의 극한 개념을 바탕으로 '가까이 간다.', '접근한다.', '~로 향해 간다.' 등의 일상 언어를 사용하여 도입된다. 2009 개정 고등학교 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011; 이하, 간단히 2009 개정 교육과정)에 따른 교과서(김원경 외, 2014; 김창동 외 2014; 류희찬 외 2014; 신항균 외 2014; 우정호 외, 2014b; 이강섭 외, 2014; 이준열 외 2014; 정상권 외, 2014; 황선욱 외, 2014)에서는, $x=a$가 함수 $f(x)$의 정의역에 속하지 않을 때도 '함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속'이라고 판정하며, 어떤 구간의 모든 실수에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속을 정의하고 또는 그 구간에서 또는 일반적으로 정의역에서의 연속함수를 정의하고 있다.

학문수학이나 학교수학에서 연속함수의 정의는 '한 점에서의 연속·불연속'의 정의에 그 바탕을 두고 있다. 그러나 학교수학에서, 예를 들어, 함수

$$f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{x^2}{x}$$

이 $x=0$에서 불연속이라고 판정하는 것과 학문수학에서는 함수 $f(x)$, $g(x)$의 정의역에 속하지 않은 $x=0$에서 $f(x)$, $g(x)$의 불연속을 판정하지 않는 것 사이에는 명확한 차이가 있다.

2007 개정 고등학교 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007; 이하, 간단히 2007 개정 교육과정)에 따른 대다수의 교과서(류희찬 외, 2009; 우정호 외, 2009; 윤재한 외, 2009; 이준열 외, 2009; 최용준 외, 2009)에서는 정의역에 속하는 점이 아니어도 함수의 불연속을 판정하는 반면, 일부 교과서(계승혁 외, 2009)에서는 정의역에 속하지 않는 점으로 제한하여 함수의 불연속을 판정하도록 하고 있다. 이러한 엇갈린 정의를 사용한 교과서의 공존이, 학교수학에서의 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'의 정의와 관련한 논쟁을 가져왔다(이진영, 2011; 박달원 외, 2012). 이러한 논쟁의 시작은 이들 함수가 학문수학에 따르면 연속함수임에도, 많은 학생들이 전자의 교과서에서 제시한 '한 점에서의 불연속'의 정의에 따라 불연속점이 있으므로 연속함수가 아니라고 답하는 것에 있다.

학교수학에서 정의역에 속하지 않는 점에서 함수의 불연속을 판정하는 것이 학생들의 오개념의 요인이고 학문수학에서의 정의를 훼손한다는 입장을 받아들인다면, 학교수학에서도 '한 점에서의 연속·불연속'의 정의는 학문수학을 따라야 한다는 것을 의미하고, 정의역의 위상이 작용함을 의미한다. 이진영(2011), 박달원, 홍순상과 신민영(2012), 정연준과 김재홍(2013)은 이러한 입장에서 학교수학에서 학문수학에서의 정의를 수용하자는 입장을 지지하고, 함수의 불연속은 정의역에 속하는 점으로 한정하여 판정할 것을 제안하였다.

이에 대해 본 연구에서는 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'에 대하여 극한 과정에 중점을 둔 학교수학에서의 정의와 정의역의 위상을 중시하는 학문수학에서의 정의의 차별성과 상호 연결성에 대한 면밀한 분석을 통해, 2009 개정 교육과정에 따른 교과서(김원경 외, 2014; 김창동 외 2014; 류희찬 외 2014; 신항균 외 2014; 우정호 외, 2014b; 이강섭 외, 2014; 이준열 외 2014; 정상권 외, 2014; 황선욱 외, 2014)에서 정의역에 속하지 않는 점에서 함수의 불연속을 판정하는 것이 의미 있음을 밝힌다. 나아가 불연속의 판정을 정의역에 속하는 점으로 제한하지도 않고도 학교수학에서의 연속성 개념과 학문수학에서의 연속성 개념을 일관되게 상호 연결할 수 있다는 것을 보인다.

II. 연구 방법

본 연구에서는 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'의 정의에 대한 충실한 분석을 통해, 학교수학에서의 연속성 개념과 학문수학에서의 연속성 개념 사이의 차별성과 상호 연결성을 보이기 위해, 문헌 분석 연구 방법을 사용한다. 본 연구에서 분석 대상이 되는 기본적인 문헌은 2007 개정 교육과정에 따른 고등학교 해설서(이하, 간단히 2007 개정 교육과정 해설서 또는 해설서)와 2007 개정 교육과정에 따른 교과서(이하, 간단히 2007 개정 교과서) 그리고 2009 개정 교육과정 및 그에 따른 교과서(이하, 간단히 2009 개정 교과서)이다. 특히 2007 개정 교육과정 해설서는 학교수학에서 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'를 어떻게 정의하는지를 명확히 제시하고 있다는 점에서 중요한 문헌이다. 2009 개정 교육과정에 따른 해설서가 발간되지 않은 상황에서, 2007 개정 교육과정 해설서에서 제시하고 있는 정의는 2009 개정 교과서에도 여전히 영향을 미치고 있다고 할 수 있다. 그 다음으로 분석 대상이 되는 문헌은 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'를 취급하고 있는 국내의 선행 연구 및 국내에서 널리 사용되는 대학 미적분학의 교재이다. 대학 미분적분학이 학교수학에서의 직관적인 정의로부터 보다 엄밀한 학문수학에서의 정의로 연결시키는 가교 역할을 한다는 점에서 그것을 분석 대상에 포함시키고 있다. 먼저 'III. 선행 연구의 검토'에서는 국내의 선행 연구인 이경화와 신보미(2005), 이진영(2011), 박달원 외(2012), 정연준과 김재홍(2013)의 연구 결과를 검토한다. 이러한 검토는 연속성 개념과 관련해서 우리나라 수학교육계에서 논란이 있음을 드러내기 위한 것이다. 다음으로 'IV. 분석 및 논의'에서는 연속성의 정의를 학교수학에서의 정의와 학문수학에서의 정의로 나누어 비교하며 불연속점, 정의역, 연속함수 사이의 관계를 정립한다. 이를 위해 다음 네 가지 관점을 설정하여 분석하고, 그 결과에 대하여 논의한다.

① 학교수학에서 '한 점에서의 연속·불연속'의 정의를 무엇에 의존하고 있는가?
② 학문수학에서 '한 점에서의 연속·불연속'의 정의를 무엇에 의존하고 있는가?
③ 학교수학에서 연속함수의 정의와 판정하는 대상 함수는 무엇인가?
④ 학문수학에서 연속함수의 정의와 판정하는 대상 함수는 무엇인가?

관점 ①로부터의 분석과 논의는 'IV.1 극한 과정에 기반한 정의'에서, 관점 ②로부터의 분석과 논의는 'IV.2 정의역의 위상에 기반한 정의'에서 이루어진다. 그리고 관점 ③ 및 ④로부터의 분석과 논의는 'IV.3 연속함수의 정의'에서 함께 이루어진다. 이때 연속성에 대한 학교수학에서의 정의와 학문수학에서의 정의 사이의 차별성을 허용하면서 그 두 정의를 단절 없이 연결시키는 방안에 대해서도 논의한다.

III. 선행 연구의 검토

Tall & Vinner(1981)가 함수의 연속에 대한 개념 정의와 개념 이미지의 차이를 보인 이래로, 우리나라에서도 그 후속 연구가 이루어졌다. 이경화와 신보미(2005), 이진영(2011), 박달원 외(2012)가 대표적이다. 이 세 편의 연구에서는 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'에 초점을 맞추고 있다. 특히 이진영(2011), 박달원 외(2012)는 대부분의 교과서에서의 연속성 정의가 학문수학에서의 연속성 정의와 차이가 있다고 보고 있다. 한편 함수의 연속성 개념의 역사적 발달

과정을 분석하고 있는 정연준과 김재홍(2013)도 그 차이에 주목하고 있다.

이경화와 신보미(2005)는 함수의 연속을 배운 상위 집단의 고등학생 20명이 응답한 자료를 분석하여 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'에 대해 그들이 가지고 있는 개념 이미지를 다섯 가지 유형으로 분류하였다. 첫째는 한 점에서의 연속을 구간의 내점에서만 생각하는 유형이다. 둘째는 진동하는 함수는 불연속함수라고 보는 유형이다. 셋째는 함수의 연속성을 그래프의 연결성으로 대치하는 유형이다. 넷째는 모든 실수에서 연속이어야 연속함수라고 보는 유형이다. 다섯째는 분수함수는 불연속함수라고 보는 유형이다. 그들의 연구는 우리나라 고등학생들이 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'에 대해 가지고 있는 부적절한 개념 이미지를 드러내고자 시도한 최초의 연구라고 할 수 있다. 그들은 학생들이 교과서에서 제시한 연속성의 정의를 충실히 적용하려고 하는 과정에서 이와 같은 부적절한 개념 이미지를 드러내고 있다고 보았다. 그들은 이러한 분석 결과에 근거하여, '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'에 대한 이와 같은 부적절한 개념 이미지를 학생들이 적절한 것으로 바꾸어 갈 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다고 주장하고 있다.

이진영(2011)은 먼저 2007 개정 교육과정에 따른 교과서 ≪미적분과 통계 기본≫과 ≪미적분과 통계 기본 익힘책≫ 26종(전종)과 고등학교 ≪수학Ⅱ≫와 ≪수학Ⅱ 익힘책≫ 22종(전종)을 대상으로, "불연속점이 존재하면 연속함수가 아니다."라는 명제의 진위가 교과서 사이에 차이가 있는지 조사하고 있다. 그 결과 교과서 사이에 차이가 있는 것으로 나타났다. 특히, '한 점에서의 연속'의 정의에서는 차이가 없지만, '한 점에서의 불연속'의 정의에서 차이가 있는 것으로 나타났다. 또, 함수의 정의역이 실수 전체의 진부분집합일 때, '연속함수'의 정의에서 교과서 사이에 차이가 있는 것으로 나타났다. 이진영은 이러한 차이에 근거하여, 각 교과서에서 '한 점에서의 불연속'과 '연속함수'의 공식적인 정의를 분명하게 제시하고, 비교적 동일한 방식으로 다루어야 한다고 주장하고 있다. 다음으로, '한 점에서 함수의 연속·불연속'과 '연속함수'의 정의를 학습한 고등학교 3학년 학생 337명이 응답한 자료를 분석하여, "불연속점이 존재하면 연속함수가 아니다."라는 명제가 학생들이 어떤 함수가 '연속함수'인지 아닌지를 판정하는데 영향을 미치는지 조사하였다. 그 결과 영향을 미치는 것으로 나타났다. 특히 학생들은 "불연속점이 존재하면 연속함수가 아니다."라는 명제를 참이라고 생각하여, 분수함수가 '연속함수'인지를 판정하는데 오류를 범하는 것으로 나타났다. 이진영은 이와 같은 오류에 주목하여, '연속함수'의 정의에서 직관과 엄밀성 사이의 평형을 이루기 위해 교수학적으로 변환한 정의를 다양한 관점에서 연구할 필요가 있다고 주장하였다.

박달원 외(2012)는 2007 개정 교육과정에 따른 교과서에서 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'의 정의가 일관되지 않다는 점에 주목하고, 교과서를 2007 개정 교육과정 해설서에 따른 것과 학문수학에 따른 것으로 구분했다. 그들은 전자의 교과서에서 제시하는 정의를 학교수학에서의 정의로 보고, 그 정의와 학문수학에서의 정의 사이의 극명한 차이를 드러내기 위해, 42명의 고등학생에게 "[문제 1] x=0에서 $f(x)=\sqrt{x}$의 연속성을 판정하고 그 이유를 설명하여라."와 "[문제 2] $f(x)=1/x$이 연속함수인지를 판정하고 그 이유를 설명하여라."를 제시하고 응답 결과를 분석하였다. [문제 1]의 경우에, 학문수학에서는 함수 $f(x)=\sqrt{x}$이 x=0에서 연속이지만, 33명의 학생이 좌극한이 존재하지 않기 때문에 불연속이라고 응답했다. [문제 2]의 경우에, 학문수학

에서는 함수 $f(x)=1/x$이 연속함수이지만, 20명의 학생들이 x=0에서 $f(x)$가 정의되지 않으므로 불연속함수라고 응답했다. 그들은 학생들이 그렇게 대답한 것은 2007 개정 교육과정에 따른 교과서에서 그렇게 설명하고 있기 때문이라고, 그리고 보다 근원적으로는 2007 개정 교육과정 해설서에서 그렇게 설명하고 있기 때문이라고 보았다. 그들은 이와 같은 혼란이 향후 학생들이 대학에서 미적분을 공부하는데 장애가 된다고 보고, 학문수학에서의 정의를 학교수학에서 적극적으로 수용할 것을 주장하고 있다.

정연준과 김재홍(2013)은 함수의 연속성 개념의 역사적 발달 과정을 분석하여 연속적인 변화에 대한 세 관점을 분리하고 있는 바, 무한히 많은 단계를 거쳐야 한다는 '무한 단계 관점', 어떠한 단계나 순간에서 비약이 없어야 한다는 '비약 없음 관점', 중간의 모든 값을 거쳐야 한다는 '중간값 관점'이 그것이다. 그들은 이러한 분석 결과를 바탕으로, 함수의 연속성 지도에서 고려해야 할 세 가지를 다음과 같이 제시하고 있다. 첫째, 학생들이 '무한 단계 관점', '비약 없음 관점', '중간값 관점'을 통하여 연속적인 변화의 특성을 반성할 수 있게 한다. 둘째, 함수의 연속성 정의는 '비약 없음 관점'을 바탕으로 한다는 점과 '중간값 관점'과의 차이가 명확히 나타나도록 지도한다. 셋째, 교과서에서의 연속성 정의에서 함숫값의 존재성을 연속함수 판정 조건이 아닌 전제 조건으로 제시하는 것을 고려해야 한다.

이경화와 신보미(2005)에서는 교과서에 제시된 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'의 개념 정의가 학생들로 하여금 왜 그와 같은 부적절한 개념 이미지를 갖게 하는지 그 동인을 찾고 있지는 않다. 또, 이진영(2011), 박달원 외(2012), 정연준과 김재홍(2013)에서는 연속함수에 대한 학생들의 오개념 해소라는 명분에서 학문수학에서의 정의를 수용할 것을 주장하고 있지만, 극한 과정을 중시하는 학교수학에서의 정의와 정의역의 위상을 중시하는 학문수학에서의 정의 사이의 차별성과 상호 연결성에 대한 면밀한 분석을 하고 있는 것은 아니다.

IV. 분석 및 논의

본 절에서는 다음 함수를 이용하여 '한 점에서의 연속·불연속'과 '연속함수'의 개념을 규정하는 학교수학과 학문수학에서의 정의를 비교하여 분석한다. 이 함수들은 불연속점과 정의역의 관계에서 부적절한 개념 이미지를 낳거나 오개념 유발과 관련하여 선행연구에서 주요하게 다루어진 대표적인 함수들과 이들에 연루된 함수들이다.

$$f_1(x)=\frac{1}{x},\ f_2(x)=\sqrt{x}\,.\ f_3(x)=\frac{x^2-1}{x-1},$$
$$f_4(x)=\ln x,\ f_5(x)=\sqrt{1-x^2}$$

'IV.1 극한 과정에 기반한 정의'에서는 관점 ①과 관련하여 학교수학에서 '한 점에서의 연속·불연속'의 정의가 기반하고 있는 극한 과정의 분석을 통해 정의의 의도와 본질을 파악한다. 'IV.2 정의역의 위상에 기반한 정의'에서는 관점 ②와 관련하여 학문수학에서 '한 점에서의 연속·불연속'의 정의가 기반하고 있는 정의역의 위상의 분석을 통해 정의의 의도와 본질을 파악한다. 'IV.3 연속함수의 정의'에서는 관점 ③과 ④와 관련하여 학교수학과 학문수학에서의 연속함수의 정의와 대상 함수를 살펴본다. 또, 불연속점과 연속함수 사이에서 일어나는 오개념에 대해 논의하고, 연속함수에 대한 학교수학에서의 정의와 학문수학에서의 정의를 연결할 수 있는 연속함수의의 정의를 알아본다.

1. 극한 과정에 기반한 정의

2007 개정 교육과정 해설서에서 소개하는 함수의 연속성 정의는 크게 둘로 나누어진다. 하나는 함수의 극한을 토대로 근접해 간다(가까이 간다)는 일상 언어를 사용한 정의이다. 이 정의는 Cauchy에 의한 '극한 과정(limit processing)에 기반한 정의'라고 할 수 있다(학교수학에서의 정의). 이 정의는 주로 정의역을 명시적으로 드러내고 있지 않은 종속 관계의 식으로 주어진 함수 $y=f(x)$에 적용한다. 다른 하나는 함수의 정의역 E를 염두에 두고 $\varepsilon-\delta$ 논법을 사용한 정의이다. 이 정의는 Weierstrass에 의한 '위상에 기초한 엄밀한 정의'라고 할 수 있다(학문수학에서의 정의). 이 정의는 주로 대응 관계로 표현된 함수 $f: E\rightarrow R$에 적용한다.

2009 개정 교과서에서는 극한 과정에 기반한 정의만을 사용한다. 이 정의는 경험과 일상 언어에 의존한 직관적 정의이다. 'x=a에서 함숫값이 있고, x가 a로 근접할 때 대응하는 함숫값 $f(x)$가 $f(a)$로 근접하면 함수 f가 x=0에서 연속'이라고 하고, 이것을 기호

$$\lim_{x\rightarrow a}f(x)=f(a)$$

로 나타내고 있다. 이 기호는 다음 조건 ㉠, ㉡, ㉢이 성립되어야 함을 함축적으로 내포하며 이를 토대로 불연속을 정의하고 있다(김원경 외, 2014; 김창동 외 2014; 류희찬 외 2014; 신항균 외 2014; 우정호 외, 2014b; 이강섭 외, 2014; 이준열 외 2014; 정상권 외, 2014; 황선욱 외, 2014).

㉠ x=a에서 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있다.

㉡ 극한값 $\lim_{x\rightarrow a}f(x)$가 존재하며

㉢ $\lim_{x\rightarrow a}f(x)$와 $f(a)$가 일치한다.

함수 $f(x)$가 x=a에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 x=a에서 불연속이라고 한다. 즉 함수 $f(x)$가 위 세 가지 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 x=a에서 불연속이다.

여기서 생각해 보고자 하는 것은 판정 기준 ㉠에서, x=a에서 함숫값이 정의되어 있지 않는 것만으로 x=a를 불연속점으로 볼 것인가 하는 것이다. 즉, 정의역에 속하지 않은 실수는 항상 불연속점인가? 예를 들어 $f_4(x)=\ln x$에서 x=0 혹은 x=-1을 불연속점으로 볼 것인가? 이 문제의 답은 ㉡의 극한 과정

$$\lim_{x\rightarrow a}f(x)$$

에 내포된 의미를 분석하는 것으로부터 찾을 수 있다. 이 기호는 "x가 a에 가까이 접근할 수 있고, a에 가까이 접근하는 x에 대응하는 함숫값이 존재하는가?"라는 의미(극한 과정의 의미)와 "x가 a에 가까이 갈 때 함숫값이 일정한 값에 가까이 가는가?"라는 의미(극한값의 의미)를 가질 수 있다. 이 극한 과정은 f의 정의역 내에서 a의 양측에서 자유스럽게 a로 접근할 수 있음을 함의한다. 보다 구체적으로는 실수 b, c ($b<a<c$)가 있어 열린구간 $(b,\ a)$와 $(a,\ c)$의 각 점에서 함숫값이 정의되어 있음을, 즉 이 두 열린구간이 f의 정의역[1]에 포함됨을 의미한다. 이러한 극한 과정이 타당하다는 전제 조건이 성립하면, 그 다음에 ㉠ "함숫값이 존재하는가?", ㉡ "극한값이 존재하는가?", ㉢ "이들이 일치하는가?"로 한 점에서의 연속·불연속을 판단하게 된다.

예를 들어 함수 $f_1(x)=1/x$의 경우 x=0에서 극한 과정 $\lim_{x\rightarrow 0}f_1(x)$가 타당하므로 x=0에서 연

1) 종속 관계로 주어지는 함수에서 정의역이 명시되어 있지 않을 때에는 정의될 수 있는 최대의 영역을 정의역으로 본다.

속・불연속을 판단할 수 있다. 함수 f_1의 정의역은 0을 제외한 실수의 집합이지만 모든 실수에서 극한 과정 $\lim_{x\to a} f_1(x)$가 타당하므로 실수 전체의 집합 R에서 연속ㆍ불연속을 판단할 수 있다(Harcharras & Mitrea, 2007). 한편, 함수 $f_4(x)=\ln x$의 경우 x=-1이 속하는 어떠한 열린 구간에서도 함숫값이 정의되지 않는 경우가 있으므로, 극한 과정 $\lim_{x\to -1} f_4(x)$는 타당하지 않다. 따라서 x=-1에서 연속・불연속을 판단하는 것은 의미가 없다.

이와 같이 어떤 점에서 연속・불연속을 판단할 때 그 점에서 극한 과정이 타당하다는 것이 기본 전제 조건이 되어야 한다. 학교수학에서 함수의 연속성을 취급하기 전에 먼저 함수의 극한을 취급하는 이유가 여기에 있다고 할 수 있다. Stewart(2016a)에서 볼 수 있는 다음 정의도 극한 과정이 타당하다는 것이 기본 전제 조건이 되어야 한다는 것을 지지한다고 할 수 있다.2) 학교수학에서의 정의나 위의 인용에서 어떤 점 a에서의 불연속을 판단할 때 극한 과정의 타당성을 기본 전제 조건으로 하지만, 실수 a가 정의역에 속해야 함을 함의하지는 않는다는 것을 눈여겨 볼 필요가 있다.

> "If f is near a(in other words, f is defined on an interval containing a, except perhaps a), we say that f is discontinuous at a if f is not continuous at a." (Stewart, 2016a, p. 115)

극한 과정 $\lim_{x\to a} f(x)$의 타당성은 오른쪽으로부터 a로 접근할 수 있어야 하는, 즉 적절한 열린 구간 $(a,\ c)$가 정의역에 포함되어 있음을 전제하는 우극한 과정 $\lim_{x\to a+} f(x)$의 타당성과 왼쪽으로부터 a로 접근할 수 있어야 하는, 즉 적절한 열린구간 $(b,\ a)$가 정의역에 포함되어 있음을 전제하는 좌극한 과정 $\lim_{x\to a-} f(x)$의 타당성으로 나누어 의미를 부여할 수 있다. $\lim_{x\to a} f(x)$가 타당하다는 것은 $\lim_{x\to a+} f(x)$와 $\lim_{x\to a-} f(x)$ 모두가 타당하다는 것을 의미한다.

학교수학에서는 하나의 구간 I에서 정의된 함수의 연속성을 논하면서 구간의 끝점이 있을 경우, 이 점에서 오른쪽으로 혹은 왼쪽으로 연속 즉, $\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$ 혹은 $\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$인 것으로 정의하고 있다. 이들 기호 표현에서 $\lim_{x\to a} f(x)$를 $\lim_{x\to a+} f(x)$나 $\lim_{x\to a-} f(x)$로 대체하면 3단계 조건 ㉠, ㉡, ㉢이 성립되어야 함을 함축적으로 내포하며, 이를 토대로 연속・불연속을 판정한다. 대학의 미분적분학 교재(Foerster, 2010; Stewart, 2016a)에서도 하나의 구간의 내점과 구간의 경계점(끝점)에서 연속을 정의하고 있음을 볼 수 있다. 이것은 함수

$$f_2(x)=\sqrt{x}\ ,\ f_4(x)=\ln x,\ f_5(x)=\sqrt{1-x^2}$$

과 같이 정의역이 하나의 구간이고 그 구간이 경계점(끝점)을 가질 때 이 점에서의 연속・불연속을 판정하고자 하는 것이다. 끝점(경계점)의 경우 우극한 과정의 타당성 혹은 좌극한 과정의 타당성 중의 하나가 기본 전제 조건이고, 이를 근거로 연속・불연속을 판정할 수 있다. f_2, f_4에서 $(0,\ \infty)$에 속하는 실수뿐 아니라 x=0에서의 연속・불연속을 판정하는 것이 타당하고, f_5에서 $(-1,\ 1)$에 속하는 실수와 x=－1과 x=1에

2) Stewart(2016a)의 한국어 번역본(Stewart, 2016b)에서는 x=a가 속하는 적절한 열린구간에서 f가 정의되어 있어야 한다(a는 제외되어도 됨)는 함수의 기본 전제에 대한 기술 없이 f가 x=a에서 연속이 아닐 때 f는 x=a에서 불연속이라 하고 있어, 극한 과정이 타당한 곳에서 불연속을 판단한다는 전제가 간과될 수 있다.

서 연속·불연속을 판정할 수 있다. 좀 더 구체적으로 해석하면, 적절한 두 열린구간 $(b,\ a)$, $(a,\ c)$중 하나는 함수 f의 정의역의 내부에 있고 다른 하나는 함수 f의 정의역의 외부에 있는 경우로 확장하여 x=a에서 연속·불연속을 판정할 수 있음을 의미한다.

지금까지의 논의를 정리하면 학교수학에서의 정의로 어떤 x=a에서 함수 f의 연속·불연속을 판정하고자 할 때 다음의 두 경우 중 하나를 기본 전제 조건(극한 과정의 타당성)으로 가져야 한다고 할 수 있다.

㉮ 함수 f의 정의역이 적절한 열린구간$(a,\ c)$, $(b,\ a)$를 모두 포함한다.

㉯ 두 구간 중의 하나는 정의역의 내부에 있고 다른 하나는 정의역의 외부에 있다.

학교수학에서의 정의로 함수 f의 불연속을 판정하고자 할 때, 판정하고자 하는 대상의 점 x=a가 함수 f의 정의역에 속하는지 또는 속하지 않는지는 중요한 것이 아니다. 우선적으로 기본 전제 조건 ㉮ 혹은 ㉯를 만족시키는지 검토한 다음, 위에서 제시한 ㉠, ㉡, ㉢의 3단계에 따라 판정해야 한다. 이러한 논의에 따르면, 함수 $f_1(x)=1/x$에서 x=0은 정의역에 속하는 점이 아니지만 불연속을 판정하는 것이 의미 있다. 이것은 불연속을 정의역에서만 판정하자는 선행연구(박달원 외, 2012; 이진영, 2011; 정연준과 김재홍, 2013)의 제언과는 대립된다. 본 연구의 주장을 보증하기 위해서 정의역에 속하지 않는 점에서의 연속·불연속 판정이 가질 수 있는 수학적 의미를 살펴보기로 하자.

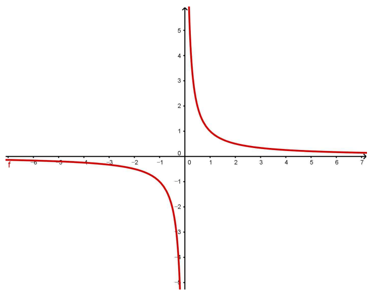
첫째로 [그림 IV-1]과 같은 함수 $f_1(x)=1/x$의 그래프에서 x=0에서의 함숫값도 없을 뿐 아니라 0을 제외한 0의 근방에서 함수가 정의되어 있긴 하지만, x가 우측으로 0에 근접해 갈 때 함숫값이 한없이 커짐 즉,

$$\lim_{x\to 0+} f_1(x)=\infty$$

을 볼 수 있고, x가 좌측으로 0에 근접해 갈 때 함숫값이 한없이 작아짐 즉,

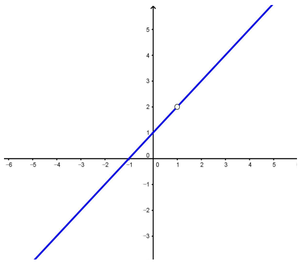
$$\lim_{x\to 0-} f_1(x)=-\infty$$

을 볼 수 있다. 이러한 종류의 불연속점을 '무한불연속점(infinite discontinuity)'이라고 하여 새로운 수학적 대상으로 본다(Foerster, 2010; Stewart, 2016a). 이러한 불연속점에서 함숫값의 동향과 그래프의 움직임을 고찰하면서 '수직점근선(vertical asymptote)'의 개념을 도입시켜 수학적 활동을 넓히고 수학적 의미를 부여한다. 여기서는 직선 $x=a$가 f_1의 그래프의 수직점근선이다. 교과서에서도 이와 같은 점근선을 유리함수를 배우면서 다룬 바 있다(우정호 외, 2014a).

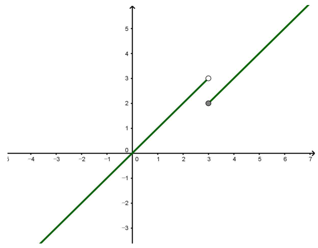


[그림 IV-1] 무한 불연속점

둘째로 [그림 IV-2]와 같은 함수 $f_3(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$의 그래프를 보자. f_3의 정의역은 $R-\{1\}$이다. x=1에서 극한 과정이 타당하고 극한값이 존재하지만 함숫값이 존재하지 않으므로 x=1에서 불연속이다. 이러한 종류의 불연속점을 '제거 가능한 불연속점(removable discontinuity)'이라고 부르는 바, 이것은 x=1에서 함숫값을 새로이 정의함으로써 불연속점을 제거할 수 있기 때문이다(Foerster, 2010; Stewart, 2016a).



[그림 IV-2] 제거 가능한 불연속점



[그림 IV-3] 도약 불연속점

2007 개정 교육과정 해설서에 의하면 한 점에서 끊어진 함수의 그래프의 예를 통해 그 그래프가 이어지려면 어떤 조건이 필요한지를 생각해 보도록 하고 있다(교육과학기술부, 2008). 예를 들어 교과서(우정호외, 2014b, p. 84)에서 다음과 같은 문제를 취급하고 있다.

[문제] 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1} & (x \neq -1) \\ a & (x=-1) \end{cases}$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

셋째로, [그림 IV-3])과 같은 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<3) \\ x-1 & (x \geq 3) \end{cases}$의 그래프에서 볼 수 있듯이, x=3에서의 극한 과정이 타당하고 좌극한과 우극한이 존재하지만, 이 두 값이 다르기 때문에 x=3에 어떠한 새 함숫값을 부여하더라도 연속이 될 수 없다. 이러한 불연속점을 도약 불연속점(step discontinuity)이라 한다(Foerster, 2010; Stewart, 2016a).

위에서 볼 수 있듯이 극한 과정을 중시하는 학교수학에서의 정의에서 어떤 점이 정의역에 속하는지 속하지 않는지에 관계없이, 불연속점은 수학적 대상이 되고 특별한 수학적 활동을 유발한다.

2. 정의역의 위상에 기반한 정의

정의역을 명시한 $\varepsilon-\delta$ 논법에 의한 정의에서는 '함수 $f:E \rightarrow R$ 가 x=a에서 연속'은 '임의의 양수 ε에 대하여 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta,\ x \in E \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$이 성립'[3] 함을 의미하는 것이다(교육과학기술부, 2008; Bartle & Sherbert, 2011). 이 정의는 위상공간 X에서 위상공간 Y로의 함수 $f: X \rightarrow Y$가 $a \in X$에서 연속이라는 정의를 '$f(a)$의 임의의 열린 근방 V에 대하여 a의 열린 근방 U가 존재하여 $f(U) \subset V$가 성립'하는 것[4]으로 추상화하는데 가교 역할을 한다.

학문수학에서의 정의에서 '$x \in E$'는 의미 있는 조건이다. '$|x-a|<\delta,\ x \in E$'는 E의 위상이 열린구간에 의해 생성되는 실직선의 보통위상으로부터 유도된 상대위상에서 온 것이고, E자체가 독자적인 위상공간이다. 이에 따라 어떤 점에

3) 정의역 E을 가진 함수 f에서 x=a가 속한 임의의 열린구간과 E와의 교집합의 원소의 수가 항상 두 개 이상일 때 기호 $\lim_{x \to a} f(x)$을 사용하기도 한다(Bartle & Sherbert, 2011).

4) 이 또한 학문수학에서의 정의이다. 실수에서 다룰 때 정의역이 명시된 $\varepsilon-\delta$논법에 의한 정의와 동치이기 때문이다.

서의 연속·불연속을 판정하기 위해서는 정의역 E의 위상 구조가 어떠한가를 이해하여야 하고 연속·불연속의 판정은 E의 위상이 작용하고 있다. 극한 과정의 타당성을 중시하는 학교수학에서의 정의와 정의역의 위상을 연속성 판단의 도구로 중시하는 학문수학에서의 정의는 몇 가지 차별화된 특성을 가진다.

첫째 특성은 연속·불연속이 판정되는 대상의 점이 정의역에 속해야 하는 가와 속하지 않아도 되는가와 관련이 있다. 학교수학에서의 정의에 따르면 극한 과정이 의미를 가지는 것이 중요하므로 그 점이 정의역에 속하지 않아도 된다. 이와는 달리 학문수학에서의 정의에서는 그 점이 정의역의 위상의 통제 아래 있어야 하므로 반드시 정의역에 속해야 한다.

둘째의 특성은 학교수학에서의 정의에서는 한 점 $x=a$에서의 연속·불연속을 판정하려면 극한 과정이 타당하다는 즉, 적절한 열린구간 $(a,\ c)$, $(b,\ a)$에서 (둘 다, 혹은 하나에서만) 함숫값이 정의되어 있어야 한다는 기본 전제 조건으로 인해 적용되는 대상의 함수가 그 영향을 받는다. 이에 비해 학문수학에서의 정의에 따르면 연속·불연속이 판정되는 함수의 정의역에 속하는 점으로 제한될 뿐, 적용되는 판정의 대상 함수는 어떠한 함수라도 상관없다.

예를 들어, 함수 $f_6(n)=2n$ (n은 자연수)은 학교수학에서의 정의로는 자연수를 포함한 어떠한 실수에서도 극한 과정이 타당하지 않으므로 어떠한 점에서도 연속·불연속을 판정할 수 있는 대상 함수가 아니다. 그러나 이 함수는 학문수학의 정의로는 자연수의 집합이 가지는 상대위상(실제로는 이산위상이 된다)으로 정의역에 속하는 어떠한 자연수에서도 연속·불연속을 판정할 수 있는 대상 함수가 된다. 그러나 자연수가 아닌 실수에서는 연속·불연속 판정의 대상 함수가 되지 않는다.

3. 연속함수의 정의

가. 학교수학에서의 연속함수의 정의

'구간에서 연속이다'와 '구간에서 연속인 함수'는 모두 '구간을 정의역으로 하는 연속함수'를 나타낸다고 볼 때, 다수의 교과서(김원경 외, 2014; 우정호 외, 2014b; 이강섭 외, 2014; 이준열 외 2014; 정상권 외, 2014; 황선욱 외, 2014)에서는 다음과 같이 정의역이 구간인 경우에 한정하여 연속함수라는 용어를 정의하고 있다고 할 수 있다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 실수에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 **연속함수**라고 한다. 특히, 함수 $f(x)$가
(i) 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이고
(ii) $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(a) = f(b)$
일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 한다.

그러나 일부 교과서(김창동 외, 2014; 류희찬 외, 2014; 신항균 외, 2014)에서는 먼저 구간에서 연속을 정의하고 그 다음에 일반적으로 연속함수를 정의하고 있기도 하다.

대학의 미분적분학 교재(Foerster, 2010; Stewart, 2016a)에서도 연속함수를 하나의 구간에서 정의를 하고 있다. 이와 같이 하나의 구간을 정의역으로 두어 연속함수를 정의하는 근거를 다음과 같이 추정할 수 있다.

첫째, 학교수학에서의 정의에서는 어떤 점 $x=a$에서 연속이기 위해서는 이 점에서의 극한 과정이 타당해야 하고 $x=a$에서의 함숫값도 있어야 한다. 이 두 가지를 함께 고려하면 $x=a$가 속하는 적절한 열린구간 $(b,\ c)$가 함수의 정의역의 내부에 있거나('VI.1 극한 과정에 기반한 정의'에서 기본 전제 조건 ㉮), 또는 이 구간 중 a

를 끝점으로 하는 반열린구간 $(b, a]$ (혹은 $[a, c)$)가 정의역에 포함되고 적절한 열린구간 (a, c) (혹은 (b, a))는 정의역의 외부에 있어야 (‘IV.1 극한 과정에 기반한 정의’에서 기본 전제 조건 ㉯) 한다. 이것으로부터 학교수학에서의 정의에 의하여, 정의역의 각 점에서 연속이라고 하면 이 함수의 정의역은 하나의 구간이거나 구간들의 합집합이라는 것을 유도할 수 있다. 이것을 단순화하여 정의역을 하나의 구간으로 한정하고 있다고 할 수 있다.

둘째, 교과서에서 한 점에서 끊어져 있는 그래프를 잇는 조건이 무엇인지에 대한 질문을 통해 그래프가 끊어져 있지 않은 연결성을 강조하는 것은 연속함수의 정의역을 하나의 구간으로 두고자 하는 의도로 볼 수 있다. Raman(2004)도 하나의 구간을 근거로 하여 연속성과 연결성 사이의 관계를 주는 활동은 다음과 같이 설명하고 있다.

> (주어진 구간에서) 함수의 그래프인 곡선이 어떠한 break를 가지지 않는 함수를 (주어진 구간에 있는 모든 점에서) 연속이라고 하여 그 그래프가 연필을 종이에서 떼지 않고 그려질 수 있다는 것이다.

셋째. 연속함수의 활용에서 주요한 정리의 하나인 사잇값의 정리[5]도 하나의 구간을 정의역으로 하여, 그 그래프가 틈이 없는 한 조각의 곡선이라는 이미지를 가지고 치역이 하나의 구간이 되는 것을 함의한다. 이러한 기하적인 관찰과 경험에 기초한 연속성과 연결 상태의 결합에서 정의역이 하나의 구간이라는 의미가 중요하게 작용한다.

나. 학문수학에서의 연속함수의 정의

위상수학은 근접성을 보존하는 연속함수를 다루는 추상화된 수학이다. ‘Ⅰ. 서론’에서 이미 언급했듯이, 위상수학에서는 위상공간 X에서 위상공간 Y로의 함수 $f: X \to Y$가 연속함수임을 “공역 Y에서 임의의 열린 집합 H에 대하여 그 역상 $f^{-1}(H)$가 정의역 X에서 열린집합이 된다.”와 같이 정의하고 있다. 이 대역적 연속성은 정의역 X의 ‘모든’ 점 a에서 연속이 되는, 즉 $f(a)$의 임의의 열린 근방 V에 대하여 a의 열린 근방 U가 존재하여 $f(U) \subset V$가 성립하는 것과 동치임이 잘 알려져 있다. 어떠한 함수라도 그 함수의 정의역과 공역의 위상을 도구로 그것이 연속함수인가 아닌지를 판정할 수 있다.

“함수 $f_1(x) = 1/x$ 은 연속함수인가?”에서 f_1을 정의역 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, 공역 R을 가지는 함수로 보고 학문수학에서의 정의를 적용하면 f_1은 x=0을 제외한 정의역 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$의 각 점에서 연속이 되어 연속함수가 됨을 확인할 수 있다. 그런데 선행 연구에서 대다수 고등학생들은 학교수학에서의 정의를 근거로 함수 f_1은 x=0에서 함숫값이 정의되어 있지 않으므로 그 점에서 불연속이라고 대답하며, 따라서 그 학생들은 이 함수가 연속함수가 아니라는 오개념을 가지고 있다고 말하고 있다. 선행연구(이진영, 2011; 박달원 외, 2012; 정연준과 김재홍, 2013)에서는 이러한 이유에서 정의역에 속하지 않은 점에서 연속·불연속을 판정하는 것을 수정하여 학문수학에서의 정의를 학교수학에 수용하자고 제안하고 있다.

하나의 구간에서 연속함수를 정의하고 있는 학교수학의 입장에서는, “함수 $f_1(x) = 1/x$ 은 연속함수인가?”라는 질문이 고등학생에게 적절한 질문이 아니라는 지적을 할 수도 있지만, 반면에 불연속점과 연속함수 사이의 관계를 명확

---

5) 중간값의 정리(Intermediate value theorem)라고도 하며 최근 교과서에서는 사잇값의 정리라 하고 있다.

히 하려는 점에서는 보면 유효한 질문이다. “불연속점이 있으면 연속함수가 아니다.” 혹은 “불연속점이 없어야 연속함수이다.”는 정의역의 위상을 중시하는 학문수학의 시각에서 보면 적합할 수 있으나, 그것은 정의역에 속하지 않는 점에서 불연속성을 다루는 학교수학의 입장에서는, 선행연구에서 본 것처럼, 불연속점이 있으면 연속함수가 아니라고 생각하는 부적절 개념 이미지를 갖게 하므로 적합하지 않다. 따라서 이 두 입장을 연결할 수 있는 일관된 연속함수의 정의를 생각할 필요가 있다. 일부 2007 개정 교과서(우무하 외, 2010)와 일부 2009 개정 교과서(김창동 외, 2014; 류희찬 외, 2014; 신항균 외, 2014)에서 볼 수 있는 다음과 같은 정의는 두 입장을 연결한다고 볼 수 있다.

> 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 점에 대하여 연속일 때, $f(x)$를 연속함수라고 한다.

> 일반적으로 함수 $f(x)$가 정의역 전체에서 연속일 때, 함수 $f(x)$를 연속함수라고 한다.

함수 $y=f(x)$가 학교수학에서의 정의에 따라 정의역에 속하는 각 점에서 연속일 때 함수 f의 정의역은 하나의 구간이거나 구간들의 합집합이다. 따라서 학교수학의 관점에서 연속함수로 판정받으려는 대상 함수는 정의역이 하나의 구간이거나 구간들의 합집합이어야 한다. 이러한 함수의 경우에는, 정의역에 속하는 각 점에서 극한 과정이 타당하고 $x=a$에서 ‘학교수학에서의 정의에 따른 연속’과 ‘학문수학에서의 정의에 따른 연속’이 동치이다. 가령 기본 전제 조건 ㉮의 상황에서는 $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$와 “임의의 양수 ε에 대하여 양수 δ가 존재하여, $x \in E$, $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$이 성립한다.”는 동치이다. 이때 학교수학에서의 정의로 볼 때 f의 정의역 E는 하나의 구간이거나 구간들의 합집합이다.

V. 결론

함수의 연속성 개념(한 점에서의 연속·불연속에 관한 국소적 연속성 개념과 함수 자체가 연속함수인가에 관한 대역적 연속성 개념)의 대하여, 학교수학에서의 정의와 학문수학에서의 정의 사이에는 괴리가 있다. 선행 연구에서는 그러한 괴리가 “불연속점이 있으면 연속함수가 아니다.”라는 부적절한 개념 이미지의 원인이 된다고 보고, 학교수학에서 이를 해소하기 위해서는 학문수학에서의 정의를 수용해야 한다고 제안하고 있다.

그러나 본 연구에서는 선행연구에서 연속성 개념에 대한 학교수학에서의 정의와 학문수학에서의 정의 사이의 차별성과 상호 연결성을 분석하고 있지 않다는 점에서, 네 가지 관점을 설정하여 그것을 분석하고 그 결과에 대하여 논의하고 있다. 논의 결과를 정리하면 다음과 같다. 첫째, 학교수학에서는 ‘한 점에서의 연속·불연속’의 정의를 극한 과정에 의존하고 있다. x=a에서의 연속·불연속을 판정받을 수 있는 함수는 x=a가 속한 열린구간에서 정의된 함수(이때 x=a에서는 함수가 정의되지 않아도 된다.)와 x=a를 끝점으로 하는 반 열린구간에서 정의된 함수(x=a에서는 함수가 정의되지 않아도 된다.)이다. 불연속점은 정의역에 속하지 않아도 되지만, 그 점에서 극한 과정은 타당해야 한다. 둘째, 학문수학에서는 ‘한 점에서의 연속·불연속’의 정의를 정의역의 위상에 의존하고 있다. 이것은 정의역을 고려한 $\varepsilon-\delta$ 논법(즉, 정의역의 상대위상을 사용한 근방 이론)이다. x=a에서의 연속·불연속을 판정받을 수 있는 함수는 정의역에 x=a를

포함하는 모든 함수이다. 불연속점도 반드시 정의역에 속해야 한다. 셋째, 학교수학에서는 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 실수에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다. 특히, $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이고, $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(a) = f(b)$일 때 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 한다. 학교수학에서 연속함수로 판정받을 수 있는 함수는 그 정의역이 하나의 구간이나 구간들의 합집합이어야 하나 주로 하나의 구간으로 한정하여 다루어지고 있다. 넷째, 학문수학에서는 공역의 임의의 열린 집합의 역상이 정의역의 열린 집합이 되는 함수가 연속함수이다. 어떠한 함수든 연속함수인가를 판정받을 수 있다.

본 연구에서는 이러한 결과에 근거하여, 학교수학에서의 연속성 개념 취급과 관련하여 다음 두 가지 의견을 제시한다. 첫째, 학교수학에서 국소적 연속성의 개념은 극한 과정을 기반으로 하므로 정의역에 속하지 않는 특정한 점에서 불연속을 취급하는 2009 개정 교과서의 내용은 적절하다고 볼 수 있다. 학교수학에서는 무한 불연속점, 제거 가능한 불연속점과 도약 불연속점의 유형이 나타난다. 학문수학에서의 정의에 맞추어 정의역에 속하는 점에서만 연속·불연속을 판정하는 것은 이러한 유형의 불연속점과 관련한 수학적 활동의 의미가 훼손되거나 상실될 수 있다. 둘째, 일반적 연속함수의 정의로 “함수 $y = f(x)$에서 정의역에 불연속점이 없으면, f를 연속함수라 한다.”를 제안한다. 이 정의는 정의역에 속하지 않은 점에서의 연속·불연속의 판정을 허용하면서, 학문수학에서의 정의와 일관되게 연결된다.

참고문헌

계승혁 외 5인(2009). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 성지출판(주).

교육과학기술부(2008). **교육인적자원부 고시 제 2007-79호에 따른 고등학교 교육과정 해설 (수학)**.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정. 교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]**

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8]**

김원경 외 9인(2014). **고등학교 미적분Ⅰ**, 서울: 비상교육.

김창동 외 14인(2014). **고등학교 미적분Ⅰ**, 서울: 교학사.

류희찬 외 17인(2014). **고등학교 수학 Ⅰ**. 서울: 천재교육.

박달원, 홍순상, 신민영(2012). 연속함수에 대한 고등학교 교과서의 정의와 고등학생들의 이해. **한국학교수학교육회논문집. 15**(3). 453-465.

신항균 외 11인(2014), **고등학교 미적분 I**, 서울: 지학사.

이경화, 신보미(2005). 상위 집단 학생들의 함수의 연속 개념 이해. **수학교육학연구, 15**(5), 39-56.

우무하 외 5인(2010). **고등학교 미적분과 통계 기본**. 서울: 박영사.

우정호 외 5인(2009). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 두산동아.

우정호 외 24인(2014a). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 두산동아.

우정호 외 24인(2014b). **고등학교 미적분 I**. 서울: 두산동아.

윤재한 외 23인(2009). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 더 텍스트.

이강섭 외 14인(2014). **고등학교 미적분학 I**, 서

울: 미래엔.

이진영(2010). **교수학적 변환의 관점에서 한 점에서 함수의 연속·불연속, 연속함수 정의의 검토**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.

이준열 외 9인(2009). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 천재교육.

이준열 외 9인(2014). **고등학교 미적분 Ⅰ**. 서울: 천재교육.

정상권 외 7인(2014). **고등학교 미적분 Ⅰ**. 서울: 금성출판사.

정연준, 김재홍(2013) 함수의 연속성 개념의 역사적 발달 과정 분석 - 직관적 지도의 보완을 중심으로-. **수학교육학연구, 23**(4), 567-584.

최용준 외 9인(2009). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 천재교육.

황선욱 외 10인(2014). **고등학교 미적분 Ⅰ**. 서울: 좋은책 신사고.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis*(4th edition), John Wiley & Sons.

Harcharras, A. & Mitrea, D. (2007). *Calculus connections: Mathematics for middle school teachers*. Pearson Prentice Hall.

Lipschutz, S. (2012). *Schaum's outlines General Topology*. McGraw Hill.

Munkres, J. R. (1975). *Topology- a first course*. Prentice-Hall.

Foerster, P. A. (2010). *Calculus : concepts and applications*. Key Curriculum Press.

Raman, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three high-school and college mathematics textbooks. *J. of Mathematics Behavior, 23*, 389-404.

Stewart. J. (2016a) *Calculus Early Transcendentals* (8E). Cengage Learning.

Stewart. J. (2016b). **미분적분학**(8E) (대학교재편찬위원회 옮김). 서울: 경문사.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular referencs to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*. 151-169.

Analysis on Definitions of Continuity Conveyed by School Mathematics and Academic Mathematics

Kim, Jin Hwan (Yeungnam University)
Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)

The purpose of this study is to analyze the difference and inter-connectivity between the definition of continuity in school mathematics and the definition of academic mathematics in four perspectives. These difference and inter-connectivity have not analyzed in previous papers. According to this study, the definition of 'continuity and discontinuity at one point' in school mathematics depends on the limit processing but in academic mathematics it depends on the topology of the domain. The target function of the continuous function in school mathematics is a function whose domain is limited to an interval or a union of intervals, but the target function of the continuous function in academic mathematics is all functions. Based on these results, the following two opinions are given in relation to the concept of continuity in school mathematics. First, since the notion of local continuity in school mathematics is based on limit processing, the contents of 2009-revised textbooks that deal with discontinuity at special point not belonging to the domain is appropriate. Here the discontinuity appears as types of infinite discontinuity, removable discontinuity, and step discontinuity. Second, the definition of a general continuous function is proposed to "if there is no discontinuity point in the domain of a function $y=f(x)$, we call the function f a continuous function." This definition allows the discontinuity at special point in non-domain, but is consistent with the definition in academic mathematics.

* Key Words : limit processing(극한과정), topology(위상), school mathematics(학교수학), academic mathematics(학문수학), continuity · discontinuity(연속 · 불연속), continuous function(연속함수)

논문접수 : 2017. 7. 6
논문수정 : 2017. 8. 12
심사완료 : 2017. 8. 18