

실용적 복합 가속수명시험 계획의 개발*

배봉수 · 서순근†

동아대학교 산업경영공학과

Planning Practical Multiple-Stress Accelerated Life Tests*

Bong-Soo Bae · Sun-Keun Seo†

Department of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

Purpose: The most previous works on designing accelerated life tests (ALTs) are focused on the application of a single stress. Because of the difficulty to obtain the sufficient information in a reasonable duration using single stress only, there is needed in practice to use multiple-stress ALTs frequently. This paper presents new practical plans with two stresses for Weibull distribution.

Methods: The four-level practical plans based on rectangle test region are proposed and compared with the corresponding three-level statistically optimal plans. Sensitivity analyses for assumed design parameters and life-stress relationship are conducted.

Results: A procedure to choose practical ALT plans is illustrated with a numerical example and guidelines for planning two-stress ALTs are provided.

Conclusion: The proposed two-stress ALT plans on practical constraints to assess a quantile of Weibull lifetime distribution at the use condition are efficient and robust.

Keywords: Accelerated Life Test, Multiple Stress, Practical Plans, Rectangle Test Region, Weibull Distribution

1. 서론

최근 들어 제품의 신뢰도가 점점 높아짐에 따라 단 시간 내에 해당 제품의 수명을 파악하거나 신뢰도를 평가하기 위하여 사용조건보다 가혹한 스트레스를 가하여 고장을 유발시키는 가속수명시험(Accelerated Life Test; 이하 ALT)이 보편화되는 추세이다. ALT는 획득한 수명데이터로부터 물리·화학적으로 스트레스와 수명의 관계를 설명할 수 있는 적절한 가속모형

을 통해 외삽(extrapolation)하여 정상 사용조건하의 신뢰성 척도를 평가한다. 이런 외삽의 위험성, 한정된 시험단위의 수, 시험비용에 관한 제약 등으로 인해 통계적·경제적 효율성이 높은 가속수명시험계획의 개발, 즉, 스트레스 수준, 시험단위 크기, 수준별 할당 비율, 시험시간 등을 규정하는 ALT의 설계는 더욱 중요해지고 있다.

현재까지 수행된 가속수명시험 설계에 관한 연구들은 하나의 스트레스(즉, 가속변수)를 대상으로 개

* 이 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.

† 교신저자 skseo@dau.ac.kr

2017년 4월 17일 접수; 2017년 6월 12일 수정본 접수; 2017년 6월 14일 게재 확정.

발된 시험계획이 대부분이다[1]. 하나의 스트레스를 가할 경우 충분한 고장 데이터를 얻기 힘들거나 외삽의 위험이 높아질 수 있으므로, 이런 위험성을 줄이기 위해 두 스트레스 이상을 채택하는 복합 스트레스 ALT의 필요성이 증대되고 있다. 또한 복합 스트레스 ALT는 사용조건 하의 신뢰도 예측뿐만 아니라, 제품은 보통 여러 (환경) 스트레스에 의해 경시적으로 열화 또는 손상되므로 스트레스 변수가 제품 수명에 미치는 영향도 파악할 수 있다. 하지만 복합 스트레스 ALT의 설계에 관한 연구는 드문 편이다. ALT는 스트레스 부하 패턴에 따라 일정형과 계단형 등으로 구분할 수 있는데[2], 여기서는 시험의 편리성과 분석의 용이성에 의해 현업에서 보다 널리 쓰이는 일정 스트레스(constant stress) ALT를 대상으로 삼는다.

최초로 복합 스트레스 ALT의 설계를 수행한 Escobar and Meeker[3]는 와이블을 포함한 대수-위치-척도 분포군을 따를 때 교호작용이 없는 이 변수 선형 가속모형 하에서 2수준에서 시험되는 최적 퇴화(degenerate) 시험계획과 이와 통계적으로 동등한 3수준에서 시험되는 분리된(split) 시험계획 등을 개발하였다. 이들의 설계기준으로 단일 스트레스 ALT에서 보편화된 사용조건하의 관심 분위수에 관한 추정량의 점근적 분산을 채택하고 있다[4]. Escobar and Meeker[3]의 시험계획의 심층적 성질을 규명하거나 확장한 연구로 Gao *et al.*[5], Chen *et al.*[6], Gao *et al.*[7]을 들 수 있다. 그리고 교호작용까지 고려한 이 변수 선형 가속모형 하에서 Park and Yum[8]은 지수분포를 따를 때 상기 기준에 속하는 최적 시험계획을, Guo and Pan[9]은 대수정규분포를 따를 때 Fisher 정보량 행렬식을 최대화하는 D-최적 설계를 수행하였다. 한편 Yang[10]은 와이블 분포를 따를 때 상기 기준 하에서 하나의 스트레스와 사용률(usage rate)을 가속변수를 채택한 이 변수 시험계획을 개발하였으며, Yang[11]에서는 사용률을 다른 하나의 스트레스로 대체한 시험계획을 제공하고 있다. 이외에 Zhu and Elsayed[12]는 와이블 분포와 다변수 선형 가속모형 하에서, Elsayed and Zhang[13]은 비례 고장률(proportional hazards) 및 이 변수 가속모형 하에서 사용조건 하의 신뢰도 추정량에 관한 점근적 분산을 최소화하는 ALT 시험을 설계하는 방법을 제안하였다.

Escobar and Meeker[3]의 3수준 시험계획(E-M 시험계획으로 명명)은 통계적으로 최적이지만 시험계획

이 직사각형 형태의 요인실험이 되지 못하는 약점을 가지고 있으며, 교호작용의 존재 여부도 파악할 수 없는 단점을 가지고 있다. E-M 시험계획 외의 대부분의 연구는 직사각형 형태의 시험계획을 상정하고 있으며, 또한 요인실험처럼 교호작용을 검토할 수 있도록 3수준보다 4수준을 취하는 경우가 많다. 따라서 본 논문에서는 단일 스트레스 ALT에 널리 활용되는 절충형 등의 3수준 시험계획의 설계 개념[14, 15]을 두 스트레스 복합 ALT 시험설계에 적용한, 4수준에서 시험되는 여러 실용적 시험계획을 도출한다. 이런 시험계획을 E-M 시험계획과 통계적 효율성, 시험계획 설정에 필요한 입력 정보의 오추정에 따른 강건성, 실용적 특성 측면에서 비교하여 바람직한 복합 스트레스 ALT 계획을 선택할 수 있는 지침을 제공하고자 한다.

제2장에서는 통계적 복합 스트레스 계획에 대해 고찰하며, 제3장에서는 네 종류의 실용적 ALT의 설계 과정을 다룬다. 제4장에서는 수치예제를 대상으로 실용적 계획의 활용과정, 입력 파라미터의 오추정에 따른 민감도 분석, 교호작용이 포함될 경우의 비교 등을 수행한다. 제5장에서는 논문의 성과와 이의 유용성을 약술한다.

2. 최적 복합 스트레스 시험계획의 고찰

2.1 가정 및 모형

본 연구에서 다루는 가속수명시험 계획의 가정은 다음과 같다.

- (i) 두 스트레스의 시험 조건에서 수명(T)과 대수수명($Y = \ln T$)은 와이블과 최소 극단값(smallest extreme value)분포를 따르며 각각의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_T(t) = \frac{\delta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1} \exp \left[- \left(\frac{t}{\eta} \right)^m \right] \quad (1)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{y-\mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right] \quad (2)$$

$$\text{단, } \mu = \ln \eta, \sigma = \frac{1}{m}$$

- (ii) Y 의 척도모수 σ 는 스트레스에 관계없이 일정하다.
- (iii) Y 의 위치모수 μ 는 식 (3)과 같이 표준화된 스

트레스 s_1 과 s_2 의 선형함수이다.

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 \quad (3)$$

식 (3)은 일반화 아이링(Eyring) 모형 등 복합 스트레스 ALT에 활용되는 가속모형의 대부분을 포함한다. 여기서 실제 스트레스의 최고 수준(s'_{1H} , s'_{2H})은 스트레스와 모수의 관계식(즉, 식 (3))이 성립되는 범위 내에서 가능한 한 높은 수준으로 미리 설정하며, 사용조건 하의 실제 수준이 (s'_{1U} , s'_{2U})로 정의되면 각 스트레스 수준 $s'_1 s'_2$ 은 다음과 같이 0과 1사이의 값을 갖는 s_1 과 s_2 로 표준화 된다.

$$s_1 = \frac{s'_1 - s'_{1U}}{s'_{1H} - s'_{1U}}, \quad s_2 = \frac{s'_2 - s'_{2U}}{s'_{2H} - s'_{2U}}$$

- (iv) 시험이 실시되는 스트레스 수준 수(k)는 2개 (C_L , C_H), 3개(C_{HL} , C_{LH} , C_H) 또는 4개 (C_{LL} , C_{HL} , C_{LH} , C_{HH})이고, 각 수준에서 스트레스는 일정하게 가해진다.
- (v) 각 스트레스에서의 시험 단위 n_i 는 스트레스 수준에 대해 독립적으로 시험되며 t_c 까지 관측된다(즉, 제1종 관측중단). 수준별로 관측중단시간을 달리 배정하여 설계기준인 통계적 효율성을 높일 수도 있지만[16], 일반적으로 대부분 시험 계획은 시험수준의 관측 중단 시험시간을 동일하게 설정하고 있으므로 $t_{c_i} = t_c$, $i = 1, \dots, k$ 인 경우로 한정한다. 그리고 시험제품의 총수가 N 일 때 각수준의 할당비율 α_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$\alpha_i = n_i/N, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$$

가속시험 상황 하에서 관심의 대상이 되는 사용조건($(s_{1U}, s_{2U}) = (0, 0)$)하에서 수명의 분위수 t_q 나 대수수명의 분위수 y_q 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$y_q = \ln t_q = \beta_0 + \beta_1 s_{1U} + \beta_2 s_{2U} + \sigma \ln[-\ln(1-q)] \quad (4)$$

2.2 시험계획의 설계기준

β_0 , β_1 , β_2 , σ 의 추정방법으로 일치성(consistency), 점근적 효율성(asymptotic efficiency), 정규성(normality)의 바람직한 대표본 성질을 가지는 최우추정법(maximum likelihood estimation)이 적용되며[2], 시험계획의 설계기준으로 단일 스트레스 시험계획처럼 β_0 , β_1 , β_2 , σ 에 대하여 편미분하여 음의 기대값을 취한 최우추정량에 대한 Fisher 정보량을 이용한 \hat{y}_q (y_q 의 최우추정량)의 점근적 분산(asymptotic variance)으로 설정한다. 와이블 분포보다 다루기 편한 최소 극단값 분포로 변환한 i 번째 표본의 우도가 L_i 이고 σ 를 β_3 으로도 표기하면 상기의 네 모수에 대한 최우추정량의 Fisher 정보량 행렬은 식(5)와 같이 나타낼 수 있다[3].

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma^2} E \left[- \frac{\partial^2 \ln L_i}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right] \right) \\ &= \frac{N}{\sigma^2} \left(f_{jl} = \sum_{i=1}^k \alpha_i E \left[- \frac{\partial^2 \ln L_i}{\partial \beta_j \partial \beta_l} \right] \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$j, l = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned} \text{단, } f_{00} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i H_i^{(1)} \\ f_{01} = f_{10} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i s_{1i} H_i^{(1)} \\ f_{02} = f_{20} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i s_{2i} H_i^{(1)} \\ f_{03} = f_{30} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i H_i^{(2)} \\ f_{11} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i s_{1i}^2 H_i^{(1)} \\ f_{12} = f_{21} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i s_{1i} s_{2i} H_i^{(2)} \\ f_{13} = f_{31} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i s_{2i} H_i^{(2)} \\ f_{22} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i s_{2i}^2 H_i^{(1)} \\ f_{33} &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i H_i^{(3)} \end{aligned}$$

여기서 $H_i^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$ 은 다음과 같다[17].

$$H_i^{(1)} = \int_{-\infty}^{z_{ci}} g(z) dz = G(z_{ci})$$

$$H_i^{(2)} = \int_{-\infty}^{z_{ci}} (1+z)g(z) dz$$

$$H_i^{(3)} = \int_{-\infty}^{z_{ci}} (1+z)^2 g(z) dz$$

단, $z_{ci} = (\ln t_{ci} - \beta_0 - \beta_1 s_{1i} - \beta_2 s_{2i}) / \sigma$ 이고,

$g(\cdot)$, $G(\cdot)$ 는 각각

$\mu = 0$, $\sigma = 1$ 인 최소 극단값분포의 확률밀도함수와 누적분포함수임.

Fisher 정보량을 이용하여 사용 스트레스 조건에서의 대수수명의 분위수에 관한 점근적 분산은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Avar(\hat{y}_q) = \mathbf{a} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a}^T \quad (6)$$

$$\text{단, } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_q}{\partial \beta_0} & \frac{\partial y_q}{\partial \beta_1} & \frac{\partial y_q}{\partial \beta_2} & \frac{\partial y_q}{\partial \sigma} \\ = [1, 0, 0, \ln[-\ln(1-q)]] \end{bmatrix}$$

$Avar(\hat{y}_q)$ 에 N/σ^2 을 곱하여 N 과 σ 에 의존하지 않도록 식 (7)을 표준화한 점근적 분산을 가속수명시험 계획의 최적화 기준으로 삼는다.

$$v_0 = \left(\frac{N}{\sigma^2} \right) \cdot Avar(\hat{y}_q) \quad (7)$$

2.3 최적 시험계획

가속수명시험계획을 도출할 때 β_0/σ , β_1/σ , β_2/σ

에 대한 사전정보가 필요하게 된다. 이들 모수들의 적절한 추정값를 얻기 위하여, 보통 사용 및 두 고 스트레스 수준에서 시험종결시간(t_c)까지의 고장확률인 $\Pr(T \leq t_c; (s_{1U}, s_{2U})) = P_{UU}$, $\Pr(T \leq t_c; (s_{1U}, s_{2H})) = P_{UH}$, $\Pr(T \leq t_c; (s_{1H}, s_{2U})) = P_{HU}$ 로 사전 추정하는 경우로 대체하여 시험계획을 도출하는 것이 보다 편리하므로, 본 논문에서는 이런 입력 파라미터 설정방식을 택한다.

Escobar and Meeker[3]는 두 변수 통계적 최적계획 (statistically optimum plan)을 단일 변수 최적계획과 동일한 v_0 를 가지도록 설계할 수 있음을 보여 주었으며, 이런 두 스트레스 수준에서 시험되는 계획을 퇴화 시험계획이라 칭하고 있다. 즉, 식 (3)에서

$$\mu = \beta_0 + (\beta_1 + r\beta_2)s = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2)s_1 \quad (8)$$

로 변환하여 두 스트레스 수준에서 시험되는 일 변수 최적계획을 도출하였다. <Fig. 1>의 (a)와 같이 C_H 의 시험수준이 포함되므로 식 (8)의 r 는 1이 된다. 그런데 두 수준의 시험(C_L 과 C_H)만으로는 모든 모수를 추정할 수 없으므로 <Fig. 1>의 (a)와 같은 3수준 (C_{HL} , C_{LH} , C_H)에서 시험되는 최적계획을 제안하였다. Gao et al.[7]은 퇴화 시험계획으로도 설계 기준인 사용 조건하의 관심 대상 분위수를 추정할 수 있는 점을 강조하고 있지만, 모든 관련 모수의 추정이 기본적으로 불가능하여 여기서의 최적 시험계획은 3수준 시험계획으로 한정한다.

3수준 최적 시험계획의 시험조건(각 조건의 스트레스 수준과 시험단위의 할당비율)을 $C_{HL} = (s_{1L}, s_{2L}; \alpha_{HL})$, $C_{LH} = (s_{1L}, s_{2H}; \alpha_{LH})$, $C_H = (s_{1H} = 1,$

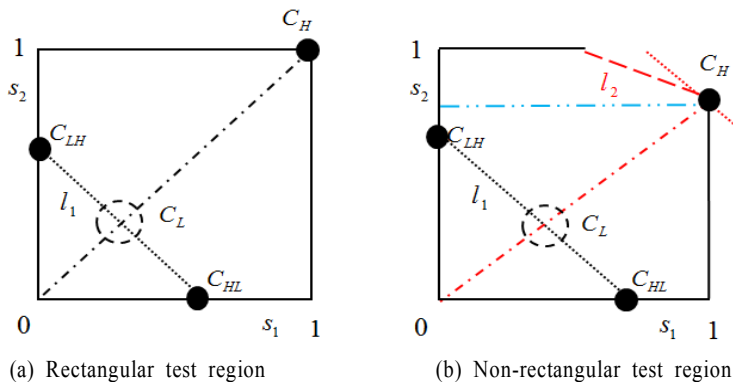


Fig. 1 Optimal ALT plans

$s_{2H} = 1; \alpha_{HH}$)로 나타낼 때 2수준 퇴화 시험계획의 시험조건 ($C_L = (s_{1L}^* = s_L^*, s_{1L}^* = s_L^*; \alpha_{LL}^*)$, $C_H = (s_{1H} = 1, s_{2H} = 1; 1 - \alpha_{LL}^*)$)으로부터 다음 조건을 만족하도록 설정된다[3].

$$\alpha_{HL} = 1 - \alpha_{LH} = \alpha_{LL}^* \frac{|s_{1H} - s_L^*|}{|s_{1L} - s_L^*| + |s_{1H} - s_L^*|} \quad (9)$$

$$l_1 : \ln t_c - \beta_0 - \beta_1 s_1 - \beta_2 s_2 = \sigma \ln[-\ln(1 - P_f^{(L)})] \quad (10)$$

단, $P_f^{(L)}$ 는 2수준 퇴화 시험계획에서 C_L 수준에서의 고장확률

여기서 같은 v_0 값을 가지는 3수준 최적 시험계획은 동일 고장확률을 가지는 선분 l_1 에 무수히 존재하므로, Escobar and Meeker[3]는 D-최적이 되도록 <Fig. 1>의 (a)의 예시와 같이 $s_1 = 1$ 또는 $s_2 = 0$ 과 $s_1 = 0$ 또는 $s_2 = 1$ 이 되는 변에 존재하는 시험계획을 추천하고 있다. 따라서 이런 조건 하에서 $P_f^{(L)}$ 과 식 (10)으로부터 C_{HL} 과 C_{LH} 의 시험수준이 정해진다.

만약 시험조건 제약으로 <Fig. 1>의 (b)와 같이 직사각형 형태가 되지 않을 경우는 선분 l_1 과 선분 l_2 가 만나는 시험점이 C_H 가 되며[6], 식 (8)에서 $r = 1$ 이 되지 않고 원점과 C_H 를 통과하는 직선의 기울기가 된다. 이럴 경우도 C_2 가 (1, 1)이 되는 꼭지점이 되도록 직사각형 형태의 시험영역(<Fig. 1>의 (b)의 작은 직사각형)으로 축소하여 제3장에서 개발되는 시험계획을 활용할 수 있다.

3. 두 스트레스 실용적 계획

이 장에서는 <Fig. 2>와 같이 직사각형 형태의 4수

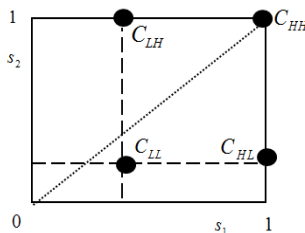


Fig. 2 Four-level practical plan

준에서 시험되는 네 종류의 시험계획을 도출하고자 한다. 이런 4수준 시험계획은 다음과 같이 규정된다.

$$\begin{aligned} \text{시험수준: } C_{LL} &= (s_{1L}, s_{2L}; \alpha_{LL}), \\ C_{HL} &= (s_{1H} = 1, s_{2L}; \alpha_{HL}), \\ C_{LH} &= (s_{1L}, s_{2H} = 1; \alpha_{LH}), \\ C_{HH} &= (s_{1H} = 1, s_{2H} = 1; \alpha_{HH}) \end{aligned}$$

$$\text{단, } \alpha_{LL} + \alpha_{HL} + \alpha_{LH} + \alpha_{HH} = 1$$

3.1 전통적 계획

현업에서 주로 사용되었던 시험계획에 속하며, 각 시험수준에 시험단위를 1/4씩 할당하고 s_{1L} 과 s_{2L} 는 다음의 최적화 문제로부터 수치적으로 설정된다. Gao et al.[5]도 이런 방식의 실용적 계획을 다루고 있다.

$$\min_{s_{1L}, s_{2L}} (v_0) \quad (11)$$

$$\text{subject to } 0 < s_{1L} < 1, 0 < s_{2L} < 1$$

$$\alpha_{ij} = 1/4, i, j = L, H.$$

3.2 절충형 실용적 계획

3수준 최적계획은 통계적으로 효율성은 높지만 두 스트레스 변수간의 교호작용의 존재 등 모수와 스트레스 관계식의 적정성 여부에 대한 검토가 불가능하므로, 통계적 정밀도를 일부 희생하면서 하나의 시험수준을 추가한 절충형 시험계획(compromise plan)을 대안으로 채택할 수 있다. Meeker[18]의 단일 스트레스 절충형 시험계획과 유사하게 중간 수준에 일정 비율(10~20% 정도)을 할당한 후에, 식 (12)과 같이 설계기준을 최소화하는 s_{1L} 및 s_{2L} 과 α_{LL} 을 수치해법으로 결정할 수 있다. Yang[11]은 사용조건과 C_{HH} 를 포함한 4수준의 척도모수(μ) 값의 조합에 따라 $\alpha_{HL} = 0.1$, $\alpha_{LH} = 0.1$ 하의 절충형 시험계획을 개발하였는데, 본 논문에서는 P_{UU} , P_{HU} , P_{UH} 의 입력 파라미터 조합에 따른 절충형 실용적 계획을 구했다

$$\min_{s_{1L}, s_{2L}, \alpha_{LL}} (v_0) \quad (12)$$

$$\text{subject to } 0 < s_{1L} < 1, 0 < s_{2L} < 1$$

$$\alpha_{HL} = 0.1, \alpha_{LH} = 0.1,$$

$$\alpha_{HH} = 0.8 - \alpha_{LL}$$

3.3 변형 M-H 실용적 계획

ALT 시험계획은 낮은 수준으로 갈수록 시험단위의 할당비율이 높아지는 것이 합리적인데 전 소절의 절충형 계획은 추정 정밀도가 최적계획에 보다 근접하도록 적은 비율만을 두 중간 수준에 할당하고 있다. 절충형 계획의 실용적이지 못한 이런 점을 고려하여 Meeker and Hahn[14]은 사용조건에 가까울수록 많은 시험제품이 할당될 수 있도록 저, 중간, 고 스트레스에 4:2:1의 비로 시험단위가 할당되는 단일 스트레스 Meeker-Hahn(이하 M-H) 계획을 제시하였다. 여기서는 이런 M-H 시험계획의 할당비율을 두 변수 스트레스 시험계획에 원용하여, 4:2:2:1 할당계획 등 여러 할당계획을 고려할 수 있지만, 추정 정밀도를 반영하여 변형 M-H 실용적 계획으로 칭한 4:1:1:1 계획을 제안하고자 한다. 이런 할당비율 하에서 식 (13)과 같이 s_{1L} 과 s_{2L} 을 수치해법으로 구하였다.

$$\begin{aligned} & \min_{s_{1L}, s_{2L}} (v_0) \\ & \text{subject to } 0 < s_{1L} < 1, 0 < s_{2L} < 1 \\ & \alpha_{LL} = 4/7, \alpha_{HL} = \alpha_{LH} = \alpha_{HH} = 1/7 \end{aligned} \quad (13)$$

3.4 등 기대 고장개수 실용적 계획

각 시험조건 of 기대 고장개수가 최소한 일정 개수 이상이 되는 시험계획이 유용하다고 알려져 있다 [14]. 이런 조건을 충족하는 시험계획으로 각 시험수준에서의 기대 고장개수가 동일하도록 설계하는 시험계획(EENF(Equal Expected Number of Failing plan)로 칭함)을 고려할 수 있다[18].

즉, 식 (14)의 제약식을 만족하면서 v_0 를 최소화하는 s_{1L} 과 s_{2L} 등을 수치적으로 설정할 수 있다

$$\begin{aligned} & \min_{s_{1L}, s_{2L}, \alpha_{LL}, \alpha_{HL}, \alpha_{LH}} (v_0) \\ & \text{subject to } 0 < s_{1L} < 1, 0 < s_{2L} < 1 \\ & \alpha_{LL}P_f^{(LL)} = \alpha_{HL}P_f^{(HL)} = \alpha_{LH}P_f^{(LH)} = \alpha_{HH}P_f^{(HH)} \end{aligned} \quad (14)$$

단, $P_f^{(jk)} = \Pr(T \leq t_c), j, k = L, H$

최적화 문제 (14)에서 등 기대 고장 개수 계획의 시험단위 할당비율은 식 (15)와 같이 주어지므로 v_0 를 최소화하는 s_{1L} 과 s_{2L} 를 구할 수 있다. 이로부터 $\alpha_{LL}, \alpha_{HL}, \alpha_{LH}$ 가 다음 식에 의해 구해지므로, α_{HH} 는 자동적으로 결정된다.

$$\begin{aligned} \alpha_{LL} &= \frac{P_f^{(HL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)}}{P_f^{(LL)}P_f^{(HL)}P_f^{(LH)} + P_f^{(LL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)} + P_f^{(LL)}P_f^{(HL)}P_f^{(HH)} + P_f^{(HL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)}} \\ \alpha_{HL} &= \frac{P_f^{(LL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)}}{P_f^{(LL)}P_f^{(HL)}P_f^{(LH)} + P_f^{(LL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)} + P_f^{(LL)}P_f^{(HL)}P_f^{(HH)} + P_f^{(HL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)}} \\ \alpha_{LH} &= \frac{P_f^{(LL)}P_f^{(HL)}P_f^{(HH)}}{P_f^{(LL)}P_f^{(HL)}P_f^{(LH)} + P_f^{(LL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)} + P_f^{(LL)}P_f^{(HL)}P_f^{(HH)} + P_f^{(HL)}P_f^{(LH)}P_f^{(HH)}} \end{aligned} \quad (15)$$

3.5 시험계획의 비교

<Table 1>과 <Table 2>에 $q, P_{UU}, P_{HU}, P_{UH}$ 의 조합에 따른 여러 ALT 시험계획 중에서 지면제약을 고려하여 각각 $q=0.01, 0.1$ 일 때 $q=0.01, P_{UU}=0.0001, P_{UH}=0.5, P_{HU}=0.1$ 하의 네 가지 실용적 계획과 이에 대응되는 2수준과 3수준 최적계획이 수록되어 있다. 여기서 \mathbf{s} 는 s_1 과 s_2 의 수준을 나타내는 벡터이며, P_f 는 해당 스트레스 수준에서의 고장확률이다.

이로부터 특징을 요약하면 다음과 같다.

- (i) 실용적 계획 중에서 절충형과 변형 M-H 계획의 v_0 가 작은 편에 속하며, 전통적 계획의 v_0 는 다른 실용적 계획보다 상당히 큰 편이다. 또한 D-최적 척도인 Fisher 정보량 행렬식을 대수 변환한 $\ln(|\mathbf{F}|)$ 를 보면 반대 현상을 보인다.
- (ii) 3수준 최적 계획은 실용적 계획에 반해 C_{LL} 과 C_{LH} 의 수준이 0 또는 1에 가깝게 극단적으로 설정되는 경향을 보인다. 실용적 계획 중에서 등 기대 고장 개수 계획의 C_{LL} 수준이 낮은 편에 속하여, 다른 실용적 계획보다 고장확률이 낮다.
- (iii) 4수준에서의 시험단위 할당비율 측면을 보면 변형 M-H 계획과 등 기대 고장 개수 계획이 실용성 관점에서 비교적 우수한 편이다.

이에 따라 시험계획으로 결함을 가지거나 특성이 열악한 최적 퇴화 시험계획과 전통적 실용적 시험계획은 다음 절의 예시와 민감도 분석의 대상에서 제외한다. 한편 <Table 1>과 <Table 2>를 보면 단일 스트레스 ALT의 고 수준에서 고장확률이 낮더라도(여기

서 0.1과 0.5), 복합 스트레스 ALT에서는 한 스트레스 으면 결합된 수준에서는 고장확률이 거의 1에 가까운 의 최고 수준이 포함되면서 다른 수준이 어느 정도 높 값이 되고 있다.

Table 1 ALT plans with two stresses: $q = 0.01$, $P_{UV} = 0.0001$, $P_{HV} = 0.1$, $P_{UH} = 0.5$

ALT plan		optimum		practical			
		degenerate	3-level	traditional	compromise	modified M-H	EENF
C_L/C_{LL}	s	0.537,0.537	-	0.524,0.561	0.533,0.552	0.525,0.552	0.499,0.532
	α	0.699	-	0.250	0.563	0.571	0.527
	P_f	0.383	-	0.422	0.416	0.401	0.299
C_{HL}	s	-	1, 0.172	1, 0.561	1, 0.552	1, 0.552	1, 0.5320
	α	-	0.375	0.250	0.100	0.143	0.158
	P_f	-	0.383	1.000	1.000	1.000	1.000
C_{LH}	s	-	0, 0.959	0.524, 1	0.533, 1	0.525, 1	.499, 1
	α	-	0.324	0.250	0.100	0.143	0.158
	P_f	-	0.383	1.000	1.000	1.000	1.000
C_H/C_{HH}	s	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1
	α	0.301	0.301	0.25	0.237	0.143	0.157
	P_f	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
v_0		28.364	28.364	47.133	32.383	35.928	37.443
$\ln F $		$-\infty$	-5.386	-6.124	-7.244	-7.155	-7.012

Table 2 ALT plans with two stresses: $q = 0.1$, $P_{UV} = 0.0001$, $P_{HV} = 0.1$, $P_{UH} = 0.5$

ALT plan		optimum		practical			
		degenerate	3-level	traditional	compromise	modified M-H	EENF
C_L/C_{LL}	s	0.568,0.568	-	0.540,0.576	0.560,0.578	0.550,0.576	0.519,0.552
	α	0.701	-	0.250	0.547	0.571	0.463
	P_f	0.549	-	0.503	0.559	0.529	0.387
C_{HL}	s	-	1, 0.229	1, 0.576	1, 0.552	1, 0.576	1, 0.552
	α	-	0.392	0.250	0.1	0.143	0.179
	P_f	-	0.549	1.000	1.000	1.000	1.000
C_{LH}	s	-	0.020, 1	0.540, 1	0.533, 1	0.550, 1	0.519, 1
	α	-	0.309	0.250	0.1	0.143	0.179
	P_f	-	0.549	1.000	1.000	1.000	1.000
C_H/C_{HH}	s	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1	1, 1
	α	0.299	0.299	0.250	0.253	0.143	0.179
	P_f	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
v_0		20.247	20.247	39.787	24.945	29.316	32.152
$\ln F $		$-\infty$	-5.128	-6.152	-7.101	-7.068	-6.699

4. 시험계획의 활용

4.1 수치예제

어떤 전기제품은 형상모수가 2인 와이블 분포와 일 반화 아이링 모형을 따르며 스트레스는 온도(temp)와 진동(V)이다. 사용 온도와 진동(RMS(root mean square) 가속도) 수준은 각각 45°C, 1.5G_{RMS}이고 최고 수준은 120°C이고 12G_{RMS}이다. C_{LL}, C_{HL}, C_{LH}에서 900시간 까지의 고장확률이 0.0001, 0.5, 0.1이고 사용 스트레 스 하에서의 관심있는 분위수는 제 10백분위 수명으 로, 70개의 제품을 시험에 투입할 예정이다.

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } s'_1 &= \frac{11,604.83}{273.15 + \text{temp}}, \quad s'_2 = \ln V \\ s_1 &= \frac{s'_1 - 37.4760}{29.5175 - 37.4760}, \quad s_2 = \frac{s'_2 - 0.4055}{2.4849 - 0.4055} \end{aligned}$$

이 경우에 두 스트레스 중에서 가속성이 높은 진동을 스트레스로 택하여 단일 스트레스 가속수 명시험을 실시하면, 최적 시험계획은 $s_L^* = 0.750$, $\alpha_L^* = 0.659$, $P_f^L = 0.073$, $v_0 = 555.2$ 가 된다[15, 18]. 따라서 진동의 최적 낮은 스트레스 수준은 식 (16)에 부가된 관계를 이용하여 구하면 7.14G_{RMS}가 되므로 이와 12G_{RMS}에 각각 46, 24개를 할당하며, 와이블 분포의 형상모수(m)와 무관하게 구한 이 계획의 $\sigma^2 \cdot Avar(\widehat{\ln t_{0.1}})$ 는 7.931이 된다.

<Table 2>로부터 여러 ALT 계획을 <Table 3>과 같 이 도출할 수 있다. 여기서 C_{HH}(또는 C_H)는 120°C이 고 12G_{RMS}이며, 이 시험 수준의 할당 시험단위는 70

개에서 다른 수준에 할당된 개수를 차감하면 된다. 예 를 들면 변형 M-H 실용적 계획은 (82.3°C, 4.97G_{RMS}; 40), (120°C, 4.97G_{RMS}; 10), (82.3°C, 4.97G_{RMS}; 10), (120°C, 12G_{RMS}; 10)로 나타낼 수 있다.

여기서 두 스트레스를 채택한 최적 및 실용적 복합 스트레스 시험계획이 단일 스트레스 시험계획보다 시험의 통계적 정밀도를 매우 높일 수 있음을 확인할 수 있다. 그리고 세 종류의 실용적 복합 스트레스 시 험계획은 대응되는 최적 시험계획보다 통계적 효율 성은 떨어지지만 그 차이는 크지 않다.

4.2 민감도 분석

제3장과 제4.1절의 가속수명시험 계획은 $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \sigma$ 에 대한 사전정보에 따라 도출(locally optimal design)되었으므로, $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ (또는 세 스트레스 수준에 서의 특정한 시험종결시간(여기서 t_c)까지의 고장확 률: P_{UV}, P_{HV}, P_{UH})의 사전 추정오차에 따른 시험계 획의 강건성(robustness)을 조사하여 비교하고자 한다.

위 예제에서 참값을 정확하게 몰라 $\tilde{P}_{UV} = 0.0001$, $\tilde{P}_{UH} = 0.5$, \tilde{P}_{HV} 로 오추정할 때 참값의 수준 조합이 $P_{UV} = a\tilde{P}_{UV}$, $P_{HV} = a\tilde{P}_{HV}$, $P_{UH} = a\tilde{P}_{UH}$ 일 경우 a 를 0.6~1.4로 변화시켜 분산의 증가 백분율 $100(\tilde{v}_0 - v_0)/v_0$ (\tilde{v}_0 는 참 모형하에서 오추정 시의 v_0) 을 <Fig. 3>에 도시하였다. 여기서의 민감도 분석이란 예를 들면, 사전 추정량이 $\tilde{P}_{UV} = 0.0001$, $\tilde{P}_{UH} = 0.5$, $\tilde{P}_{HV} = 0.1$ 인 경우에 실제 참값이 모두 이들의 1.4배 (즉, $P_{UV} = 0.00014$, $P_{HV} = 0.7$, $P_{UH} = 0.14$)일 때의 분산 증가 백분율(Δv_0)이 <Fig 3>의 맨 오른쪽에 도 시된 값이 된다.

Table 3 ALT plans: A numerical example

ALT plan	3-level optimum		practical -compromise			practical- modified M-H			practical-EENF		
	C _{HL}	C _{LH}	C _{LL}	C _{HL}	C _{LH}	C _{LL}	C _{HL}	C _{LH}	C _{LL}	C _{HL}	C _{LH}
temperature(°C)	120	46.2	83.0	120	83.0	82.3	120	82.3	79.9	120	79.9
vibration(G _{RMS})	2.42	12	4.99	4.99	12	4.97	4.97	12	4.73	4.73	12
test units	27	22	38	7	7	40	10	10	32	13	13
$\sigma^2 \cdot Avar(\widehat{\ln t_{0.1}})$	0.289		0.356			0.419			0.459		

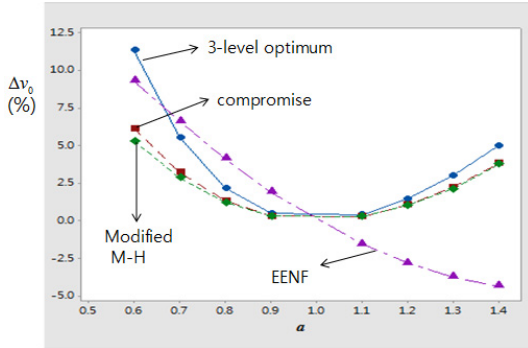


Fig. 3 Sensitivity analyses: A numerical analysis

이 결과를 검토해 보면, 모든 시험계획들이 오추정에 따른 점근적 분산의 변화가 전반적으로 적었으며, 변형 M-H과 절충형 시험계획이 통계적 최적계획보다 점근적 분산의 변화가 둔감한 것으로 파악할 수 있다. <Fig. 3>을 보면 등 기대 고장 개수 계획은 오추정된 입력 파라미터 하에서 구한 시험단위 할당비율이 참 모형에서는 등 기대 고장 개수 조건을 충족하지 않으므로, 이들 값을 과대 추정할 경우에 통계적 효율 측면에서 더 좋아질 수 있는 현상도 발생되고 있다. 하지만 이런 현상은 본 수치예제에서는 발생하지만 다른 상황에서는 완화되거나 발생하지 않을 수도 있다.

4.3 교호작용이 포함될 경우

식 (3)의 가속모형에서 다음과 같이 교호작용이 추가될 경우에 v_0 가 어떻게 변화하는지 검토할 수 있다.

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \beta_3 s_1 s_2 \quad (17)$$

보통 교호작용은 존재할 때 유의한 주효과보다 작은 영향을 미치므로, 실제 모형이 $\beta_3 = -b \min(|\beta_1|, |\beta_2|)$ 로 표현될 때 $b = -0.25 \sim 0.25$ 로 변할 경우 식

Table 4 Effects of acceleration models with an interaction term: Multiples of v_0

b	-0.25	-0.1	0	0.1	0.25
compromise plan	14.51	12.75	11.94	11.36	10.81
modified M-H plan	10.26	8.78	8.09	7.58	7.10
EENF plan	8.95	7.32	6.49	5.84	5.12

(3)으로 구한 실용적 계획의 두 모형 하의 v_0 의 비가 <Table 4>에 정리되어 있다. 하여튼 교호작용이 포함되면 실제 v_0 가 상당히 커지며, 그 변화 정도는 등 기대 고장 개수, 변형 M-H, 절충형 순으로 덜 민감하다. 또한 β_3 의 부호가 β_1 과 β_2 의 부호가 같으면서(즉, 음) 그 절대값이 커질수록 이 비는 감소한다.

5. 결론

현재까지 수행된 가속수명시험 설계에 관한 연구들은 하나의 스트레스 변수를 대상으로 개발된 시험계획이 대부분이다. 하나의 스트레스를 가할 경우 충분한 고장 데이터를 얻기 힘들거나 외삽의 위험이 높아질 수 있으므로, 이런 위험성을 줄이기 위해 두 스트레스 변수 이상을 채택하는 복합 스트레스 ALT의 필요성이 증대되고 있다.

따라서 본 논문에서는 단일 스트레스 ALT에 널리 활용되는 절충형 등의 3수준 시험계획의 설계 개념을 두 스트레스 복합 ALT 시험설계에 적용한, 4수준에서 시험되면서 요인실험에 속하는 직사각형 형태의 여러 실용적 시험계획을 도출하였다. 이런 시험계획을 Escobar and Meeker[3]가 개발한 최적계획과 통계적 효율성, 시험계획의 설정에 필요한 사전 입력 정보인 3수준에서의 고장확률의 오추정과 교호작용의 포함여부에 따른 민감도 분석을 수행한 결과와 실용적 특성 측면에서 비교하여 바람직한 복합 스트레스 ALT 계획을 선택할 수 있는 지침을 다음과 같이 제공할 수 있다.

첫째, 4수준에서 동일한 비율의 시험제품을 할당하는 전통적 시험계획은 추천하기 어렵다. 둘째, 변형 M-H 계획이 절충형 계획과 등 기대 고장 개수 계획에 비해 상기의 여러 측면에서 비교적 우수한 성질을 가지고 있다.

셋째, 교호작용이 포함되지 않는 모형 하에서 개발된 본 논문의 실용적 시험계획은 교호작용이 포함되는 모형일 경우에 분산 비가 상당히 높아지므로, 후자의 모형 하에 4수준에서 시험되는 실용적 시험계획을 채택하는 방향이 바람직하다. 이런 시험계획은 본 논문에서 제시한 시험설계 방법론으로 쉽게 도출할 수 있다.

한편 본 논문은 통계적 효율성을 중요한 기준으로 설정하여 ALT 시험계획을 비교하였는데, 통계적 효

율성의 희생과 대비한 비용절감 분석, 입력 파라미터 외에 수명분포와 가속모형을 잘못 규정할 경우의 영향 등을 통해 제안된 실용적 시험계획의 우월성을 여러 측면에서 광범위하게 조사하여, 현업의 시험자가 적절한 시험계획을 선택할 수 있는 구체적 지침을 제공할 수 있는 후속연구가 요망된다.

References

- [1] Nelson, W. (2015). "An Updated Bibliography of Accelerated Test Plans". Proceedings of 2015 Annual Reliability and Maintainability Symposium, p. 6.
- [2] Nelson, W. (1990). "Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analysis". John Wiley & Sons, New York (USA).
- [3] Escobar, L. A. and Meeker, Q. (1995). "Planning Accelerated Life Tests with Two or More Experimental Factors". Technometrics, Vol. 37, pp. 411-427.
- [4] Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998). "Statistical Methods for Reliability Data". John Wiley & Sons, New York (USA).
- [5] Gao, L., Chen, W., Liu, J. and Pan, J. and Qian, P. (2011). "Design Criteria for Planning Multiple Stresses Accelerated Life Test". Proceedings of the 9th International Conference on Reliability Maintainability & Safety, pp. 1141-1146.
- [6] Chen, W., Gao, L., Liu, J., Qian, P. and Pan, J. (2012). "Optimal Design of Multiple Stress Accelerated Life Test Plan on the Non-Rectangle Test Region". Chinese Journal of Mechanical Engineering, Vol. 25, pp. 1231-1237.
- [7] Gao, L., Chen, W., Liu, J., Qian, P. and Pan, J. (2014). "Optimal Design of Multiple Stresses Accelerated Life Test Plan Based on Transforming the Multiple Stresses to Single Stress". Chinese Journal of Mechanical Engineering, Vol. 27, pp. 1125-1132.
- [8] Park, J. W. and Yum, B. J. (1996). "Optimal Design of Accelerated Life Testing with Two Stress". Naval Research Logistics, Vol. 43, pp. 863-884.
- [9] Guo, H. and Pan, R. (2007). "D-Optimal Reliability Test Design for Two Stress Accelerated Life Tests". Proceedings of the 2007 IEEE International Industrial Engineering and Engineering Management, pp. 1236-1240.
- [10] Yang, G. (2005). "Accelerated Life Tests at Higher Usage Rates". IEEE Transactions on Reliability, Vol. 54, pp. 53-57.
- [11] Yang, G. (2007). "Life Cycle Reliability Engineering". John Wiley & Sons, New York(USA).
- [12] Zhu, Y. and Elsayed, E. A. (2013). "Design of Accelerated Life Testing Plans under Multiple Stresses". Naval Research Logistics, Vol. 13, pp. 469-478.
- [13] Elsayed, E. A. and Zhang, H. (2007). "Design of PH-Based Accelerated Life Testing Plans under Multiple-Stress-Type". Reliability Engineering and System Safety, Vol. 92, pp. 286-292.
- [14] Meeker, W. Q. and Hahn, G. J. (1985). "How to Plan an Accelerated Life Test-Some Practical Guidelines". ASQC Basic References in Quality Control: Statistical Techniques, Vol. 10.
- [15] Seo, S.-K. and Yum, B. J. (1991). "Accelerated Life Test Plans under Intermittent Inspection and Type I Censoring: The Case of Weibull Failure Distribution". Naval Research Logistics, Vol. 38, pp. 1-22.
- [16] Seo, S.-K. (2014). "New Accelerated Life Test Plans for Weibull and Lognormal Lifetime Distributions". Journal of Applied Reliability, Vol. 14, pp. 182-190.
- [17] Nelson, W. and Meeker, W. Q. (1978). "Theory for Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions". Technometrics, Vol. 20, pp. 171-177.
- [18] Meeker, W. Q. (1984). "A Comparison of Accelerated Life Test Plans for Weibull and Lognormal Distributions and Type I Censoring". Technometrics, Vol. 26, pp. 157-171.