

대화식 절차를 활용한 공정능력지수 기반 다중반응표면 최적화

정인준[†]

대구대학교 경영학과

An Interactive Process Capability-Based Approach to Multi-Response Surface Optimization

In-Jun Jeong[†]

Department of Business Administration, Daegu University

ABSTRACT

Purpose: To develop an interactive version of the conventional process capability-based approach, called 'Interactive Process Capability-Based Approach (IPCA)' in multi-response surface optimization to obtain a satisfactory compromise which incorporates a decision maker(DM)'s preference information precisely.

Methods: The proposed IPCA consists of 4 steps. Step 1 is to obtain the estimated process capability indices and initialize the parameters. Step 2 is to maximize the overall process capability index. Step 3 is to evaluate the optimization results. If all the responses are satisfactory, the procedure stops with the most preferred compromise solution. Otherwise, it moves to Step 4. Step 4 is to adjust the preference parameters. The adjustment can be made in two modes: relaxation and tightening. The relaxation is to make the importance of one of the satisfactory responses lower, which is implemented by decreasing its weight. The tightening is to make the importance of one of the unsatisfactory responses higher, which is implemented by increasing its weight. Then, the procedure goes back to Step 2. If there is no response to be adjusted, it stops with the unsatisfactory compromise solution.

Results: The proposed IPCA was illustrated through a multi-response surface problem, colloidal gas aphrons problem. The illustration shows that it can generate a satisfactory compromise through an interactive procedure which enables the DM to provide his or her preference information conveniently.

Conclusion: The proposed IPCA has two major advantages. One is to obtain a satisfactory compromise which is faithful to the DM preference structure. The other is to make the DM's participation in the interactive procedure easier by using the process capability index in judging satisfaction/unsatisfaction. The process capability index is very familiar with quality practitioners as well as indicates the process performance levels numerically.

Key Words: Multi-Response Surface Optimization, Process Capability Indices, Interactive Approach

● Received 13 March 2017, 1st revised 30 May 2017, accepted 7 June 2017

† Corresponding Author(ijjeong@daegu.ac.kr)

© 2017, The Korean Society for Quality Management

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-Commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

* This research was supported by the Daegu University Research Grant, 2014.

1. 서 론

일반적으로 제품 또는 공정과 관련된 품질 설계 시 수많은 품질특성치 또는 반응변수(Responses)를 함께 고려해야 하는 경우가 흔히 존재한다. 이와 같이 다수의 반응변수를 동시에 고려해야 하는 품질설계 문제를 다중반응표면(Multi-Response Surface) 문제라고 한다(Khuri 1996). 다중반응표면 문제 해결의 궁극적인 목적은 이들 반응변수를 동시에 최적화하는 설계변수 또는 입력변수(Input Variables)의 조건을 찾는 것이다.

다중반응표면 문제는 실험을 통한 데이터 수집, 수집된 데이터를 활용한 (다수의) 반응함수 추정, 추정된 반응함수의 동시 최적화 등의 세 가지 단계를 통하여 해결된다. 본 논문은 마지막 최적화 단계에 초점을 맞추고 있다. 만약 k 개의 반응변수, 즉 y_1, \dots, y_k 를 고려해야 하는 문제가 주어져 있다면, 다중반응표면 최적화 문제는 식 (1)과 같이 표현된다. 식 (1)에서 $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ 는 i 번째 반응함수의 추정식($i=1, \dots, k$), \mathbf{x} 는 입력변수 벡터, Ω 는 입력변수의 가능한 값의 범위를 나타낸다. 반응함수의 추정식은 대개 이차다항식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \text{Optimize } [\hat{y}_1(\mathbf{x}), \hat{y}_2(\mathbf{x}), \dots, \hat{y}_k(\mathbf{x})] \\ & \text{s.t. } \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

지금까지 다중반응표면 최적화(Multi-Response Surface Optimization, MRSO)를 위하여 수많은 방법들이 제안되었는데(Myers et al. 1989, Myers 1999, Myers et al. 2004, Ardakani and Wulff 2013), 이들은 크게 우선순위 기반법(Priority-based Approach), 호감도함수법(Desirability Function Approach), 손실함수법(Loss Function Approach), 확률기반법(Probability-based Approach), 공정능력기반법(Process Capability-based Approach) 등으로 분류된다(Jeong 2011).

이 중에서 공정능력기반법은 먼저 반응변수별로 평균과 표준편차 반응함수 추정식을 도출하여 각각의 반응변수에 대한 개별 공정능력지수 함수를 만든다. 다음으로 개별 공정능력지수를 종합한 전체 공정능력지수 함수를 도출한다. 최종적으로는 전체 공정능력지수 함수를 최대화하는 입력변수의 최적조건을 찾는다. 공정능력기반법은 공정능력지수라는 프레임워크를 통해 반응변수의 산포를 체계적으로 고려하면서도, 반응변수 간의 트레이드오프에 대한 의사결정자의 선호도 정보를 체계적으로 고려할 수 있다. 또한 공정능력기반법의 핵심 요소인 공정능력지수는 기업의 품질활동에 널리 활용되고 있어서(Cho and Lim, 2002), 현장 실무자가 쉽게 수용할 수 있다는 장점이 있다.

공정능력기반법은 개별 공정능력지수를 종합하는 과정에서 반응변수 간의 상대적 중요도를 나타내는 가중치를 부여한다. 가중치는 반응변수 간 트레이드오프에 대한 의사결정자의 선호도에 의해 그 값이 정해진다. 지금까지 공정능력기반법과 관련하여 수행된 연구는 이러한 가중치가 사전에 정확하게 주어져 있는 것을 가정하고 있다. 그러나 의사결정자가 최적화 과정 전에 반응변수 간의 상호관계를 이해하고, 이들 간의 트레이드오프에 대한 선호도 정보를 정확히 제시하는 것은 매우 어렵다(Hwang et al. 1979, Steuer 1986). 본 논문에서는 의사결정자가 반응변수 간의 트레이드오프를 파악해 가면서 자신의 선호도 정보를 제시하는 대화식 절차(Interactive Approach)를 제안하고자 한다. 대화식 절차는 선호도 정보 수정 과정이 있기 때문에 의사결정자가 자신의 선호도 정보를 정확히 제시할 수 있어 만족스러운 절충해를 도출할 수 있다(Steuer 1986). 제안된 방법은 공정능력기반법을 토대로 만들어진 대화식 절차이므로, 본 논문에서는 ‘대화식 공정능력기반법(Interactive Process Capability-based Approach, IPCA)’으로 명명하고 줄여서 IPCA로 표시한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 주요 공정능력지수, 다중반응표면 최적화 관련 기존 연구, 공정능력기반법 관련 기존 연구를 고찰한다. 3장에서는 대화식 공정능력기반법(IPCA)을 제안한다. 4장에서는 제안된 방법을 활용하여 예제를 풀어본다. 5장에서는 IPCA와 기존 공정능력기반법 간의 비교, 대안 모형의 도입가능성 검토, 긴축·완화량 설정에 대한 가이드라인 등의 주제에 관하여 토의한다. 마지막으로, 제안된 방법의 요약 및 장점을 5장 결론에서 제시한다.

2. 기존 연구 고찰

2.1 주요 공정능력지수

공정능력지수는 품질특성치가 규격에 맞도록 생산할 수 있는 공정의 능력 또는 역량을 정량적으로 측정하는 지수로, 품질특성치가 규격을 얼마나 충족시킬 수 있는지에 따라 지수 값이 증감한다. 현재까지 다양한 공정능력지수가 개발되어 왔으나, 본 논문에서는 실제 현장에서 널리 활용되고 있는 대표적인 3가지, 즉 C_p , C_{pk} , C_{pm} 을 살펴보고자 한다(Juran 1974, Sullivan 1984, Sullivan 1985, Kane 1986, Hsiang and Taguchi 1985, Chan et al. 1988).

먼저 C_p 는 최초로 제안된, 가장 기본적인 형태의 공정능력지수로, 규격공차($USL - LSL$)를 품질특성치의 표준편차(σ)에 6을 곱한 값으로 나눈 식으로 정의된다(식 (2)). 식 (2)에서 LSL 과 USL 은 각각 규격하한(Lower Specification Limit)과 규격상한(Upper Specification Limit)을 의미한다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}. \quad (2)$$

식 (2)에서 LSL 과 USL 은 이미 주어져(즉, 고정되어) 있는 값이므로 C_p 는 σ 에 의해 결정된다. σ 가 감소(또는 증가)하면 C_p 는 증가(또는 감소)한다. C_p 가 크다는 것은 σ 가 작아서 품질특성치가 규격공차 내에 들어갈 비율이 높다는 것을 의미한다.

C_p 는 품질특성치의 평균(μ)이 USL 과 LSL 사이의 중심에 있다는 것을 가정하고 있는데, 만약 μ 가 한 쪽으로 치우쳐져 있는 경우에는 공정의 능력을 올바르게 측정할 수 없다. C_{pk} 는 μ 가 이 규격공차의 중심에 위치하지 않는 경우에도 공정의 능력을 올바르게 측정할 수 있는 지수이다. 식 (3)은 C_{pk} 의 정의를 보여주고 있다. C_{pk} 는 USL 과 LSL 중 평균과의 거리가 더 가까운 것을 취하여 그 거리를 3σ 로 나누는 방식으로 계산된다. 이는 공정능력 측정 시에 보수적인 전략을 취하는 것으로 볼 수 있다. 참고로 동일한 μ , σ 조건에서 C_{pk} 는 C_p 보다 항상 작거나 같다.

$$C_{pk} = \frac{\min[USL - \mu, \mu - LSL]}{3\sigma}. \quad (3)$$

한편, C_p 는 품질특성치가 평균으로부터 떨어져 있는 정도, 즉 σ 가 공정능력에 절대적인 영향을 미친다는 것을 전제하고 있다. 그러나 품질특성치에는 대부분 목표치가 있으며, 이 경우에는 품질특성치가 목표치(T)로부터 떨어져 있는 정도, 즉 평균제곱오차(Mean Squared Error, MSE)를 σ 대신 사용하는 것이 타당하다. C_{pm} 은 식 (4)와 같이 정의된다. 참고로, MSE는 분산에 대응되는 통계량이므로 정확히는 σ 대신 \sqrt{MSE} 를 사용해야 한다.

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{MSE}} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{(\mu - T)^2 + \sigma^2}}. \quad (4)$$

공정능력지수 값에 따른 불량률은 μ 가 USL 과 LSL 사이의 중심에 있고 정규분포를 따른다는 가정 하에 공정능력지수 값이 1.33일 때 불량률은 63ppm(100만개 중 63개가 불량), 1.00일 때 2,700ppm, 0.67일 때 45,400ppm으로 계산된다. 이와 같은 공정능력지수 값과 불량률 간의 상관관계에 따라, 일반적으로 품질경영 분야에서는 공정능력지수 값이 1.33이상일 때 공정능력이 충분하고, 1에서 1.33 사이일 때 공정능력은 있다고 판정한다. 그러나 0.67에서 1사이일 때에는 공정능력이 부족하고, 0.67미만일 때에는 공정능력이 없다고 판정한다(Park 2014).

2.2 다중반응표면 최적화 관련 기존 연구

다중반응표면 최적화와 관련된 기존의 연구는 서론에서 언급한 바와 같이 우선순위기반법, 호감도함수법, 손실함수법, 확률기반법, 공정능력기반법 등의 5가지로 분류할 수 있다. 본 절에서는 각 접근법의 개념과 장단점을 간단히 살펴본 후, 본 논문이 다중반응표면 최적화 연구의 큰 그림 관점에서 어느 위치에 해당하는지를 설명하고자 한다.

먼저 우선순위법은 다수의 반응변수 중 가장 중요한 하나를 목적식으로 두고, 그 외의 다른 반응변수는 제약식으로 두고 최적화하는 방법이다(Myers and Carter 1973, Biles 1975, Del Castillo 1996). 이 접근법은 최적화 분야에서 전형적인 모형화 스타일, 즉 목적식과 제약식을 구분하여 모형을 구성하는 것이 특징이다. 그러나 이러한 스타일로 인하여 다수의 반응변수 간의 트레이드오프를 체계적으로 고려하지 못하는 근본적인 한계를 지니고 있다. 이러한 한계점으로 인하여 우선순위법을 적용한 다중반응표면 최적화 연구는 최근에는 거의 이루어지지 않고 있다.

호감도함수법은 반응함수의 값을 0에서 1사이의 값을 가지는 호감도로 변환한다. 그 다음 반응변수별 개별 호감도를 종합한 전체 호감도를 구한다. 궁극적으로 이 접근법은 전체 호감도를 최적화하는 입력변수의 조건을 찾는 것을 목표로 한다(Harrington 1965, Derringer and Suich 1980, Del Castillo et al. 1996). 전체 호감도를 구하는 방법으로는 기하평균, 가중기하평균, Maximin 방법 등이 제안되었다(Derringer and Shich 1980, Derringer 1994, Kim and Lin 2000). 호감도함수법의 가장 중요한 장점은 반응변수 간의 트레이드오프를 체계적으로 고려할 수 있고, 의사결정자의 선호도 정보를 효과적으로 반영할 수 있다는 점이다. 그러나 반응변수의 산포를 체계적인 프레임워크(가령, 손실함수, 공정능력지수, 확률분포함수 등) 내에서 다루지 않는다는 한계점이 있다.

손실함수법은 반응변수와 이들의 목표수준 사이의 거리를 손실함수로 나타낸 다음, 손실함수의 기대치를 최소화하는 입력변수의 조건을 찾는다(Pignatiello 1993, Ames et al. 1997, Vining 1998, Ko et al. 2005). 이 접근법은 손실함수의 여러 형태 중 2차 함수의 형태로 표현되는 제곱오차 손실함수를 활용한다(Khuri and Conlon 1981, Pignatiello 1993, Tsui 1999, Vining 1998, Ko et al. 2005). 다구치의 강건설계 개념에 기원을 두고 있는 손실함수법은 반응변수의 산포를 체계적으로 고려한다는 장점이 있으나, 반응변수 간의 트레이드오프에 대한 의사결정자의 선호도 정보를 중요하게 다루지 않는다.

확률기반법은 다변량 반응변수의 다변량 확률분포를 가정한다. 이 접근법은 우선 분포함수의 매개변수(가령, 평균, 분산, 공분산 등)를 입력변수의 함수 형태로 모형화한다. 그 다음 반응변수들이 규격을 만족시킬 확률을 최대화하는 입력변수의 조건을 찾는다(Chiao and Hamada 2001, Peterson 2004, Miró-Quesada et al. 2004). 확률기반법은 확률분포함수를 기반으로 반응변수의 산포를 체계적으로 고려한다는 장점이 있다. 그러나 이로 인하여 엄격한 통계적 가정이 필요하고, 의사결정자의 선호도 정보를 전혀 고려하지 않는다는 점은 단점이다.

공정능력기반법은 반응변수의 평균과 표준편차 추정식을 이용하여 공정능력지수를 유도한다. 다음 개별 공정능력지수를 종합하여 전체 공정능력지수를 구한다. 최종적으로는 전체 공정능력지수를 최대화하는 입력변수의 조건을 찾는다(Barton and Tsui 1991, Plante 1999, Plante 2001, Ch'ng et al. 2005). 공정능력기반법은 공정능력지수라는 프레임워크를 통해 반응변수의 산포를 체계적으로 고려하면서도, 트레이드오프에 대한 의사결정자의 선호도 정보를 체계적으로 고려할 수 있다. 또한 공정능력지수가 기업의 품질활동에 널리 활용되고 있어서, 현장 실무자에게 친숙하고 쉽게 수용될 가능성이 높다는 점도 큰 장점이다. 본 논문은 이상의 5가지 다중반응표면 최적화를 위한 접근법 중 공정능력기반법에 초점을 맞추고 있다(Figure 1).

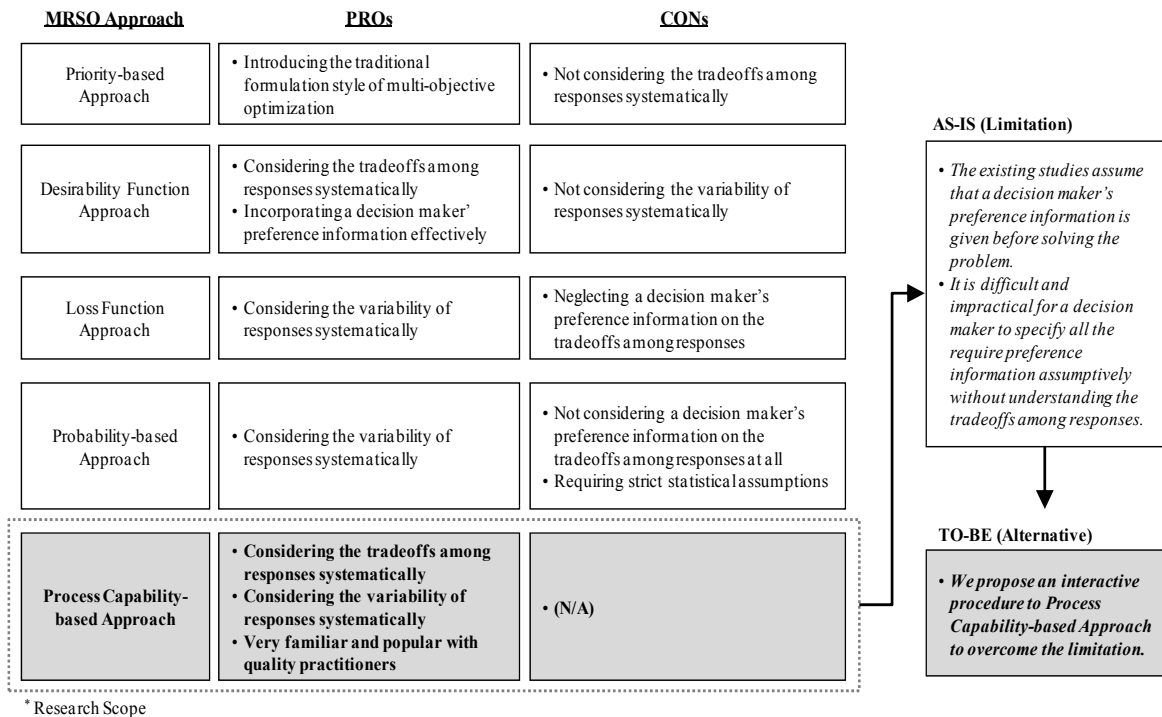


Figure 1. A Big Picture of MRSO Approaches and the Research Scope and Goal

2.3 공정능력기반법 관련 기존 연구

본 절에서는 공정능력기반법과 관련된 기존의 연구를 살펴보고, 본 논문이 기존 연구의 어떠한 한계점을 보완하고자 하는지를 설명하고자 한다. 공정능력기반법 관련 기존 연구로는 Barton and Tsui (1991), Plante (1999), Plante (2001), Ch'ng et al. (2005) 등이 있는데, 이들 모두 Cpk 또는 Cpm 을 사용한 모형을 식 (5)-(6)과 같이 제안하였다. 식 (5)-(6)에서 $\hat{\mu}_i(\mathbf{x})$, $\hat{\sigma}_i(\mathbf{x})$ 는 각각 i 번째 반응변수의 평균 및 표준편차 반응함수 추정치를 의미한다. 그리고 식 (6)에서 T_i 는 i 번째 반응변수의 목표치를 의미한다.

$$\widehat{Cpk}_i(\mathbf{x}) = \frac{\min\{USL_i - \hat{\mu}_i(\mathbf{x}), \hat{\mu}_i(\mathbf{x}) - LSL_i\}}{3\hat{\sigma}_i(\mathbf{x})} \tag{5}$$

$$\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x}) = \frac{USL_i - LSL_i}{6\sqrt{(\widehat{\mu}_i(\mathbf{x}) - T_i)^2 + (\widehat{\sigma}_i(\mathbf{x}))^2}}. \quad (6)$$

Plante (2001)는 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 의 가중기하평균을 최대화하는 것을 제안하였다(식 (7)). Ch'ng et al. (2005)은 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 의 가중합을 최대화할 것을 제안하였다(식 (8)). 식 (7)-(8)에서 $w_i (\geq 0)$ 는 각 반응변수(공정능력지수) 간의 상대적 중요도를 나타내는 가중치를 의미한다. 여기서 w_i 는 반응변수 간 트레이드오프에 대한 의사결정자의 선호도에 의해 그 값이 정해진다. 가령, 의사결정자가 반응변수(혹은 공정능력지수) j 를 중요하게 생각한다면 이에 해당되는 w_j 에 상대적으로 높은 값을 부여하게 된다.

$$\widehat{Cpm}(\mathbf{x}) = \left(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x})^{w_1} \cdot \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x})^{w_2} \cdot \dots \cdot \widehat{Cpm}_k(\mathbf{x})^{w_k} \right)^{\frac{1}{\sum w_i}}. \quad (7)$$

$$\widehat{Cpm}(\mathbf{x}) = w_1 \widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}) + \dots + w_k \widehat{Cpm}_k(\mathbf{x}). \quad (8)$$

지금까지 공정능력기반법 관련하여 수행된 연구는 w_i 가 사전에 정확하게 주어져 있는 것을 가정하고 있다. 그러나 의사결정자가 최적화 과정 전에 반응변수 간의 상호관계를 이해하고, 이들 간의 트레이드오프에 대한 선호도 정보를 정확히 제시하는 것은 매우 어렵다(Hwang et al. 1979, Steuer 1986). 본 논문에서는 의사결정자가 최적화 문제를 푸는 동안 자신의 선호도 정보를 단계적으로 제시하는 방법을 제안하고자 한다(Figure 1). 즉, 최초로 제시한 선호도 정보를 가지고 단 한번만 문제를 푸는 것이 아니라, 풀이 결과를 살펴보고 자신의 선호도 정보를 수정할 수 있다. 선호도 정보 수정은 만족스러운 해가 도출될 때까지 여러 라운드에 걸쳐 반복될 수 있다. 이 방법은 의사결정자가 선호도 정보를 더 이상 수정하지 않을 때까지 수차례 문제를 풀게 된다. 이와 같은 대화식 절차(Interactive Approach)는 의사결정자의 선호도 정보를 정확히 제시할 수 있어 만족스러운 절충해를 도출할 수 있다(Steuer 1986).

3. 제안된 방법: 대화식 공정능력기반법(IPCA)

3.1 개요

본 논문에서는 공정능력기반법에서 의사결정자의 선호도 정보를 정확하고 효과적으로 반영하기 위하여 대화식 절차를 제안하고자 한다. 앞서 언급한 바와 같이 제안된 방법을 ‘대화식 공정능력기반법(Interactive Process Capability-based Approach)’으로 명명하고 줄여서 IPCA로 표시한다.

IPCA에서는 개별 반응변수를 공정능력지수로 변환하는 과정이 필요한데, 이 때 식 (5)-(6)에서 정의된 공정능력지수를 모두 적용할 수 있다. 본 논문에서는 식 (6)의 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 를 채택한다. IPCA는 4개 단계로 구성되며(Figure 2), 각각의 단계는 다음 절에 자세히 설명되어 있다.

3.2 제안된 절차

3.2.1 공정능력지수 도출 및 매개변수 초기화 (1단계)

반응별수별로 평균 및 표준편차 반응함수 추정치 $\hat{\mu}_i(\mathbf{x})$, $\hat{\sigma}_i(\mathbf{x})$ ($i=1, \dots, k$)를 식 (9)-(10)과 같이 도출한다. 식 (9)-(10)은 반응변수 i 와 l 개의 입력변수(x_1, \dots, x_l) 간 평균 및 표준편차 반응함수 추정식을 보여주고 있다. 식 (9)-(10)에서 $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ii}$, $\hat{\beta}_{ij}$ 와 $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\gamma}_i$, $\hat{\gamma}_{ii}$, $\hat{\gamma}_{ij}$ 는 회귀계수 추정치를 나타낸다. 표준편차 반응함수는 실험 단계에서 실험조건별 반복을 통해 복수의 데이터 수집하고 이를 통해 표준편차를 계산해야 추정이 가능하다. 이와 관련하여 4장의 예제와 Table 2를 살펴보면, 표준편차 반응함수의 추정 과정을 이해하는데 도움이 된다.

$$\hat{\mu}_i(\mathbf{x}) = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^l \hat{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^l \hat{\beta}_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^l \hat{\beta}_{ij} x_i x_j \quad (9)$$

$$\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}) = \hat{\gamma}_0 + \sum_{i=1}^l \hat{\gamma}_i x_i + \sum_{i=1}^l \hat{\gamma}_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^l \hat{\gamma}_{ij} x_i x_j \quad (10)$$

그 다음 $\hat{\mu}_i(\mathbf{x})$, $\hat{\sigma}_i(\mathbf{x})$ 를 가지고 반응함수별로 식 (6)의 공정능력지수 추정치 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 를 도출한다. 선호도 매개변수(Preference Parameter), 즉 공정능력지수 간의 가중치(w_i)를 초기화한다. 여기서 각각의 가중치는 0 이상이 되어야 한다. 또한 라운드를 반복적으로 진행하는데 필요한 라운드 진행횟수(Iteration Counter, n)를 초기화한다($n=0$).

3.2.2 최적화 모형 풀기 (2단계)

먼저 라운드 진행횟수를 1만큼 증가시킨다($n=n+1$). 1단계에서 도출한 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 와 1단계에서 초기화되거나(첫 번째 라운드($n=1$))에만 해당 4단계에서 조정된(두 번째 라운드 이후($n \geq 2$))부터 해당 w_i 를 가지고 공정능력지수의 가중합 $\widehat{Cpm}(\mathbf{x})$ 을 구성한다(식 (8)). 본 논문에서는 개별 공정능력지수로부터 전체 공정능력지수를 도출할 때 가중합을 적용하였는데, 가중합 대신 식 (7)과 같이 가중기하평균으로 전체 공정능력지수를 도출하여도 무방하다. 참고로 가중기하평균을 적용하면 개별 공정능력지수 값들이 비슷해지는 결과가 도출된다. 그 다음, 이를 최대화하는 최적화 모형을 푼다(식 (11)).

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \widehat{Cpm}(\mathbf{x}) \\ & \text{s.t. } w_i \geq 0, \text{ for all } i, \\ & \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

3.2.3 최적화 결과 평가 (3단계)

3단계는 2단계로부터 도출된 최적해를 Cpm 값을 활용하여 평가한다. 만약 모든 반응변수가 만족스럽다면 현재의 최적해가 가장 선호되는 절충해(Most Preferred Compromise Solution, MPCS)가 되고 IPCA는 종료된다. 그렇지 않으면 4단계로 이동한다.

3.2.4 선호도 매개변수 조정 (4단계)

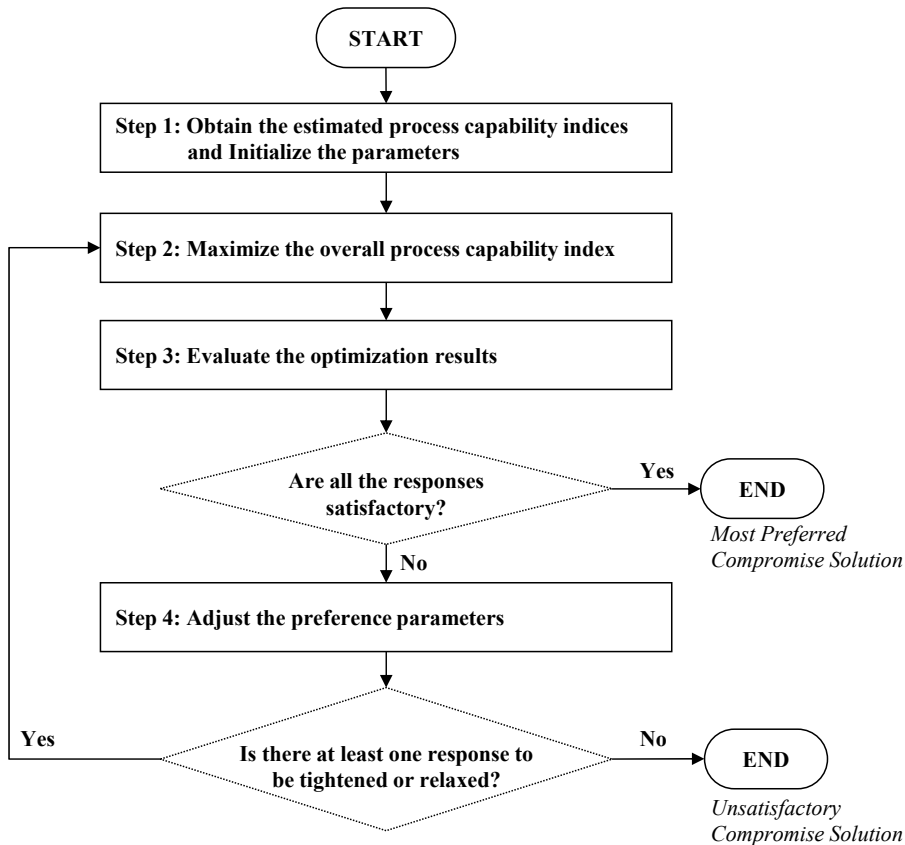


Figure 2. The Procedure of IPCA

4단계에서는 만족스럽지 않은 반응변수를 향상시키기 위하여 선호도 매개변수인 w_i 를 조정한다. 가중치 w_i 의 조정 방식은 만족스러운 반응변수의 w_i 를 낮추는 ‘완화(Relaxation)’와 만족스럽지 않은 반응변수의 w_i 를 높이는 ‘긴축(Tightening)’의 2가지가 있다.

완화는 만족스러운 반응변수 값을 희생하는 반면 (불특정한) 다른 반응변수의 값이 향상되는 효과가 있고, 긴축은 만족스럽지 않은 반응변수의 값이 직접 향상되는 반면 (불특정한) 다른 반응변수의 값이 희생되는 효과가 있다. 완화는 소수(가령, 한 개)의 반응변수가 충분히 만족스러우나 그 외의 반응변수들이 만족스럽지 않은 경우, 전자를 어느 정도 희생시켜 다른 반응변수들을 전반적으로 향상시켜야 할 경우에 채택되는 것이 바람직하다. 긴축은 소수(가령, 한 개)의 반응변수가 매우 불만족스러우나 그 외의 반응변수들이 만족스러운 경우, 다른 반응변수들을 전반적으로 희생시킴으로써 전자를 직접 향상시켜야 할 경우에 채택되는 것이 바람직하다.

완화 및 긴축은 2개 이상의 반응변수를 대상으로 동시에 진행될 수도 있으나, 이 경우 반응변수의 변화가 기대하는 방향과 상이하게 진행될 수 있으므로 본 논문에서는 한 라운드에서 1개의 반응변수에 대하여 완화 또는 긴축을 적용하도록 한다. 만약 4단계에서 긴축 또는 완화하고자 하는 반응변수가 존재하지 않는다면, 3단계에서 도출된 해, 즉 불만족스러운 절충해(Unsatisfactory Compromise Solution, UCS)를 가지고 IPCA는 종료된다.

4. 콜로이드성 가스 아프론 문제를 통한 예증

본 장에서는 ‘콜로이드성 가스 아프론(Colloidal Gas Aphrons, CGA)’ 문제(Jauregi et al. 1997, Kim and Lin 2006)를 통하여 제안된 방법인 IPCA를 예증하고자 한다.

4.1 문제 설명

이 문제는 콜로이드성 - 지름이 1nm ~ 1000nm 정도의 미립자가 기체 또는 액체 중에 분산된 상태 - 가스 아프론의 품질을 개선하기 위하여 이에 영향을 주는 화학물질 성분량의 최적 수준을 찾는 것이 목표이다. 이 문제는 반응 변수 3개, 입력변수 3개로 구성되어 있다. 각각의 변수에 대한 설명과 반응변수의 LSL , T , USL 은 Table 1에 주어져 있다. 참고로, 본 논문에서는 IPCA의 예증 과정을 보다 명확히 보여주기 위하여 반응변수의 일부 조건을 윤색하여 사용하였다. 즉, 당초 망대특성과 망소특성을 띄는 반응변수인 y_1 과 y_2 를 본 논문에서는 모두 망목특성(목표치는 각각 5.00과 0.35로 설정)으로 변경하였다.

이들 변수들에 대하여 8개의 요인점(Factorial Point), 6개의 축점(Axial Point), 1개의 중심점(Center Point)으로 이루어진 중심복합설계(Central Composite Design)의 실험계획이 수립되었다. 중심점에서는 6회의 반복, 그 외 요인점과 축점에서는 2회의 반복 등 총 34회의 실험이 실시되었다. 상세한 실험 데이터는 Table 2에 주어져 있다.

실험 데이터로부터 세 반응변수의 평균 반응함수 추정치와 표준편차 반응함수 추정치가 식 (12)-(17)과 같이 주어졌다. 각각의 반응함수 추정치에 대한 자세한 정보는 Jauregi et al. (1997)과 Kim and Lin (2006)을 참고하면 된다.

Table 1. The Dependent and Independent Variables of the Illustrative Example

Variable Type	Code	Descriptions	Measurement Unit	LSL	T	USL
Dependent Variable	y_1	Stability	log(Seconds)	3.00	5.00	7.00
	y_2	Volumetric Ratio	Ratio	0.10	0.35	0.60
	y_3	Temperature	℃	15	30	45
Independent Variable	x_1	Concentration of Surfactant	(Coded Values: -1, 0, 1)	-	-	-
	x_2	Concentration of Salt		-	-	-
	x_3	Time of Stirring		-	-	-

$$\hat{\mu}_1(\mathbf{x}) = 4.95 + 0.82x_1 - 0.45x_2 - 0.15x_1^2 + 0.28x_2^2 - 0.11x_1x_2 + 0.07x_1x_3, \quad (12)$$

$$\hat{\mu}_2(\mathbf{x}) = 0.46 + 0.13x_1 - 0.06x_2 + 0.05x_3 - 0.07x_1^2 - 0.04x_3^2, \quad (13)$$

$$\hat{\mu}_3(\mathbf{x}) = 28.36 - 1.48x_1 + 2.33x_3 - 0.15x_1^2 - 1.42x_2^2 - 0.71x_1x_3, \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}) = 0.06 + 0.11x_2 + 0.06x_3 + 0.12x_1^2 + 0.11x_3^2 - 0.10x_1x_3 + 0.05x_2x_3, \quad (15)$$

$$\hat{\sigma}_2(\mathbf{x}) = 0.02 - 0.01x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 + 0.02x_3^2 - 0.01x_1x_3 + 0.02x_2x_3, \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}_3(\mathbf{x}) = 6.08 - 1.53x_1 + 0.50x_2 + 4.85x_3 + 2.26x_2^2 - 0.65x_1x_3 - 0.67x_1x_2x_3. \quad (17)$$

Table 2. The CGA Study Data

u	x_1	x_2	x_3	Replication	y_{u1}	y_{u2}	y_{u3}	\bar{y}_{u1}	\bar{y}_{u2}	\bar{y}_{u3}	s_{u1}	s_{u2}	s_{u3}
1	-1	-1	-1	1	4.50	0.17	29.0	4.50	0.22	26.00	0.00	0.06	4.24
	-1	-1	-1	2	4.50	0.26	23.0						
2	1	-1	-1	1	6.04	0.50	23.0	6.22	0.52	24.20	0.25	0.02	1.70
	1	-1	-1	2	6.39	0.53	25.4						
3	-1	1	-1	1	3.81	0.17	22.0	3.95	0.19	24.50	0.20	0.02	3.54
	-1	1	-1	2	4.09	0.20	27.0						
4	1	1	-1	1	5.67	0.44	25.5	5.43	0.42	23.25	0.34	0.03	3.18
	1	1	-1	2	5.19	0.40	21.0						
5	-1	-1	1	1	4.67	0.32	20.0	4.45	0.32	30.50	0.32	0.00	14.85
	-1	-1	1	2	4.22	0.32	41.0						
6	1	-1	1	1	6.73	0.57	35.5	6.65	0.57	26.75	0.11	0.00	12.37
	1	-1	1	2	6.57	0.57	18.0						
7	-1	1	1	1	3.40	0.12	43.0	3.86	0.20	31.50	0.65	0.11	16.26
	-1	1	1	2	4.32	0.28	20.0						
8	1	1	1	1	5.72	0.46	19.0	5.41	0.48	26.50	0.45	0.03	10.61
	1	1	1	2	5.09	0.50	34.0						
9	-1	0	0	1	4.09	0.27	36.0	4.24	0.25	30.00	0.21	0.03	8.49
	-1	0	0	2	4.38	0.23	24.0						
10	1	0	0	1	5.52	0.52	30.0	5.46	0.52	27.00	0.09	0.01	4.24
	1	0	0	2	5.39	0.51	24.0						
11	0	-1	0	1	5.92	0.61	32.0	5.93	0.60	27.70	0.01	0.01	6.08
	0	-1	0	2	5.93	0.59	23.4						
12	0	1	0	1	4.74	0.36	36.0	4.62	0.33	28.50	0.17	0.04	10.61
	0	1	0	2	4.50	0.30	21.0						
13	0	0	-1	1	5.01	0.36	27.0	4.86	0.31	25.50	0.22	0.08	2.12
	0	0	-1	2	4.70	0.25	24.0						
14	0	0	1	1	4.94	0.53	38.0	4.98	0.52	31.50	0.05	0.01	9.19
	0	0	1	2	5.01	0.51	25.0						
15	0	0	0	1	4.85	0.47	34.0	4.94	0.47	28.17	0.06	0.01	6.37
	0	0	0	2	4.94	0.46	34.0						
	0	0	0	3	4.98	0.49	33.0						
	0	0	0	4	4.89	0.48	24.0						
	0	0	0	5	4.94	0.46	19.0						
	0	0	0	6	5.01	0.47	25.0						

y_{uj} is the response data of y_j at the u th design point, $j = 1, 2, 3$; $u = 1, \dots, 15$.

$\bar{y}_{uj}(s_{uj})$ denotes the sample mean (sample standard deviation) of y_{uj} .

IPCA의 3단계에서는 최적화 결과에 대한 평가, 즉 반응변수별 만족 여부를 판정하여야 한다. 본 논문에서는 세 반응변수 모두 Cpm 값이 1이상일 때 만족하고 그렇지 않은 경우에는 불만족한 것으로 가정한다.

4.2 IPCA를 이용한 문제 풀이

4.1.1 라운드 시작 전 (1단계)

식 (12)-(17)에 주어진 $\hat{\mu}_i(\mathbf{x})$, $\hat{\sigma}_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, 2, 3$)를 가지고 반응함수별로 식 (18)-(20)의 공정능력지수 추정치 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 가 도출되었다.

$$\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}) = \frac{7-3}{6\sqrt{(\hat{\mu}_1(\mathbf{x})-5)^2 + (\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}))^2}}, \quad (18)$$

$$\widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}) = \frac{0.60-0.10}{6\sqrt{(\hat{\mu}_2(\mathbf{x})-0.35)^2 + (\hat{\sigma}_2(\mathbf{x}))^2}}, \quad (19)$$

$$\widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}) = \frac{45-15}{6\sqrt{(\hat{\mu}_3(\mathbf{x})-30)^2 + (\hat{\sigma}_3(\mathbf{x}))^2}}. \quad (20)$$

본격적인 문제 풀이에 앞서 세 공정능력지수 간의 가중치를 $w_1=w_2=w_3=1$ 로 초기화한다. 라운드 진행횟수는 $n=0$ 으로 초기화한다.

4.2.2. 1라운드 (2~4단계)

먼저 라운드 시작 전 1단계에서 초기화된 $w_1=w_2=w_3=1$ 과 식 (18)-(20)의 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 를 가지고 $\widehat{Cpm}(\mathbf{x})$ 구성한 후(식 (21)), 식 (11)의 최적화 모형을 구성하고 푼다(2단계).

$$\widehat{Cpm}(\mathbf{x}) = w_1\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}) + w_2\widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}) + w_3\widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}). \quad (21)$$

최적화 결과, $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(-0.714, -1.032, -0.611)$, $\hat{\mu}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_3(\mathbf{x}^*))=(5.00, 0.35, 26.09)$, $\hat{\sigma}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_3(\mathbf{x}^*))=(0.00, 0.04, 6.12)$, $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*)=(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*))=(512000.00, 2.15, 0.69)$ 로 도출되었다. 참고로, $\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*)$ 의 값이 매우 크게 나온 이유는 $\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*)$ 은 y_1 의 목표값인 5.00로 도출되었고 $\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*)$ 또한 0.00으로 도출되어서 식 (18)의 $\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x})$ 의 분모항이 거의 0으로 주어졌기 때문이다. 앞서 제시된 만족도 판정 기준($Cpm \geq 1$ 인 경우 만족)에 따라 y_1 과 y_2 는 만족스러우나, y_3 는 만족스럽지 않은 것으로 나타났다(3단계).

만족스럽지 않은 반응변수 y_3 를 향상시키기 위해서는 3.2.4절에서 설명한 바와 같이, 만족스러운 y_1 과 y_2 중 하나를 완화시키거나 y_3 를 긴축시키는 대안 중 하나를 선택해야 한다. 본 문제 풀이에서는 만족도 수준이 가장 높은 y_1 을 완화시키기로, 즉 w_1 을 낮추기로 하였다. 가중치 w_1 에 대하여 여러 번의 사전영향도 분석을 실시한 후 w_1 의 값을 당초 1에서 0.01로 대폭 낮추었다.

4.2.3. 2라운드 (2~4단계)

1라운드 4단계에서 조정된 $w_1=0.01$, $w_2=w_3=1$ 과 식 (18)-(21)의 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 를 가지고 $\widehat{Cpm}(\mathbf{x})$ 을 식 (21)과 같이 구성한 후, 식 (11)의 최적화 모형을 구성하고 풀다(2단계).

최적화 결과, $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(-1.080, -1.633, 0.822)$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_3(\mathbf{x}^*))=(5.12, 0.35, 28.54)$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_3(\mathbf{x}^*))=(0.17, 0.00, 16.54)$, $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*)=(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*))=(3.30, 46.52, 0.30)$ 으로 도출되었다. 이번 라운드에서도 y_1 과 y_2 는 만족스러우나, y_3 는 만족스럽지 않은 것으로 나타났다. 1라운드에서 만족도 수준이 매우 높았던 y_1 을 완화시켰으나(1라운드 512000.00에서 2라운드 3.30으로 감소), 불만족스러웠던 y_3 가 만족스러운 수준으로 향상되지 않고 오히려 만족스러웠던 y_2 가 대폭 향상되었다(1라운드 2.15에서 2라운드 46.52로 증가). 심지어 y_3 는 1라운드보다 더 악화되었다(1라운드 0.69에서 2라운드 0.30으로 감소)(3단계).

이번 라운드에서는 만족스럽지 않은 반응변수 y_3 를 향상시키기 위해서 y_3 를 긴축시키기로, 즉 w_3 를 낮추기로 하였다. 가중치 w_3 에 대하여 여러 번의 민감도 분석을 실시하여 w_3 의 값을 당초 1에서 15로 대폭 높였다.

4.2.4. 3라운드 (2~4단계)

2라운드 4단계에서 조정된 $w_1=0.01$, $w_2=1$, $w_3=15$ 와 식 (18)-(21)의 $\widehat{Cpm}_i(\mathbf{x})$ 를 가지고 $\widehat{Cpm}(\mathbf{x})$ 을 식 (21)과 같이 구성한 후, 식 (11)의 최적화 모형을 구성하고 풀다(2단계).

최적화 결과, $\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(-0.278, -0.034, -0.871)$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_3(\mathbf{x}^*))=(4.74, 0.35, 26.56)$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_3(\mathbf{x}^*))=(0.07, 0.04, 2.11)$, $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*)=(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*))=(2.48, 1.87, 1.24)$ 로 도출되었다. 이번 라운드에서는 y_1 , y_2 , y_3 모두 만족스러운 것으로 나타났다. 이에 현재의 최적해 \mathbf{x}^* 를 가장 선호되는 절충해(Most Preferred Compromise Solution, MPCS)로 삼고 IPCA를 종료시킨다(3단계). 지금까지 진행된 라운드별 최적화 결과는 Table 3에 요약·정리되어 있다.

참고로, y_3 의 Cpm 값, 즉 $\widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*)$ 이 다른 반응변수에 비해서 상대적으로 낮아 이를 조금 더 높일 수 있는지 확인하고자 w_3 를 15에서 30과 50으로까지 높여서 식 (11)를 풀어보았다. Table 4에서 주어진 바와 같이 큰 차이는 없는 것으로 나타났다.

Table 3. The Intermediate and Final Results of IPCA on the Illustrative Example

Iteration (n)	Step 2	Steps 3 & 4
n=1	$\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(-0.714, -1.032, -0.611)$ $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_3(\mathbf{x}^*))=(5.00, 0.35, 26.09)$ $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_3(\mathbf{x}^*))=(0.00, 0.04, 6.12)$ $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*)=(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*))$ $=(512000.00, 2.15, 0.69)$	y_1 and y_2 were satisfactory, but y_3 was unsatisfactory $w_1=1 \rightarrow 0.01$
n=2	$\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(-1.080, -1.633, 0.822)$ $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_3(\mathbf{x}^*))=(5.12, 0.35, 28.54)$ $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_3(\mathbf{x}^*))=(0.17, 0.00, 16.54)$ $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*)=(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*))$ $=(3.30, 46.52, 0.30)$	y_1 and y_2 were satisfactory, but y_3 was unsatisfactory $w_3=1 \rightarrow 15$
n=3	$\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(-0.278, -0.034, -0.871)$ $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\mu}_3(\mathbf{x}^*))=(4.74, 0.35, 26.56)$ $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}^*)=(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}^*), \hat{\sigma}_3(\mathbf{x}^*))=(0.07, 0.04, 2.11)$ $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*)=(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*))$ $=(2.48, 1.87, 1.24)$	All y_i 's were satisfactory (Successful Stop)

Satisfaction Threshold: $Cpm \geq 1$
 $w_1, w_2,$ and w_3 were initialized as 1 in Step 1.

Table 4. A Sensitivity Study for $w_3=15, 30, 50$

w_1	w_2	w_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$\hat{\mu}_1^*$	$\hat{\mu}_2^*$	$\hat{\mu}_3^*$	$\hat{\sigma}_1^*$	$\hat{\sigma}_2^*$	$\hat{\sigma}_3^*$	\widehat{Cpm}_1^*	\widehat{Cpm}_2^*	\widehat{Cpm}_3^*
0.01	1	15	-0.278	-0.034	-0.871	4.74	0.35	26.56	0.07	0.04	2.11	2.48	1.87	1.24
0.01	1	30	-0.303	-0.039	-0.899	4.72	0.34	26.50	0.08	0.05	2.00	2.33	1.77	1.24
0.01	1	50	-0.365	-0.037	-0.923	4.67	0.33	26.49	0.08	0.05	1.94	1.96	1.57	1.25

5. 토 의

5.1 IPCA와 기존 공정능력기반법 간의 비교

본 절에서는 IPCA와 기존 공정능력기반법을 서로 비교해 보고자 한다. 두 방법의 차이를 쉽게 비교하기 위하여 각각의 방법으로 4장 예제를 푸는 과정을 상세히 설명하고자 한다. 기존의 공정능력기반법으로 예제를 푼다면, 공정능력지수 간의 가중치 w_i 를 미리 정하고 식 (11)의 최적화 모형을 단 한 번 풀게 된다. 현재 의사결정자(저자)에게는 w_i 에 대한 사전 정보가 없으므로 동일한 값, 즉 $w_1=w_2=w_3=1$ 로 정하는 것이 가장 합리적이다. 이러한 w_i 값을 가지고 최적화 모형을 구성하여 풀면 그 결과는 4.2.2절에 나와 있는 것과 동일하게 된다. 즉, $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*) = (\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*)) = (512000.00, 2.15, 0.69)$ 로 도출된다. 이는 $\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*)$ 과 $\widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*)$ 는 공정능력이 매우 우수하나 $\widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*)$ 는 부적합한 상태에 해당된다. 기존의 방법에서는 최적화 결과 평가 및 w_i 의 조정을 허용하지 않으므로 이를 최종 결과로 받아들여야 한다. IPCA의 경우에는 4장의 예제풀이 과정에서 볼 수 있듯이, 최적화 결과 평가 및 w_i 조정을 통하여 의사결정자가 수용할 수 있는 절충해가 도출된다. 이와 같이 반응변수 간의 트레이드오프를 파악하여야만 도출할 수 있는 정보인 w_i 값이 사전에 주어지지 않다면, 대화식 절차를 통해 문제를 풀어가면서 트레이드오프를 파악하고 이를 통하여 적절한 w_i 값을 찾아가는 것이 자연스러운 접근법이다. IPCA는 사전 정보가 없는 상태에서 취할 수 있는 가장 적절한 방법으로 볼 수 있다.

참고로, 예제풀이 과정에서 본 저자가 의사결정자의 역할을 하였기 때문에 w_i 에 대한 사전 정보가 없었다. 만약 실무 전문가가 의사결정자였다면, w_i 에 대한 사전 정보를 보유하였을 수 있고 기존 공정능력기반법으로도 합리적인 수준의 절충해가 도출될 수 있다. 다만, 실무 전문가라고 하더라도 식 (11)과 같이 복잡한 수식으로 구성된 최적화 모형에서 여러 반응변수(혹은 Cpm)의 값이 원하는 방향으로 절충되도록 하는 w_i 를 구체적인 숫자 단위로 사전에 알아내기는 매우 어렵다. 이러한 경우에도 IPCA가 좋은 대안이 될 수 있다.

5.2 대안 모형의 도입가능성 검토

본 절에서는 식 (11)의 최적화 모형의 대안에 대하여 살펴보고자 한다. 현재 최적화 모형은 공정능력지수 간의 가중치 w_i 를 의사결정자가 자신의 선호도에 따라 결정·조정하여 외부에서 모형에 투입하는 구조로 되어 있다. 여기서 현재 모형의 대안으로, 가중치 w_i 도 결정변수(Decision Variables)에 포함시키는 경우(식 (22))를 고려해 보고자 한다. 이 경우 최적화 모형은 공정능력지수의 가중합 $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ 이 최대가 되도록 하는 입력변수와 가중치의 최적값 \mathbf{x}^* 와 \mathbf{w}^* 를 도출하게 된다.

$$\begin{aligned} & \underset{\{\mathbf{x}, \mathbf{w}_i\}}{\text{Maximize}} && \widehat{Cpm}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ & \text{s.t.} && w_i \geq 0, \text{ for all } i, \\ & && \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \tag{22}$$

식 (22)의 대안 모형의 원리를 깊이 있게 이해하기 위하여 4장 예제를 대안 모형으로 풀어 보았다. 참고로, 식 (22)에서 w_i 의 제약식에 상한(Upper Bound)이 없으면 목적식의 값이 무한대로 커지게 되어 해가 존재할 수 없으므로(Infeasible), 상한선을 15로 정하였다($0 \leq w_i \leq 15$). 최적화 결과,

$\mathbf{x}^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(0.011, 0.022, -0.047)$, $\mathbf{w}^*=(w_1^*, w_2^*, w_3^*)=(15.000, 15.000, 15.000)$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)=(\hat{\mu}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*), \hat{\mu}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*), \hat{\mu}_3(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*))=(4.95, 0.46, 28.23)$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)=(\hat{\sigma}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*), \hat{\sigma}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*), \hat{\sigma}_3(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*))=(0.06, 0.02, 5.85)$, $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)=(\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*), \widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*), \widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*))=(8.51, 0.76, 0.82)$, 그리고 목적식의 값은 151.39로 도출되었다. 이는 $\widehat{Cpm}_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)$ 은 공정능력이 매우 우수하나 $\widehat{Cpm}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)$ 와 $\widehat{Cpm}_3(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}^*)$ 는 부적합한 상태에 해당된다.

대안 모형은 \mathbf{w}^* 의 정확한 값을 찾기 위한 완화-긴축의 반복과정 없이 한 번에 최적해 \mathbf{x}^* 와 \mathbf{w}^* 를 찾을 수 있다. 그러나 최적화 결과로 나온 \mathbf{w}^* 는 반응변수 간의 트레이드오프를 고려해서 의사결정자가 정한 값이 아니고 $\widehat{Cpm}(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ 을 최대화하는 과정에서 모형에 의해 자동으로 결정된 값이다. 제안된 IPCA는 개별 공정능력지수의 바람직한 수준을 달성하는 절충해를 찾는 것이 궁극적인 목적이므로 식 (11)의 최적화 모형이 그 목적에 부합한다고 볼 수 있다.

5.3 긴축·완화량 설정에 대한 가이드라인

제안된 방법의 4단계에서는 가중치 w_i 를 긴축하거나 완화하여 절충해의 만족도를 높여 나간다. 여기서 특정 반응변수의 w_i 를 긴축·완화하기로 정하였다면, ‘어느 만큼’ 긴축·완화해야 하는지, 즉, ‘긴축·완화량(Amount)’을 정하는 것이 중요한 문제로 대두된다. 특히 반응변수 간의 측정단위 차이 또는 물리적 특성으로 인하여 상대적인 스케일(변화 범위) 간에 차이가 클 수 있다. 이 경우 긴축·완화량을 정확하게 결정하는 것이 쉽지 않다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 w_i 의 긴축·완화량에 따른 사전영향도 또는 민감도 분석을 실시하는 것이 도움이 된다. 사전영향도 분석은 w_i 의 긴축·완화량을 서서히 늘려가면서 반응변수(또는 공정능력지수)의 변화를 미리 살펴보는 것으로, w_i 값과 반응변수(또는 공정능력지수) 간의 관계를 파악할 수 있어 정확한 긴축·완화량을 결정할 수 있다. 실제 4장 예제를 푸는 과정에서 라운드별로 w_i 를 조정할 때 사전영향도 분석을 실시하여 긴축·완화량을 결정하였다.

6. 결 론

본 논문에서는 다중반응표면 최적화를 위한 주요 방법론 중 하나인 공정능력기반법에 대하여 의사결정자의 선호도를 정확하게 반영할 수 있도록 대화식 절차를 적용한 대화식 공정능력기반법, 즉 IPCA를 제안하였다. 제안된 IPCA는 먼저 개별 반응변수에 대하여 공정능력지수 추정치를 도출한 후, 이들이 가중합을 최대화한다. 그 다음 최적화 결과를 의사결정자가 평가하여 불만족한 경우 공정능력지수 간의 가중치를 조정하여 최적화를 다시 진행한다. 이러한 과정은 만족스러운 해가 도출될 때까지 또는 더 이상의 가중치 조정을 할 수 없을 때까지 반복된다. 가중치 조정은 만족스러운 반응변수의 가중치 값을 낮추는 완화와 만족스럽지 않은 반응변수의 가중치 값을 높이는 긴축 등의 2가지 방식으로 진행된다.

제안된 IPCA의 장점으로 기존의 공정능력기반법이 가지는 단점, 즉 의사결정자가 선호도 정보를 정확히 도출하고 이를 적절히 반영한 절충해를 도출하지 못하는 문제를 개선하였다는 점을 들 수 있다. IPCA는 대화식 절차를 통하여

의사결정자가 반응변수 간의 트레이드오프를 파악한 후 자신의 선호도 정보, 즉 가중치를 수정(긴축 또는 완화)하는 과정을 반복함으로써, 의사결정자의 선호도 정보를 정확히 반영한 (만족스러운) 절충해를 도출할 수 있다.

또 다른 장점으로는 공정능력지수를 통해 의사결정자의 반응변수에 대한 만족 여부 판단을 편리하게 지원하여 준다는 점이다. 공정능력지수는 앞서 언급한 바와 같이 공정(반응변수)의 능력(성능수준)을 수치화하여 보여줌으로써 의사결정자는 반응변수의 성능수준에 대한 판단을 보다 객관적이고 편리하게 내릴 수 있다. 공정능력지수 값은 일반적으로 받아들여지는 가이드라인이 있어(2.1절 참조) 이를 토대로 성능수준을 판단하기가 쉽다. 제안된 IPCA는 대화식 절차에서 최적해 결과를 평가할 때 공정능력지수(C_{pm})를 활용함으로써 의사결정자가 객관적이고 쉽게 만족 여부를 판단할 수 있다.

다만, 만족 여부 판단 후 가중치 수정(긴축 또는 완화) 시 의사결정자가 긴축·완화량을 정하는 것은 쉽지 않다. 이 경우 긴축·완화량에 따른 반응변수(또는 공정능력지수)의 변화를 미리 살펴보는 사전영향도 분석을 실시하는 것이 도움이 된다.

REFERENCES

- Ames, A., Mattucci, N., McDonald, S., Szonyi, G., and Hawkins, D. 1997. "Quality Loss Function for Optimization Across Multiple Response Surfaces." *Journal of Quality Technology* 29:339-346.
- Ardakani, M. K., and Wulff, S. S. 2013. "An Overview of Optimization Formulations for Multiresponse Surface Problems." *Quality and Reliability Engineering International* 29(1):3-16.
- Barton, R. S., and Tsui, K. L. 1991. "Multivariate Yield Maximization Using CAD/CAE Models: Efficient Approximations Based on Mean and Variance." *Design Theory and Methodology (ASME)* 31:31-35.
- Biles, W. E. 1975. "A Response Surface Methods for Experimental Optimization of Multi-Response Processes." *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Deployment* 14:152-158.
- Chan, L. K., Cheng, S. W., and Spiring, F. A. 1988. "A New Measure of Process Capability Cpm." *Journal of Quality Technology* 20(3):162-175.
- Chiao, C., and Hamada, M. 2001. "Analyzing Experiments with Correlated Multiple Responses." *Journal of Quality Technology* 33:451-465.
- Ch'ng, C. K., Quah, S. H., and Low, H. C. 2005. "Index Cpm* in Multiple Response Optimization." *Quality Engineering* 17:165-171.
- Cho, M., and Lim, T. 2002. "The Relation between the Process Capability Index and the Quality Assurance Level Considering Various Conditions." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 30(2):130-151.
- Del Castillo, E. 1996. "Multiresponse Process Optimization via Constrained Confidence Regions." *Journal of Quality Technology* 28:61-70.
- Del Castillo, E., Montgomery, D. C., and McCarville, D. R. 1996. "Modified Desirability Functions for Multiple Response Optimization." *Journal of Quality Technology* 28:337-345.
- Derringer, G. 1994. "A Balancing Act: Optimizing a Product's Properties." *Quality Progress* 51-57.
- Derringer, G. and Suich, R. 1980. "Simultaneous Optimization of Several Response Variables." *Journal of Quality Technology* 12:214-219.
- Harrington, E., Jr. 1965. "The Desirability Function." *Industrial Quality Control* 21:494-498.
- Hsiang, T. C., and Taguchi, G. 1985. A Tutorial on Quality Control and Assurance — the Taguchi methods. In: ASA Annual Meeting, Las Vegas, Nevada, USA.
- Hwang, C., Masud, A. S. M., Paidy., S. R., and Yoon, K. 1979. *Multiple Objective Decision Making. Methods and Applications (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems)*. Berlin: Springer-Verlag.
- Jauregi, P., Gilmour, S., and Varley, J., 1997. "Characterisation of Colloidal Gas Aphrons for Subsequent Use for

- Protein Recovery.” *Chemical Engineering Journal* 65:1-11.
- Jeong, I. 2011. “Multiresponse Optimization: A Literature Review and Research Opportunities.” *Journal of the Korean Society for Quality Management* 39(3):377-390.
- Juran, J. M. 1974. *Quality Control Handbook* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
- Kane, V. E. 1986. “Process Capability Indices.” *Journal of Quality Technology* 18(1):41-52.
- Khuri, A. I. 1996. “Multiresponse Surface Methodology.” *Handbook of Statistics: Design and Analysis of Experiment* (Vol. 13) (eds. A. Ghosh and C. R. Rao) 377-406.
- Khuri, A. I., and Conlon, M. 1981. “Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions.” *Technometrics* 23:363-375.
- Kim, K., and Lin, D. 2000. “Simultaneous Optimization of Mechanical Properties of Steel by Maximizing Exponential Desirability Functions.” *Journal of Royal Statistical Society-Series C* 49:311- 325.
- Kim, K., and Lin, D. 2006. “Optimization of Multiple Responses Considering Both Location and Dispersion Effects.” *European Journal of Operational Research* 169:133-145.
- Ko, Y., Kim, K., and Jun, C. 2005. “A New Loss Function- Based Method for Multiresponse Optimization.” *Journal of Quality Technology* 37:50-59.
- Miró-Quesada, G., Del Castillo, E., and Peterson, J. J. 2004. “A Bayesian Approach for Multiple Response Surface Optimization in the Presence of Noise Variables.” *Journal of Applied Statistics* 31:251-270.
- Myers, R. H. 1999. “Response Surface Methodology - Current Status and Future Directions.” *Journal of Quality Technology* 31(1):30-44.
- Myers, R. H., and Carter, W. H. 1973. “Response Surface Techniques for Dual Response Systems.” *Technometrics* 15:301-317.
- Myers, R. H., Khuri, A., and Carter, W. H., Jr. 1989. “Response Surface Methodology: 1966-1988.” *Technometrics* 31(2):137-157.
- Myers, R. H., Montgomery, D. C., Vining, G. G., Borror, C. M., and Kowalski, S. M. 2004. “Response Surface Methodology: A Retrospective and Literature Survey.” *Journal of Quality Technology* 36(1):53-77.
- Park, Y. T. 2014. *Quality Management*. Seoul: Korean Standards Association Media.
- Peterson, J. J. 2004. “A Posterior Predictive Approach to Multiple Response Surface Optimization.” *Journal of Quality Technology* 36:139-153.
- Pignatiello, J. 1993. “Strategies for Robust Multiresponse Quality Engineering.” *IIE Transactions* 25:5-15.
- Plante, R. D. 1999. “Multicriteria Models for the Allocation of Design Parameter Targets.” *European Journal of Operational Research* 115:98-112.
- Steuer, R. E. 1986. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. New York: John Wiley & Sons.
- Sullivan, L. P. 1984. “Targeting Variability — A New Approach to Quality.” *Quality Progress* 17(7):15-21.
- Sullivan, L. P. 1985. “Letters.” *Quality Progress* 18(4):7-8.
- Tsui, K. L. 1999. “Robust Design Optimization for Multiple Characteristic Problems.” *International Journal of Production Research* 37:433-445.
- Vining, G. 1998. “A Compromise Approach to Multiresponse Optimization.” *Journal of Quality Technology* 30:309-313.